## Лекція 1

Поняття і методи дискретної математики застосовуються при викладанні фундаментальних університетських курсів для майбутніх математиків і фахівців з прикладної математики, є інструментом подачі та обробки інформації. Саме завдяки потребам комп'ютерної галузі дискретна математика інтенсивно розвивається.

# 1 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

## 1.1 Поняття множини та підмножини

Теорію множин створив Г. Кантор у XIX столітті.

Поняття множини є основним (або неозначуваним). Під множиною розуміють таку сукупність об'єктів, що про кожний об'єкт можна однозначно сказати належить він множині чи ні. У цьому випадку говорять, що множина задана коректно.

Множини позначають великими буквами алфавіту, наприклад, латинського: $A, B, C, \ldots$, а елементи множини – малими буквами: $a, b, c, \ldots$. Запис $a \in A$ означає, що елемент $a$ належить множині $A$, а запис $a \notin A$ – що не належить.

Усі множини діляться на скінченні та нескінченні, впорядковані та невпорядковані. Будемо користуватись двома основними способами задання множини:

1) перерахуванням елементів;

2) заданням однієї або кількох характеристичних властивостей: $A = \{x : P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)\}$ або $A = \{x \mid P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)\}$.

**Приклади.**

1) Нехай $A$ – множина перших десяти натуральних чисел (**задана коректно**). Перелічимо всі елементи цієї множини: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Характеристичною властивістю елементів цієї множини є те, що всі вони не більші за 10, тому її можна задати й другим способом: $A = \{x \in N | \quad x \le 10\}$ або $\mathrm{A} = \{x | \quad x \in \mathrm{N}, x \le 10\}$. Ця множина скінченна.

2) Нехай відомо, що $B$ - це сукупність десяти натуральних чисел. Очевидно, ми не зможемо з'ясувати, чи належить $B$ будь-яке вибране натуральне число ($B$ **задана некоректно**).

3) Множина $C$ складається із усіх непарних натуральних чисел, які без залишку діляться на 2 (**задана коректно**). Але у цій множині немає жодного елемента. Цей факт записують у такий спосіб: $C = \varnothing$.

Некоректність задання множини пов'язана із протиріччями, які виникають при перевірці елементів на належність до множини. З історії математики відомі логічні парадокси (про сільського перукаря, про множину всіх підмножин, що не є елементами самих себе, …), виникнення яких пов'язане саме з некоректністю задання множини.

**Означення.** Дві невпорядковані *множини* $A$ та $B$ називаються *рівними*, якщо вони складаються з однакових елементів. Пишуть $A = B$.

**Приклади.**

1) Множини $A' = \{1,3,5,7,9,2,4,6,8,10\}$ й $A'' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ рівні;

2) Множини $\mathrm{A}' = \{1,3,5,7,9,2,4,6,10\}$ й $A'' = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ не рівні;

2) $A' = (1,3,5,7,9,2,4,6,8,10)$ і $A'' = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)$ – різні впорядковані множини (тут вважаємо, що порядок встановлюється за допомогою знака <, більш детально про впорядкованість мова буде йти в темі «Бінарні відношення»).

**Означення.** Множина $A$ називається *підмножиною* множини $B$, якщо для кожного $a \in A$ виконується $a \in B$. Позначається $A \subseteq B$. Якщо $A \subseteq B$ й $A \ne B$, то $A$ називається *власною підмножиною* множини $B$. Позначається $A \subset B$.

**Приклад.** Нехай $A=\{1,2,4\}, B=\{1,4,2\}, C=\{1,2\}$. Тут $A=B$, можна також написати $A\subseteq B$. Для множини $C$ маємо $C\subset A$ або $C\subset B$.

Для будь-якої множини $A$ прийнято вважати, що $\varnothing\subseteq A$.

**Теорема 1.1** Мають місце такі властивості:

1) $A\subseteq A$,

2) якщо $A\subseteq B$ та $B\subseteq C$, то $A\subseteq C$,

3) $A=B$ тоді і тільки тоді, коли $A\subseteq B$ і $B\subseteq A$.

**Зауваження.** Потрібно розрізняти знаки $\in$ (належить) і $\subseteq$ (підмножина). Наприклад, твердження $1\in\{1,2,3\}, \{1\}\in\{\{1\}, 2, \{3\}\}$, $\{\{1\}\}\subset\{\{1\},2,\{3\}\}$ є вірними, а твердження $1\in\{\{1\},\{2\}\}$ невірне.

## 1.2 Операції над множинами. Алгебра множин

Для даної задачі множина $U$ називається *універсальною*, якщо вона містить усі елементи, що зустрічаються в цій задачі.

**Означення.** Множина $A\bigcup B=\{x\,|\,x\in A \;\; або \;\; x\in B\}$ називається *об'єднанням множин* $A$ та $B$.

**Означення.** Множина $A\bigcap B=\{x\,|\,x\in A \quad і \quad x\in B\}$ називається *перетином множин* $A$ та $B$.

**Означення.** *Різницею множин* $A$ та $B$ називається множина $A\backslash B=\{x\,|\,x\in A \quad i \quad x\notin B\}$. Множина $\overline{A}=U\setminus A$ називається *доповненням множини* $A$ до універсальної.

**Зауваження.** З останнього означення випливає, що коли $a\notin A$, то $a\in\overline{\mathrm{A}}$. Тому за означенням перетину множин для різниці множин отримаємо рівність

$$A\backslash B=A\bigcap\overline{B}\,.$$

**Означення.** *Симетричною різницею* множин $A$ та $B$ називається множина $A\Delta B$, що складається з елементів, які належать тільки одній із множин, тобто $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ або

$$A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Так як всі введені операції виражаються через три операції - доповнення, перетин, об'єднання, то будемо називати їх основними операціями. Саме в такій послідовності слід виконувати основні операції. При необхідності змінити цей порядок користуються дужками.

**Означення.** *Булеаном множини* $A$ називається множина, що складається з усіх підмножин множини $A$. Булеан множини $A$ позначають символом $\beta(A)$ або $P(A)$.

**Приклад.** Для множини $A = \{a, b, c\}$ булеаном є множина $\beta(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, A\}$. $\{a, b\} \in \beta(\mathrm{A})$, так як $\{a, b\} \subseteq A$

**Означення.** *Алгеброю множин* називається булеан універсальної множини з уведеними на ньому операціями доповнення множини, перетин множин, об’єднання множин.

Найпростішим **прикладом** алгебри множин є двоелементний булеан $\{\varnothing, J\}$ одноелементної множини $J = \{a\}$.

Операціям алгебри множин притаманні цілий ряд властивостей, які називають законами алгебри множин.

## Основні закони операцій над множинами

**1.** закони комутативності:

$A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap A$.

2. закони асоціативності:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

**3.** закони дистрибутивності:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**4.** закон інволюції:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

5. закони де Моргана:

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B},$$

$$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}.$$

**6.** закони ідемпотентності:

$$A \bigcup A = A,$$

$$A \bigcap A = A.$$

**7.** закони елімінації:

$$A \bigcap (A \bigcup B) = A,$$

$$A \bigcup (A \bigcap B) = A.$$

8. закони протиріччя та виключеного третього:

$$A \bigcap \overline{A} = \varnothing,$$

$$A \bigcup \overline{A} = U.$$

9. властивості порожньої та універсальної множини:

$$A \bigcup \varnothing = A,$$
$$A \bigcup U = U,$$

$$A \bigcap \varnothing = \varnothing,$$
$$A \bigcap U = A.$$

Закони алгебри множин доводяться з використанням властивості 3) з теореми 1.1 (іноді це називають аналітичним способом доведення). В деяких випадках достатньо навести ілюстративне доведення за допомогою діаграм Венна.

За допомогою законів алгебри множин операції перетину й об'єднання множин можна поширити на будь-яке скінченне число множин:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i.$$

## Представлення множини у ЕОМ

## Представлення множини машинним словом (двійковим кодом або бітовою шкалою)

Нехай універсальна множина скінченна й число $n$ її елементів не перевищує розрядності ЕОМ. Занумеруємо елементи універсума:

$U = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$

Підмножина $A$ універсума представляється $n$-елементним рядком (двійковим кодом C($A$)), в якому на і-тому місці стоїть 1, якщо елемент $u_i$ належить підмножині $A$. В противному випадку (якщо елемент $u_i$ не належить підмножині $A$) на на і-тому місці стоїть 0.

**Приклад.** Нехай $U = (1,3,5,7,9,2,4,6,8,10)$ універсальна множина. Розглянемо її підмножини $A = \{2,4,7\}$ і $B = \{1,3,5\}$. Двійкові коди цих підмножин мають відповідно вигляд

$C(A) = (0,0,0,1,0,1,1,0,0,0)$,

$C(B) = (1,1,1,0,0,0,0,0,0,0)$.

Код перетину множин $A$ та $B$ є порозрядний **логічний добуток** кодів множин $A$ та $B$. Код об’єднання множин $A$ та $B$ є порозрядна **логічна сума** кодів множин $A$ та $B$. Код доповнення множини $A$ до універсума є інверсією кода множини $A$.

У більшості ЕОМ для цих операцій є відповідні команди. В такий спосіб операції виконуються ефективно у випадку «невеликих множин».

## Генерування булеану універсальної множини у лексикографічному порядку

Нехай $U = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ - універсальна множина. Розглянемо бінарні коди всіх її підмножин. Порожня множина матиме код $C(\varnothing)=(0,0,0,\dots,0)$, а код універсуму як підмножини має код $C(U)=(1,1,1,\dots,1)$, коди власних підмножин складаються з певної кількості нулів і одиниць. Якщо розглядати коди підмножин як двійкові числа, то отримаємо всі цілі числа від 0 до $2^n-1$, тобто $2^n$ чисел. Якщо їх розмістити в порядку зростання, то отримаємо послідовність бінарних кодів, яку називають лексикографічним упорядкуванням булеана заданої множини. ЕОМ генерує таку послідовність за допомогою операції додавання 1 до двійкового числа. Наприклад, для 3-елементної множини $A=\{a,b,c\}$ результат генерування булеану виглядає наступним чином:

000

001

010

011

100

101

110

111

Недостаток этого алгоритма состоит в том, что порядок генерации подмножеств никак не связан с их составом. Например, вслед за подмножеством с кодом 0111 будет перечислено подмножество с кодом 1000.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

### Приклади розв’язування задач

**Задача 1**. Задати множину $P$ дійсних розв'язків рівняння $x^2-3x+2=0$:

а) перерахуванням елементів;

б) за допомогою характеристичної властивості.

**Розв'язання**. Дане квадратне рівняння має два корені $x_1=1$ й $x_2=2$. Тому а) $P=\{1,2\}$, б) $P=\{x\in R \mid x^2-3x+2=0\}$.

**Задача 2.** Знайти потужність множини $P$ (кількість елементів в множині) розв'язків рівняння $2cos(x-1)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

**Розв'язання**. Звернемо увагу на те, що права частина рівняння $2\cos(x-1)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ є сумою взаємно обернених додатних чисел, тому не менша 2 за властивістю $\forall a>0\ a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, а ліва частина цього рівняння приймає значення з відрізка $[-2,2]$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі двох рівнянь $\begin{cases} 2cos(x-1)=2, \\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=2. \end{cases}$ Оскільки $x^2+\dfrac{1}{x^2}=2 \Leftrightarrow x^2=1$ й із двох розв'язків останнього рівняння тільки $x=1$ задовольняє першому рівнянню системи, то, $P=\{1\}$, а значить її потужність дорівнює 1.

**Задача 3.** Перелічити елементи множин:

1) $P=\{x\in R \mid x=3^n-1, x\leq 50, n\in N\}$, 2) $P=\{x\in Z \mid -3\leq x+5<6\}$.

**Відповідь.** 1) $P=\{2,8,26\}$, 2) $P=\{-8,-7,-6-5,-4,-3,-2,-1,0\}$.

**Задача 4.** Чи вірно, що $A\subseteq B$, якщо $A=\{x\in Z: x^2=9\}$, $B=\{x\in Z: (x-3)(x+3)\geq 0\}$?

**Розв'язання.** Очевидно, що $A = \{-3,3\}$. Розв’язавши нерівність $(x-3)(x+3) \geq 0$ на множині цілих чисел, отримаємо $\mathrm{B} = \{\ldots,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,\ldots\}$. Отже, $A \subseteq B$.

**Задача 5**. Навести приклад таких множин $A, B, C$, для яких виконуються співвідношення $A \in B, B \in C, A \in C$.

**Розв'язання.** $A = \{1\}$, $B = \{\{1\},2\}$, $C = \{\{\{1\},2\},3,\{1\},2\}$.

**Задача 6.** Побудувати булеан множини:

а) $C = \{x \in N : x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0\}$, б) $A = \{(x,y) : x \in N, y \in N, x + y = 3\}$.

**Розв'язання.** а) Розкладемо ліву частину рівняння $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ на множники способом групування: $(x^3 - x) + (3x - 3) = 0$, $x(x^2 - 1) + 3(x - 1) = 0$, $x(x-1)(x+1) + 3(x-1) = 0$, $(x-1)(x^2 + x + 3) = 0$. Воно має єдиний натуральний корінь $x = 1$, отже, $C = \{1\}$. Отже, булеан цієї множини двоелементний: $\beta(C) = \{\varnothing, \{1\}\}$; б) Зверніть увагу, що елементами множини $A$ є впорядковані пари натуральних чисел.

**Задача 7.** Перетворити, використовуючи закони алгебри множин $\overline{(\overline{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B}$.

**Розв'язання.**

$$\overline{(\overline{A} \cup B \cup C)} \cap (A \cap (B \cup \overline{C})) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap B \cup A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} =$$

$$= (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap B \cap \overline{B} \cup A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}.$$

**Задача 8.** Дано множини $A$ та $B$ такі, що $A \cap B = \varnothing$. Знайти $A \setminus B$ та $B \setminus A$.

**Розв'язання.** Згідно з означенням різниці і з урахуванням умови $A \cap B = \varnothing$ отримаємо $A \setminus B = A$ та $B \setminus A = B$.

**Завдання для самостійного розв’язання**

1. Які з чисел 3,4,5 належать множині $A=\left\{x \in N : log_5\left(x^2-5\right)>1\right\}$?

2.Чи є множина $A=\{(1;1),(1;2)\}$ підмножиною множини $B=\left\{(x,y): x\in Z, y\in N, y<3, \dfrac{x-3}{y}\in Q\right\}$?

3. Навести приклад таких множин $A,B,C$, для яких виконуються співвідношення: 1) $A\in B, B\in C$; 2) $A\in B, A\subseteq C$; 3) $A\in B, B\notin C, A\subseteq C$.

4. Зобразити на числовій прямій елементи множини:

а) $\left\{x\in R : \exists y\in R \quad x=\dfrac{y+1}{y^2+1}\right\}$;

б) $\left\{a\in R : x\in R \quad 3x^2+2ax+a<0\right\}$;

в) $P=\left\{x\in Z : \dfrac{x+5}{3}\in(0,1)\right\}$.

5. Побудувати булеан множини:

а) $D=\left\{x\in Z : x^4-81=0\right\}$;

б) $B=\left\{(x,y): x\in Z, y\in Z, y\le 3, x^2-y<-1\right\}$.

6. Для довільної множини $X$ знайти $X\bigcup \overline{X}$, $X\bigcap \overline{X}$, $X\setminus \overline{X}$.

7. Множина $A$ складається з точок $M(x,y)$ площини, для яких $|x|\le 1$ і $|y|\le 1$, множина $B$ – з точок, для яких $x^2+y^2\le 1$, а множина $C$ – з точок, для яких $x>0{,}5$. Універсальна множина – множина всіх точок площини. Зобразити на координатній площині множину $A\cap B\cap \overline{C}$.

8. Нехай А – множина всіх прямокутних трикутників на площині, В – множина всіх рівносторонніх трикутників, а універсальна множина – множина всіх трикутників на площині. Визначити, які трикутники містяться в наступних множинах:

а) $A\cup B$, б) $A\cap B$, в) $\overline{A}\cap B$, г) $A\cap \overline{B}$, д) $\overline{A}\cup B$, е) $A\cup \overline{B}$.

9. Користуючись властивостями операцій над множинами, довести, що:

а) $A \cup (\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = A \cup B$;

б) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B = A \cup B$;

в) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup \overline{B} \cup A = \overline{B} \cup A$;

г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

10. Зі 100 студентів 28 вивчають англійську мову, 30 – німецьку, 42 – французьку, 8 – англійську та німецьку, 10 – англійську та французьку, 5 – німецьку та французьку й 3 студенти вивчають всі три мови. Скільки студентів не вивчають жодної мови; скільки вивчають тільки французьку мову?

11. Нехай $U$ - множина цілих чисел від 0 до 25,

А – множина чисел з $U$, кратних 4,

Б – множина чисел з $U$, не більших 4,

В – множина чисел з $U$, які є точними квадратами.

Записати коди підмножин А, Б, В.

Записати коди перетину множин А та Б.

Записати коди об’єднання множин Б та В.

Записати код доповнення до множини А.

12. Записати алгоритм і програму генерування булеана множини $n$-елементної множини у лексикографічному порядку.