

ЗМІСТ

ВСТУП	6
1. Поняття числових методів.	7
1.1 Наближені числа . Погрішності.	10
1.2 Граничне значення відносної погрішності.	11
1.3 Дії над наближеними числами.	12
1.4 Стійкість, коректність, збіжність.	13
2. Числові методи для інженерних розрахунків.	15
2.1 Класифікація поширених числових методів.	16
3. Практичне вивчення числових методів.	17
3.1 Метод найменших квадратів.	17
3.2 Нелінійні рівняння.	19
3.2.1 Метод половинного розподілу.	20
3.2.2 Метод виключення інтервалів.	21
3.2.3 Метод «золотого» перетину.	22
3.2.4 Метод хорд.	22
3.2.5 Метод дотичних (метод Ньютона).	24
3.2.6 Метод середньої крапки.	25
3.2.7 Простий метод ітерації.	25
3.3 Чисельне диференціювання.	26
3.3.1 Приватні похідні.	28
3.3.2 Рішення диференціальних рівнянь.	29
3.3.3 Метод Ейлера.	30
3.3.4 Метод Рунге-Кутта.	31
3.4 Числове інтегрування.	31
3.4.1 Метод прямокутників.	32
3.4.2 Метод трапецій.	33
4. Планування експерименту при ідентифікації об'єкту дослідження.	34
5. Лабораторний практикум	41

5.1 Завдання до робіт	41
5.2 Приклади виконання робіт	46
5.2.1 Метод найменших квадратів у Excel.	46
5.2.2 Метод найменших квадратів у Matlab.	47
5.2.3 Дослідження прямих методів вирішення нелінійних рівнянь. .57	
5.2.4 Дослідження методів вирішення диференціальних рівнянь. . . .61	
5.2.5 Дослідження методів числового інтегрування.	63
5.2.6 Интерполирование при помощи приближения Лагранжа и полиномов Ньютона	65
5.2.7 Повний факторний експеримент в Excel.	69
6. Домашні контрольні роботи	70
7. Тест на модульний контроль	78
ЛІТЕРАТУРА	81

ВСТУП

Успішний розвиток техніки можливий на основі аналізу досвіду існуючих розробок та досягнень, усесторонньої математичної обробці результатів наукових досліджень і практичних розробок у сфері управління технологічними об'єктами. Науковий досвід в нашій країні і взагалі світу має в своєму розпорядженні достатній арсенал методів математичного моделювання і обчислювального експерименту і завжди був, є і буде стратегічним резервом прискорення науково-технічного прогресу. Суть математичного моделювання полягає в заміні реального об'єкту відповідною математичною моделлю, що дозволяє проводити попереднє дослідження за допомогою програм та додатків на сучасній комп'ютерно-інтегрованій техніці (KIT).

Процес моделювання і оптимізації технологічних об'єктів будь-якої галузі лежить в основі всієї інженерної діяльності, оскільки функції фахівця полягають в тому, щоб проектувати нові, ефективніші, менш дорогі технічні системи, а з другого боку – розробити методи удосконалення та підвищення якості функціонування існуючих систем.

На практиці часто з багатьох рішень задачі необхідно вибрати оптимальне, наприклад:

1) З декількох варіантів перевезення сировини необхідно вибрати найшвидший, але такий, який враховує обмеження на допустимі витрати на поставки.

2) З можливих планів використання матеріалів необхідно вибрати такий, який дозволяє виконати замовлення при якнайменшій кількості відходів.

У безлічі випадків задача пошуку оптимального рішення може бути вирішена точними і наближеними методами: аналітичними або числовими.

1. Поняття числових методів.

Іноді на практиці знайти точне рішення математичної задачі аналітичними алгебраїчними розрахунками не вдається. Це відбувається головним чином не тому, що дослідник не може цього зробити. Бува так, що саме рішення не виражається в звичних для нас елементарних або інших відомих функціях. Тому числові методи і надбали таке вагоме значення, особливо у зв'язку з впровадженням математичного моделювання в різних галузях науки і техніки із застосуванням високопродуктивної КІТ.

Під *числовими методами* маються на увазі методи вирішення задач, що зводяться до арифметичних і деяких логічних дій над числами, тобто до тих дій, які виконує ЕОМ. Залежно від складності задачі, заданої точності, теми застосування методу, тощо, може необхідно бути виконати від декількох десятків до багатьох мільйонів дій. І зараз навіть не виникне питання, скільки дій і за який час може виконати людина, застосовуючи калькулятор та таблиці елементарних функцій. Фахівець знає який метод доречно застосувати в конкретному випадку, обирає програму чи додаток, вносить вхідні дані, і отримує результат. Раніше питання швидкодійних ЕОМ було дуже гостре, тому що пам'ять пристроїв була обмеженою, тому для вирішення задачі розроблялися способи і можливості оптимально за часом та кількістю кроків отримати результат, який можна проаналізувати та перевірити на адекватність. Наприклад, задачі, пов'язані з добовим прогнозом погоди, повинні бути вирішені за декілька годин, а при управлінні технологічними процесами в реальному часі треба миттєво знаходити рішення за частки секунди.

Рішення, одержане числовим методом, є наближеним, тобто містить деяку погрішність. Джерелами погрішності наближеного рішення є:

- 1) невідповідність математичної задачі (математичної моделі) реальному явищу, що досліджується;

- 2) погрішність початкових даних (вхідних параметрів);
- 3) погрішність методу рішення;
- 4) погрішності округлення в арифметичних і інших діях над числами (яка зараз для сучасної КІТ не є суттєвою перепорою для отримання точного результату).

Погрішність в рішенні, обумовлена першими двома джерелами, називається неусувною. Ця погрішність може виникнути, навіть якщо рішення поставленої математичної задачі знайдене точно. Питання в тому, наскільки добре описує математична модель досліджуване явище, перевіряється шляхом порівняння результатів експериментів і типових приватних рішень при деяких значеннях вхідних параметрів.

Вплив погрішності початкових даних часто вдається оцінити елементарними засобами, наприклад, варіюючи початкові дані в межах їх погрішностей і фіксуючи результат. Якщо початкових даних багато, а їх погрішності носять випадковий характер, то на допомогу можуть прийти статистичні методи. В деяких випадках неусувну погрішність можна розглядати як погрішність функції, виникаючу за рахунок погрішності аргументів.

Числові методи в більшості випадків самі по собі є наближеними, тобто навіть за відсутності погрішностей у вхідних даних і при ідеальному виконанні арифметичних дій вони дають рішення початкової задачі з деякою погрішністю, званою погрішністю методу. Це відбувається тому, що числовим методом звичайно розв'язується деяка інша, простіша задача, що апроксимує (тобто наближає) початкову задачу. Наразі сучасні програми та математичні програмні додатки заздалегідь враховують таку можливість, а складність математичного розрахунку усуває вплив цього чинника знов ж завдяки потужностей сучасних КІТ.

Числовий метод залежить від одного або декількох параметрів, якими можна варіювати. Наприклад, таким параметром раніше слугувало число ітерацій при вирішенні систем рівнянь або число членів, що враховуються,

при підсумовуванні ряду, а також крок, за яким використовуються значення подінтегральної функції при наближеному обчисленні певного інтеграла. Погрішність методу або одержувана її оцінка звичайно залежить від відповідного параметра. Іноді вдавалося одержати оцінку погрішності, яку можливо знайти тільки через відомі величини.

За допомогою цієї оцінки можна визначали значення параметра, який задає метод, при яких погрішність методу лежить в необхідних межах. Частіше ж оцінка погрішності містить невідомі постійні множники, а параметр методу входить в неї у вигляді або статичної, або показової функції. За такою оцінкою аналізують швидкість убавання погрішності при зміні параметра методу. Швидкість убавання погрішності є важливою характеристикою методу, та в деяких програмних додатках її значення можна отримати разом з результатами розрахунку.

Питання округлення за результатом арифметичних дій раніше сприймалося як дуже важливий та технічно найскладніший чинник. Якщо дій виконувалося небагато, то погрішності округлення при ручних обчисленнях можна було врахувати в діях над наближеними числами. При рішенні задач на ЕОМ до 21 століття характерні були дві ситуації.

Якщо кількість виконуваних арифметичних дій невелика, то погрішності округлення не виявляються, оскільки в ЕОМ числа представляються з 10 і більш десятковими значущими цифрами, а остаточний результат рідко буває потрібен більш ніж з 5 десятковими значущими цифрами. Якщо задача складна (наприклад, коли вирішувалися рівняння з приватними похідними) і для її наближеного вирішення потрібно було, наприклад, 10^7 арифметичних дій, то в цій ситуації нереально було враховувати вплив погрішностей округлення в кожній дії. При такому обліку виходила дуже завищена оцінка погрішності.

Погрішності округлення поводяться достатньо випадково як по величині, так і по знаку. Тому є передумови для їх взаємної компенсації в залежності від місця в моделі розрахунку.

Для вирішення однієї і тієї ж задачі можуть застосовуватися різні методи. Раніше чутливість до погрешностей округлення істотно залежала від вибраного числового методу. Далі будуть приведені дослідження різницевого методів рішення крайових задач для диференціальних рівнянь і будуть виділені так звані стійкі методи, тому що там виникаючі погрешності на наступних ітераціях виправляються за розрахунком.

Числовий метод може вважатися вдало вибраним, якщо його погрешність у декілька разів менше неусувної погрешності, а погрешність, що виникає за рахунок округлень, називається обчислювальною погрешністю, принаймні у декілька разів менше погрешності методу. Цей фактор враховується в сучасних додатках математичних розрахунків. Якщо неусувна погрешність відсутня, то погрешність методу повинна бути декілька менше заданої точності рішення.

До числового методу, окрім вимоги досягнення заданої точності, пред'являється ряд інших вимог. Перевага віддається методу, який реалізується за допомогою меншого числа дій розробника, і є логічно простішим для аналізу результатів та способів застосування у системі управління технологічним процесом.

1.1 Погрешності.

Розрізняють два види погрешностей: абсолютна і відносна.

Абсолютна погрешність деякого числа рівна різниці між його істинним значенням і наближеному, одержаному в результаті вимірювання або обчислення.

Відносна погрешність – це відношення абсолютної погрешності до наближеного значення числа.

$$\Delta X = X - A$$

$$\delta X = \frac{\Delta X}{A}$$

де A – наближене значення числа;

X – точне значення.

Звичайно точного значення величини X не дано. Є лише наближене значення a . Потрібно знайти передбачувану погрішність, тобто Δa , що є верхньою оцінкою модуля абсолютної погрішності:

$$|\Delta X| \leq \Delta a.$$

Надалі звичайно Δa приймається як абсолютної погрішності наближеного числа a . В цьому випадку істинне значення X знаходиться в інтервалі $(a - \Delta a, a + \Delta a)$.

Для наближеного значення, одержаного в результаті округлення, абсолютна погрішність Δa приймається рівній половині одиниці останнього розряду числа. Наприклад: $a = 0,734$ - могло бути одержано округленням чисел 0,7341; 0,733548; 0,734232 і т.д. При цьому $|\Delta X| = 0,0005$.

$$\Delta a = 0,0005.$$

Приклади оцінки **граничної абсолютної погрішності** при деяких значеннях наближеної величини a :

a	51,7	-0,0031	16	16,00
Δa	0,05	0,00005	0,5	0,005

Як правило, округлення не виробляється і цифри, що виходять за розрядну сітку, відкидаються. Якщо це так, то погрішність обчислення в 2 рази більше в порівнянні з округленням.

1.2 Граничне значення відносної погрішності.

Граничне значення відносної погрішності – це відношення граничної абсолютної погрішності до абсолютної величини наближеного числа.

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|}; \delta(-2,3) = \frac{0,05}{|-2,3|} = 0,013 = 0,02.$$

Сама погрішність завжди округляється у велику сторону.

Якщо форма запису змінна, то не можна міняти число значущих сигналів, щоб знати, з якою точністю воно записане.

Значущими цифрами вважаються всі цифри даного числа, починаючи з першої ненульової цифри.

1,600E00; 0,160E-01; 2,038— значущі цифри.

1.3 Дії над наближеними числами.

Правила оцінки попередньої погрішності при виконанні операції над наближеними числами:

- 1) При складанні і відніманні їх абсолютні погрішності складаються. Відносна погрішність суми укладена між найбільшим і якнайменшим значенням відносної погрішності доданків. На практиці приймається найбільше значення.
- 2) При множенні і розподілі відносні погрішності складаються. При зведенні в ступінь наближеного числа його відносна погрішність множиться на показник ступеня.

Для випадку двох наближених чисел a і b :

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b;$$

$$\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b;$$

$$\delta(a - b) = \frac{\Delta a + \Delta b}{2};$$

$$\delta(a/b) = \delta a + \delta b;$$

$$\delta(a^k) = k \cdot \delta a.$$

Наприклад:

$$a = 2520;$$

$$b = 2518;$$

$$\Delta a = 0,5; \Delta b = 0,5;$$

$$\delta a = \frac{0,5}{2520} \approx 0,0001984 \approx 0,0002;$$

$$\delta b = \frac{0,5}{2518} \approx 0,0001985 \approx 0,0002;$$

$$\delta a = \delta b = 0,0002 = (0,02\%).$$

При малих погрішностях в початкових даних абсолютна погрішність невелика.

Знайдемо відносну погрішність різниці

$$\delta(a - b) = \frac{0,5 + 0,5}{2} 50\%.$$

При малих погрішностях в початкових даних – велика погрішність результату.

Висновок: при організації обчислювальних процесів слід уникати різниці близьких чисел. Проте, бажано, щоб погрішність у них була близька.

Джерела погрішностей:

- 1) Математична модель не враховує важливі риси.
- 2) Початкові дані – неусувні погрішності, оскільки вони не можуть бути усунені обчисленням. Тут необхідно, щоб всі дані були з однаковою погрішністю.
- 3) Чисельний метод.
- 4) Погрішності округлень, вони пов'язані з розрядністю сітки, тобто: скільки цифр машина може утримати. Не дивлячись на те, що при обчисленні великих задач виконуються мільярди операцій, це не означає механічне множення погрішностей, оскільки при окремих діях погрішності можуть компенсувати одна одну (при складанні чисел різних знаків).
- 5) Переклад чисел з однієї системи числень в іншу.

1.4 Стійкість, коректність, збіжність.

Стійкість: розглянемо погрішності початкових даних. Оскільки це неусувні погрішності, то потрібно мати хоча б уявлення про їх вплив на точність остаточних результатів. Хай в результаті рішення задачі по початковому значенню величини x знаходиться значення шуканої величини y . Якщо початкова величина x має абсолютну погрішність, то рішення має

погрішність Δu . Задача називається стійкою по початковому параметру, якщо рішення u безперервно від нього залежить, тобто малий приріст величини Δx приводить до малого приросту шуканої величини Δu . Малі погрішності в початковій величині приводять до малих погрішностей в результаті розрахунку.

Коректність: задача називається поставленою коректно, якщо для будь-яких значень початкових даних з деякого класу її рішення існує, єдине і стійке за початковими даними. Вирішувати некоректно поставлені задачі за допомогою чисельних методів, як правило, недоцільно, оскільки виниклі в розрахунках погрішності сильно зростатимуть в ході обчислень, а це, швидше за все, приведе до значного спотворення результатів. Проте, в даний час розвиваються методи рішення деяких некоректних задач. Це в основному так звані методи регуляризації. Вони ґрунтуються на заміні задачі на коректно поставлену задачу, яка містить параметр, при прагненні якого до нуля, рішення цієї задачі переходить в рішення початкової задачі.

Збіжність: означає близькість одержуваного чисельного результату до чисельного рішення.

Таким чином, для отримання рішення задачі з необхідною точністю її постановка повинна бути коректною, а використовуваний метод повинен володіти стійкістю і збіжністю.

2. Числові методи для інженерних розрахунків.

Складні обчислювальні задачі, що виникають при дослідженні фізичних і технічних проблем, можна розділити на ряд елементарних – таких як обчислення інтегралу, рішення диференційного рівняння, тощо. Багато елементарних задач є нескладними і добре вивченими. Для цих задач вже розроблені методи числового рішення, і частіше вже мають стандартні програми рішення їх на ЕОМ. Є і достатньо складні елементарні задачі; методи вирішення таких задач зараз інтенсивно розробляються.

Тому повна програма навчання числовим методам повинна складатися з ряду етапів. По-перше, це засвоєння клавійних обчислювальних машин і програмування на ЕОМ. По-друге, основи числових методів, що містять виклад класичних елементарних задач (в тому числі основні відомості о різницевих схемах). По-третє, курс теорії різницевих систем. Та по-четверте – ряд спеціальних курсів, які розглядають методи обчислювальної фізики: числове вирішення задач газодинаміка, аеродинаміки, переносу тепла, квантової фізики, тощо.

Для студентів спеціальності «Автоматизованого управління технологічними процесами» ці етапи розглядаються на наступним дисциплінах, присвячених вивченню числових методів на ЕОМ:

1 етап – «Вища математика», «Основи комп'ютерної техніки», «Сучасні методи програмування»;

2 етап – «Сучасні методи моделювання», «Числові методи»;

3 етап – «Математичне моделювання на ЕОМ»;

4 етап – «Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів», «Об'єктно-орієнтоване програмування», «Імітаційне моделювання тепло - і масообмінних процесів»

Тобто, курс, якому присвячений даних посібник, охоплює розгляд 2 етапу програми навчання числовим методам.

2.1 Класифікація поширених числових методів.

В залежності від призначення числових методів, вони розділяються на наступні різновиди:

1) Методи апроксимації. За допомогою цих методів дослідник має можливість отримати функціональну залежність здобутих практичних даних, у випадку, коли практичні дані не описані функціонально. Один з самих розповсюджених методів є Метод найменших квадратів, який дозволяє функціонально описати практичні дані будь-яким типом функції. Також існують методи апроксимації вузького призначення, як метод наближення Лагранжа, поліноми Чебишева, поліноми Ньютона, тощо.

2) Методи ітерації. Дозволяють знайти рішення рівняння, яке неможливо вирішити аналітичними способами, та знайти екстремум функції (методи оптимізації). Сутність методів полягає в послідовному виключенню інтервалів пошуку рішення. Методів ітерації велика кількість, вони розрізняються: за складністю заданої функції, за складністю вирішення, за рівня погрешності.

3) Методи диференціювання. За допомогою цих методів можливо вирішити складні диференціальні рівняння. Поширеними для вирішення рівнянь похідних n -го ступеню є метод Ейлера, Рунге-Кутта 2 та 4 порядку та інші.

4) Методи інтегрування. Дозволяють знайти визначені інтеграли, які неможливо вирішити аналітично (метод прямокутників, метод трапецій, метод Симпсона, тощо)

3. Практичне вивчення числових методів.

3.1 Метод найменших квадратів.

В основі метода є знаходження приблизної залежності, що означається за експериментальними даними та характеризується як емпірична формула.

Послідовність дій при визначенні емпіричної формули складається з двох етапів:

- 1) Визначення структури рівняння;
- 2) Визначення параметрів рівняння.

Структура рівняння визначається за допомогою приблизного закону розповсюдження експериментальних даних, для цього експериментальні точки наносяться на площину, та оцінюється приблизний вигляд усередненої кривої. По її зовнішньому вигляді обирається вигляд рівняння: поліном (лінійний, квадратичний, кубічний і др.), логарифмічний, показовий, ступеневий, тригонометричний та інші. При визначенні параметрів рівняння виходять з структури обраного рівняння.

Припустимо, що взаємозв'язок між вихідними і вхідними даними визначається як:

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_m)$$

де φ – відомий зв'язок, встановлений по вигляду відомих точок;

a – коефіцієнти рівняння.

При отриманні структури і параметрів рівняння шляхом підбору формул важливо забезпечити приблизну відповідність отриманого рівняння експериментальним даним, тобто необхідно досягти визначених значень невідповідності двох функцій:

$$\varepsilon_i = \varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i.$$

Одним з способів отримання мінімального значення ε – метод найменших квадратів, сутність якого полягає в мінімізації функції S , яка визначається за формулою

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [\varphi(x_i, a_1, a_2, \dots, a_m) - y_i]^2.$$

Враховуючи, що в наведеній формулі $a_1, a_2, \dots, a_m$ – невідомі величини, то мінімізація цього виразу досягається при порівнюванні приватних похідних цього виразу по кожному коефіцієнту з нулем:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Наведена система рівнянь служить для отримання значень невідомих коефіцієнтів.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів на прикладі поліному

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m.$$

Тоді суму квадратів відхилень емпіричної формули і експериментальних даних запишемо у вигляді:

$$S = \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i]^2.$$

У відповідності з методикою, продиференціюємо це рівняння по кожному з коефіцієнтів та дорівнюємо до нуля:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot x_i \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_mx_i^m - y_i) \cdot x_i^m \end{cases}$$

Дорівнюючи до нуля, отримаємо надалі спрощення:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n y_i x_i \\ \dots \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^m + a_1 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+2} + \dots + a_m \sum_{i=1}^n x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{cases}$$

Вирішуючи отриману систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, отримаємо вигляд поліному, який відповідає експериментальним даним.

На самотійне:

- метод наближення Лагранжа;
- метод поліномів Ньютона.

3.2 Нелінійні рівняння.

Рішення нелінійних рівнянь ділитися на два типи: прямі методи і ітераційні.

Прямі методи дозволяють записати коріння у вигляді деякого кінцевого співвідношення. Застосовується для деяких тригонометричних, логарифмічних, простих і інших рівнянь алгебри.

Для решти рівнянь використовуються ітераційні методи, тобто методи послідовних наближень, які складаються з двох етапів:

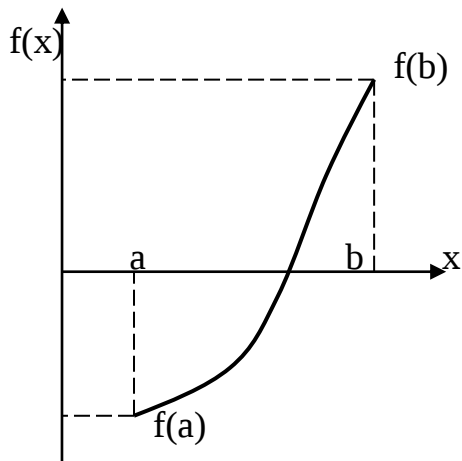
- 1) відшукування наближеного значення коріння або відрізка, що містить коріння;
- 2) уточнення наближеного значення до деякої заданої точності.

Початкове наближення може бути знайдене декількома способами: з фізичних міркувань, з рішення аналогічної задачі при інших початкових даних, за допомогою графічних методів.

Якщо такі початкові оцінки коріння провести не вдається, то знаходяться дві крапки a і b , в яких безперервна функція $f(x)$ з рішення рівняння $f(x)=0$ має різні знаки:

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Тоді на відрізку $[a;b]$ є хоча б одна крапка, в якій $f(x)=0$.



Початкового наближення x_0 можна прийняти як, наприклад, середину відрізка $[a;b]$:

$$x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

Надалі ітераційний процес полягає в послідовному уточненні початкового наближення x_0 , кожен такий крок називається *ітерацією*.

В результаті ітераційного процесу знаходиться послідовність наближених значень коріння: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$.

Якщо послідовність наближень із зростанням n наближається до істинного значення коріння, то це значить, що ітераційний процес сходиться.

3.2.1 Метод половинного розподілу.

Хай дане рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ безперервно на відрізку $[a;b]$ і $f(a) \cdot f(b) < 0$. Візьмемо як початкове наближення середину відрізка $[a;b]$.

Якщо $f(x_0) = 0$, то коріння знайдене.

Якщо $f(x_0) \neq 0$, то з двох інтервалів $[a; x_0]$ та $[x_0; b]$ вибираємо той, на кінцях якого функція $f(x)$ має різні знаки.

Вибраний інтервал знову ділиться навпіл, і проводяться ті ж дослідження, що і з інтервалом $[a; b]$.

Цей процес продовжується до тих пір, поки значення модуля функції $f(x)$ після n -ї ітерації не стане менше заданого малого позитивного числа ε :

$$|f(x_n)| < \varepsilon,$$

або якщо одержаний відрізок $[x_n, x_{n-1}] \leq \varepsilon$, або

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

3.2.2 Метод виключення інтервалів.

Метод пошуку, який дозволяє визначити оптимум функції однієї змінної шляхом зменшення інтервалу пошуку, називається методом виключення інтервалів. Всі методи одновимірної оптимізації засновані на припущенні, що досліджувана цільова функція допустимої області, принаймні, володіє властивістю унімодальності, оскільки для унімодальної функції $W(x)$ порівняння значень $W(t)$ в 2-х точках інтервалу пошуку дозволяє визначити, в якому із заданих 2 – ма вказаними точками підінтервалів точки екстремуму відсутні.

Правило виключення інтервалів

Хай $W(x)$ унімодална на відрізку $[a, b]$, а її мінімум досягнутий в точці x' . Розглянемо x_1 і x_2 розташовані усередині відрізка ab $a < x_1 < x_2 < b$.

Якщо $W(x_1) > W(x_2)$, то точка мінімуму $W(x)$ не лежить на інтервалі (a, x_1) , тобто $x' \in (x_1, b)$

Якщо $W(x_1) < W(x_2)$, точка мінімуму $W(x)$ не лежить на інтервалі (x_2, b) , $x' \in (a, x_2)$. Це правило дозволяє реалізувати процедуру пошуку шляхом послідовного виключення початкового обмеження інтервалу. Пошук завершується тоді, коли підінтервал, що залишився, зменшується до достатньо малих розмірів (необхідна точність).

Процес застосування методів пошуку на основі виключення інтервалів включає 2 етапи:

- 1) Етап встановлення меж інтервалу;
- 2) Етап зменшення інтервалу.

3.2.3 Метод «золотого» перетину.

Знайти $W(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Обчислюється коефіцієнт дроблення/«золотий перетин».

1) $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) $x_1 = a + (1-k)(b-a)$, $W(x_1)$.

3) $x_2 = a + k(b-a)$, $W(x_2)$.

4) а) $|x_2 - x_1| < \varepsilon$, то, $W(x)$;

б) $|x_2 - x_1| < \varepsilon \Rightarrow 5$;

5) а) $W(x_1) > W(x_2)$ то виключаємо $a = x_1$, $x_1 = x_2$,

$W(x_1) = W(x_2) \Rightarrow 3, 4$;

б) $W(x_1) < W(x_2)$ то виключаємо $b = x_2$, $x_2 = x_1$,

$W(x_2) = W(x_1) \Rightarrow 2, 4$;

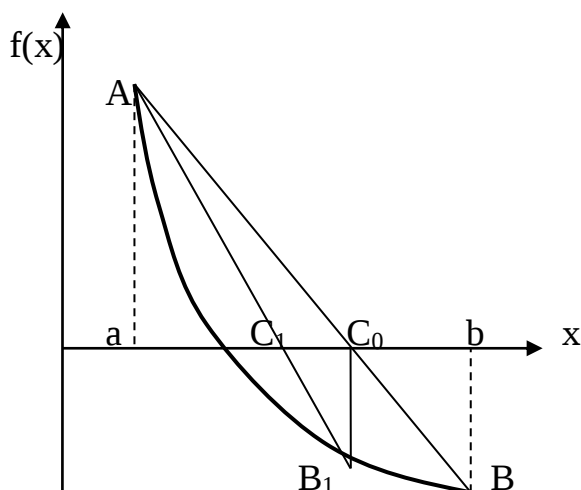
Таким чином, застосування методів виключення інтервалів накладає єдине обмеження на досліджувану функцію, тобто унімодалність. Отже, розглянуті вище методи можна використовувати для аналізу як безперервних, так і дискретних функцій.

Логічна структура пошуку заснована на простому порівнянні значень функцій в двох пробних крапках.

3.2.4 Метод хорд.

Хай знайдений відрізок $[a;b]$, на якому $f(x)$ міняє знак.

Для визначеності приймемо $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.



У цьому методі процес ітерації полягає у тому, що як наближення до коріння рівняння $f(x)=0$ приймається значення $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ точок перетину хорди з віссю Ox .

На початку знаходимо рівняння хорди АВ:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; M_1(a, f(a)); M_2(b, f(b));$$

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a};$$

$$y = 0,$$

$$x = C_0,$$

$$C_0 = a - \frac{f(a) \cdot (b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Якщо $f(C_0)=0$, то C_0 – коріння рівняння. Якщо $f(C_0) \neq 0$, то виберемо той з відрізків $[a; C_0]$ і $[C_0; b]$, на кінцях якого функція $f(x)$ має різні знаки.

Наступна ітерація полягає у визначенні нового наближення C_1 як точку перетину хорди AB_1 з віссю Ox .

Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки не виконатися умова:

$$|f(C_n)| < \varepsilon \text{ або } [C_n, C_{n-1}] \leq \varepsilon.$$

3.2.5 Метод дотичних (метод Ньютона).

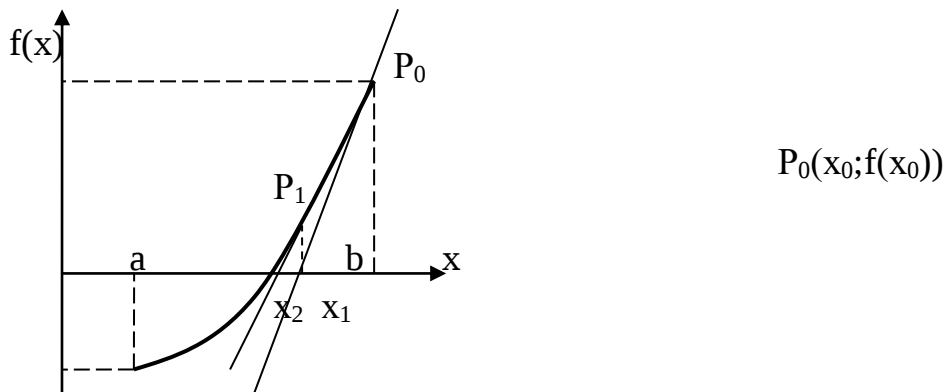
Хай рівняння $f(x_0) = 0$ має одне коріння на відрізку $[a; b]$. Причому $f'(x)$ і $f''(x)$ визначені, безперервні і зберігають постійні знаки на цьому відрізку.

Початкове наближення x_0 доцільно застосовувати так, щоб виконувалася умова:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \quad (1)$$

Інакше збіжність цього методу не гарантована.

Хай умові (1) задовольняє т. b :



$$x_0 = b.$$

Далі проводиться в т. P_0 графіка функції $f(x)$ дотичну

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0);$$

$$y = 0, x = x_1;$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)};$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)};$$

...

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Для закінчення ітераційного процесу повинна бути виконана умова:

$$|f(x_n)| < \varepsilon \text{ або } [x_n, x_{n-1}] \leq \varepsilon.$$

У цьому методі швидкість збіжності найбільш велика.

3.2.6 Метод середньої крапки.

Суть: метод заснований на алгоритмі виключення інтервалів, на кожній ітерації якого розглядається одна пробна крапка R . Якщо в крапці R виконується нерівність $W'(R) < 0$, то в слідстві унімодальності функції точка екстремуму не може лежати ліво крапки R . Аналогічно, якщо $W'(R) > 0$, то інтервал $x > R$ можна виключити.

Алгоритм.

Хай в інтервалі $[a, b]$ є дві крапки N і P , в яких похідні $W'(N) < 0$, $W'(P) > 0$, оптимальна точка (екстремум) x_m розташована $N < x_m < P$.

1) $P = b, N = a$

$W'(a) < 0; W'(b) > 0.$

2) $R = \frac{P + N}{2}, W'(R).$

3) а) $|W'(R)| < \varepsilon$ - пошук закінчений, якщо ні $\Rightarrow$

1. $W'(R) < 0, N = R \Rightarrow 2;$

2. $W'(R) > 0, P = R \Rightarrow 2).$

Як випливає з логічної структури, процедура пошуку по методу середньої крапки заснована на дослідженні тільки знаку похідною.

3.2.7 Простий метод ітерації.

При використуванні цього методу початкове рівняння $f(x) = 0$ записується у формі $x = \varphi(x)$, що завжди можливо зробити багатьма способами. Наприклад, з рівняння $f(x) = 0$ виділити x , а інше перенести в праву частину; або помножити ліву і праву частини рівняння $f(x) = 0$ на $\lambda = -1/M$, де M – найбільше значення першої похідної на відрізку $[a; b]$ і додати до лівої і правої частин x .

$$x = x + \lambda \cdot f(x);$$

$$\varphi(x) = x + \lambda \cdot f(x).$$

Для гарантії збіжності методу необхідно виконати умову:

$$|\varphi'(x)| < 1 \text{ на відрізку } [a; b].$$

Вибираємо на відрізку $[a; b]$ довільно т. x_0 .

Прийmemo як наступне наближення

$$x_1 = \varphi(x_0);$$

$$x_2 = \varphi(x_1);$$

$$\dots$$

$$x_n = \varphi(x_{n-1}).$$

Ітераційний процес слід продовжувати до тих пір, поки не виконатися умова $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$.

На самостійне:

- метод Фібоначчі;
- метод Пауела.

3.3 Чисельне диференціювання.

Похідна функції згідно визначення

$$y = f(x);$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

На практиці ігнорується знак ліміту.

$$y'(x) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2)$$

(2) — наближене значення похідної — апроксимація похідної за допомогою відношення кінцевих різниць.

Значення $\Delta y, \Delta x$ — кінцеві величини, на відміну від нескінченно-малих величин у виразі (1).

Розглянемо апроксимацію похідної функції $y = f(x)$, заданої в табличному вигляді.

y	y ₀	y ₁	y ₂	...	y _n
x	x ₀	x ₁	x ₂	...	x _n

Хай крок (різниця між сусідніми значеннями) постійний і рівний h .

Далі потрібно записати вираз для похідної y_1 в т. x_1 .

Залежно від способу обчислення кінцевих різниць одержуємо різні форми для обчислення похідної в одній і тій же крапці.

а) $\Delta y_1 = y_1 - y_0; \Delta x = h;$

$$y_1' \approx \frac{y_1 - y_0}{h} \quad \text{— за допомогою лівих різниць.}$$

б) $\Delta y_1 = y_2 - y_1; \Delta x = h;$

$$y_1' \approx \frac{y_2 - y_1}{h} \quad \text{— за допомогою правих різниць.}$$

в) $\Delta y_1 = (y_1 - y_0)/2; \Delta x = h;$

$$y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot h} \quad \text{— за допомогою центральних різниць.}$$

Найбільша точність може бути одержана в третьому варіанті.

Аналогічно можна знайти вирази для старших похідних.

$$y_1'' = (y_1')' \approx \left(\frac{y_2 - y_1}{h} \right)' = \frac{y_2' - y_1'}{h} = \frac{(y_2 - y_1)/h - (y_1 - y_0)/h}{h} = \frac{y_2 - 2 \cdot y_1 + y_0}{h^2}.$$

Таким чином, по формулі (2) можна знайти вираз для похідних будь-якого порядку. Проте, залишається відкрите питання про точність. Для знаходження апроксимації потрібно використовувати значення функції в багатьох вузлах.

3.3.1 Приватні похідні.

Розглянемо функцію двох змінних: $u = f(x, y)$, задану табличне з кроком зміни h для x і k для y . ($h, k = \text{const.}$)

Запишемо ряд Тейлора для функції двох змінних.

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x; y + \Delta y) = & f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \cdot \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \cdot \Delta y + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x \cdot \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

Використовуючи цю формулу, виходять наступні апроксимації:

а) для першої похідної по x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{h} = \frac{f(x + h; y) - f(x; y)}{h} \quad \text{— права різниця;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x; y) - f(x - \Delta x; y)}{h} = \frac{f(x; y) - f(x - h; y)}{h} \quad \text{— ліва різниця;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x + h; y) - f(x - h; y)}{2 \cdot h} \quad \text{— центральна різниця.}$$

б) для першої похідної по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x; y + k) - f(x; y)}{k} \quad \text{— права різниця;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x; y) - f(x; y - k)}{k} \quad \text{— ліва різниця;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x; y + k) - f(x; y - k)}{2 \cdot k} \quad \text{— центральна різниця.}$$

в) для другої похідної по x і y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{f(x + h; y) - 2 \cdot f(x; y) + f(x - h; y)}{h^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{f(x; y + k) - 2 \cdot f(x; y) + f(x; y - k)}{k^2}.$$

3.3.2 Рішення диференціальних рівнянь.

Однорідним диференціальним рівнянням (ОДР) називається вираз

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

де x – незалежні змінні;

y – шукана функція;

$y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ – похідні порядку 1, 2, ..., n .

Порядок старшої похідної, входить в рівняння (1) називається *порядком* диференціального рівняння.

$y = f(x)$ називається *рішенням* рівняння (1), якщо при підстановці її у вираз (1) послідовність звертається в тотожність.

$y = f(x)$ Рішення (1) є нескінченною кількістю функцій, тому для знаходження приватного рішення необхідно вказати початкові умови, а саме задати значення $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$:

$$y = y(x_0), y' = y'(x_0), \dots \quad (2)$$

Рівняння (1) називається, яке *вирішується щодо старшої похідної*, якщо воно має вигляд:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3)$$

Задача відшукування рішення рівняння (3) за початкових умов (2) називається *задачею Коші для ОДР*.

Рівняння (3) зводиться до системи n ОДР 1-го порядку заміною y' на невідому функцію $p_1(x)$, y'' – на $p_2(x)$, ..., $y^{(n-1)}$ – на $p_{n-1}(x)$.

Таким чином, виходить:

$$y' = p_1;$$

$$y'' = p_2;$$

...

$$y^{(n-1)} = p_{n-1};$$

або p_{n-1} може бути записана як формула:

$$y^{(n)} = (p_{n-1})' = f(x, y, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}).$$

Причому

$$y(x_0) = y_0;$$

$$p_1(x) = y_0';$$

$$p_2(x) = y_0'';$$

...

$$p_{n-1}(x) = y_0^{(n-1)}.$$

3.3.3 Метод Ейлера.

Метод Ейлера розглядається стосовно рівнянь другого порядку. Оскільки викладене узагальнюється на випадок рівнянь вищого порядку.

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (4)$$

початкові умови: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$.

Рівняння може бути зведене до системи заміною:

$$y' = p, p' = f(x, y, p) \quad (5)$$

Причому $y(x_0) = y_0, p(x_0) = y_0'$.

При числовому рішенні рівняння (4) задача ставиться так: у крапках $x_0, x_1, \dots, x_n$ потрібно знайти наближення $y_0, y_1, \dots, y_n$ для значень точного рішення $y(x_i)$, де $i = 1, 2, \dots, n$.

Хай все одно відносяться, тобто $x_{i+1} - x_i = h$. Тоді $x_i = x_0 + i \cdot h$, де $i = 1, 2, \dots, n$.

Відомо, що $y'(x) \approx (y(x+h) - y(x))/h$, тоді

$$p'(x) \approx \frac{p(x+h) - p(x)}{h}.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + h \cdot y'(x) \\ p(x+h) &\approx p(x) + h \cdot p'(x) \end{aligned} \quad (6)$$

Підставляємо в (6) замість x значення x_i , $i=1,2,\dots,n-1$ і замість y' і p' їх вирази з (5), одержимо:

$$\begin{aligned}y(x_{i+1}) &= y(x) + h \cdot p(x_i); \\p(x_{i+1}) &= p(x_i) + h \cdot f(x_i, y(x_i), p(x_i))\end{aligned}$$

Звідси видно, що наближене значення функцій y і p в крапці x_{i+1} можна обчислити по формулах:

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h \cdot p_i; \\p_{i+1} &= p_i + h \cdot f(x_i, y_i, p_i),\end{aligned}$$

де $y_{i+1} = y(x_{i+1})$; $y_i = y(x_i)$; $p_{i+1} = p(x_{i+1})$; $p_i = p(x_i)$; $i=1,2,\dots,n$.

3.3.4 Метод Рунге-Кутта.

Для цього методу шукане значення знаходиться з урахуванням рівняння:

$$y_1 = y_0 + h/6 \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4),$$

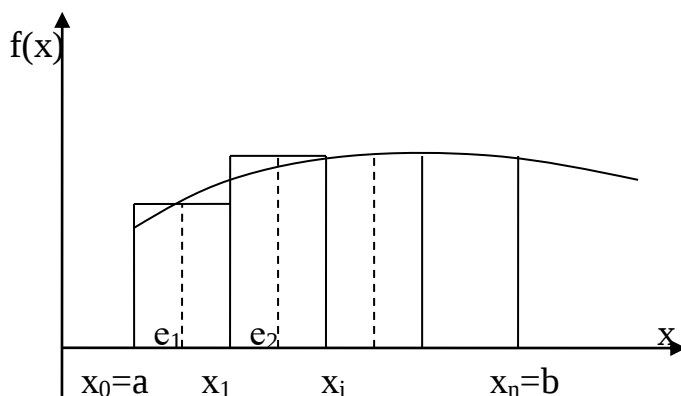
де

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_0, y_0); \\k_2 &= f(x_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_1); \\k_3 &= f(x_0 + h/2, y_0 + h/2 \cdot k_2); \\k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3);\end{aligned}$$

3.4 Числове інтегрування.

Певним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ називається межа інтегральної суми при необмеженому збільшенні числа точок розбиття інтервалу. При цьому довжина найбільшого з елементарних відрізків прагнути до нуля.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$
$$x_i \leq \xi \leq x_{i+1}.$$



3.4.1 Метод прямокутників.

Цей метод безпосередньо використовує заміну інтеграла інтегральною сумою.

Тут в якості ξ_i можуть використовуватися або ліві ($\xi_i = x_{i-1}$) або праві ($\xi_i = x_i$) межі елементарних відрізків.

Позначаючи $f(x_i) = y_i, \Delta x_i = h_i$, одержуємо формули по методу прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 \cdot y_0 + h_2 \cdot y_1 + \dots + h_n \cdot y_{n-1} \text{ або}$$
$$\int_a^b f(x)dx \approx h_1 \cdot y_1 + h_2 \cdot y_2 + \dots + h_n \cdot y_n.$$

Точнішим є вид формули прямокутників, використований значення функції в середніх точках елементарних відрізків (у одержуваних вузлах), тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n h_i \cdot f(x_{i-1/2}),$$

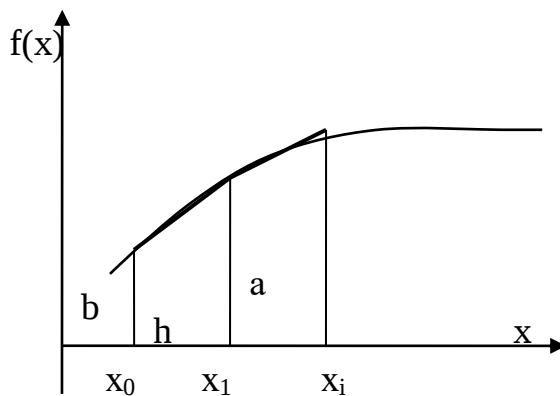
де $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$.

Якщо всі h_i постійно і рівно h , то формула прямокутників прийме вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{i-1/2}).$$

3.4.2 Метод трапецій.

У цьому методі графік функції $y = f(x)$ представляється у вигляді ламаної, сполученої крапками (x_i, y_i) .



В цьому випадку площа всієї фігури складається з площ елементарних прямокутних трапецій.

Площа кожної трапеції визначається по формулі:

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

$$S = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h_i$$

$$\text{Тоді } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) \cdot h_i.$$

Якщо всі h_i постійно і рівно h , то формула трапецій прийме вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^n y_i \right).$$

На самостійне:

- метод Симпсона.

4. Планування експерименту при ідентифікації об'єкту дослідження

Планування експерименту включає вибір числа і видів чинників, що впливають на параметр, що вивчається, встановлення нульового рівня і інтервалів їх варіювання, вибір *матриці планування*.

Нульовий і основний рівень позначається цифрою «0» – це центр планування експерименту. Кількісно – це ті значення параметрів, при яких раніше були досягнуті якнайкращі результати, або результати, поширені в промисловості, або результати, одержані в результаті анкетного опиту фахівців, або найдобріше вивчені результати.

Верхній рівень «+1» – це максимальне значення змінної величини ($X_{\max}$).

Нижній рівень «-1» – це мінімальне значення змінної величини ($X_{\min}$).

При плануванні експерименту прийняте значення незалежної змінної в натуральному вигляді X замінювати на кодоване X . Для кодової X застосовують:

$$x = \frac{X - X_0}{\Delta X}$$

де X – натуральне значення змінної;

X – значення змінної на нульовому рівні;

ΔX – інтервал варіювання.

$$\Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$$

де $X_{\max}$ – значення змінної на верхньому рівні;

$X_{\min}$ – значення змінної на нижньому рівні.

Фактори, рівні і інтервали варіювання чисельного експерименту.

Приклад для вивчення променистого теплообміну:

Таблиця 4.1

Приклад променистого теплообміну

№ п/п	Фактори (параметри)		Умови варіювання			Інтервал варіювання
	Натуральний вигляд	Кодовий вигляд	-1	0	+1	
1	Вміст CO ₂ у випромінюючих газах, %	X1	12	13	14	1
2	Вміст H ₂ O у випромінюючих газах, %	X2	6	8	10	2
3	Температура випромінюючих газів, °C	X3	930	980	1030	50
4	Ефективна довжина променя, м	X4	0,8	0,9	1,0	0,1

Вибір матриці планування пов'язаний з визначенням числа, вигляду і порядку виконання експерименту. При вивченні теплотехнічних процесів мають місце лінійні, нелінійні, квадратичні залежності знаходження яких зв'язане із застосуванням повного факторного експерименту (ПФЕ). При проведенні ПФЕ планування здійснюється на двох рівнях: верхній “+1” і нижній “-1”. Число дослідів N залежить від числа факторів. До і визначається по формулі:

$$N=2^k.$$

Таблиця 4.2

Матриця повного факторного експерименту для чотирьох факторів

Точка плану	Фактори			
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	+	+	+	+
2	+	+	+	-
3	+	+	-	+
4	+	+	-	-
5	+	-	+	+
6	+	-	+	-
7	+	-	-	+
8	+	-	-	-
9	-	+	+	+
10	-	+	+	-
11	-	+	-	+
12	-	+	-	-
13	-	-	+	+
14	-	-	+	-
15	-	-	-	+
16	-	-	-	-

Отримання початкової інформації для статичної обробки здійснюється на ЕОМ шляхом реалізації програми відповідно до розробленої математичної моделі. Розрізняють пасивні математичні експерименти і активні.

Пасивні експерименти, які виконуються без залучення спеціальних математичних методів, планування експерименту здійснюється, коли немає

можливості направленою варіювання змінних, тобто відбувається фіксація поточного значення.

Активний експеримент проводять при значенні параметрів процесу, вироблених з визначенням, наперед сформульованим планом. Дані експерименту заносять в матрицю; результати експерименту, виконані згідно матриці планування, дозволяють одержати регресійну залежність між параметрами оптимізації і змінними чинниками у вигляді полінома.

Рівняння регресії – основа методу повного факторного експерименту - має вигляд:

$$y_n = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i + \sum_{i < j}^n b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \quad (4.1)$$

Наприклад, для 3-х факторного рівняння буде:

$$y_3 = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3$$

Для 4-х факторів:

$$y_n = b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + b_4 \cdot x_4 + b_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + b_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + b_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + b_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + b_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + b_{34} \cdot x_3 \cdot x_4$$

Далі проводиться статична обробка результатів експерименту, знаходження коефіцієнтів рівняння регресії і перевірка їх значущості:

1) Нульовий коефіцієнт:

$$b_0 = \sum_{u=1}^N \frac{Y_u}{N} \text{ - середнє арифметичне значення,} \quad (4.2)$$

де N – число дослідів,

Y_u – значення вихідних параметрів в u -том досвіді.

2) Коефіцієнти для лінійних членів рівняння:

$$b_i = \sum_{u=1}^N \frac{X_{iu} \cdot Y_u}{N}, \quad (4.3)$$

де X_{iu} – значення i -того фактору в рядку матриці в u -том досвіді (експерименті).

3) Коефіцієнти парних взаємодій:

$$b_{ij} = \sum_{u=1}^N \frac{X_{iu} \cdot X_{ju} \cdot Y_u}{N} \quad (4.4)$$

де X_{ju} – значення j-го чинника в рядку матриці u-го досвіду.

Враховуючи характер вірогідності регресійних рівнянь, слід провести їх статичний аналіз, мета якого – оцінка значущості коефіцієнтів рівнянь і перевірка адекватності рівнянь.

Оцінка значущості виконується через t – критерій Стьюдента. Для цього визначається середньоарифметичне значення всіх вихідних параметрів:

$$Y = \sum_{i=1}^r \frac{Y_{ui}}{r} = \frac{Y_{u1} + Y_{u2} + \dots + Y_{ur}}{r}; \quad (4.5)$$

$$Y_0 = \sum_{u=1}^{n_0} \frac{Y_{0u}}{n_0}; \quad (4.6)$$

Дисперсія відтворності:

$$S_{Y_u}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_{ui} - Y_u)^2}{N}; \quad (4.7)$$

$$S_{Y_{0u}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (Y_{0u} - Y_0)^2}{N}; \quad (4.8)$$

Середньоквадратична помилка при визначенні коефіцієнтів для лінійного і неповного квадратичних рівнянь:

$$S_{b_0} = S_{b_i} = S_{b_{ij}} = \frac{S_{Y_u}}{\sqrt{N}}; \quad (4.9)$$

Розраховане значення t – критерію Стьюдента для лінійних квадратичних рівнянь:

$$t_P(b_0) = \frac{|b_0|}{S_{b_0}}; \quad (4.10)$$

$$t_P(b_i) = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}; \quad (4.11)$$

$$t_p(b_{ij}) = \frac{|b_{ij}|}{S_{b_{ij}}}; \quad (4.12)$$

Коефіцієнти вважаються значущими, якщо розрахункове значення t – критерію Стюдента більше табличного, $t_p > t_T$, якщо $t_p < t_T$, то коефіцієнти є незначущими і можуть бути відкинуті з регресійного рівняння без перерахунку решти коефіцієнтів.

Перевірка адекватності моделі (відповідності) проводиться по F – критерію Фішера, і полягає у визначенні дисперсії адекватності і оцінки однорідності дисперсії, а також порівнянні одержаних результатів з табличними:

$$S_{ad}^2 = \sum_{u=1}^N \frac{(\hat{Y} - Y_u)^2}{N - m}; \quad (4.13)$$

де $\hat{Y}$ – розрахункове значення параметра Y по одержаному рівнянню регресії;

Y_u – розрахункове значення вихідного параметра Y , одержане при чисельному експерименті по рядку u ;

m – кількість значущих коефіцієнтів і b_0 .

Розрахункове значення F – критерію Фішера визначається по формулах:

$$\text{при } S_{ad}^2 > S_Y^2 \Rightarrow F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_Y^2} > 1, \quad (4.14)$$

$$\text{при } S_{ad}^2 < S_Y^2 \Rightarrow F_p = \frac{S_Y^2}{S_{ad}^2} > 1. \quad (4.15)$$

Табличне значення F_T знаходять по таблиці, по прийнятій довірчій вірогідності і числу ступенів свободи.

У теплотехнічних процесах довірка вірогідність може бути прийнята 90-95%, а число ступенів свобод $f_{ад}$ для лінійних і неповних квадратичних рівнянь розраховується по формулі:

$$f_{ад} = N - m. \quad (4.16)$$

Рівняння вважається *адекватним* для прийнятого рівня адекватності, якщо розрахункове значення критерію Фішера менше за табличний

$$F_p < F_m. \quad (4.17)$$

Якщо одержане рівняння *неадекватно*, то даний поліном рівняння регресії не достатньо точно відображає досліджувану залежність і тоді треба змінювати інтервал варіювання або застосувати інший план.

Висновок.

Завершальним етапом виконання чисельного експерименту є аналіз математичної моделі за визначенням y у вигляді рівняння регресії.

У неповних квадратичних рівняннях регресії знак перед коефіцієнтом лінійного члена відповідає напрямку зміни вихідного параметра: “+” свідчить про те, що із збільшенням фактору величина відповідного вихідного параметра збільшується, “–” означає, що вона убуває.

Чим більше значення коефіцієнта, тим сильніше вплив чинників. Якщо необхідно набути максимальне значення вихідного параметра, то значенню всіх факторів, коефіцієнти b_i яких мають знак “+”, слід приймати максимальними, і значення факторів, коефіцієнти b_i яких мають знак “–” – мінімальними.

Знак “+” перед коефіцієнтом парної взаємодії b_{ij} свідчить про те, що збільшення вихідного параметра можливе тільки в тому випадку, якщо взаємодіючі фактори знаходяться одночасно на верхньому і нижньому рівні, а знак “–” означає, що один фактор знаходиться на верхньому, а інший на нижньому рівні.

5. Лабораторний практикум.

5.1 Завдання до робіт

Лабораторна робота № 1

За допомогою числового методу найменших квадратів знайти функціональну залежність експериментальних даних.

Результати представити наступним чином:

- розрахунок за допомогою отриманих навиків та калькулятору,
- за допомогою програми Excel,
- за допомогою програми Matlab.

Варіанти завдань:

										Варіант 1
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-1	4	6	11	7	4	0	-1	-2	-4
										Варіант 2
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0	4	7	10	6	3	1	-1	-3	-4
										Варіант 3
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	1	4	7	9	6	4	1	0	-2	1
										Варіант 4
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0	4	7	10	6	3	1	-1	-3	-4
										Варіант 5
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	-5	-2	0	3	5	7	9	6	3	0
										Варіант 6
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	9	7	5	3	1	0	2	6	7	8
										Варіант 7
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	5	2	0	-2	-4	-7	-5	-3	0	2
										Варіант 8
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	0	1	4	9	16	10	5	2	-1	-3
										Варіант 9
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	6	2	0	-2	-3	-6	-5	-2	0	1

											Вариант 10
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	1	4	8	15	10	5	2	-1	-2	
											Вариант 11
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	3	6	9	7	4	1	0	-1	-3	
											Вариант 12
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	4	7	10	8	5	2	0	-1	-4	
											Вариант 13
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	-1	4	6	11	7	4	0	-1	-2	-4	
											Вариант 14
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	4	7	10	6	3	1	-1	-3	-4	
											Вариант 15
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	1	4	7	9	6	4	1	0	-2	1	
											Вариант 16
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	4	7	10	6	3	1	-1	-3	-4	
											Вариант 17
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	-5	-2	0	3	5	7	9	6	3	0	
											Вариант 18
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	9	7	5	3	1	0	2	6	7	8	
											Вариант 19
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	5	2	0	-2	-4	-7	-5	-3	0	2	
											Вариант 20
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	1	4	9	16	10	5	2	-1	-3	
											Вариант 21
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	6	2	0	-2	-3	-6	-5	-2	0	1	
											Вариант 22
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	1	4	8	15	10	5	2	-1	-2	
											Вариант 23
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	3	6	9	7	4	1	0	-1	-3	
											Вариант 24
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	0	4	7	10	8	5	2	0	-1	-4	
											Вариант 25
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	-1	4	6	11	7	4	0	-1	-2	-4	
											Вариант 26
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Y	6	2	0	-2	-3	-6	-5	-2	0	1	

Лабораторна робота №2

Необхідно знайти корінь рівняння за допомогою ітераційних методів. Рішення представити в будь-якому вигляді: вирішити вручну, в програмі Excel або Matlab.

Варіант 1 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи хорд, дотичної, розподіл навіпіл $[0, 9]$, $h=10$

Варіант 2 функція $y(x) = (x - 4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи дотичної, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7, 6]$, $h=20$

Варіант 3 функція $y(x) = (x - 4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи хорди, сер. точки, ітерацій $[-7, 6]$, $h=20$

Варіант 4 функція $y(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4 \cdot x + 5$ Методи дотичної, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7, 5]$, $h=20$

Варіант 5 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи дотичних, золотого перетину, розподіл навіпіл $[-2, 10]$, $h=10$

Варіант 6 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи хорд, сер. точки, розподіл навіпіл $[1, 8]$, $h=10$

Варіант 7 функція $y(x) = (x - 4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи дотичної, золотого перетину, розподіл навіпіл $[-6, 6]$, $h=15$

Варіант 8 функція $y(x) = (x - 4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи хорди, сер. точки, розподіл навіпіл $[-9, 5]$, $h=20$

Варіант 9 функція $y(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4 \cdot x + 5$ Методи дотичної, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7, 5]$, $h=15$

Варіант 10 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи хорд, золотого перетину, розподіл навіпіл $[-2, 10]$, $h=15$

Варіант 11 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи хорд, дотичної, розподіл навіпіл $[0, 9]$, $h=10$

Варіант 12 функція $y(x) = (x - 4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи дотичної, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7, 6]$, $h=20$

Варіант 13 функція $y(x) = (x - 4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи хорди, сер. точки, ітерацій $[-7, 6]$, $h=20$

Варіант 14 функція $y(x) = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4 \cdot x + 5$ Методи дотичної, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7, 5]$, $h=20$

Варіант 15 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи дотичних, золотого перетину, розподіл навіпіл $[-2, 10]$, $h=10$

Варіант 16 функція $y(x) = 3 \cdot (x - 3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи хорд, сер. точки, розподіл навіпіл $[1, 8]$, $h=10$

Варіант 17 функція $y(x) = (x-4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи дотичної, золотого перетину, розподіл навіпіл $[-6,6]$, $h=15$

Варіант 18 функція $y(x) = (x-4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи хорди, сер. точки, розподіл навіпіл $[-9,5]$, $h=20$

Варіант 19 функція $y(x) = 2 \cdot (x-7)^2 - 3 \cdot x + 5$ Методи хорд, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7,5]$, $h=20$

Варіант 20 функція $y(x) = 3 \cdot (x-3)^2 - 7 \cdot x + 10$ Методи хорд, дотичної, розподіл навіпіл $[0,9]$, $h=10$

Варіант 21 функція $y(x) = (x-4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи дотичної, сер. точки, розподіл навіпіл $[-7,6]$, $h=20$

Варіант 22 функція $y(x) = (x-4)^2 - 3 \cdot x + 8$ Методи хорди, сер. точки, ітерацій $[-7,6]$, $h=20$

Останні нерозглянуті методи задає викладач.

Лабораторна робота № 3

Вирішити диференційне рівняння за допомогою методу Ейлера та Рунге-Кутта. Результати представити в програмах Excel та Matlab. Крок розрахунку h задається.

Варіанти завдань:

№	Диференційне рівняння	Початкові дані	Знайти
1	$y''' = y'' - y \cdot x^2$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(10), h=1$
2	$y''' - 2 \cdot y' + y \cdot x = y$	$y''(0) = 0.5, y'(0) = -1, y(0) = 1$	$y'''(12), h=1$
3	$y''' - y' \cdot \cos(x) + 3 \cdot y'' = y$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = -1$	$y'''(1), h=1$
4	$y''' - y' \cdot x - 2 \cdot y = \sin(x)$	$y''(0) = -1, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$
5	$y''' = y'' - y \cdot \sin(x)$	$y''(0) = 0.5, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$
6	$y''' - y'' \cdot x + 3 \cdot y' = y$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(12), h=1$
7	$y''' = y'' - y \cdot \cos(x)$	$y''(0) = 0.5, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$
8	$y''' = y'' - y' \cdot x^2$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(20), h=2$
9	$y''' - 3 \cdot y' + y \cdot x = y$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(12), h=1$
10	$y''' = y'' - y \cdot \operatorname{tg}(x) - y$	$y''(0) = -1, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$
11	$y''' = y'' - 2 \cdot y \cdot \sin(x) - y'$	$y''(0) = -1, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$
12	$y''' = y'' - y' \cdot x^3 + 1$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(20), h=2$
13	$y''' - 3 \cdot y + y' \cdot x = 4$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(10), h=1$
14	$y'' - y''' \cdot x - 7 \cdot y = -1$	$y''(0.5) = 0, y'(0.5) = -1, y(0.5) = 2$	$y'''(10), h=1$
15	$y''' = y'' - y \cdot \cos(x) - y$	$y''(0) = -1, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$
16	$x \cdot y' - 7 \cdot y'' - y''' = x/y$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(13), h=1$
17	$y''' - y' \cdot x + 3 \cdot y = 1$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = -1$	$y'''(13), h=1$

18	$y''' = y'' - y \cdot \operatorname{tg}(x) + y'$	$y''(0) = 0.5, y'(0) = -1, y(0) = 1$	$y'''(1), h=0.1$
19	$y''' = y'' - y \cdot \sin(x)$	$y''(0) = 0.5, y'(0) = -1, y(0) = 1$	$y'''(1), h=0.1$
20	$y''' - 4 \cdot y + y' \cdot x = -5$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(20), h=2$
21	$y'' - y''' \cdot (x+1) - 7 \cdot y = -1$	$y''(0) = 0, y'(0) = -1, y(0) = 2$	$y'''(10), h=1$
22	$y''' = y'' - y \cdot \cos(-x) - y$	$y''(0) = -1, y'(0) = 1, y(0) = -0.5$	$y'''(1), h=0.1$

Лабораторна робота № 4.

Розглянути методи інтегрування. Результати представити в програмах Excel та Matlab. Крок розрахунку h задається.

Варіанти завдань відповідають номеру згідно журналу групи та знаходяться у завданні лабораторної роботи № 2.

Лабораторна робота № 5.

Згідно з варіантами завдань роботи № 1, знайти функціональну залежність за допомогою наближень Лагранжа, поліномів Ньютона.

Лабораторна робота № 6.

Визначення адекватності моделі за допомогою методу повного факторного експерименту.

Для визначення вхідних параметрів використовується дані з моделі контрольної домашньої роботи.

5.2 Приклади виконання робіт.

Надалі наведені приклади виконання лабораторних робіт.

5.2.1 Метод найменших квадратів у Excel.

x	y	x ²	x ³	x ⁴	yx	yx ²	f(x)
0	4	0	0	0	0	0	7,063636
1	7	1	1	1	7	7	6,142424
2	11	4	8	16	22	44	4,986364
3	3	9	27	81	9	27	3,595455
4	0	16	64	256	0	0	1,969697
5	-1	25	125	625	-5	-25	0,109091
6	-4	36	216	1296	-24	-144	-1,98636
7	-3	49	343	2401	-21	-147	-4,31667
8	-7	64	512	4096	-56	-448	-6,88182
9	-9	81	729	6561	-81	-729	-9,68182
45	1	285	2025	15333	-149	-1415	-62,5727

10	45	285
45	285	2025
285	2025	15333

опр. 435600

1	45	285
-149	285	2025
-1415	2025	15333

опр1 3076920

Ao
7,063636

10	1	285
45	-149	2025
285	-1415	15333

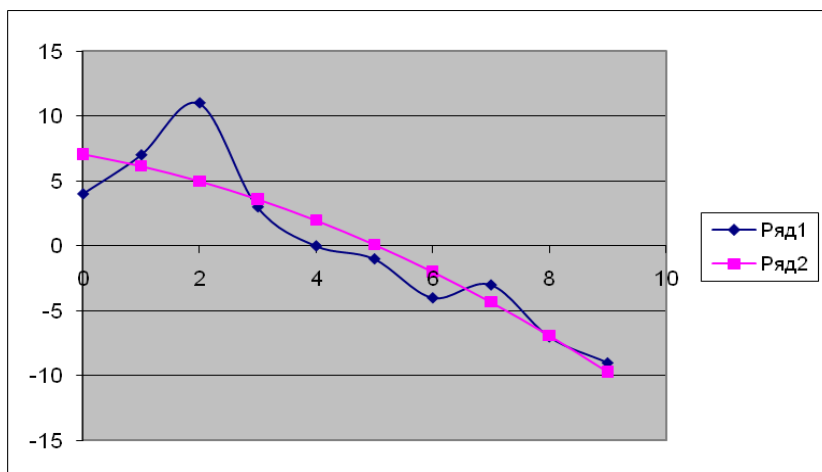
опр2 -350130

A1
-0,80379

10	45	1
45	285	-149
285	2025	-1415

опр3 -51150

A2
-0,11742



5.2.2 Метод найменших квадратів у Matlab.

Основи роботи у додатку Curve Fitting Toolbox.

Додаток Curve Fitting Toolbox запускається за допомогою команди `cftool`. Після введення команди з'являється вікно додатку (рис. 1.1).

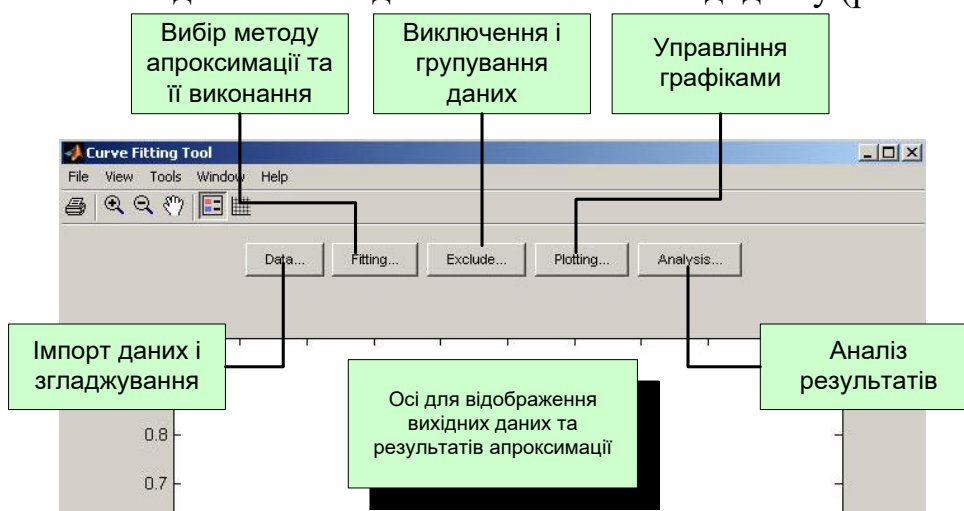


Рис. 1.1 – Вікно додатка Curve Fitting Toolbox

Основні етапи вирішення задачі апроксимації у додатку Curve Fitting Toolbox такі:

1. Імпорт даних (кнопка **Data**).
2. Побудова, при необхідності, правил виключення деяких значень, або виключення їх вручну (кнопка **Exclude**).
3. Вибір методу апроксимації, підбір параметрів апроксимуючої функції, а також перегляд отриманих результатів (кнопка **Fitting**).
4. Аналіз результатів апроксимації, що включає обчислення значень апроксимуючої функції в заданих точках (включаючи екстраполяцію), її інтегрування та диференціювання (кнопка **Analysis**).

Крім того можливо:

1. Експортувати отримані результати в робоче середовище MATLAB.
2. Проводити згладжування й фільтрацію даних (кнопка **Data**).
3. Згенерувати файл-функцію, яку можна використати згодом автономно від додатка Curve Fitting Toolbox.
4. Зберегти сесію й при наступних запусках додатка Curve Fitting Toolbox відновити її (меню **File**, пункти **Save Session**, **Load Session**).
5. Вивести результати в окреме графічне вікно (меню **File**, пункт **Print to Figure**).
6. Надрукувати результати (меню **File**, пункт **Print**).

Для імпорту даних в додаток Curve Fitting Toolbox необхідно натиснути кнопку **Data**, внаслідок чого з'являється вікно **Data**, призначення елементів управління якого наведено на рис. 1.2.

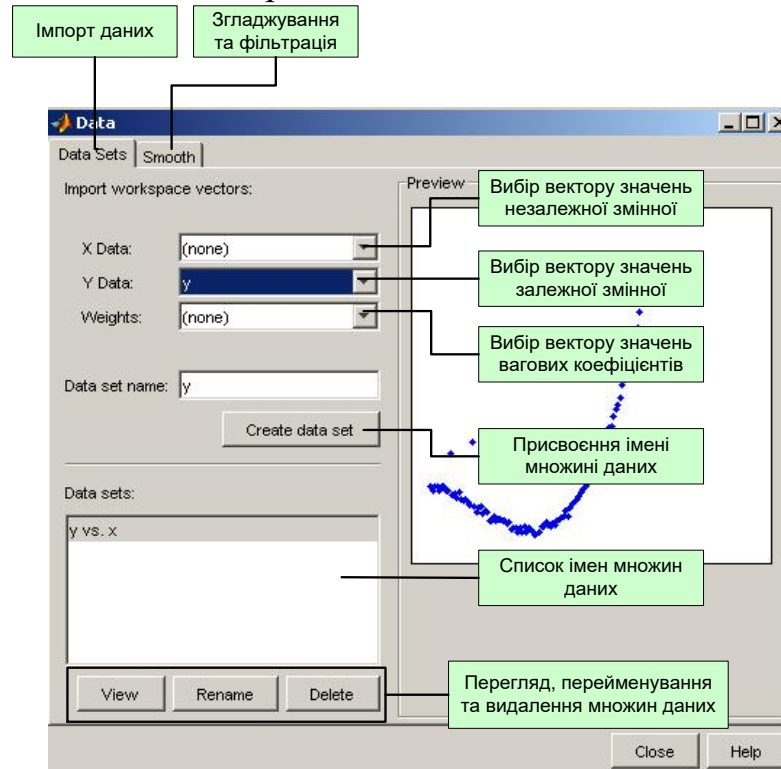


Рис. 1.2 – Вікно Data додатка Curve Fitting Toolbox

У списках **X Data** та **Y Data** необхідно вибрати імена глобальних змінних робочого середовища MATLAB, в яких зберігаються вихідні дані. Після цього на правій панелі вікна **Data** будується приблизний графік вибраних даних.

Список **Weights** призначений для вибору вектору вагових коефіцієнтів. Якщо в цьому немає необхідності його можна не вказувати, за умовчуванням вагові коефіцієнти дорівнюють одиниці.

Після вибору векторів необхідно задати ім'я множині даних, шляхом введення його в рядок **Data set name** і натискання кнопки **Create data set**.

1. Зі створеною множиною даних можна проробити наступні операції:
2. Відобразити таблицю даних разом з графіком в окремому вікні (кнопка **View**).

3. Перейменувати виділений набір даних (кнопка **Rename**).

4. Видалити виділений набір даних (кнопка **Delete**).

5. Здійснити згладжування даних різними способами (вкладка **Smooth**).

Згладжування та фільтрація даних

Якщо дані сильно зашумлені, то можна виконати їх згладжування. Однак, слід мати на увазі, що згладжування даних приводить до того, що припущення про нормальне розподілення помилки не буде виконуватись. Тому згладжування звичайно використовується для отримання інформації про можливий вибір типу апроксимуючої функції, а сам процес підбору її параметрів проводять для вихідних (не згладжених) даних.

Згладжування виконується за декількома розташованими підряд даними, причому їх кількість звичайно підбирається експериментально.

В Curve Fitting Toolbox реалізовано три способи згладжування

- метод ковзкого середнього;
- метод зваженої локальної регресії;
- фільтр Савицького-Голея.

Всі ці способи згладжування представлені в діалоговому вікні **Data** на вкладці **Smooth** (рис. 1.3).



Рис. 1.3 – Вкладка Smooth вікна Data для згладжування даних

У списку **Original data set** вибирається вихідна множина даних.

В рядку **Smoothed data set** вводиться ім'я, що буде присвоєне множині згладжених даних.

У списку **Method** вибирається один із методів згладжування даних.

В рядку **Span** задається число сусідніх точок, за якими виконується згладжування (для зваженої локальної регресії можна задавати число, що менше одиниці, воно сприймається як відсоток від загальної кількості точок, що використовуються для згладжування).

Для фільтра Савицького-Голея необхідно задати ступінь поліному для локальної регресії, ступінь задається в рядку **Degree**.

Згладжені дані можна візуалізувати (кнопка **View**), переіменувати (кнопка **Rename**), видалити (кнопка **Delete**) та зберегти як глобальну змінну робочого середовища MATLAB (кнопка **Save to workspace**).

Метод ковзкого середнього (Moving Average)

У методі ковзкого середнього вихідні дані y_i згладжуються по наступному правилу:

$$y_i^s = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N y(i+k), \quad (0.1)$$

де $2N+1$ - число точок, що використовуються для згладжування, таким чином зліва та справа від поточної точки вибирається по N точок (число точок, що використовуються для згладжування, повинно бути непарним). Дані, розташовані в точках, близьких до меж відрізка, не згладжуються, тому що не вистачає точок справа або зліва від поточної, в котрій в даний момент

виконується згладжування. На рисунку 1.4 показаним приклад згладжування даних.



Рис. 1.4 – Згладжування даних методом ковзкого середнього
Лівий графік – зашумлені дані (крапки) та незашумлені (лінія),
середній графік – згладжені з $N = 33$ та незашумлені,
правий графік – згладжені з $N = 191$ та незашумлені

Зважена локальна регресія (Lowess і Loess)

При згладжуванні за допомогою зваженої локальної регресії для кожного значення даних вибирається набір з фіксованого числа розташованих поруч точок, кожній з яких призначається вага по наступній формулі:

$$w_i = \left(1 - \left| \frac{x_k - x_i}{d(x_k)} \right|^3 \right)^3, \quad (0.2)$$

де $d(x_k)$ – відстань від x_k до найбільш віддаленої точки з набору. Таким чином найбільша вага (що дорівнює одиниці) буде у u_k , а найменша (що дорівнює нулю) у даних, що розташовані на межах набору.



Рис. 1.5 – Значення вагових коефіцієнтів для зваженої локальної регресії

Після вибору ваги згладжене значення знаходиться за допомогою локальної зваженої регресії, причому в залежності від вибору користувача у списку **Method** на вкладці **Smooth** вікна **Data** виконується різна регресія

- **Lowess** – лінійна регресія;
- **Loess** – квадратична регресія.

Крім опцій **Lowess** та **Loess** в списку **Method** на вкладці **Smoothing** у вікні **Data** є ще **Robust Lowess** та **Robust Loess**. Ці способи менш чутливі по відношенню до викидів даних, оскільки вибір вагових коефіцієнтів виконується за декілька ітерацій, на кожній з яких більш віддаленим від регресійної кривої (знайденої на попередній ітерації) точкам призначаються менші вагові коефіцієнти, а якщо точка сильно віддалена, то вона взагалі виключається з набору даних при виконанні локальної регресії на наступній ітерації.

Фільтр Савицького–Голея (Savitzky-Golay)

У фільтрі Савицького-Голея ступінь полінома, що використовується для локальної регресії може бути вищим ніж у попередньому способі згладжування, при цьому виконується незважена локальна регресія. Число сусідніх точок (що задається в рядку **Span**) для згладжування повинно бути непарне, а ступінь полінома (що задається в рядку **Degree**) менше, ніж число сусідніх даних.

Цей спосіб фільтрації добре підходить для зашумлених сигналів, в котрих при згладжуванні необхідно зберегти високі частоти. При підвищенні ступеня полінома, що використовується в локальній регресії, краще відтворюються вузькі та високі піки.



Рис. 1.6 – Згладжування даних методом зваженої локальної регресії

*Лівий графік – зашумлені дані (крапки) та незашумлені (лінія),
середній графік – згладжені з 10% від всіх точок та незашумлені,
правий графік – згладжені з 20% від всіх точок та незашумлені*

Виконання апроксимації стандартними методами. Робота з декількома апроксимуючими функціями та множинами даних

Для виклику діалогового вікна, призначеного для виконання апроксимації, необхідно натиснути кнопку **Fitting** в основному вікні додатка Curve Fitting Toolbox. З'являється діалогове вікно **Fitting** в якому необхідно натиснути кнопку **New fit**, після чого всі елементи управління цього вікна стануть доступними (рис. 1.7).

Для виконання апроксимації у полі **Fit Name** задається ім'я апроксимуючої функції, в полі **Data set** вказується множина вихідних даних, зі списку **Type of fit** вибирається тип апроксимації та натискається кнопка **Apply**. Після розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції у вікні **Results** виводиться наступна інформація:

1. Інформація про апроксимуючу функцію.
2. Знайдені значення коефіцієнтів функції разом з довірчими інтервалами, що відповідають рівню імовірності 95%.
3. Обчислені критерії придатності апроксимуючої функції.

В основному вікні додатку Curve Fitting Toolbox виводиться графік апроксимуючої функції при знайденому значенні параметрів, а в таблицю **Table of Fits** виводиться ім'я апроксимуючої функції і значення критеріїв придатності.

Програма дозволяє повторити розрахунок апроксимуючої функції іншим методом, з іншими параметрами або на основі іншого набору даних. Для цього необхідно натиснути кнопку **New fit**, задати ім'я функції, метод та параметри апроксимації і запустити розрахунок натискання кнопки **Apply**.

В таблиці **Table of Fits** відображається інформація про усі розраховані апроксимуючі функції. При виборі одної з них в області **Results** автоматично відображається вся інформація про функцію. Для видалення цієї інформації достатньо виділити апроксимуючу функцію в таблиці **Table of Fits** і натиснути кнопку **Delete**.

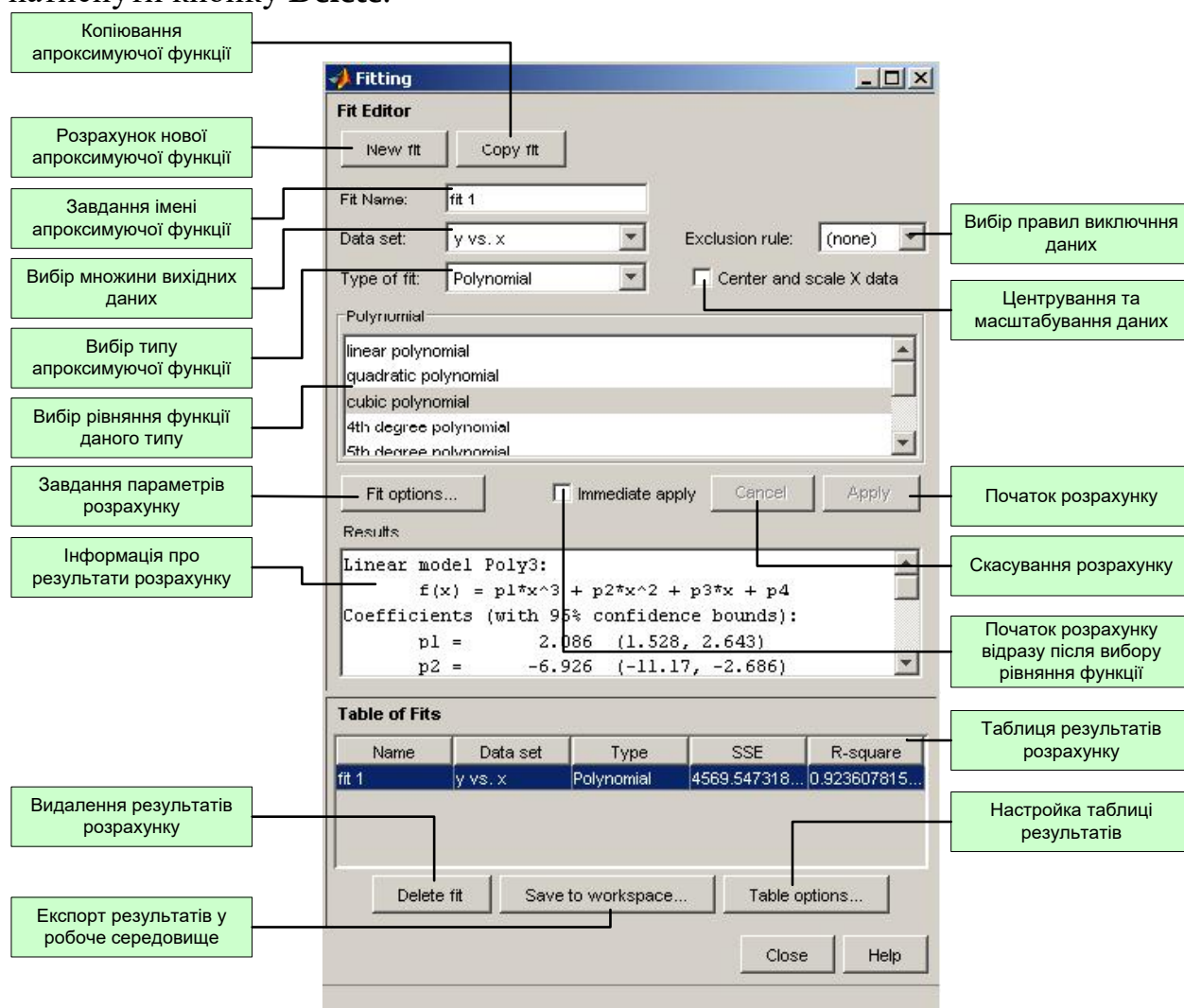


Рис. 1.7 – Вікно Fitting додатку Curve Fitting Toolbox

Управління процесом підбору параметрів апроксимуючої функції

При необхідності користувач може змінити такі параметри розрахунку як: початкові, максимальні та мінімальні значення коефіцієнтів апроксимуючої функції, алгоритм їх розрахунку, метод підвищення стійкості

розрахунку до викидів даних. Це робиться у діалоговому вікні, що викликається натискання кнопки **Fit Option** (рис. 1.8).

Список **Robust** містить чотири опції **On**, **Off**, **LAR** і **Bisquare** і служить для вибору методу розрахунку стійкого до викидів в даних.

При виконанні апроксимації шукані значення параметрів апроксимуючої функції $a_1, a_2, \dots, a_k$ визначаються як рішення задачі мінімізації суми квадратів відхилів, тобто суми квадратів відстаней від точок даних $(x_j, y_j)_{j=1,2,\dots,n}$ до точок апроксимуючої кривої $y(x_j; a_1, a_2, \dots, a_k)$:

$$\min_{a_1, a_2, \dots, a_k} \sum_{j=1}^n \left(y(x_j; a_1, a_2, \dots, a_k) - y_j \right)^2. \quad (0.3)$$

Якщо даним $(x_j, y_j)_{j=1,2,\dots,n}$ призначені вагові коефіцієнти $(w_j)_{j=1,2,\dots,n}$, то вирішується наступна задача мінімізації (якщо вагові коефіцієнти не задані, то за умовчанням вони приймаються рівними одиниці):

$$\min_{a_1, a_2, \dots, a_k} \sum_{j=1}^n w_j \left(y(x_j; a_1, a_2, \dots, a_k) - y_j \right)^2. \quad (0.4)$$

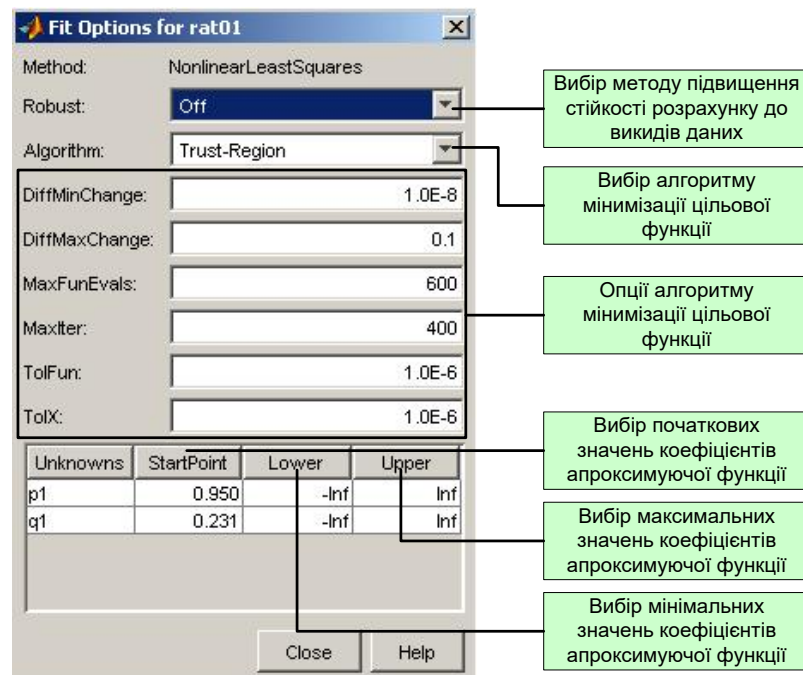


Рис. 1.8 – Вікно Fit Option додатка Curve Fitting Toolbox

Якщо у вихідних даних наявний викид, причому відповідний ваговий коефіцієнт не заданий достатньо малим, то він може суттєво погіршити результати апроксимації. На рис. 1.9 наведено результати апроксимації поліномом першого ступеня для даних без викидів (лівий графік) та для даних з одним викидом (правий графік). Як видно з малюнку викид суттєво впливає на результат апроксимації. Це обумовлено тим, що відхил в виразі, що мінімізується, підноситься у квадрат.

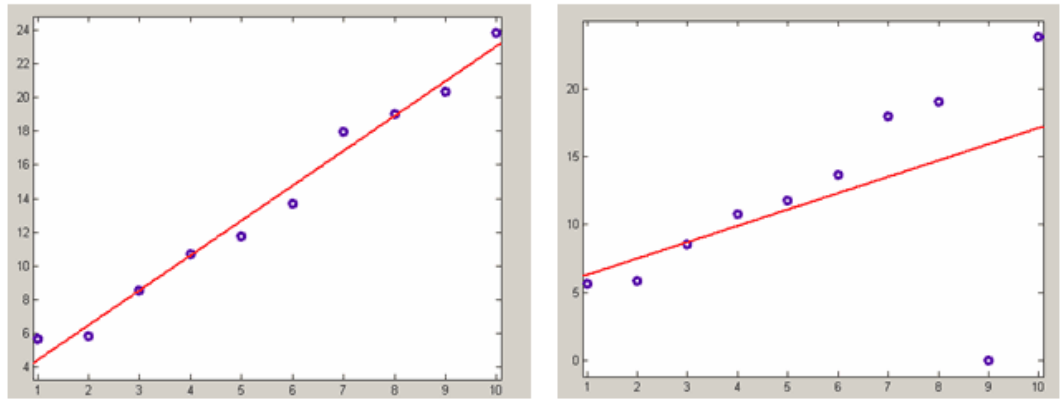


Рис. 1.9 – Апроксимація даних з викидом

Одним із способів зменшення впливу викидів на результати апроксимації полягає в мінімізації суми не квадратів відхилів, а їх модулів. Для цього служить опція **LAR** (Least Absolute Residuals). Якщо вибрати **LAR** в списку **Robust** і знову провести лінійну регресію, то ми побачимо, що викид в даних набагато менше впливає на результат апроксимації (рис. 1.10).

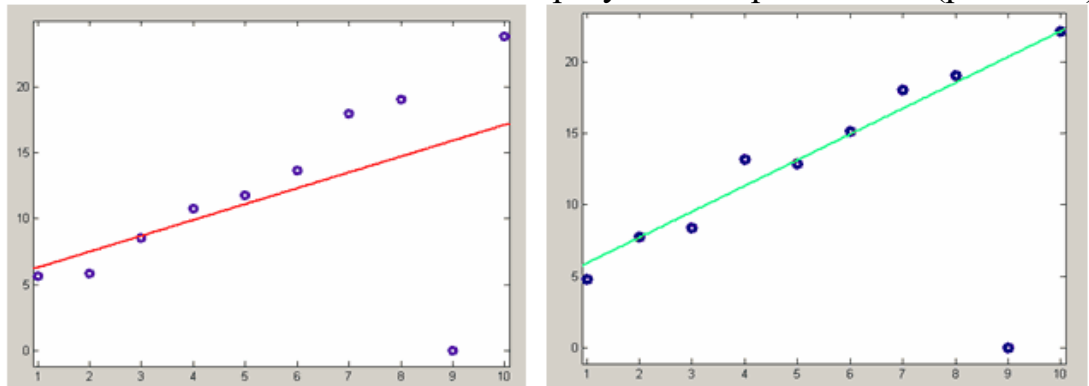


Рис. 1.10 – Апроксимація даних з викидом мінімізацією суми квадратів відхилів (ліворуч) та суми модулів відхилів (праворуч)

Інший спосіб зниження впливу викидів на результати апроксимації полягає в призначенні вагових коефіцієнтів даним. Чим більший ваговий коефіцієнт має та або інша крапка, тим більше вона впливає на результати апроксимації. Проте, в практичних завданнях не завжди вдається визначити викиди або точки даних, які повинні менше впливати на результати апроксимації і призначити їм відповідні ваги. Замість цього можна скористатися адаптивним алгоритмом, який послідовно:

1. Виконує апроксимацію, підбираючи параметри по методу найменших квадратів.
2. Обчислюється приведений відхил.
3. В залежності від віддаленості крапок від апроксимуючої кривої, даним призначаються вагові коефіцієнти за наступним правилом (чим далі крапка, тим менше її вага):

$$w_k = \begin{cases} (1 - u_k^2)^2, & |u_k| < 1 \\ 0, & |u_k| \geq 1 \end{cases} \quad (0.5)$$

4. Якщо вагові коефіцієнти досить сильно змінилися, то здійснюється перехід до пункту 1, в іншому разі розрахунок завершується.

Оскільки в приведеному вище адаптивному алгоритмі присутній четвертий ступінь відхилю, то він називається Bisquare weights (біквадратні вагові коефіцієнти). Для вибору такого способу наближення параметричною моделлю слід встановити опцію **Bisquare** в списку **Robust** діалогового вікна **Fit options for**.

На рисунку 1.11 приведений результат апроксимації даних з викидом за допомогою алгоритму Bisquare weights з автоматичним підбором вагових коефіцієнтів.

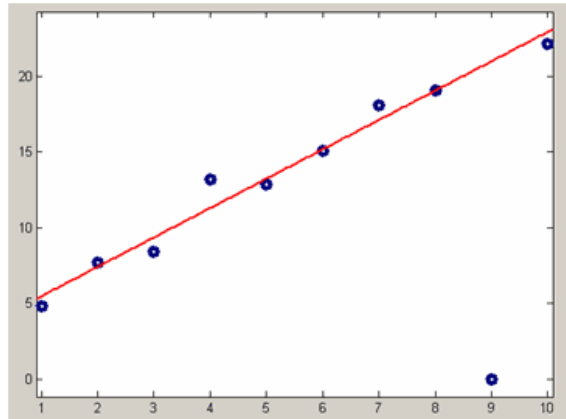


Рис. 1.11 – Апроксимація даних з викидом за допомогою алгоритму Bisquare weights

Інші опції в діалоговому вікні **Fit options for** пов'язані з алгоритмами мінімізації цільової функції.

Оцінка результатів апроксимації

Після виконання апроксимації оцінка якості наближення може бути проведена як візуально, так і з використанням різних критеріїв: SSE (сума квадратів помилок), R-square (критерій R-квадрат), Adjusted R-square (уточнений R-квадрат), RSME (корінь з середнього для квадрата помилки). Значення цих критеріїв для кожної апроксимуючої функції наводяться у таблиці **Table of Fits** вікна **Fitting**. Розглянемо їх докладніше.

Критерій SSE (Sum of squares due to error) – сума квадратів помилок.

Критерій SSE обчислюється за формулою:

$$SSE = \sum_{k=1}^n w_k (y_k - \hat{y}_k)^2, \quad (0.6)$$

де w_k - вагові коефіцієнти (якщо вони не задані при імпорті даних, то вважаються рівними одиниці), y_k - ординати точок вихідних даних, а $\hat{y}_k$ - ординати точок апроксимуючої кривої. Близькість SSE до нуля говорить про хорошу якість наближення даних апроксимуючої функцією.

Критерій R-квадрат (R-square) – квадрат змішаної кореляції.

Критерій R-квадрат визначається як відношення суми квадратів щодо регресії SSR до повної суми квадратів SST, тобто:

$$\begin{aligned}
SSR &= \sum_{k=1}^n w_k (\hat{y}_k - \bar{y})^2, \\
SST &= \sum_{k=1}^n w_k (y_k - \bar{y})^2, \\
R\text{-квadrat} &= \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST},
\end{aligned} \tag{0.7}$$

де $\bar{y}$ - середнє значення.

Критерій R-квадрат може приймати значення тїльки вїд нуля до одиниці і, як правило, чим ближче вїн до одиниці, тим краще апроксимуюча функція наближає початкові данї.

Проте, при збїльшеннї числа параметрїв апроксимуючої функції значення критерїю R-квадрат може збїльшитися, хоча разом з тим, якїсть наближення не покращає. У зв'язку з цим часто застосовують їнший критерїй - уточнений R-квадрат, в який входить число коефіцієнтїв апроксимуючої функції.

Якщо число точок вихїдних даних рївне n , а число параметрїв апроксимуючої функції рївне m , то критерїй уточнений R-квадрат визначається так:

$$R\text{-квadrat} = 1 - \frac{SSE(n-1)}{SST(n-m)}. \tag{0.8}$$

Їого значення не може перевищувати одиниці, а близькї до одиниці значення уточненого R-квадрат свїдчать про хороше наближення початкових даних апроксимуючою функцією.

Корїнь з середнього для квадрата помилки RSME (Root mean Squared Error):

$$RSME = \sqrt{\frac{SSE}{n-m}}. \tag{0.9}$$

Блиькї до нуля значення RSME означають хороше наближення початкових даних параметричною моделлю.

Порядок виконання роботи

1. Підготувати вихїднї данї для виконання лабораторної роботи: у прямокутній системї координат нанести 20-30 точок, що їмїтують отриманї експериментальнї данї (рис. 1.12) і занести координати точок у таблицю.

2. Запустити програму MATLAB.

3. Занести координати точок у робоче середовище MATLAB, для чого у командному вїкнї програми ввести команду:

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]; \quad y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n];$$

де x – їм'я незалежної змїнної, y – їм'я залежної змїнної, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – абсциси точок, $y_1, y_2, \dots, y_n$ – ординати точок.

4. Запустити додаток Curve Fitting Toolbox та їмпортувати у нього введенї данї.

5. Виконати апроксимацію 3-4 видами апроксимуючих функцій, порївняти отриманї результати.

6. Виконати згладжування вихідних даних одним з доступних у додатку методів.

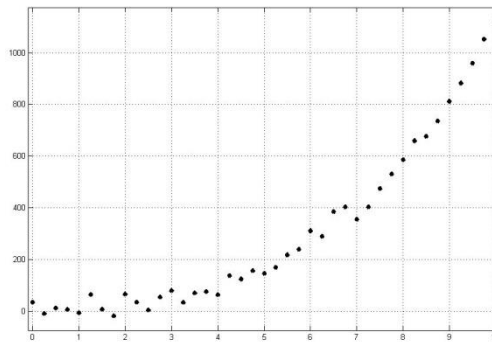


Рис. 1.12 – Вихідні дані для виконання роботи

7. Знайти апроксимуючі функції для згладжених даних, порівняти отримані результати з попередніми.

8. Для імітації викиду в вихідних даних змінити значення ординати однієї з точок таким чином, щоб воно значно відрізнялося від значень ординат найближчих точок.

9. Створити набір даних з викидом.

10. Виконати апроксимацію, порівняти отримані результати з результатами апроксимації даних без викиду.

11. Виконати апроксимацію одним з методів стійких до викидів даних, порівняти з раніше отриманими результатами.

5.2.3 Дослідження прямих методів вирішення нелінійних рівнянь.

Мета роботи: Дослідити методи половинного розподілу, «золотого перетину» та послідовних ітерацій. Порівняти погрішності методів.

Прямі методи вирішення нелінійних рівнянь виконуються за умови неперервності функції на заданому відрізку, і за умови, що знаки значення функції на кінцях інтервалу різні.

Функція $f = (x-4)^2 - 3x + 8$;

на інтервалі $[-7; 6]$ має точне значення $X_0 = 3.0000$

Сутність методу **половинного розподілу** у послідовному діленні заданого інтервалу навпіл і виключенні інтервалу, на якому значення функції на кінцях інтервалу мають однакові знаки. Процес пошуку продовжується до тих пір, поки значення модуля функції у серединній точці після n -ної ітерації не стане менше заданої погрішності.

Реалізація методу **половинного розподілу**:

```
e= input(['e=']);
```

```
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
```

```
f=@ (x) (x-4)^2-3*x+8;
```

```
while f(a)*f(b)>0
```

```
    a= input(['a=']), b= input(['b=']);
```

```

end
x0=(a+b)/2;
f (x0);
while abs(f(x0))>e
    if f(a)*f(x0)<0
        b=x0;
    else a=x0;
end;
x0=(a+b)/2;
end;
x0, f(x0)

```

Отримане наближене значення $A = 2.9999$

Абсолютна похибка: $\Delta X = |3.0000 - 2.9999| = 0.0001$

Відносна похибка: $\delta = 0.0001 / 2.9999 = 0.000033$

В основі методу «золотого перетину» покладено принцип ділення у пропорціях золотого перетину. У знайдених точках x_1 і x_2 знаходиться значення заданої функції і перевіряються наступні умови:

- якщо $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ – то нові границі a і b будуть дорівнювати x_1 і x_2 відповідно;
- якщо $f(a) \cdot f(x_2) > 0$ – то $a = x_2$;
- якщо $f(x_1) \cdot f(b) > 0$ – то $b = x_1$.

Процес пошуку продовжується доки значення модуля функції у серединній точці після n -ної ітерації не стане менше заданої погрішності.

Реалізація методу «золотого перетину»:

```

k=0.618;
e= input(['e=']);
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
f=@ (x) (x-4)^2-3*x+8;
while f(a)*f(b)>0
    a= input(['a=']), b= input(['b=']);
end;
x1= a+(1-k)*(b-a);
x2= b-(1-k)*(b-a);
while abs(x2-x1)>e
    if f(a)*f(x1)>0
        a=x1;
    else f(b)*f(x2)>0
        b=x2;
    end;
    x1= a+(1-k)*(b-a);
    x2= b-(1-k)*(b-a);
end;
x0=(x1+x2)/2, f(x0)

```

Отримане наближене значення $A = 3.0010$

Абсолютна похибка $\Delta X = |3.0010 - 3.0000| = 0.001$

Відносна похибка $\delta = 0.001/3.0010 = 0.0003$

Сутність методу **послідовних ітерацій** у послідовному виключенні інтервалів, на кінцях яких задана функція приймає значення з однаковими знаками. Обирається число кроків (інтервалів), на які розділяється заданий відрізок. Процес пошуку продовжується до тих пір, доки значення модуля функції у серединній точці після n-ної ітерації не стане менше заданої погрішності.

Реалізація методу **послідовних ітерацій**:

```
e= input(['e=']);
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
f=@ (x) (x-4)^2-3*x+8;
while f(a)*f(b)>0
    a= input(['a=']), b= input(['b=']);
end
x0=a+e
while abs(f(x0))>e
    x0=x0+e;
end;
x0, f(x0)
```

Отримане наближене значення $A = 3.0000$

Абсолютна похибка $\Delta X = 3.0000 - 3.0000 = 0$

Відносна похибка $\delta = 0$

У **методах хорд** та **дотичних** у якості наближень до кореня рівняння приймаються значення координат точок перетину хорди та дотичної з віссю ОХ. Формулу для розрахунку точок перетину отримують з рівняння хорди та дотичної. Ітераційний процес виконується доти, доки модуль значення функції в отриманій точці не буде меншим за погрішність, або доки різниця між значеннями точок у двох послідовних ітераціях не буде меншою за погрішність.

метод дотичних і хорд

Реалізація **методу хорд**:

```
e= input(['e=']);
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
f=@ (x) (x-4)^2-3*x+8;
while f(a)*f(b)>0
    a= input(['a=']), b= input(['b=']);
end
c0=a-((f(a)*(b-a))/(f(b)-f(a)));
while abs(f(c0))>e
    if f(a)*f(c0)<0
        b=c0;
    else a=c0;
end;
c0=a-((f(a)*(b-a))/(f(b)-f(a)));
end;
```

c0, f(c0)

Отримане наближене значення $A = 3.0002$

Абсолютна похибка: $\Delta X = |3.0000 - 3.0002| = 0.0002$

Відносна похибка: $\delta = 0.0002 / 3.0002 = 0.000066$

Реалізація методу дотичних:

```
e= input(['e=']);
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
f=@ (x) (x-4)^2-3*x+8;
df=@ (x) 2*(x-4)-3;
while f(a)*f(b)>0
    a= input(['a=']), b= input(['b=']);
end
x=a;
x1=x-(f(x)/(df(x)));
while abs(f(x1))>e
    x=x1;
    x1=x-(f(x)/(df(x)));
end;
x, f(x1)
```

Отримане наближене значення $A = 2.9924$

Абсолютна похибка: $\Delta X = |3.0000 - 2.9924| = 0.0076$

Відносна похибка: $\delta = 0.0076 / 2.9924 = 0.0025$

Метод середньої точки засновано на алгоритмі виключення інтервалів, на кожній ітерації котрого розглядається одна пробна точка R. Якщо в точці R виконується нерівність $W'(R) < 0$, то точка оптимуму не може лежати лівіше за точку R. Аналогічно, якщо $W'(R) > 0$, то інтервал $x > R$ можна виключити.

Реалізація методу:

```
e= input(['e=']);
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
f=@ (x) ((x-1)^2)-2;
while f(a)*f(b)>0
a= input(['a=']), b= input(['b=']);
end
p=b;
n=a;
x0=(p+n)/2;
f(x0);
df=@ (x0)(2+(p+n))/4;
while abs(df(x0))<e;
end;
if df(x0)<0;
p=x0
x0=(p+n)/2;
else
n=x0;
```

$x_0 = (p+n)/2$;
 end;
 $x_0, f(x_0)$
 Отримане наближене значення $A = 3$
 Абсолютна похибка: $\Delta X = 0$
 Відносна похибка: $\delta = 0$

5.2.4 Дослідження методів вирішення диференціальних рівнянь.

Мета роботи: Дослідити методи Ейлера та Рунге-Кутта

Розглянемо метод Ейлера для диференціального рівняння третього порядку:

$$y''' = 4 + 3y - xy'; \quad y'''(10) = ?$$

Якщо початкові умови: $y''(0) = 0$; $y'(0) = -1$; $y(0) = 2$; $h = 1$

Для знаходження похідної у вказаній точці складемо систему рівнянь:

$$y_1 = y_0 + h \cdot q_0$$

$$q_1 = q_0 + h \cdot p_0$$

$$p_1 = p_0 + h \cdot f(x_0, y_0, q_0, p_0)$$

Розв'язуючи цю систему матимемо на увазі, що:

$$y'' = p; \quad y' = q$$

Результати отримані у Excel запишемо у вигляді таблиці:

i	x	y	q	p	h
0	0	2	-1	0	1
1	1	1	-1	10	
2	2	0	9	18	
3	3	9	27	4	
4	4	36	31	-46	
5	5	67	-15	-58	
6	6	52	-73	222	
7	7	-21	149	820	
8	8	128	969	-282	
9	9	1097	687	-7646	

У кінцевому результаті отримаємо $y'''(10) = -2888$

Реалізувати цей метод можна також за допомогою Matlab, в результаті чого буде отримано той самий результат:

Приклад тексту програми для 3го ступеню рівняння

```

e= input(['e=']); %точка ітерації
h= input(['h=']); %значення кроку розрахунку
x=0; %нульове значення
xn= input(['xn=']); %кінцева точка розрахунку
y= input(['y=']);
q= input(['q=']);
p= input(['p=']);
f=@ (x,y,q,p) 3*x-2*q+y-4;

```

```

yi=y+h*q
qi=q+h*p
pi=p+h*f(x, y, q, p)
x=x+h
while x<xn
    y=yi
    q=qi
    p=pi
yi=y+h*q
qi=q+h*p
pi=p+h*f(x, y, q, p)
x=x+h
end;
yi

```

Приклад тексту програми для 3го ступеню рівняння

```

e= input(['e=']);
h= input(['h=']);
x=0;
xn= input(['xn=']);
y= input(['y=']);
p= input(['p=']);
f=@ (x,y,p) 2+x+y-p;
yi=y+h*p
pi=p+h*f(x,y,p)
x=x+h
while x<xn
    y=yi
    p=pi
yi=y+h*p
pi=p+h*f(x,y,p)
x=x+h
end;
yi

```

Для розв'язку диференційних рівнянь також використовується метод Рунге-Кутта. Розглянемо його застосування на функції:

$$y' = 4 + 3y - xy; \quad y'(10) = ?$$

Якщо початкові умови: $y(0) = 2; \quad h = 1$

Для цього методу шукане значення знайдемо з урахуванням рівняння:

$$y_1 = y_0 + h/6 * (k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + k_4), \quad \text{де}$$

$$k_1 = f(x_0, y_0);$$

$$k_2 = f(x_0 + h/2, y_0 + h/2 * k_1);$$

$$k_3 = f(x_0 + h/2, y_0 + h/2 * k_2);$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + h * k_3);$$

Результати отримані у Excel запишемо у вигляді таблиці:

i	x	k1	k2	k3	k4	y	h
---	---	----	----	----	----	---	---

0	0	10	21,5	35,875	79,75	2	1
1	1	76,16667	115,25	144,5625	184,6458	36,08333	
2	2	170,1563	129,6172	119,4824	4	166,1563	
3	3	4	-136,108	-101,081	-173,135	278,2155	
4	4	-166,964	-127,223	-157,028	-23,8704	170,9635	
5	5	-84,8151	-1	-105,769	188,084	44,40755	
6	6	-74,0882	42,55146	-161,568	546,1542	26,0294	
7	7	-256,14	287,6571	-935,885	4358,253	65,0349	
8	8	-2659,22	4387,316	-14990,7	86752,1	532,6443	
9	9	-66078,1	143168,8	-536883	3681092	11013,68	
10	10	-3375941	9042699	-3,8E+07	2,96E+08	482277,9	

$y'(10) = 482277,9$

Реалізація методу в Matlab:

```
e= input(['e=']);
h= input(['h=']);
x=0; y= input(['y=']);
f=@ (x,y) 4+3*y-y*x;
k1=f(x, y);
k2=f(x+h/2, y+h/2*k1);
k3=f(x+h/2, y+h/2*k2);
k4=f(x+h, y+h*k3);
yi= y+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
xi=x+1;
while xi<e
    x=xi;
    y=yi;
    k1=f(x, y);
    k2=f(x+h/2, y+h/2*k1);
    k3=f(x+h/2, y+h/2*k2);
    k4=f(x+h, y+h*k3);
    yi= y+h/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    xi=x+1;
end;
yi
    yi =
    4.8228e+005
```

5.2.5 Дослідження методів числового інтегрування.

Мета роботи: Дослідити методи прямокутників, трапецій та Сімпсона.

Знайдемо значення інтегралу від функції $(x-2)^2-6x+12$ на інтервалі $[0; 3]$ і розіб'ємо границі інтегрування на $n = 50$ частин.

Методи прямокутників та трапецій безпосередньо застосовують заміну інтегралу інтегральною сумою. В цих методах площа фігури складається з площ елементарних прямокутників та прямокутних трапецій відповідно.

Метод прямокутників використовує формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_{i-1} + \frac{h}{2}) = h \sum_{i=1}^n f(x_i - \frac{h}{2})$$

Метод прямокутників в Matlab реалізуємо за допомогою:

```
a= input(['a=']);
b= input(['b=']);
n= input(['n=']);
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;
y=(x-2).^2-6*x+12;
h*sum(y)
ans =
    12.3318
```

У методі трапецій застосовується формула

$$I \approx h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right),$$

Для розрахунку інтегралів методом трапецій у Matlab використовується функція trapz.

```
a=input(['a=']);
b=input(['b=']);
n=input(['n=']);
h=(b-a)/n;
x = a:h:b;
y= (x-2).^2-6*x+12;
h*trapz(y)
ans =
    12.0018
```

Сутність методу Сімпсона у наближенні підінтегральної функції на відріжку [a;b] до багаточлена другого ступеня, тобто наближення графіка функції на відріжку до параболи.

Цим методом розрахунок виконується за формулою

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_2(x) dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

Реалізація методу

```
a=input(['a=']);
b=input(['b=']);
f=@ (x) (x-2).^2-6*x+12;
integr = (b-a)/6*(f(a)+4*f((a+b)/2)+f(b));
integr
integr = 12
```

5.2.6 Интерполирование при помощи приближения Лагранжа и полиномов Ньютона

Задание 1:

4.3. Приближение Лагранжа

Интерполирование предполагает вычисление неизвестных значений функции путем получения взвешенного среднего значения функции в известных соседних точках. При линейном интерполировании используется отрезок прямой, которая проходит через две точки. Тангенс угла наклона между точками $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ равен $m = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$, и формулу, использующую тангенс угла наклона прямой в точке, $y = m(x - x_0) + y_0$, можно переписать в виде

$$(1) \quad y = P(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Если разложить формулу (1), то в результате получим полином степени ≤ 1 . Вычисляя $P(x)$ в точках x_0 и x_1 , получаем соответственно точки y_0 и y_1 :

$$(2) \quad \begin{aligned} P(x_0) &= y_0 + (y_1 - y_0)(0) = y_0, \\ P(x_1) &= y_0 + (y_1 - y_0)(1) = y_1. \end{aligned}$$

Французский математик Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange) использовал для нахождения этого полинома несколько иной метод. Он отметил, что полином можно записать в виде

$$(3) \quad y = P_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Каждый член в правой части (3) включает линейный множитель, поэтому сумма является полиномом степени ≤ 1 . Обозначим отношения в (3) соответственно через

$$(4) \quad L_{1,0}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{и} \quad L_{1,1}(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Вычисления показывают, что $L_{1,0}(x_0) = 1$, $L_{1,0}(x_1) = 0$, $L_{1,1}(x_0) = 0$ и $L_{1,1}(x_1) = 1$. Таким образом полином $P_1(x)$ в (3) также проходит через две данные точки:

$$(5) \quad P_1(x_0) = y_0 + y_1(0) = y_0 \quad \text{и} \quad P_1(x_1) = y_0(0) + y_1 = y_1.$$

Члены $L_{1,0}(x)$ и $L_{1,1}(x)$ в (4) называются *коэффициентами полинома Лагранжа*, основанными на узлах x_0 и x_1 . Используя это замечание, можно записать (3) в виде суммы

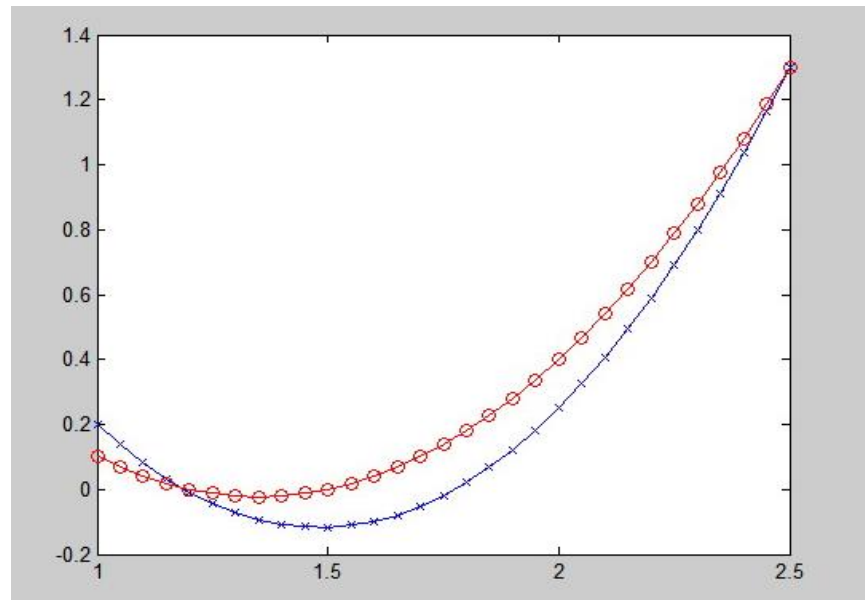
$$(6) \quad P_1(x) = \sum_{k=0}^1 y_k L_{1,k}(x).$$

Предположим, что ордината y_k вычислена по формуле $y_k = f(x_k)$. Если $P_1(x)$ используется для приближения $f(x)$ на интервале $[x_0; x_1]$, такой процесс называется *интерполированием*. Если $x < x_0$ (или $x_1 < x$), то использование $P_1(x)$ называют *эстраполированием*. Проиллюстрируем эти понятия на примере.

Текст программы:

```
function[C,L]=lagran(X,Y)
X=[1 2 2.5]
Y=[0.2 0.25 1.3]
w=length(X);
n=w-1;
L=zeros(w,w);
for k=1:n+1
    V=1;
    for j=1:n+1
        if k~=j
            V=conv(V,poly(X(j)))/(X(k)-X(j));
        end
    end
    L(k,:)=V;
end
C=Y*L;
o1=1:0.05:2.5;
y1=polyval(C,o1);
plot(o1,y1,'bx-')
hold on
```

```
o=1:0.05:2.5;  
q=poly(1.5)  
p=poly(1.2)  
c1=conv(q,p)  
y=polyval(c1,o1);  
plot(o,y,'ro-')  
hold on
```



Задание 2:

4.4. Полиномы Ньютона

Иногда полезно найти несколько приближающих полиномов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_N(x)$ и затем выбрать из них тот, который удовлетворяет нашим требованиям. Если использовать полиномы Лагранжа, то не существует прямо выраженного соотношения между $P_{N-1}(x)$ и $P_N(x)$. Каждый полином строится индивидуально, и вычисление полинома высокой степени потребует выполнения множества операций. Выберем новый подход и построим полином Ньютона, который обладает рекуррентным свойством

$$\begin{aligned}(1) \quad & P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0), \\(2) \quad & P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1), \\(3) \quad & P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\& \quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \\& \quad \vdots \\(4) \quad & P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\& \quad + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\& \quad + a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \dots \\& \quad + a_N(x - x_0) \dots (x - x_{N-1}).\end{aligned}$$

Здесь полином $P_N(x)$ получаем из $P_{N-1}(x)$ с помощью рекуррентного соотношения

$$(5) \quad P_N(x) = P_{N-1}(x) + a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{N-1}).$$

Говорят, что полином (4) — это полином Ньютона с N **центрами** $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$. Он включает сумму произведений линейных множителей

$$a_N(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{N-1}),$$

поэтому $P_N(x)$ — обычный полином степени $\leq N$.

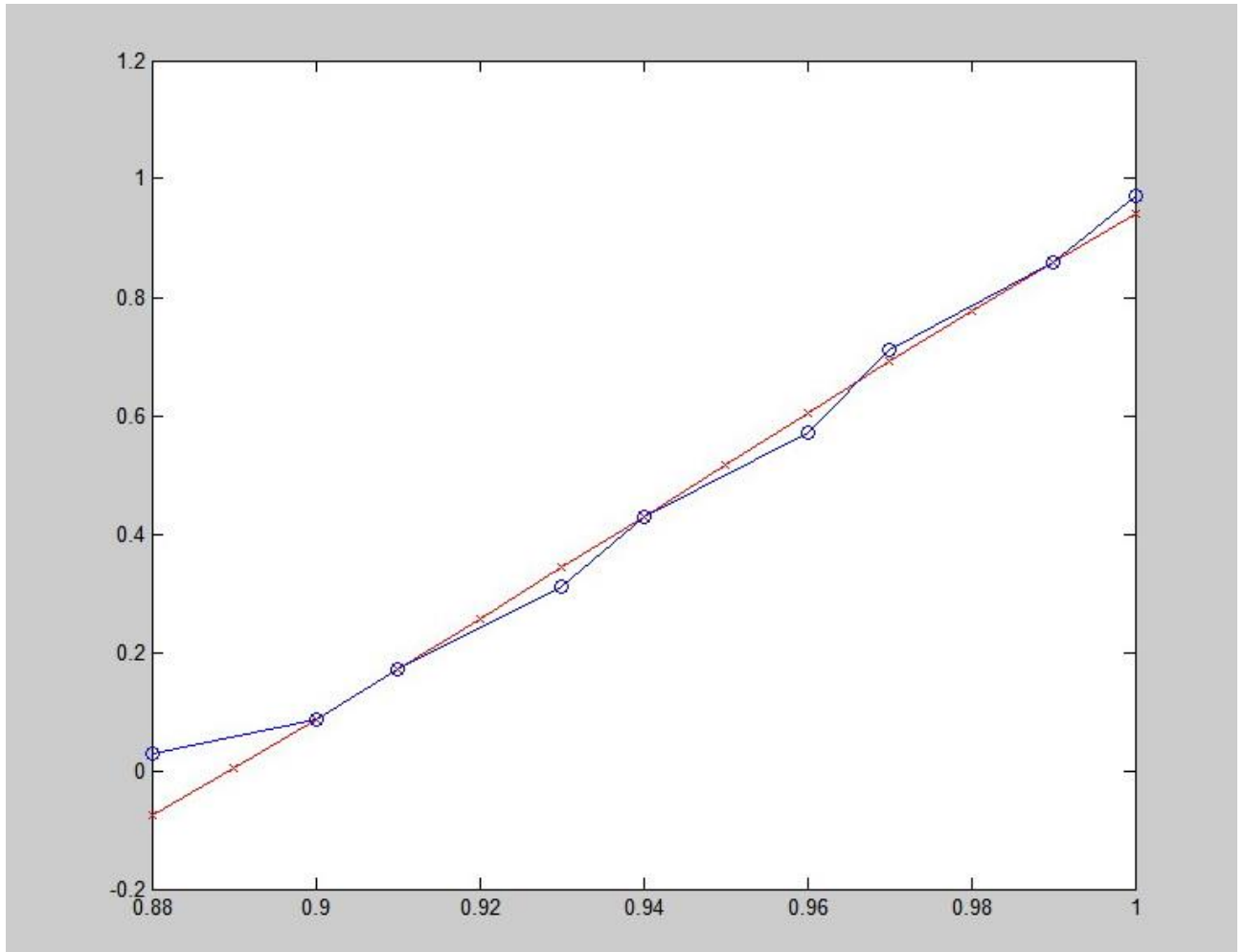
Текст программы:

```
function [C,D]=newpoly(X,Y)
X=[0.9 0.91 0.94 0.99];
Y=[0.086 0.17 0.43 0.86];
n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';
for j=2:n
    for k=j:n
        D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
    end
end
C=D(n,n)
for k=(n-1):-1:1
    C=conv(C,poly(X(k)));
    m=length(C);
```

```

C(m)=C(m)+D(k,k);
end
X1=[0.88:0.01:1];
Y1=polyval(C,X1);
plot(X1,Y1,'rx-')
hold on
t=[0.88 0.9 0.91 0.93 0.94 0.96 0.97 0.99 1];
Z=[0.029 0.086 0.17 0.31 0.43 0.57 0.71 0.86 0.97];
plot(t,Z,'bo-')
hold on

```



5.2.7 Повний факторний експеримент в Excel.

Решение в Excel:

t	0,59		№	Пар-ры	Код	-1	0	1	dx		Sy	1,23
F	6,00		1	d	x1	3,5	4	4,5	0,5		Sад=	168,76
			2	k	x2	0,8	1	1,2	0,2			
			3	p	x3	3	3,5	4	0,5		Fr	137,59
1	1	1			расч	tp	зн				Ответ:	
1	1	-1			b0	0,67	0,60	0,67	1,00		Неадекватное	
1	-1	1			b1	2,93	0,62	2,93	1,00			
1	-1	-1			b2	0,50	0,50	0,00	0,00			
-1	1	1			b3	2,08	0,55	0,00	0,00			
-1	1	-1			b12	2,25	0,54	0,00	0,00			
-1	-1	1			b13	9,24	0,58	0,00	0,00			
-1	-1	-1			b23	1,50	0,43	0,00	0,00			
									2			
	x1	x2	x3	y	x1y	x2y	x3y	x1x2y	x1x3y	x2x3y		
1	4,50	1,20	4,00	-0,25	-1,13	-0,30	-1,00	-1,35	-4,50	-1,20		
2	4,50	1,20	3,00	0,75	3,38	0,90	2,25	4,05	10,13	2,70		
3	4,50	0,80	4,00	1,63	7,31	1,30	6,50	5,85	29,25	5,20		
4	4,50	0,80	3,00	2,63	11,81	2,10	7,88	9,45	35,44	6,30		
5	3,50	1,20	4,00	-1,08	-3,79	-1,30	-4,33	-4,55	-15,17	-5,20		
6	3,50	1,20	3,00	-0,08	-0,29	-0,10	-0,25	-0,35	-0,87	-0,30		
7	3,50	0,80	4,00	0,38	1,31	0,30	1,50	1,05	5,25	1,20		
8	3,50	0,80	3,00	1,38	4,81	1,10	4,13	3,85	14,44	3,30		
sum				0,67	2,93	0,50	2,08	2,25	9,24	1,50		
	Sy(b0)	Sy(b1)	Sy(b2)	Sy(b3)	Sy(b12)	Sy(b13)	Sy(b23)	y(зн)	Sад			
	0,84	16,42	0,64	9,51	12,96	188,92	7,29	13,83854	198,49			
	0,01	0,20	0,16	0,03	3,24	0,77	1,44	13,83854	171,31			
	0,92	19,23	0,64	19,51	12,96	400,21	13,69	13,83854	149,17			
	3,84	78,95	2,56	33,54	51,84	686,06	23,04	13,83854	125,74			
	3,06	45,14	3,24	41,17	46,24	595,92	44,89	10,91146	143,88			
	0,56	10,36	0,36	5,44	6,76	102,41	3,24	10,91146	120,89			
	0,09	2,61	0,04	0,34	1,44	15,96	0,09	10,91146	111,02			
	0,50	3,55	0,36	4,17	2,56	26,96	3,24	10,91146	90,94			
	1,23	22,06	1,00	14,21	17,25	252,15	12,12					
	0,60	0,62	0,50	0,55	0,54	0,58	0,43					

6. Домашні контрольні роботи

Контрольна робота № 1

В результаті експерименту була визначена деяка таблична залежність. За допомогою методу найменших квадратів підберіть функціональну залежність заданого типу. Визначить сумарну похибку.

Варіант №1. $P(s)=As^3+Bs^2+D$

s	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
P	12	10.1	11.58	17.4	30.68	53.6	87.78	136.9	202.5	287

Варіант № 2. $G(s)=As^2-B$

s	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
G	3.99	5.65	6.41	6.71	7.215	7.611	7.83	8.19	8.3

Варіант № 3. $K(s)=As^2/Bs+D$

s	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	3.5	3.5	4
K	2.31	2.899	3.534	4.412	5.578	6.92	8.699	10.69	13.39

Варіант № 4. $V(s)=As^3*Bs+D$

s	0.2	0.7	1.2	1.7	2.2	2.7	3.2
V	2.3198	2.8569	3.5999	4.4357	5.5781	6.9459	8.6621

Варіант № 5. $W(s)=A/(Bs+C)$

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
W	0.529	0.298	0.267	0.171	0.156	0.124	0.1	0.078	0.075

Варіант № 6. $Q(s)=As^2+Bs+C$

s	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5	2.75	3
Q	5.21	4.196	3.759	3.672	4.592	4.621	5.758	7.173	9.269

Варіант № 7. $Y=x/(Ax-B)$

x	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9
Y	0.61	0.6	0.592	0.58	0.585	0.583	0.582	0.57	0.572	0.571

Варіант № 8. $V=1/(A+BU^2)$

u	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
V	5.197	7.78	11.14	15.09	19.24	23.11	26.25	28.6	30.3

Варіант № 9. $R=At^2+14.5$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	2.11	5.2	11.15	19.27	26.2	30.37	32.0	33.0	33.22	33.2

Варіант № 10. $Z=At^4+Bt^3+Ct^2+Dt+K$

t	0.66	0.9	1.17	1.47	1.7	1.74	2.08	2.63	3.12
Z	38.9	68.8	64.4	66.5	64.95	59.36	82.6	90.63	113.5

Варіант № 11. $R=Ch^2+Dh+K$

h	2	4	6	8	10	12	14	16
R	0.035	0.09	0.147	0.2	0.24	0.28	0.31	0.34

Варіант №12. $G=DL+K$

L	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
G	2	2.39	2.81	3.25	3.75	4.11	4.45	4.85	5.25

Варіант № 13. $Y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

x	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
Y	1.5	2.7	3.9	5.5	7.1	9.1	11.1	12.9	15.5	17.9

Варіант № 14. $Y=Ax^3+Cx+D$

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
Y	1.2	2.2	3.0	6.0	7.7	13.6

Варіант № 15. $R=Ch^2+K$

h	0.29	0.57	0.86	0.14	1.43	1.71	1.82	2		
R	3.33	6.67	7.5	13.33	16.67	23.33	27.8	33.35		
Вариант № 16. $Z=At^4+Ct^2+K$										
t	1	1.14	1.29	1.43	1.57	1.71	1.86	1.92	2	
Z	6.2	7.2	9.6	12.5	17.1	22.2	28.3	35.3	36.5	
Вариант № 17. $Z=At^4+Bt^3+Dt+K$										
t	2	2.13	2.25	2.38	2.5	2.63	2.75	2.88	3	
Z	12.57	16.43	19	22.86	26.71	31.86	37.0	43.43	49.86	
Вариант № 18. $Z=At^4+Bt^3+Ct^2+K$										
t	3	3.13	3.25	3.38	3.5	3.63	3.75	3.88	4	
Z	57.14	64.0	74.29	81.14	91.43	105.14	115.43	129.14	142.86	
Вариант № 19. $Z=At^4+Dt+K$										
t	0.88	0.9	0.91	0.93	0.94	0.96	0.97	0.99	1	
Z	0.029	0.086	0.17	0.31	0.43	0.57	0.71	0.86	0.97	
Вариант № 20. $Y=Ax^3+D$										
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8
Y	0.072	0.073	0.075	0.096	0.12	0.16	0.24	0.35	0.42	0.47
Вариант № 21. $R=At^3+Ct^2$										
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	2.11	5.2	11.15	19.27	26.2	30.37	32.0	33.0	33.22	33.2
Вариант № 22. $W(s)=1/(Bs-C)$										
s	2	2.38	2.75	3.13	3.5	3.88	4.25	4.63	5	
W	3.5	2.29	2.29	1.99	1.71	1.5	1.35	1.21	1.14	
Вариант № 23. $V(s)=As^3/Bs^2$										
s	1	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20	
V	1.11	1.57	2.26	2.84	3.25	3.75	4.05	4.45	4.75	
Вариант № 24. $Y=x/(Ax+B)$										
x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
Y	0.2140	0.2210	0.2237	0.2258	0.2262	0.2268	0.2275	0.2283	0.2288	
Вариант № 25. $V(s)=As^3+B/s^2-D$										
s	8	8.5	9	9.5	10	10.5	11	11.5	12	
V	25.75	27.25	29.5	31.0	32.5	34.0	35.5	37.75	39.25	

Контрольна робота № 2

Зробити вибір числового методу для вирішення задачі. Перевірити адекватність розробленої моделі. Самостійно обрати фактори, їх нульове значення та інтервал варіювання.

Варіанти завдань:

1. Задано дві речовини, котрі піддаються хімічній реакції зі швидкістю реакції $K=2$ м/с. Початкові концентрації: $C_1(0)=0,7$, $C_2(0)=0,3$. При об'ємній витраті $V_1=5$ м³/с і $V_2=10$ м³/с і площиною перетину $S=1$ м². Необхідно визначити концентрації речовин 1 і 2 через 10 хвилин з кроком в часі 10 секунд, якщо математичний опис реакції для 1 (2) компоненту має вигляд:

$$\frac{V_{1(2)}}{S} \cdot \frac{dC_{1(2)}}{d\tau} = -k \cdot C_1 \cdot C_2$$

2. Відомі експериментальні дані розповсюдження температури по ширині заготівки, що нагрівається

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T	10	15	20	25	30	20	10	5	15	25	30	15	10	5	10

Необхідно визначити функціональну залежність початкового розподілу температури. Знайти початкову кількість тепла від цього розподілу, яке представляє наступну залежність

$$q = \int_a^b T(x) dx + q_0,$$

за допомогою числових методів інтегрування. $a=1\text{см}$, $b=10\text{см}$, $q_0 = 5\text{кДж/м}^3$.

3. Є рівняння, що описує зміни характеристики об'єкту по координаті:

$$A \frac{d^2 F}{dx^2} + B \frac{dF}{dx} + C \cdot F = e^x + Z \cdot x$$

Визначити розподіл функції при максимальному $x=20$ з кроком $0,05$.
 $A=1$, $B=-6$, $C=9$, $Z=-3$.

4. Якщо відомо, що закон розподілу температури в часі наступний

$$\frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -T^2 + T, \text{ необхідно визначити якою температура буде через}$$

30 хвилин, якщо крок за часом розрахунку дорівнює 10 секунд,
 $c=10$, $\rho=1,5$, $\lambda=3,5$.

5. Задано дві речовини, котрі піддаються хімічній реакції зі швидкістю реакції $K=3\text{ м/с}$. Початкові концентрації: $C_1(0)=0,5$, $C_2(0)=0,5$. При об'ємній витраті $V_1=3\text{ м}^3/\text{с}$ і $V_2=12\text{ м}^3/\text{с}$ і площиною перетину $S_1=1\text{ м}^2$ і $S_2=1,5\text{ м}^2$. Необхідно визначити концентрації речовин 1 і 2 через 20 хвилин з кроком в

часі 20 секунд, якщо математичний опис реакції для 1 (2) компоненту має вигляд:

$$\frac{V_{1(2)}}{S} \cdot \frac{dC_{1(2)}}{d\tau} = -k \cdot C_1 \cdot C_2$$

6. Відомі експериментальні дані розповсюдження температури по ширині заготівки, що нагрівається

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T	-10	-5	-2	0	5	10	15	20	10	5	0	-5	-10	-5	0

Необхідно визначити функціональну залежність початкового розподілу температури. Знайти початкову кількість тепла від цього розподілу, яке представляє наступну залежність

$$q = q_0 - \int_a^b T(x) dx,$$

за допомогою числових методів інтегрування. $a=2\text{см}$, $b=12\text{см}$, $q_0 = 10\text{кДж/м}^3$.

7. Є рівняння, що описує зміни характеристики об'єкту по координаті:

$$A \frac{d^2 F}{dx^2} + B \frac{dF}{dx} + C \cdot F = e^{Kx}$$

Визначити розподіл функції при максимальному $x=30$ з кроком 0,1. $A=1$, $B= -6$, $C=9$, $K=3$.

8. Якщо відомо, що закон розподілу температури в часі наступний

$$\frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -T^2 + KT, \text{ необхідно визначити якою температура буде через}$$

60 хвилин, якщо крок за часом розрахунку дорівнює 30 секунд,

$c=10$, $\rho=1,5$, $\lambda=3,5$, $K=2$.

9. Задано дві речовини, котрі піддаються хімічній реакції зі швидкістю реакції $K=0,5$ м/с. Початкові концентрації: $C_1(0)=0,9$, $C_2(0)=0,1$. При об'ємній витраті $V_1=5$ м³/с і $V_2=2$ м³/с і площиною перетину $S=0,5$ м². Необхідно

визначити концентрації речовин 1 і 2 через 5 хвилин з кроком в часі 5 секунд, якщо математичний опис реакції для 1 (2) компоненту має вигляд:

$$\frac{V_{1(2)}}{S} \cdot \frac{dC_{1(2)}}{d\tau} = -k \cdot C_1 \cdot C_2$$

10. Відомі експериментальні дані розповсюдження температури по ширині заготівки, що нагрівається

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
T	10	15	20	25	30	20	10	5	15	25	30	15	10	5	10

Необхідно визначити функціональну залежність початкового розподілу температури. Знайти початкову кількість тепла від цього розподілу, яке представляє наступну залежність

$$q = \int_a^b T(x) dx + q_0,$$

за допомогою числових методів інтегрування. $a=-8\text{см}$, $b=2\text{см}$, $q_0 = 4\text{кДж/м}^3$.

11. Є рівняння, що описує зміни характеристики об'єкту по координаті:

$$A \frac{d^2 F}{dx^2} + B \frac{dF}{dx} + C \cdot F = e^x + Z \cdot x^2 + x$$

Визначити розподіл функції при максимальному $x=20$ з кроком 0,05.
 $A=1$, $B=-8$, $C=16$, $Z=-3$.

12. Якщо відомо, що закон розподілу температури в часі наступний

$$\frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -T^2, \text{ необхідно визначити якою температура буде через 50}$$

хвилин, якщо крок за часом розрахунку дорівнює 20 секунд,

$c=5$, $\rho=80$, $\lambda=13,5$.

13. Задано дві речовини, котрі піддаються хімічній реакції зі швидкістю реакції $K=10$ м/с. Початкові концентрації: $C_1(0)=0,2$, $C_2(0)=0,8$. При об'ємній витраті $V_1=10$ м³/с і $V_2=12$ м³/с і площиною перетину $S=1,5$ м². Необхідно

визначити концентрації речовин 1 і 2 через 10 хвилин з кроком в часі 20 секунд, якщо математичний опис реакції для 1 (2) компоненту має вигляд:

$$\frac{V_{1(2)}}{S} \cdot \frac{dC_{1(2)}}{d\tau} = -k \cdot C_1 \cdot C_2$$

14. Відомі експериментальні дані розповсюдження температури по ширині заготівки, що нагрівається

x	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
T	-10	-5	-2	0	5	10	15	20	10	5	0	-5	-10	-5	0

Необхідно визначити функціональну залежність початкового розподілу температури. Знайти початкову кількість тепла від цього розподілу, яке представляє наступну залежність

$$q = q_0 - \int_a^b T(x) dx,$$

за допомогою числових методів інтегрування. $a = -3\text{см}$, $b = 18\text{см}$, $q_0 = 20\text{кДж/м}^3$.

15. Є рівняння, що описує зміни характеристики об'єкту по координаті:

$$A \frac{d^2 F}{dx^2} + B \frac{dF}{dx} + C \cdot F = e^{Kx} + x^2$$

Визначити розподіл функції при максимальному $x = 50$ з кроком 0,2. $A = 1$, $B = 6$, $C = 9$, $K = -3$.

16. Якщо відомо, що закон розподілу температури в часі наступний

$$\frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{dT}{d\tau} = T^2 - KT, \text{ необхідно визначити якою температура буде через}$$

60 хвилин, якщо крок за часом розрахунку дорівнює 30 секунд, $c = 15$, $\rho = 15$, $\lambda = 3,5$, $K = 3$.

17. Задано дві речовини, котрі піддаються хімічній реакції зі швидкістю реакції $K=3$ м/с. Початкові концентрації: $C_1(0)=0,4$, $C_2(0)=0,6$. При об'ємній витраті $V_1=5$ м³/с і $V_2=7$ м³/с і площиною перетину $S=1$ м². Необхідно визначити концентрації речовин 1 і 2 через 50 хвилин з кроком в часі 30 секунд, якщо математичний опис реакції для 1 (2) компоненту має вигляд:

$$\frac{V_{1(2)}}{S} \cdot \frac{dC_{1(2)}}{d\tau} = -k \cdot C_1 \cdot C_2$$

18. Відомі експериментальні дані розповсюдження температури по ширині заготівки, що нагрівається

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T	10	15	20	25	30	20	10	5	15	25	30	15	10	5	10

Необхідно визначити функціональну залежність початкового розподілу температури. Знайти початкову кількість тепла від цього розподілу, яке представляє наступну залежність

$$q = \int_a^b T(x) dx - q_0,$$

за допомогою числових методів інтегрування. $a=1,5$ см, $b=10,5$ см, $q_0 = 5$ кДж/м³.

19. Є рівняння, що описує зміни характеристики об'єкту по координаті:

$$A \frac{d^2 F}{dx^2} + B \frac{dF}{dx} + C \cdot F = e^{-x} - Z \cdot x$$

Визначити розподіл функції при максимальному $x=40$ з кроком 0,5.
 $A=1$, $B= 2$, $C=1$, $Z=-3$.

20. Якщо відомо, що закон розподілу температури в часі наступний

$$\frac{c\rho}{\lambda} \cdot \frac{dT}{d\tau} = -KT^2 - T, \text{ необхідно визначити якою температура буде через}$$

30 хвилин, якщо крок за часом розрахунку дорівнює 10 секунд,

$c=1, \rho=150, \lambda=10, K=2$.

7. Тест на модульний контроль

- 1) К неустранимым погрешностям относится какая погрешность?
- а) метода решения;
 - б) исходных данных;
 - в) округления.
- 2) Для приближенного значения абсолютная погрешность принимается
- а) единица последнего разряда;
 - б) половины единицы последнего разряда;
 - в) 1 %.
- 3) Малое приращение Δx приводит к малому приращению Δy . Как называется такая характеристика?
- а) устойчивость;
 - б) корректность;
 - в) сходимость.
- 4) Решение представляется в виде формулы. Для каких методов это характерно?
- а) графические методы;
 - б) аналитические методы;
 - в) численные методы.
- 5) Для использования итерационного метода произведение функций на границах интервала должно быть:
- а) больше нуля;
 - б) равно нулю;
 - в) меньше нуля.
- 6) Абсолютная погрешность двух приближительных чисел a и b равняется:
- а) сумме их абсолютных погрешностей;
 - б) сумме их относительных погрешностей;
 - в) произведению их относительных погрешностей.
- 7) Что такое интеграл? Это площадь фигуры, которая ограничена...?
- а) Осью ОУ, границами интегрирования и графиком погрешности;
 - б) Осью ОХ, границами интегрирования и графиком функции;
 - в) Осью ОУ, границами интегрирования и графиком функции.
- 8) В каком из этих методов первая и следующие точки приближения ищутся как середина отрезка $[a, b]$?
- а) метод хорд;
 - б) метод касательных;
 - в) метод деления пополам.
- 9) В каком из методов для поиска первого приближения ставится условие $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$?
- а) метод хорд;
 - б) метод касательных;

- в) метод Фибоначчи.
- 10) Каким способом осуществляется расчет дифференциальных уравнений по методу Эйлера?
- а) понижением степени производной с помощью замены первой и т.д. производных;
 - б) расчетом ответа итерационными методами;
 - в) с помощью метода трапеций.
- 11) Разность между истинным и приближенным значением. Какая это погрешность?
- а) абсолютная;
 - б) приведенная;
 - в) относительная.
- 12) Относительная погрешность от произведения двух приближенных чисел a и b равна:
- а) произведению относительных погрешностей;
 - б) сумма абсолютных погрешностей;
 - в) сумме относительных погрешностей.
- 13) Близость результата к численному решению. Как называется такая характеристика?
- а) устойчивость;
 - б) корректность;
 - в) сходимость.
- 14) Для решения простейших алгебраических уравнений используют:
- а) прямые методы;
 - б) приближенные методы;
 - в) итерационные методы.
- 15) Что такое интеграл? Это площадь фигуры, которая ограничена...?
- а) Осью ОУ, границами интегрирования и графиком погрешности;
 - б) Осью ОХ, границами интегрирования и графиком функции;
 - в) Осью ОУ, границами интегрирования и графиком функции.
- 16) По классификации методов метод Фурье относится к:
- а) приближительных методов;
 - б) классических методов;
 - в) численным методам.
- 17) Цель итерационных методов – это?
- а) поиск первого приближения к точке ответа (корня);
 - б) график функции;
 - в) поиск погрешности;
- 18) В каком из методов используется для поиска последовательное приближение от точки a до точки b с шагом h ?
- а) метод деления пополам;

б) метод последовательных итераций;

в) метод золотого сечения.

19) По методу Фибоначчи для поиска приблизительного корня уравнения каким будет следующее число по ряду Фибоначчи, если два предыдущих 3 и 5?

а) 6;

б) 4;

в) 8.

20) Метод Рунге-Кутты отличается от метода Эйлера...?

а) видом уравнений, которые решаются этими методами;

б) разбиением шага h для поиска следующей точки;

в) названием.