

ВСТУП

Розвиток техніки, який має перспективний характер, призвів до суттєвої зміни тактичних і експлуатаційних характеристик літальних, автомобільних, судних та ракетних апаратів. Збільшилися потужності двигунів, збільшилась швидкість польоту і маневрування, ускладнилися фактори механічних, кліматичних та інших видів впливу. Все це значно розширило і ускладнило умови експлуатації об'єктів (радіоелектронної апаратури), які встановлюються на рухомих носіях. Разом з тим до неї пред'являються все більш підвищені вимоги у відношенні надійності роботи і стійкості до жорстких умов експлуатації.

При проектуванні об'єктів (апаратури), основною задачею є безвідмовність функціонування останньої. Потрібно створити найбільш сприятливі умови для роботи деталей та об'єктів в цілому, а також розробити способи захисту їх від впливу навколишнього середовища.

Ізоляція є найбільш поширеним засобом захисту об'єктів (апаратури) від вібрацій, ударів та статичних навантажень. Проте вона має ряд особливостей, без врахування яких не можна досягнути потрібного ефекту.

У результаті встановлення апаратури на пружні амортизатори отримаємо систему, що утворена віброзахисним об'єктом та його пружними опорами. Позитивний ефект амортизації забезпечується оптимальним вибором характеристики цієї системи, що дозволяє найкращим чином використовувати її властивості.

У даний час відомо багато конструктивних рішень віброізоляторів (амортизаторів), які призначені для роботи в самих різноманітних умовах. Не всі вони рівнозначні по своїм технічним характеристикам і експлуатаційними можливостями. Деякі з них добре себе зарекомендували та випускаються серійно на протязі багатьох років і використовуються в різних галузях техніки. Застосування інших в силу конструктивних особливостей значно обмежено [4].

1 ОСОБЛИВОСТІ ЕКСПЛУАТАЦІЇ СИСТЕМ АМОРТИЗАЦІЇ

1.1 Класифікація механічних впливів на радіоелектронну апаратуру

Усі види радіоелектронної апаратури, як відомо піддаються впливу зовнішніх механічних навантажень (вібрації, удари, прискорення, акустичні шуми), які передаються до кожної деталі, що входять в склад конструкції. Механічний вплив має місце в працюючій радіоелектронній апаратурі, якщо вона встановлена на рухомому об'єкті, або тільки при транспортуванні її в непрацюючому стані, як у випадку стаціонарної та деяких видів радіоелектронної апаратури. Кількість переданої енергії визначає рівень і характер зміни конструкції. Допустимі рівні механічної зміни конструкції визначається її міцністю і стійкістю до механічного впливу [1-3].

Реакцією конструкції на механічний вплив називає трансформацією та перетворення енергії механічного збудження. До них відносяться механічні напруги в елементах конструкції, переміщення елементів конструкції та їх співудари, деформації кріпильних, несучих та інших елементів конструкцій [1,4,6]. При незначних механічних впливах в елементах конструкцій виникають пружні деформації, що не позначаються на працездатності апаратури. Збільшення навантаження призводить до появи остаточної деформації і при певних умовах руйнуванню конструкції. Руйнування може настати і при навантаженнях, багато менших граничних значень статичної міцності матеріалів, якщо конструкція буде схильною до знакозмінних навантажень[5,6].

Відмовлення апаратури бувають відновлюваними після зняття або послаблення механічного впливу (змінення параметрів компонентів, виникнення електричних шумів) та не відновлюваними (обриви та замикання електричних з'єднань, відшарування провідників печатних плат, порушення елементів кріплення і руйнування несучих конструкцій).

На радіоелектронну апаратуру що встановлюється на рухомому об'єкті, в процесі її експлуатації впливають вібрації, ударні навантаження та лінійні прискорення. Гармонічні вібрації характеризуються частотою, амплітудою, прискоренням. Ударні навантаження характеризуються числом одиночних ударів або їх серією, тривалістю ударного імпульсу та його формою, миттєвою швидкістю при ударі, переміщенням співударних тіл. Лінійні прискорення характеризуються прискоренням, тривалістю, знаком впливу прискорення.

Виникаючі при вібраціях, ударах та прискореннях навантаження оцінюють відповідними коефіцієнтами. Для зменшення впливу вібрацій та ударів апаратуру встановлюють на амортизатори або застосовують демпфуючі матеріали.

Вплив лінійних прискорень еквівалентно збільшенню маси апаратури і при значній тривалості впливу потребує збільшення міцності конструкції.

Як показує досвід експлуатації транспортуючої радіоелектронної апаратури, найбільше руйнуючий вплив на конструкцію мають вібрації. Конструкція апарату, що витримує вплив вібраційних навантажень в певному частотному діапазоні, витримує ударні навантаження та лінійні прискорення з великим значеннями відповідних параметрів [1-6].

1.1.1 Види віброзахисту радіоелектронної апаратури

Всі види радіоелектронної апаратури зазнають зовнішніх або внутрішніх механічних дій. Механічні дії передаються кожному елементу і викликають їх вібрації. Викликані вібрації можуть мати резонансний характер. При резонансі виникають особливо великі деформації, які супроводжуються великими механічними напруженнями і можуть призвести навіть до руйнування елемента.

Тому зменшення інтенсивності коливань об'єкту можна досягти наступними способами.

Динамічне гасіння коливань. Динамічний віброгасник формує додаткові динамічні впливи, що прикладаються до об'єкту в точках приєднання гасника.

Динамічне гасіння здійснюється при такому виборі параметрів гасника, при якому ці додаткові впливи частково врівноважують динамічні впливи, які збуджуються джерелом.

Віброізоляція. Дія віброізоляції зводиться до послаблення зв'язків між джерелом та об'єктом; при цьому зменшуються динамічні впливи, що передаються об'єкту. Послаблення зв'язків зазвичай супроводжується виникненням деяких небажаних явищ: збільшенням статичний зміщень об'єкту, збільшенням амплітуд відносних коливань при низькочастотних впливів і при ударах, збільшенням габаритів системи. Тому застосування віброізоляції як методу віброзахисту, в більшості випадків пов'язане із знаходженням компромісного рішення, задовольняє всю сукупність вимог.

Зміна конструкції об'єкту. Можна назвати два способи зменшення коливань. Перший спосіб полягає в ліквідації резонансних явищ. Якщо об'єкт володіє лінійними властивостями, то задача-зводиться до відповідної зміни його власних частот. Для нелінійних об'єктів повинні виконуватися умови відсутності резонансних явищ. Другий спосіб полягає в збільшенні дисипації енергії в об'єкті. Цей спосіб віброзахисту, називається демпфіруванням.

Демпфери, динамічні гасники та віброізолятори утворюють в сукупності віброзахисні пристрої. Пасивними називають пристрої, які складаються з інерційних, пружних і дисипативних елементів, наприклад, амортизатори. Активні пристрої можуть крім перерахованих містять елементи немеханічної природи, що володіють незалежними джерелом енергії. Ефективність віброзахисних систем оцінюють відношенням величини будь якого характерного параметру коливань об'єкту з віброзахисним пристроєм, до величини того ж параметру при відсутності віброзахисту. Це відношення називається коефіцієнтом ефективності вібраційного захисту.

Ми будемо розглядати пасивний спосіб віброзахисту апаратури, а саме використання амортизаторів [5].

1.2 Механічний вплив на носіях та вимоги до амортизаторів

Проектування раціонального амортизуючого захисту полягає в обранні необхідної кількості амортизаторів з необхідними характеристиками і в розташуванні відносно ізолюючого об'єкта.

Умови експлуатації виробів на рухомому носії визначають вимоги, які пред'являються до амортизаторів. Знання динамічних і кліматичних умов, в яких будуть експлуатуватися амортизатори, є критерієм для обґрунтованого вибору їх типу і схеми розміщення на об'єкті.

Застосування амортизаторів не буде ефективним без врахування спектру частот і амплітуд коливань, величини і тривалості ударних імпульсів, значень лінійних перевантажень, транспортувальних впливів, температури, вологості, тиску і тому подібних факторів, що мають місце на носію. При цьому не достатньо знати максимальні значення вказаних впливів; для забезпечення гарантійної надійності виробів необхідно ще знати поведінку вказаних впливів з часом, тобто характер роботи. Якщо кліматичних впливів на апаратуру і амортизатори іноді вдається уникнути, поміщаючи їх в герметизовані відділи, то динамічного впливу зазвичай уникнути не вдається. Вібрації та удари виникають на всіх об'єктах-носіях, що рухаються. Особливо інтенсивними вони бувають в сучасних літальних апаратах, в яких двигуни і аеродинамічні сили визивають значні знакозмінні навантаження в широкому діапазоні частот і амплітуд.

Установку апаратури на амортизатори можна практикувати тільки після детального аналізу механічних впливів на носії або норм механічних впливів лабораторних випробувань і у випадку їх дійсної необхідності.

Захист обладнання від механічних навантажень при перевезенні на багато складніше ніж захист стаціонарного обладнання, так як частота дії зовнішніх навантажень, що виникають може змінюватися в широких межах. Амортизатори в цьому випадку повинні забезпечувати ефективний захист в більш широкому частотному діапазоні обурення. Крім того, амортизатори повинні забезпечувати

захист обладнання, що перевозиться від випадкових поштовхів та ударів великої амплітуди.

Розглянемо вимоги до амортизаторів, що використовуються для захисту від механічних перевантажень обладнання, що возиться автомобільним, залізничним, водним, повітряним транспортом та ракетами.

При автомобільних перевезеннях навантаження мають нерегулярний характер і неперервний спектр частот, хоча в деяких випадках ці навантаження можуть мати регулярний характер. Наприклад, при русі по автостраді з бетонними плитами спостерігається періодичність обурення, яке визначається швидкістю руху транспорту та лінійними розмірами елементів дорожнього покриття, що повторюється.

Регулярність обурення має місце і на стиках рейок при русі залізничного транспорту. Ці обурення відбуваються головним чином в боковому та вертикальному напрямі, проте нерідкі обурення в прокольному напрямку внаслідок нерівномірності тяги на підйомах та ухилах, а також при зчепленні вагонів. При русі складу амплітуди коливань приблизно однакові в усіх трьох напрямках.

При перевезенні апаратури на автомобільному і залізничному транспорті слід враховувати, що цей транспорт сам по собі вже має віброізоляційну ланку - ресори, що понижають передачу зовнішнього силового впливу від дороги на підресорний екіпаж; і якщо власні частоти коливань екіпажу на ресорах достатньо низькі в порівнянні з частотами, що збуджують вплив від дороги, то немає сенсу при перевезенні радіоелектронного обладнання застосовувати додаткові амортизуючі засоби.

Слід також звернути увагу на кліматичні умови при транспортуванні, які можуть змінюватися в широких межах від тропічних до арктичних. В зв'язку з цим амортизатори повинні володіти достатньою стійкістю до впливу температури, тиску, вологості, агресивних середовищ, випромінювань і т.п.

Основні вимоги, що пред'являються до амортизаторів корабельного обладнання, впливають з експлуатаційних умов, які мають місце на судах, і поділяються на наступні:

- а) забезпечення тривалої експлуатації при температурах навколишнього середовища від -5 до +(70-80) С, а також в умовах можливого обливання мастилом, дизельним паливом, прісною і морською водою;
- б) забезпечення підвищеної міцності амортизатора по всім напрямкам навантажень, що діють;
- в) можливість установки обладнання на амортизаторах в будь-яких необхідних положеннях і запобігання обладнання від зриву з амортизаторів при різких кренах судна;
- г) достатнє демпфірування для швидкого гасіння власних коливань.

При виборі амортизаторів виробляється орієнтовна оцінка ефективності амортизуючих кріплень і деформації останніх, за результатами якої коригується амортизуючи кріплення і фундамент під виріб, що амортизується. Крім того, проводяться перевірочні розрахунки на зміщення амортизованого об'єкту при хитанні, диференті, а при додаткових вимогах також при дії усиль, що здвигають та перекидають з врахуванням гнучких вставок. Необхідні для вказаних розрахунків статичні жорсткості амортизаторів і підводок, які приєднуються, обчислюються по експериментальних графіках або теоретично. В разі необхідності схема амортизуючого кріплення додатково коригуються [1].

Амортизатори літакового устаткування повинні:

- а) мати високу міцність, що забезпечує зберігання обладнання при дії перенавантажень на протязі всього терміну експлуатації;
- б) володіти невеликою масою і габаритними розмірами, забезпечувати зручність монтажу та кріплення обладнання;
- в) володіти значним демпфіруванням для швидкого затухання власних коливань амортизуючого об'єкту, що виникають при поштовхах, а також коливань в зоні резонансу при періодичному збудженні.

Необхідність витримувати постійну власну частоту при різних масах амортизуючого обладнання зставляє мати набір амортизаторів різної жорсткості. Замість набору амортизаторів, що перекривають діапазон навантажень, амортизатори слід конструювати рівно частотними, тобто такими, жорсткість яких автоматично міняється під різними навантаженнями так, що власна частота коливань системи зберігається незміною.

У зв'язку з тим що амортизатори працюють в різноманітних метеорологічних умовах, вони повинні володіти достатньою стійкістю до впливу температури, тиску, вологості і т.п. Відповідно до технічних вимог, амортизатори літакового устаткування повинні забезпечити нормальну віброізоляцію в умовах перепаду температур від - 60 до + 60 С, зміни висоти від 0 до 20000 м і т.п.

На апаратуру, яка знаходиться на снарядах і ракетах в реальних умовах польоту діють вібрації з випадковою амплітудою, що мають широкий спектр частот. Крім того, їх супроводжують значні ударні та лінійні перевантаження. Джерелами динамічних навантажень на ракетах є: робота маршових двигунів і прискорювачів, раптове їх вимкнення, аеродинамічні сили (атмосферна турбулентність), що виникають при проходженні щільних шарів атмосфери, а також відокремлення відділів ракети, яке супроводжується стрибкоподібною зміною частоти, в той час як при вигорянні палива частота змінюється плавно. Вказані навантаження в основному діють на початкових ділянках польоту і розповсюджуються по корпусу ракети в вигляді поперечних хвиль обшивки з достатньо великою амплітудою.

Поєднання значного лінійного перевантаження з інтенсивною вібрацією в силу певної специфіки накладає особливі вимоги на роботу амортизаторів. Так, амортизатори повинні зберігати свої характеристики під час дії лінійних перевантажень такими ж, як при їх відсутності, витримувати без поломки певний прогин (статичну деформацію), що викликається лінійним перевантаженням.

Таким чином, до амортизаторів ракетного устаткування повинні пред'являтися більш жорсткі вимоги, що залежать в основному від типу і призначення ракети.

Ізолююча підвіска ракетної апаратури повинна бути механічно міцною та стійкою при дії як механічних, так і кліматичних факторів і повинна допускати значну пружну деформацію без значних змін своїх характеристик [3].

2 РАЦІОНАЛЬНИЙ МОНТАЖ АМОРТИЗАТОРІВ ТА СТАТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК СИСТЕМ АМОРТИЗАЦІЇ

2.1 Вибір та раціональний монтаж амортизаторів

Проектування системи амортизаторів засновано на загальних принципах теорії коливань і теорії удару, що передбачають знання зосереджених параметрів - коефіцієнтів жорсткості та демпфірування амортизаторів. При цьому великого поширення набула лінійна інтерпретація задачі про малі коливання пружного підвищеного тіла. Така інтерпретація задачі отримала всезагальне поширення не з-за стрункості та завершеності математичного апарату, що використовується, а за причиною достатньо точного підтвердження на практиці.

Вибір типу амортизаторів та їх раціональне розміщення зазвичай виконується на основі статичного і динамічного розрахунку, включаючи визначення статичних навантажень на кожний із амортизаторів і резонансних частот системи, а також ефективність амортизуючої підвіски.

Виріб, який встановлено на амортизаторах, як коливальна система має шість степенів свободи, а отже, і шість резонансних частот коливань. При періодичному збудженні будь якого напрямку може виникнути резонанс з будь якої із вказаних частот. Кожен із резонансів може викликати порушення роботи виробу, тому амортизуючу підвіску потрібно конструювати так, щоб виключити можливість появи резонансів.

Власні частоти систем амортизації зазвичай знаходяться розрахунковим шляхом. Для визначення частот власних коливань системи амортизації необхідно знати її параметри: коефіцієнти жорсткості та демпфірування амортизаторів, координати розташування останніх відносно центру ваги ізолюючого виробу, а також масу виробу і його моменти інерції відносно головних центральних осей.

Пружні елементи амортизаторів прийнято характеризувати кривою «сила - деформація», тобто залежністю застосованої сили P від деформації x . Пружний елемент називають лінійним, якщо сила пружності пропорційна деформації. При цьому коефіцієнт пропорційності c , що називається статичною жорсткістю елемента, який визначається як тангенс кута нахилу прямої «сила – деформація» до осі абсцис, постійний і не залежить від деформації.

Для нелінійних пружних елементів жорсткість не є величиною постійною, а змінюється з змінною деформації. Статична жорсткість в будь-якій точці q кривої «сила – деформація» визначається в цьому випадку як тангенс кута нахилу дотичної до кривої в даній точці або як похідна в даній точці:

$$c = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dP}{dx}. \quad (2.1)$$

З практичної сторони координати точки q на кривій «сила – деформація» $P(x)$, зображеної на рисунку 2.1, зазвичай відповідають величині статичного навантаження (масі виробу), що розташоване на амортизаторі, і величині деформації (прогину) амортизатора при цьому.

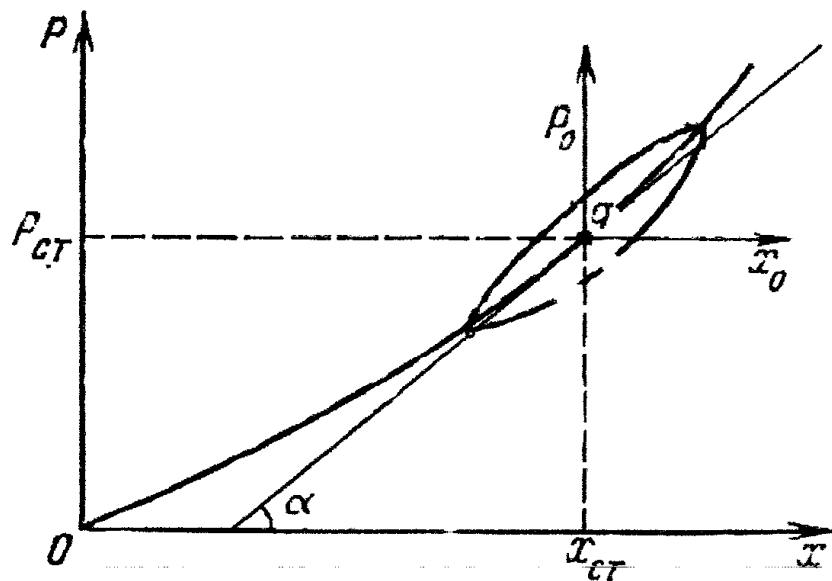


Рисунок 2.1 – Крива «сила-деформація»

Якщо тепер виріб па амортизаторах примусити коливатися, то навіть при малих амплітудах, які не виходять за границі пропорційності, в матеріалі амортизатора будуть відбуватися незворотні процеси, що будуть супроводжуватися втратою теплової енергії за рахунок внутрішнього тертя. Ці втрати характеризуються петлею гістерезису, яка утворюється в околі точки q , траєкторію якої будуть описувати всі точки виробу, що коливається.

Нахил великої осі петлі характеризує динамічну жорсткість амортизатора в точці q , а площа петлі – кількість енергії, поглиненої та втраченої в вигляді тепла матеріалом амортизатора за один цикл коливання. При цьому в залежності від власної структури матеріалу пружного елемента амортизатора, амплітуди циклу і швидкості навантаження амортизатора нахил більшої осі гістерезисної петлі може змінюватися, отже, динамічна жорсткість амортизатора може відрізнятися від статичної $c_d \neq c_{ст}$. З численних досліджень, для одних амортизаторів і матеріалів (металеві, резино-металічні, резинові і синтетичні амортизатори та матеріали) вказана відмінність в жорсткостях мале, і практично їх можна вважати однаковими; для інших амортизаторів (наприклад, з вираженим пневмоефектом) вказана відмінність жорсткостях може бути вельми значним. Таким чином, циклічне (динамічне) навантаження амортизатора суттєво відрізняється від одностороннього (статичного) головним чином своєю не одноманітністю, так як при математичному описі явища доводиться мати справу не з кривою, а з замкнутою петлею, а також відмінністю в реакції матеріалу пружного елемента на зовнішнє збудження. В загальному випадку реакція амортизатора на силове збудження залежить не тільки від деформації, але і від швидкості навантаження, а також внутрішнього спротиву в матеріалі (демпфірування).

Тому домовимося надалі при проведенні статичного розрахунку і дослідження систем амортизації в рівняннях в усіх випадках під c розуміти статичну жорсткість амортизаторів.

Також слід зазначити порядок розрахунку амортизуючого кріплення. Розрахунок амортизуючого кріплення починають з визначення статичних

навантажень, що припадають на кожен амортизатор від маси виробу. При цьому виходять з умов раціонального монтажу системи амортизації, тобто оптимального розташування амортизаторів на виробі. Далі зазвичай переходять до вибору типу амортизаторів по каталозі виходячи з знайдених статичних навантажень, а також граничних значень параметрів, що допускаються обраним типом амортизаторів при обов'язковому врахуванні умов експлуатації.

При розрахунку систем амортизації зазвичай реальна конструкція амортизуючого виробу замінюється еквівалентною абсолютно жорсткою монолітною масою (ваговим еквівалентом), що має однакову з реальним виробом масу і моменти інерції відносно головних центральних осей. Моменти інерції виробу та вагового еквівалента знаходяться або розрахунками, або експериментально.

Вихідні дані для розрахунку амортизаторів базуються на багаторічному досвіді розробки та застосування амортизаторів в різних виробках [3].

2.1.1 Умови раціонального монтажу та виробу на амортизаторів

У залежності від маси амортизуючого виробу і навантаження, що припадає на кожен амортизатор, підбираються амортизатори відповідного типу з таким розрахунком, щоб номінальна вантажопідйомність P всіх амортизаторів була близькою до маси прибору.

Амортизатори однакового номінального навантаження, але різних типів можуть мати різні резонансні частоти і демпфірування, тому і виробляються в залежності від призначення і умов експлуатації.

Застосування амортизаторів з відхиленням від їх номінального навантаження не рекомендовано, так як порушення раціонального монтажу може понизити ізолюючий ефект підвіски. Якщо вказані навантаження відрізняються від номінальних амортизаторів, які встановлюються в різних точках кріплення (лапах), то це може привести до появи крутильних коливань і

додаткових резонансів в системі. Все це приводить до скорочення гарантійного строку служби амортизаторів.

При раціональному монтажі, виріб повинен встановлюватися на всіх своїх амортизаторах так, щоб центр ваги його співпадав з центром жорсткості амортизаторів.

Центром жорсткості системи амортизації називається точка, в якій умовно зосереджена загальна жорсткість всіх амортизаторів. Координати центру жорсткості в прямокутній системі координат (початок системи координат зазвичай суміщають з центром тяжіння виробу) знаходяться по формулам:

$$x_c = \frac{\sum c_{x_i} x_i}{\sum c_{x_i}}; \quad y_c = \frac{\sum c_{y_i} y_i}{\sum c_{y_i}}; \quad z_c = \frac{\sum c_{z_i} z_i}{\sum c_{z_i}}, \quad (2.2)$$

де x_i, y_i, z_i – координати розташування амортизаторів на об'єкті (координати центрів жорсткості окремих амортизаторів);

c_x, c_y, c_z – зосереджені статичні жорсткості амортизаторів в напрямку відповідних осей координат;

$\sum c_{x_i} x_i, \sum c_{y_i} y_i, \sum c_{z_i} z_i$ – суми статичних моментів жорсткостей амортизаторів.

Якщо $c_{x_i} = c_{y_i} = k c_{z_i}$, що вірно для одного і того ж типу амортизаторів, то умова співпадання центру тяжіння ізолюючого виробу з центром жорсткості амортизаторів дається системою рівнянь

$$\begin{cases} \sum c_{z_i} x_i = 0; \\ \sum c_{z_i} y_i = 0; \\ \sum c_{z_i} z_i = 0; \\ \sum c_{z_i} x_i y_i = 0; \\ \sum c_{z_i} y_i z_i = 0; \\ \sum c_{z_i} z_i x_i = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Умова відсутності перекосів або рівності прогинів у всіх амортизаторів виражається наступним чином:

$$\sum \delta \cdot c_{z_i} = \delta \cdot \sum c_{z_i} = G, \quad (2.4)$$

де G – маса виробу.

Якщо врахувати, що $\delta \cdot c_{z_i} = P_i$ (P_i – вагове навантаження, яка припадає на i -тий амортизатор), замість умов (2.3) та (2.4) можна записати

$$\begin{cases} \sum P_i = G; \\ \sum P_i \cdot x_i = 0; \\ \sum P_i \cdot y_i = 0; \\ \sum P_i \cdot z_i = 0; \\ \sum P_i \cdot x_i \cdot y_i = 0; \\ \sum P_i \cdot y_i \cdot z_i = 0; \\ \sum P_i \cdot z_i \cdot x_i = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Коли виконуються всі сім умов (2.5), монтаж виробу на амортизаторах називається раціональним. Якщо число невідомих в рівняннях (2.5) або число амортизаторів відповідно не перевищує трьох, то система амортизації є статично визначною, в протилежному випадку – статично не визначною.

При розрахунку статично не визначної системи на неї повинні бути накладені додаткові умови. Якщо система амортизації складається з n амортизаторів, то необхідно задати $4n - 7$ додаткових величин із рівнянь (2.3). При цьому можна отримати різні варіанти амортизованого кріплення. Додаткові умови вибираються із наступних міркувань.

Якщо точки кріплення амортизаторів розташовуються симетрично відносно площини, що проходить через центр ваги виробу, то симетричні амортизатори обираються одного й того ж типу і розміру. При цьому навантаження на однакові амортизатори, природно, будуть рівними.

Найбільш поширені схеми пружного монтажу устаткування показані на рисунку 2.2. В залежності від вимог до амортизаторів, конкретних умов експлуатації та допустимих зазорів між амортизуючим виробом і суміжними конструкціями, а також за основу обирають ту або іншу схему підвіски.

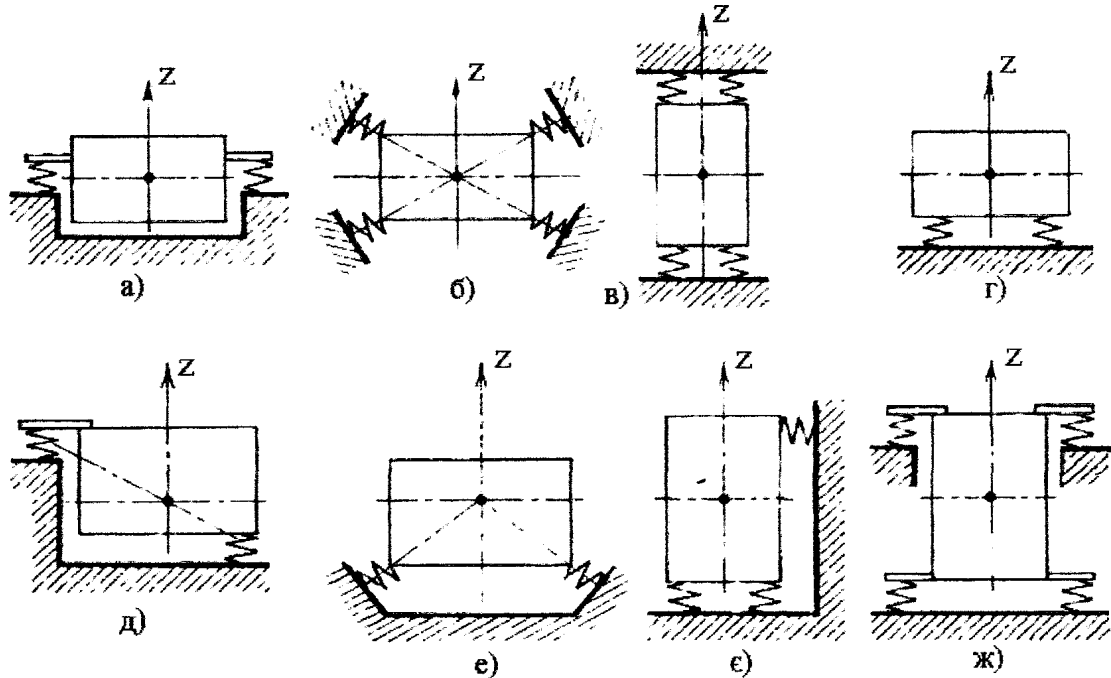


Рисунок 2.2 – Схеми монтажу устаткування

При поєднанні центру ваги з центром жорсткості схеми (рис. 2.2 (а, б, в)) дозволяють зменшити коливання по горизонтальних осях за рахунок розв'язки коливань відповідно з осями симетрії. Ці схеми забезпечують захист від сил, що діють в усіх напрямках, і їх доцільно використовувати в умовах просторового навантаження на реактивних літаках, керованих снарядах та ракетах, а також носіях на гусеничному і колісному ході. В цих випадках, обертальні коливання мінімальні.

В умовах впливу вібрацій і невеликих ударних перевантажень без суттєвих нахилів основи застосовується схема, що зображена на рисунку 2.2 (г). Ця схема застосовується головним чином в звичайній літаковій апаратурі, а також при пружному монтажі різноманітного стаціонарного устаткування (механізмів, металорізальних станків, машин і т.п.).

Значно більшою стійкістю, ніж ця схема, володіють схеми на рисунку 2 (ж, д). Перша з них застосовується для виробів, в яких відношення висоти до ширини більше двох. Встановлення амортизаторів в верхній площині дає додаткові точки опори. Більш економічною є друга двох'ярусна схема, при якій площина жорсткості проходить між амортизуючим виробом. Ця схема потребує менших зазорів між амортизуючим виробом та оточуючими його конструкціями, ніж схема на рисунку 2.2 (г), завдяки більшій стійкості системи амортизації.

Розташування амортизаторів під кутом до осей симетрії виробу (рисунок 2.2 (е)), коли напрям дії реакцій амортизаторів перетинаються в центрі ваги, запобігає від виникнення обертальних коливань виробу, але досягти цього часто буває скрутно, так як при невеликому порушенні симетрії розв'язка коливань порушується і в системі виникають всі шість пов'язаних видів вільних коливань. Ця схема за часту застосовується в судновій та тепловозній практиці при установці на амортизатори парових машин і двигунів дизеля. По схемі на рисунку 2.2 (є) зазвичай амортизуються пасивно ізолюючі вироби, що мають значну висоту та експлуатуючі як в стаціонарних умовах, так і на рухливих носіях.

Для схем на рисунку 2.2 можна використовувати стандартні амортизаційні основи, які отримують все більше поширення в зв'язку з уніфікацією маси, а також габаритних і приєднувальних розмірів блоків апаратури та заміну апаратури. З деякими видами конструкцій підблочних рам можна познайомитися в роботі.

Застосування амортизаторів передбачає свободу деякого переміщення ізолюючого виробу відносно основи. Тому всі підводки до виробу (силові та монтажні дроти, шланги, тяга керування, трубопроводи, валопроводи і т.п.) повинні монтуватися так, щоб не перешкоджати свободі його переміщення. Недостатньо гнучкі підводи вносять в ізолюючу систему додаткову жорсткість, перерозподіляють навантаження на амортизатори, змінюють власні частоти системи, можуть самі вібрувати і, таким чином, погіршують ізоляцію. Підводки

повинні мати можливість мінімальної жорсткості та рухливі компенсуючі ділянки (шарніри), що перешкоджають передачі вібрації. Рациональним розташуванням гнучких підводок можна зменшити їх шкідливий вплив. Для цього слід прагнути, щоб вібраційний рух розподілявся по всій довжині підводки; якщо вібрує тільки кінець підводки, то скорочується її строк служби з-за концентрації напруги. Довжина не закріпленої частини гнучкої підводки між виробом та основою повинна бути такою, щоб забезпечувалася можливість її вільного руху при вібрації. Зв'язані дроти в джгут запобігає їх вібрації.

Вибір амортизаторів по каталогу в відповідності з проведеним розрахунком повинен розглядатися як перший крок, який не повинен підміняти собою остаточну експериментальну перевірку та обробку амортизуючого кріплення в складі виробу [3].

2.2 Статичний розрахунок систем амортизації

Метою статичного розрахунку амортизуючої підвіски є визначення статичних навантажень від маси виробу, що припадає на кожен амортизатор, і подальший вибір амортизаторів по каталогу в відповідності з знайденими навантаженнями. Статичний розрахунок дозволяє розташувати амортизатори на виробі так, щоб виконувалися умови раціонального монтажу.

З'єднання амортизаторів паралельно робить систему більш жорсткою, а з'єднання їх послідовно – м'якшою. Цей висновок може бути поширений на довільне число амортизаторів, з'єднаних між собою будь-яким чином.

У залежності від призначення, умов експлуатації та конструктивних можливостей амортизаторів вибирається схема монтажу устаткування (див. рис. 2.2). Прямокутну систему координат X , Y , Z вибирають так, щоб її початок співпадало з центром ваги виробу в стані рівноваги, а осі - з головними центральними осями інерції виробу. Напрямок осі Z при цьому повинен співпадати з лінією дії статичного навантаження від маси. Використовуючи умови

раціонального монтажу (2.5), складають потрібне число рівнянь, з яких знаходяться вагові навантаження на амортизатори, а також невідомі координати їх розташування. В залежності від числа амортизаторів та схеми їх розташування може змінюватися і число рівнянь в системі (2.5), що зменшує або збільшує складність розв'язання поставленої задачі.

2.2.1 Розташування амортизаторів в одній горизонтальній площині

Розрахунок стосується пружного монтажу устаткування по схемах на рисунку 2.2 (а, г), коли ордината амортизаторів $z = 0$ (для випадку на рисунку 2.2 (г)) початок координат можна змістити в площину розташування амортизаторів. При цьому з семи рівнянь (2.5) залишаються тільки чотири:

$$\begin{cases} \sum P_i = G; \sum P_i \cdot x_i = 0; \\ \sum P_i \cdot y_i = 0; \sum P_i \cdot x_i \cdot y_i = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Система з трьох амортизаторів. В загальному випадку (рисунок 2.3 (а)) знаходяться навантаження P_1, P_2, P_3 та будь-яка з координат; інші координати повинні бути заданими.

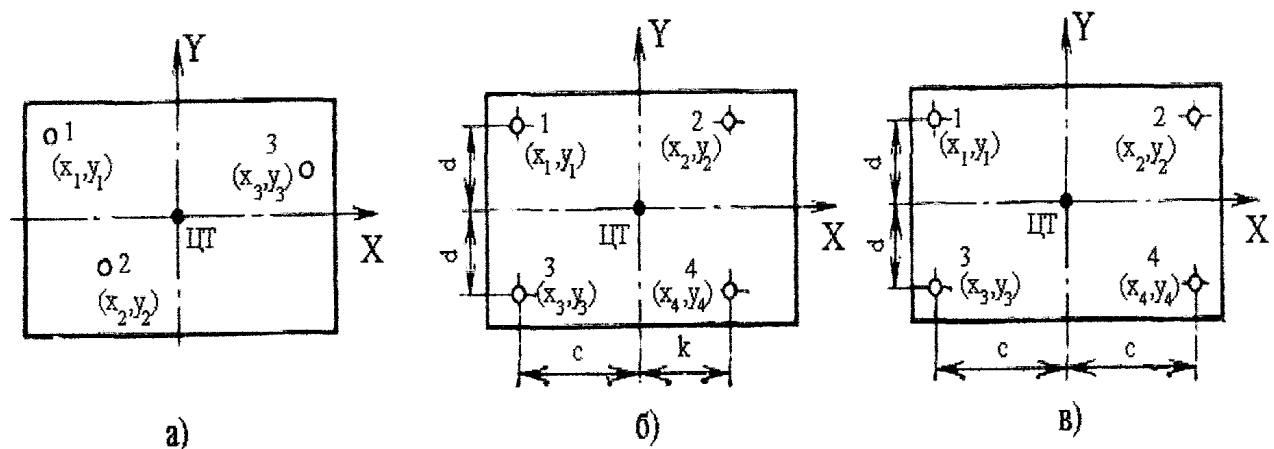


Рисунок 2.3 – Схеми розташування амортизаторів на об'єкті

Якщо, наприклад, задані координати амортизаторів x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 , то з рівнянь (2.6) можна визначити координату x_3 :

$$x_3 = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 (y_1 - y_2)}{x_2 \cdot y_1 \cdot (y_3 - y_2) - x_1 y_2 (y_3 - y_1)} \quad (2.7)$$

та навантаження

$$P_1 = \frac{x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2}{(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)} \cdot G; \quad (2.8)$$

$$P_2 = \frac{x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3}{(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)} \cdot G; \quad (2.9)$$

$$P_3 = \frac{x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1}{(x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)} \cdot G. \quad (2.10)$$

Випадок однаково навантажених амортизаторів. Виходячи з умови $P_1 = P_2 = P_3 = \frac{G}{3}$ та задаючи будь які три координати амортизаторів, зручніше з конструктивних міркувань, із рівнянь (2.6) знаходять інші три координати. Якщо, наприклад, задати координати x_1, y_1, y_2 , то з умови раціонального монтажу інші координати знаходяться по формулам:

$$x_3 = \frac{x_1 \cdot (y_1 - y_2)}{2y_2 + y_1}; \quad x_2 = \frac{-x_1 \cdot (2y_1 + y_2)}{2y_2 + y_1}; \quad y_3 = -(y_1 + y_2). \quad (2.11)$$

Система із чотирьох амортизаторів (рис. 2.2 (а, б, г)). В загальному випадку повинні задані всі координати точок кріплення амортизаторів до виробу. З рівнянь (2.6) знаходяться всі статичні навантаження на амортизатори за формулами:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{D_1}{D} \cdot G; \\ P_2 = \frac{D_2}{D} \cdot G; \\ P_3 = \frac{D_3}{D} \cdot G; \\ P_4 = \frac{D_4}{D} \cdot G. \end{cases} \quad (2.12)$$

де визначники системи знаходяться з виразів:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 \neq 0; \quad (2.13)$$

$$D_1 = y_2 y_4 x_3 (x_4 - x_2) + y_2 x_4 y_3 (x_2 - x_3) + x_2 y_4 y_3 (x_3 - x_4); \quad (2.14)$$

$$D_2 = -y_1 y_4 x_3 (x_4 - x_1) - y_4 x_1 y_3 (x_3 - x_4) - x_4 y_1 y_3 (x_1 - x_3); \quad (2.15)$$

$$D_3 = y_1 y_4 x_2 (x_4 - x_1) + y_4 x_1 y_2 (x_2 - x_4) = x_4 y_1 y_2 (x_1 - x_2); \quad (2.16)$$

$$D_4 = -y_1 y_3 x_2 (x_3 - x_1) - y_1 x_3 y_2 (x_1 - x_2) - x_1 y_2 y_3 (x_2 - x_3). \quad (2.17)$$

При симетричному розташуванні амортизаторів відносно однієї з осей, наприклад осі X ,

$$x_1 = x_2 = c; \quad x_3 = x_4 = -d; \quad y_1 = -y_2 = a; \quad y_3 = -y_4 = b.$$

Навантаження на амортизатори визначаються за формулами:

$$P_1 = P_2 = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{G}{2}; \quad P_3 = P_4 = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{G}{2}. \quad (2.18)$$

У випадку рівно навантажених амортизаторів, опираючись на умову $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{G}{4}$ і задаючи будь які п'ять координат амортизаторів, із рівнянь

$$\sum x_i = 0; \quad \sum y_i = 0; \quad \sum x_i y_i = 0, \quad (2.19)$$

можна знайти інші три координати.

Для системи, яка складається з шести амортизаторів (число невідомих перевищує число рівнянь) із рівнянь (2.6) можна визначити тільки чотири навантаження, якщо вважати відомими інші два навантаження і координати всіх шістьох амортизаторів.

Найбільше практичне значення має випадок рівно навантажених амортизаторів $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{G}{6}$

При цьому три будь які координати амортизаторів можна знайти із рівнянь (2.19), якщо інші дев'ять координат вважати відомими [6].

2.2.2 Розташування амортизаторів в двох горизонтальних площинах

Цей випадок стосується розрахунку пружного монтажу устаткування по схемах на рисунку 2.2 (в, д, є, ж). Так як амортизатори розташовані в двох площинах і ми маємо справу з просторовим монтажем, то для знаходження невідомих навантажень на амортизатори та їх координат слід користуватися сімома рівняннями (2.5).

Якщо система складається з восьми амортизаторів (по чотири в кожній площині), то їх координати наступні:

$$\begin{cases} z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = a; \\ z_5 = z_6 = z_7 = z_8 = -b. \end{cases} \quad (2.20)$$

Із рівнянь (2.5) можна визначити сім навантажень, якщо задати восьму, і координати всіх амортизаторів. Практичне значення має симетричне (див.рис. 2.2 (в, ж, д)) і несиметричне (рисунок 2.2 (є)) розташування амортизаторів.

У першому випадку крім умови (2.20) тут ще дотримується умова рівно навантаження амортизаторів, тобто $P_1 = P_2 = \dots = P_8 = \frac{G}{8}$, та умова симетрії (див.рис 2.3(в))

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = d; \quad x_3 = x_4 = -d; \quad x_5 = x_6 = d; \quad x_7 = x_8 = -d; \\ y_1 = y_2 = -c; \quad y_3 = y_4 = c; \quad x_5 = y_6 = -c; \quad y_7 = y_8 = c. \end{aligned}$$

У другому випадку крім умов (2.20) мають місце умови: $x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = -c$; $x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = k$ (див.рис. 2.3(б)) і до рівнянь (2.5) можна додати наступні два:

$$P_1 + P_3 + P_5 + P_7 = \frac{Gk}{c+k}; \quad P_2 + P_4 + P_6 + P_8 = \frac{Gc}{c+k}. \quad (2.21)$$

Якщо система складається з чотирьох амортизаторів, два внизу і два вверху (рисунок 2.2 (д) та рисунок 2.3 (в)) та виконуються рівності $z_1 = z_3 = a$; $z_2 = z_4 = -b$, то з рівнянь (2.5) можна визначити чотири навантаження P_1, P_2, P_3, P_4 і три координати амортизаторів, якщо вважати, що всі інші координати відомі.

При $x_1 = x_3 = c$; $x_2 = x_4 = k$; $y_1 = y_2 = d$; $y_3 = y_4 = -r$ значення навантажень наступні:

$$\left\{ \begin{aligned} P_1 &= \frac{Gkr}{(c+k)(d+r)}; \\ P_2 &= \frac{Gcr}{(c+k)(d+r)}; \\ P_3 &= \frac{Gkd}{(c+k)(d+r)}; \\ P_4 &= \frac{Gcd}{(c+k)(d+r)}. \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

Якщо система складається з шести амортизаторів, чотири внизу і два зверху (рисунок 2.2 (є)), то, враховуючи $z_1 = z_2 = d$ та $z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = -b$, з рівнянь (2.5) можна знайти шість навантажень $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ і одну з координат, враховуючи, що всі інші координати відомі.

При установці виробу на чотирьох амортизаторах, розташованих симетрично в вертикальній площині, що не проходить через центр ваги виробу (рисунок 2.4(а)), утворюється консольна схема підвіски. Якщо $z_1 = z_2 = b$; $z_3 = z_4 = -b$, а $P_{y_1} = P_{y_2} = P_{y_3} = P_{y_4} = 0$, то навантаження на амортизатори будуть:

$$\begin{cases} P_{z_1} = P_{z_2} = P_{z_3} = P_{z_4} = \frac{G}{4}; \\ P_{x_1} = P_{x_2} = P_{x_3} = P_{x_4} = \left| \frac{Gh}{4b} \right|. \end{cases} \quad (2.23)$$

Також слід розрізняти схему попарного розташування амортизаторів під кутом в вертикальній площині (рисунок 2.4(б)) та схему просторового розташування амортизаторів під кутом до горизонтальної та вертикальної площинам (рисунок 2.4 (в)).

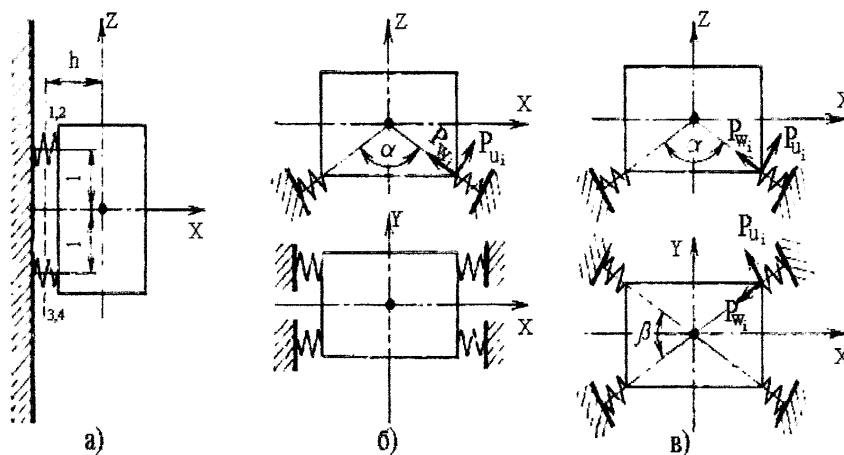


Рисунок 2.4 – Схеми монтажу амортизаторів під кутом вертикальній площині та просторове розташування під кутом до горизонтальних та вертикальних площин

Схема зображена на рисунку 2.4(в) в порівнянні з схемою, яка зображена на рисунку 2.4(б), є більш стійкою до обертальних коливань, здійснюючи в основному лише поступальні коливання.

При монтажі по схемі, зображеної на рисунку 2.4(б), осі амортизаторів попарно перетинаються під кутом α . Якщо бокові навантаження на амортизатори $P_{y_1} = P_{y_2} = P_{y_3} = P_{y_4} = 0$, то осьові та поперечні навантаження на амортизатори визначаються з виразів:

$$\begin{cases} P_{w_1} = P_{w_2} = P_{w_3} = P_{w_4} = 0,25G \cos \frac{\alpha}{2}; \\ P_{u_1} = P_{u_2} = P_{u_3} = P_{u_4} = 0,25G \sin \frac{\alpha}{2}. \end{cases} \quad (2.24)$$

При монтажі за схемою, яка зображена на рисунку 2.4(в) осі амортизаторів перетинаються в центрі ваги виробу під кутами α і β . Якщо бокові навантаження на амортизатори $P_{y_1} = P_{y_2} = P_{y_3} = P_{y_4} = 0$, тоді осьові та поперечні навантаження на них можна знайти з виразів:

$$\begin{cases} P_{w_1} = P_{w_2} = P_{w_3} = P_{w_4} = 0,25G \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}; \\ P_{u_1} = P_{u_2} = P_{u_3} = P_{u_4} = 0,25G \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}. \end{cases} \quad (2.25)$$

3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ЗАХИСТУ РУХОМОГО ОБ'ЄКТА ВІД МЕХАНІЧНИХ ЗБУРЕНЬ

3.1 Динамічний розрахунок систем амортизації

3.1.1 Частоти власних коливань недемпфуваних підресорних систем

Тверде тіло, встановлене на пружних амортизаторах, що опираються на нерухому основу, являє собою коливальну систему, яка має шість степенів свободи і шість частот власних коливань, які для запобігання резонансу з частотами збуджуючих сил повинні бути заздалегідь визначенні розрахунковим шляхом. Малі коливання розглянутої системи характеризуються шістьма узагальненими координатами: трьома поступальними зміщеннями центру ваги тіла $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ в напрямку відповідних осей X, Y, Z нерухомої прямокутної системи координат з початком в центрі ваги тіла і трьома обертаннями - кутами повороту тіла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ відносно тих самих осей. При цьому пружні властивості амортизаторів характеризуються зосередженими параметрами - коефіцієнтами жорсткості c_x, c_y, c_z в напрямку відповідних осей X, Y, Z .

Якщо знехтувати масою ізоляторів, демпфуванням і гідроскопічними ефектами, що виникають при коливаннях в результаті поворотів осей обертаючих частин об'єкту, що цілком допустимо для нерезонансних областей при відносно малих механічних частотах і кутових швидкостях обертання деталей механізму, які найбільш часто зустрічаються на практиці, то диференціальні рівняння власних коливань такої системи можна скласти за допомогою узагальнених рівнянь Лагранжа [2], які для кожної координати записують наступним чином:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (3.1)$$

де $x_i = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; T і U – відповідно кінетична і потенціальна енергії системи.

Потенціальну енергію системи як функцію координат зміщення центру жорсткості амортизаторів можна представити у вигляді додатньо визначеної квадратичної форми

$$U = \frac{1}{2} (\sum c_x \overline{\delta_1^2} + \sum c_y \overline{\delta_2^2} + \sum c_z \overline{\delta_3^2}), \quad (3.2)$$

де $\overline{\delta_1}, \overline{\delta_2}, \overline{\delta_3}$ – складові зміщення центру жорсткості амортизатора, який має координати x, y, z .

Коефіцієнти жорсткості c_x, c_y, c_z можуть бути як однаковими, так і різними для окремих амортизаторів. Для того щоб скористатися узагальненими рівняннями Лагранжа (3.1), енергію системи потрібно виразити через її узагальнені координати. Скориставшись кінематичним відношенням між зміщенням довільної точки і центру ваги об'єкта, напишемо вираз для переміщення $\overline{\delta_1}, \overline{\delta_2}, \overline{\delta_3}$ центру жорсткості i -го амортизатора з початковими координатами x, y, z :

$$\begin{aligned} \overline{\delta_1} &= \delta_1 - \varphi_3 y + \varphi_2 z - \text{по осі } X; \\ \overline{\delta_2} &= \delta_2 - \varphi_1 z + \varphi_3 x - \text{по осі } Y; \\ \overline{\delta_3} &= \delta_3 - \varphi_3 x + \varphi_1 y - \text{по осі } Z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Підставивши (3.3) в рівняння (3.2), отримаємо вираз для потенціальної енергії системи у вигляді функції від узагальнених координат:

$$U = \frac{1}{2} (\sum c_x (\delta_1 - \varphi_3 y + \varphi_2 z)^2 + \sum c_y (\delta_2 - \varphi_1 z + \varphi_3 x)^2 + \sum c_z (\delta_3 - \varphi_3 x + \varphi_1 y + \varphi_2 y)^2) = \frac{1}{2} (\alpha_{11} \delta_1^2 + \alpha_{22} \delta_2^2 + \alpha_{33} \delta_3^2 + \alpha_{44} \varphi_1^2 + \alpha_{55} \varphi_2^2 + \alpha_{66} \varphi_3^2) +$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_{15}\delta_1\varphi_2 + \alpha_{16}\delta_1\varphi_3 + \alpha_{24}\delta_2\varphi_1 + \alpha_{26}\delta_2\varphi_3 + \alpha_{34}\delta_3\varphi_1 + \alpha_{35}\delta_3\varphi_2 + \\
& +\alpha_{45}\varphi_1\varphi_2 + +\alpha_{56}\varphi_2\varphi_3 + \alpha_{46}\varphi_1\varphi_3,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

де підсумовування виконується по всім амортизаторам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} = \sum c_x; \\ \alpha_{22} = \sum c_y; \\ \alpha_{33} = \sum c_z; \\ \alpha_{15} = \sum c_x z; \\ \alpha_{16} = -\sum c_x y; \\ \alpha_{24} = -\sum c_y z; \\ \alpha_{26} = \sum c_y x; \\ \alpha_{34} = \sum c_z y; \\ \alpha_{35} = -\sum c_z x; \\ \alpha_{45} = -\sum c_z xy; \\ \alpha_{46} = -\sum c_y zx; \\ \alpha_{56} = -\sum c_x yx; \\ \alpha_{44} = \sum (c_z y^2 + c_y z^2); \\ \alpha_{55} = \sum (c_x z^2 + c_z x^2); \\ \alpha_{66} = \sum (c_x y^2 + c_y x^2). \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Кінетична система енергія системи $T = T_{\Pi} + T_O$, де

$T_{\Pi} = 0,5m(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2)$ – кінетична енергія поступального руху системи;

$T_O = \frac{\omega^2 I}{2}$ – кінетична енергія обертального руху системи відносно миттєвої осі,

що проходить через центр ваги амортизуючого об'єкта; I – момент інерції об'єкта відносно миттєвої осі; ω – миттєва кутова швидкість об'єкта відносно цієї осі; m – маса об'єкта.

Якщо миттєва ось обертання утворює з осями X, Y, Z відповідно кути $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, то проекції кутової швидкості ω на ці осі з великим ступенем точності рівні

$$\varphi_1 = \omega \cos \gamma_1, \varphi_2 = \omega \cos \gamma_2, \varphi_3 = \omega \cos \gamma_3,$$

а вираз для моменту інерції об'єкта відносно миттєвої осі бути мати вигляд

$$I = I_x \cos^2 \gamma_1 + I_y \cos^2 \gamma_2 + I_z \cos^2 \gamma_3 - 2I_{xy} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - 2I_{yz} \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 - \\ - 2I_{xz} \cos \gamma_3 \cos \gamma_1,$$

де $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$ – моменти інерції та центробіжні моменти інерції амортизуючого об'єкта відносно осей X, Y, Z .

Врахувавши вказані співвідношення, отримаємо

$$T_O = \frac{1}{2} (I_x \varphi_1^2 + I_y \varphi_2^2 + I_z \varphi_3^2) - I_{xy} \varphi_1 \varphi_2 - I_{xz} \varphi_1 \varphi_3 - I_{yz} \varphi_2 \varphi_3$$

Вираз для кінетичної енергії системи в функції від узагальнених швидкостей отримає вигляд

$$T = T_{\Pi} + T_O = 0,5m(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + \frac{1}{2} (I_x \varphi_1^2 + I_y \varphi_2^2 + I_z \varphi_3^2) - \\ - I_{xy} \varphi_1 \varphi_2 - I_{xz} \varphi_1 \varphi_3 - I_{yz} \varphi_2 \varphi_3 = 0,5\beta_{11}(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) + \\ + \frac{1}{2} (\beta_{44} \varphi_1^2 + \beta_{55} \varphi_2^2 + \beta_{66} \varphi_3^2) + \beta_{45} \varphi_1 \varphi_2 + \beta_{46} \varphi_1 \varphi_3 + \beta_{46} \varphi_2 \varphi_3, \quad (3.6)$$

де

$$\beta_{11} = m; \beta_{44} = I_x; \beta_{55} = I_y; \beta_{66} = I_z; \beta_{45} = -I_{xy}; \beta_{56} = -I_{yz}; \beta_{46} = -I_{xz}. \quad (3.7)$$

Якщо продиференціювати рівняння (3.6) і (3.4) згідно виразу (3.1), отримаємо шість взаємопов'язаних диференціальних рівнянь власних коливань амортизуючого об'єкта в загальному випадку:

$$\beta_{11} \ddot{\delta}_1 + \alpha_{11} \delta_1 + \alpha_{15} \varphi_2 + \alpha_{16} \varphi_3 = 0; \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_2 + \alpha_{22} \delta_2 + \alpha_{24} \varphi_1 + \alpha_{26} \varphi_3 = 0;$$

$$\begin{aligned}
&\beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2 = 0; \\
&\beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{45}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{46}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{34}\delta_3 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3 = 0; \\
&\beta_{45}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{56}\varphi_3 = 0; \\
&\beta_{46}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{16}\delta_1 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3 = 0. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= A_1 \cos(\omega t + \psi); & \delta_2 &= A_2 \cos(\omega t + \psi); & \delta_3 &= A_3 \cos(\omega t + \psi); \\
\varphi_1 &= A_4 \cos(\omega t + \psi); & \varphi_2 &= A_5 \cos(\omega t + \psi); & \varphi_3 &= A_6 \cos(\omega t + \psi);
\end{aligned}$$

де $A_1, A_2, \dots, A_6$ – постійні коефіцієнти; ω – кругова частота; ψ – початкова фаза коливань.

Підставимо ці розв'язки в рівняння (3.8):

$$\begin{aligned}
&(\alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2)\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3 = 0; \\
&(\alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2)\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 = 0; \\
&(\alpha_{33} - \beta_{11}\omega^2)\delta_3 + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2 = 0; \\
&\alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{34}\delta_3 + (\alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2)\varphi_1 + (\alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2)\varphi_2 + (\alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2)\varphi_3 = 0; \\
&\alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + (\alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2)\varphi_1 + (\alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2)\varphi_2 + (\alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2)\varphi_3 = 0; \\
&\alpha_{16}\delta_1 + \alpha_{26}\delta_2 + (\alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2)\varphi_1 + (\alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2)\varphi_2 + (\alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2)\varphi_3 = 0. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Дана система припускає розв'язки, відмінні від нуля, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} - \beta_{33}\omega^2 & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 \\ \alpha_{15} & 0 & \alpha_{35} & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & 0 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 & \alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння шостого степеня відносно ω^2

$$A\omega^{12} + B\omega^{10} + C\omega^8 + D\omega^6 + E\omega^4 + F\omega^2 + H = 0, \quad (3.10)$$

де $A, B, \dots, H$ – постійні коефіцієнти.

З рівняння (3.10) можна знайти шість власних частот $\omega_1, \dots, \omega_6$ коливань системи. Всі корені цього рівняння розташовуються в області

$$x_{\min} < x < x_{\max},$$

де $x_{\min}$ – найменше, а $x_{\max}$ – найбільше з чисел на рисунку 3.1.

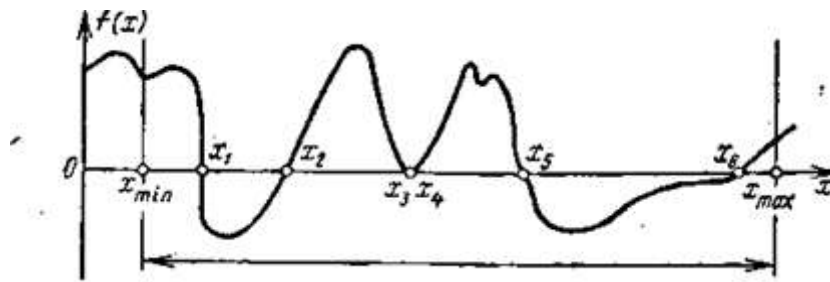


Рисунок 3.1 – Область коренів

3.1.2 Монтаж об'єкта без перекосів на амортизаторах, що мають однакові жорсткості c_z

Для того, щоб в стані спокою об'єкт на амортизаторах не мав перекосів, потрібно щоб просідання всіх амортизаторів під ним було однаковим. Ця умова виконується тоді, коли

$$\alpha_{34} = \alpha_{35} = 0,$$

тобто коли центр ваги об'єкту і центр жорсткості амортизаторів лежать на одній вертикалі.

Якщо додатково в усіх амортизаторів коефіцієнти c_z вибрати однаковими, третє рівняння в системі (3.8) буде незалежним від інших і отримає вигляд

$$\beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 = 0.$$

Тоді можна визначити одну із власних частот, що відповідає поступальним (вертикальним) коливанням вздовж осі z ,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{33}}{\beta_{11}}}. \quad (3.11)$$

Інші п'ять власних частот знаходяться з п'яти взаємопов'язаних рівнянь, що залишилися.

3.1.3 Встановлення об'єкту без перекосів на амортизаторах з однаковими жорсткостями, що розташовані в одній площині

Якщо виконуються умови $\alpha_{34}=\alpha_{35}=0$ і, крім того, у всіх амортизаторів коефіцієнти $c_x = c_y$, тоді $\alpha_{16} = \alpha_{26} = 0$. У випадку ж, коли амортизатори лежать на одному рівні ($z = \text{const}$), $\alpha_{46} = \alpha_{56} = 0$.

Оскільки $c_x = c_y$ і $z = \text{const}$, то і $\alpha_{11} = \alpha_{22}$. Враховуючи все це, із п'яти рівнянь системи (3.8), що залишилися, отримаємо:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 &= 0; \\ \beta_{44}\ddot{\delta}\varphi_1 + \beta_{45}\ddot{\delta}\varphi_2 + \beta_{46}\ddot{\delta}\varphi_3 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{45}\ddot{\delta}\varphi_1 + \beta_{55}\ddot{\delta}\varphi_2 + \beta_{56}\ddot{\delta}\varphi_3 + \alpha_{15}\delta_{12} + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 &= 0; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\beta_{46}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{66}\varphi_3 = 0.$$

Інтегрування цієї системи рівнянь призводить до рівняння частот

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & 0 & \alpha_{15} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2 & \alpha_{24} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & -\beta_{46}\omega^2 \\ \alpha_{15} & 0 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \beta_{56}\omega^2 \\ 0 & 0 & -\beta_{46}\omega^2 & -\beta_{56}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Розкривши визначник, отримаємо після алгебраїчних викладок рівняння п'ятої степені відносно ω^2

$$A\omega^{10} + B\omega^8 + C\omega^6 + D\omega^4 + E\omega^2 + F = 0, \quad (3.14)$$

де

$$\begin{aligned} A &= -\beta_{11}^2[\beta_{44}(\beta_{55}\beta_{66} - \beta_{56}^2) + \beta_{45}(\beta_{46}\beta_{56} - \beta_{45}\beta_{66}) + \beta_{46}(\beta_{45}\beta_{56} - \beta_{46}\beta_{55})]; \\ B &= \beta_{11}[(2\alpha_{11}\beta_{66} + \alpha_{66}\beta_{11})(\beta_{44}\beta_{55} - \beta_{45}^2) - \beta_{46}^2(2\alpha_{11}\beta_{55} + \alpha_{55}\beta_{11}) - \\ &\quad - \beta_{56}^2(2\alpha_{11}\beta_{44} + \alpha_{44}\beta_{11}) + \beta_{11}\beta_{56}(\beta_{44}\alpha_{55} + \alpha_{44}\beta_{55}) + 2\beta_{46}\beta_{56}(2\alpha_{11}\beta_{45} + \\ &\quad + \alpha_{45}\beta_{11}) - 2\alpha_{45}\beta_{11}\beta_{45}\beta_{66}]; \\ C &= \alpha_{11}[\beta_{46}^2(2\alpha_{55}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{55}) + \beta_{56}^2(2\alpha_{44}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{44}) - 2\beta_{46}\beta_{56}(2\alpha_{45}\beta_{11} + \\ &\quad + \alpha_{11}\beta_{45}) - (2\alpha_{66}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{66})(\beta_{44}\beta_{55} - \beta_{45}^2)] + \beta_{11}[\alpha_{15}^2(\beta_{44}\beta_{66} - \beta_{46}^2) + \\ &\quad + \alpha_{24}^2(\beta_{55}\beta_{66} - \beta_{56}^2) + \beta_{11}\beta_{66}(\alpha_{45}^2 - \alpha_{44}\alpha_{55}) - (2\alpha_{11}\beta_{66} + \alpha_{66}\beta_{11})(\beta_{44}\alpha_{55} + \\ &\quad + \alpha_{44}\beta_{55} - 2\alpha_{45}\beta_{45})]; \\ D &= \alpha_{11}\{(2\alpha_{66}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{66})(\beta_{44}\alpha_{55} + \beta_{55}\alpha_{44} - 2\beta_{45}\alpha_{45}) + \alpha_{11}[\alpha_{66}(\beta_{44}\beta_{55} - \\ &\quad - \beta_{45}^2) + \beta_{46}(2\alpha_{45}\beta_{56} - \alpha_{55}\beta_{46})] - \beta_{56}^2(\alpha_{11}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\} - \alpha_{15}^2[\alpha_{22}(\beta_{44}\beta_{56} - \\ &\quad - \beta_{46}^2) + \beta_{11}(\alpha_{66}\beta_{44} + \alpha_{44}\beta_{66})] - \alpha_{24}^2[\beta_{66}(\alpha_{55}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{55}) + \alpha_{66}\beta_{11}\beta_{55}] + \\ &\quad + \beta_{11}(2\alpha_{11}\beta_{66} + \alpha_{66}\beta_{11})(\alpha_{44}\alpha_{55} - \alpha_{45}^2); \\ E &= \alpha_{11}[(2\alpha_{11}\alpha_{45}\alpha_{66}\beta_{45} + \beta_{66}\alpha_{55}\alpha_{24}^2) - (2\beta_{11}\alpha_{66} + \beta_{66}\alpha_{11})(\alpha_{44}\alpha_{55} - \alpha_{45}^2)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_{15}^2[(\alpha_{44}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{44})\alpha_{66} + (\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\beta_{66}] + \alpha_{66}[(\alpha_{55}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{55})\alpha_{24}^2 - \\
& -(\beta_{44}\alpha_{55} + \beta_{55}\alpha_{44})\alpha_{11}^2]; \\
F = & \alpha_{66}\{[(\alpha_{44}\alpha_{55} - \alpha_{45}^2)\alpha_{11}^2 - (\alpha_{11}\alpha_{55} - \alpha_{15}^2)] - \alpha_{22}\alpha_{44}\alpha_{15}^2\}.
\end{aligned}$$

З рівняння (3.14) можна знайти п'ять власних частот $\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_6$; шоста власна частота ω_1 знаходиться з виразу (3.11).

3.1.4 Монтаж на амортизаторах, коли відцентрові моменти інерції виробу дорівнюють нулю

Якщо виконуються умови $\alpha_{34} = \alpha_{35} = 0, \alpha_{16} = \alpha_{26} = 0, \alpha_{46} = \alpha_{56} = 0$ та $\alpha_{11} = \alpha_{22}$. І має місце рівність $\alpha_{45} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0$, яка означає, що осі X, Y, Z є головними центральними осями інерції установки, то система рівнянь (3.12) розкладається на три незалежні групи і має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
\text{перша група} \quad & \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{66}\varphi_3 = 0; \\
\text{друга група} \quad & \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 = 0; \\
& \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{55}\varphi_2 = 0; \\
\text{третя група} \quad & \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 = 0; \\
& \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{44}\varphi_1 = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Перше рівняння системи (3.15) відповідає обертовим коливанням навколо осі Z з частотою власних коливань

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{66}}{\beta_{66}}}. \tag{3.16}$$

Друге і третє рівняння системи (3.15) описують складні коливання об'єкту в площині ZX (рисунок 3.2).

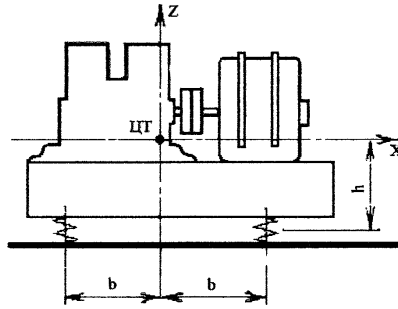


Рисунок 3.2 – Об'єкт в площині ZX

Інтегрування їх призводить до рівняння

$$\beta_{11}\beta_{55}\omega^4 - (\beta_{11}\alpha_{55} + \beta_{55}\alpha_{11})\omega^2 + \alpha_{11}\alpha_{55} - \alpha_{55}^2 = 0, \quad (3.17)$$

з якого можна визначити власні частоти ω_3 і ω_4 цих складних коливань.

Четверте і п'яте рівняння системи (3.15) описують складні коливання об'єкту в площині ZY (рис. 3.3).

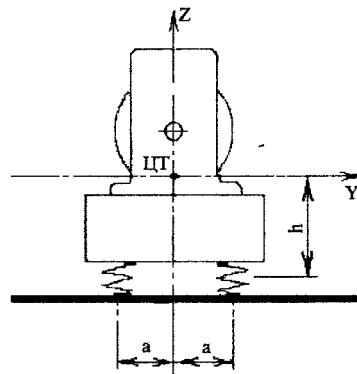


Рисунок 3.3 – Об'єкт в площині ZY

При їх інтегруванні отримаємо рівняння частот

$$\beta_{11}\beta_{44}\omega^4 - (\beta_{11}\alpha_{44} + \beta_{44}\alpha_{22})\omega^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 = 0, \quad (3.18)$$

з якого знаходяться частоти ω_5 і ω_6 складних коливань.

Частота ω_1 поступових вертикальних коливань вздовж осі Z обчислюється по формулі (3.11).

3.1.5 Випадок наявності площин симетрії при встановленні об'єкта на ізоляторі

Якщо поєднати всі шість власних частот ізолюючого об'єкта не виходить по конструктивним міркуванням, тоді потрібно принаймні розв'язати ці частоти з тим, щоб направлене збудження не викликало появи шести можливих резонансів, та мав би місце тільки один резонанс, що відповідає головному напрямленню, по якому діє збудження. Розв'язка частот відбувається в тих випадках, коли одна або декілька координатних площин XOY , YOZ , ZOX були площинами симетрії системи амортизації.

Якщо амортизатори розташовані довільним чином так, що площини симетрії відсутні, то всі коливання пов'язані між собою і власні частоти визначаються рівняннями (3.8). А якщо система має хоча б одну площину симетрії, тоді пов'язані форми коливань розпадаються на дві не пов'язані групи: симетричні і несиметричні. В відповідності з цим власні частоти такої системи будуть визначатися з двох незалежних груп рівнянь, і обчислення їх спрощується.

Рівняння частот прості, якщо осі X , Y , Z є головними і центральними осями інерції ізолюючого об'єкта. Система, що зображена на рисунку 3.4 має одну площину симетрії XOZ , і якщо осі X , Y , Z — головні і центральні осі інерції, то симетричними формами коливань будуть δ_1 , δ_3 , φ_2 , тобто два поступових переміщення по осям X та Z і одне обертання навколо осі Y .

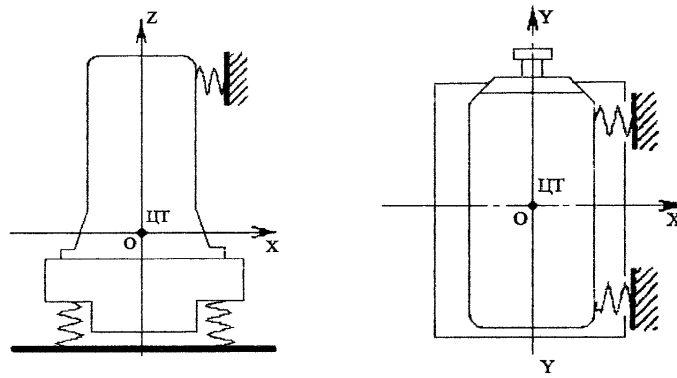


Рисунок 3.4 – Система з однією площиною симетрії XOZ

Несиметричними формами коливань будуть три, що залишилися – δ_2 , φ_1 та φ_3 , тобто одне поступове переміщення по осі Y і два обертання навколо осей X і Z . Таким чином, рівняння (3.8) з урахуванням $\alpha_{45} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0$ розпадеться на дві незалежні групи рівнянь, з яких можна знайти всі шість власних частот.

Для симетричних коливань

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{35}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{55}\varphi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для несиметричних коливань

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 &= 0; \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{46}\varphi_3 &= 0; \\ \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Розв'язуючи рівняння (3.19), отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2)\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 = 0; \\ (\alpha_{33} - \beta_{11}\omega^2)\delta_3 + \alpha_{35}\varphi_2 = 0; \\ (\alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2)\varphi_2 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 = 0. \end{cases}$$

розв'язування якої приводить до рівняння третього степеня відносно ω^2

$$A\omega^6 + B\omega^4 + C\omega^2 + D = 0, \quad (3.21)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \beta_{55}\beta_{11}^2; \\ B &= -(\alpha_{55}\beta_{11}^2 + \alpha_{33}\beta_{11}\beta_{55} + \alpha_{11}\beta_{11}\beta_{55}); \\ C &= \alpha_{33}\beta_{11}\alpha_{55} + \alpha_{11}\beta_{11}\alpha_{55} + \alpha_{33}\beta_{55}\alpha_{11} - \beta_{11}\alpha_{15}^2 - \alpha_{35}^2\beta_{11}; \\ D &= \alpha_{33}\alpha_{15}^2 + \alpha_{11}\alpha_{35}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}\alpha_{55}. \end{aligned}$$

Рівняння (3.21) шляхом спеціальної підстановки

$$\omega^2 = y - \frac{B}{3A}; \quad p = \frac{C}{3A} - \frac{1}{9}\left(\frac{B}{A}\right)^2; \quad q = \frac{1}{27}\left(\frac{B}{A}\right)^3 - \frac{BC}{6A^2} + \frac{D}{2A}$$

можна привести до виду

$$y^3 + 3py + 2q = 0.$$

Корені цього рівняння визначаються формулами

$$y_1 = -2r \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right); \quad y_2 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right); \quad y_3 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right),$$

$$\text{де } \varphi = \frac{q}{r^3}; \quad r = \pm\sqrt{|p|}.$$

Так знаходяться три власні частоти ізолюючої установки, що відповідають її коливанням в площині симетрії. Три інші власні частоти знаходяться з рівнянь (3.20), розв'язування яких приводить до системи

$$\begin{cases} (\alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2)\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 = 0; \\ (\alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2)\varphi_1 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_3 = 0; \\ (\alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2)\varphi_3 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, отримаємо кубічне рівняння відносно ω^2

$$K\omega^6 + L\omega^4 + M\omega^2 + N = 0, \quad (3.22)$$

де

$$K = \beta_{11}\beta_{44}\beta_{66};$$

$$L = -(\alpha_{66}\beta_{11}\beta_{44} + \alpha_{44}\beta_{11}\beta_{66} + \alpha_{22}\beta_{44}\beta_{66});$$

$$M = \alpha_{44}\alpha_{66}\beta_{11} + \alpha_{22}\alpha_{66}\beta_{44} + \alpha_{22}\alpha_{44}\beta_{66} - \alpha_{26}^2\beta_{44} - \alpha_{24}^2\beta_{66} - \alpha_{46}^2\beta_{11};$$

$$N = \alpha_{22}\alpha_{46}^2 + \alpha_{66}\alpha_{24}^2 + \alpha_{44}\alpha_{26}^2 - 2\alpha_{24}\alpha_{46}\alpha_{26} - \alpha_{22}\alpha_{44}\alpha_{66}.$$

Розв'язавши рівняння (3.22) таким способом, як і рівняння (3.21), знайдемо три інші власні частоти ізолюючого об'єкта, що відповідає несиметричним коливанням.

Якщо підресорна установка має дві площини симетрії, наприклад XOZ та YOZ , то дві форми коливань, а саме коливання вздовж осі Z і обертання навколо цієї осі, не залежать від інших форм коливань. В цьому випадку має місце симетричні незалежні форми коливань δ_3 і φ_3 . Симетрично залежні форми коливань характеризуються двома групами величин δ_1, φ_2 та δ_2, φ_1 .

Система диференціальних рівнянь (3.8) розпадеться на чотири самостійні групи рівнянь, з яких знаходять власні частоти установки. Це відповідає розглянутому випадку монтажу на амортизаторах, коли відцентрові моменти інерції об'єкта рівні нулю.

3.1.6 Фланцеве кріплення об'єкта на ізоляторах

Об'єкт кріплять з одного торця через амортизатори до опорної стійки на фланці. Якщо при цьому система має дві площини симетрії ZX и XY , а осі X, Y, Z є головними центральними осями інерції (рис. 3.5), то дві форми коливань δ_1 и φ_1 , що відповідають зміщенню вздовж осі X і повороту навколо цієї осі, не залежать від інших форм коливань і є симетричними незалежними формами. Симетричні пов'язані форми коливань характеризуються двома групами величин δ_3, φ_2 та δ_2, φ_3 .

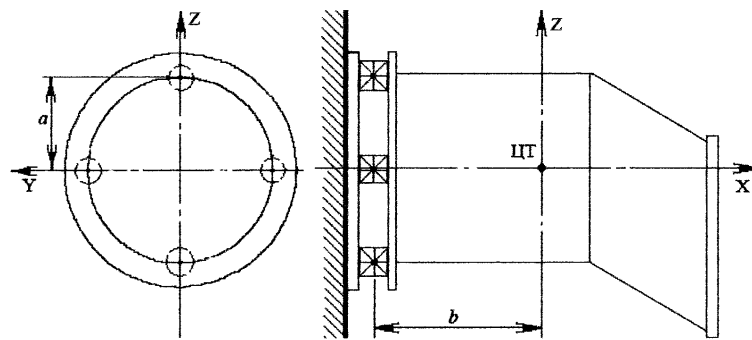


Рисунок 3.5 – Схема фланцевого кріплення об'єкту на амортизаторах

Система диференціальних рівнянь (3.8) в цьому випадку розпадається на чотири самостійні групи рівнянь. Якщо, крім того, (див. рис. 3.5)

$$\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{24} = \alpha_{26} = \alpha_{34} = \alpha_{45} = \alpha_{46} = \alpha_{56} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0,$$

то система диференціальних рівнянь (3.8) розпадеться на наступні незалежні групи рівнянь, з яких визначаються шість власних частот об'єкта:

$$\text{перша група } \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 = 0;$$

$$\text{друга група } \beta_{44}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{44}\varphi_1 = 0;$$

$$\text{третя група } \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{35}\varphi_2 = 0; \quad (3.23)$$

$$\beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{55}\varphi_2 = 0;$$

$$\text{четверта група } \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{26}\varphi_3 = 0;$$

$$\beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{66}\varphi_3 = 0.$$

де перше рівняння відповідає коливанням вздовж осі X , друге – навколо цієї осі, а третє і четверте рівняння взаємопов’язані і відповідають складним симетричним коливанням в площині XZ . П’яте і шосте рівняння теж взаємопов’язані і відповідають складним симетричним коливанням в площині XY .

З першого рівняння знаходиться частота власних поступальних коливань вздовж осі X

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}} = \sqrt{\sum \frac{c_x}{m}}. \quad (3.24)$$

Друге дає власну частоту обертових коливань навколо осі X

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{44}}{\beta_{44}}} = \sqrt{\sum \frac{(c_z y^2 + c_y z^2)}{I_x}}. \quad (3.25)$$

Інтегрування третього і четвертого рівнянь приведе до рівняння частот

$$\beta_{11}\beta_{55}\omega^4 - (\beta_{11}\alpha_{55} + \beta_{55}\alpha_{33})\omega^2 + \alpha_{33}\alpha_{55} - \alpha_{35}^2 = 0, \quad (3.26)$$

з якого знаходять частоти ω_3 та ω_4 складних коливань в площині XZ .

Інтегруючи п’яте і шосте рівняння, отримаємо

$$\beta_{11}\beta_{66}\omega^4 - (\beta_{11}\alpha_{66} + \beta_{66}\alpha_{22})\omega^2 + \alpha_{22}\alpha_{66} - \alpha_{26}^2 = 0, \quad (3.27)$$

із якого знаходять частоти ω_5 та ω_6 складних коливань в площині XU .

3.1.7 Симетрична схема кріплення об'єкта

При симетричній схемі кріплення об'єкта на амортизатори (рис. 3.6) система має три площини симетрії ZX , XU і YZ , а осі X , Y , Z повинні бути головними центральними осями інерції. Всі форми коливань $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, що відповідають зміщенням вздовж осей X, Y, Z і поворотам навколо цих осей, в цьому випадку не залежать один від одного і є симетричними.

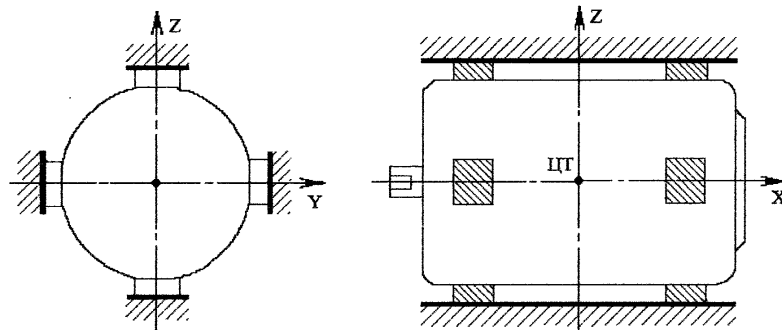


Рисунок 3.6 – Симетрична схема кріплення об'єкта

Якщо, крім того,

$$\alpha_{15} = \alpha_{16} = \alpha_{24} = \alpha_{26} = \alpha_{34} = \alpha_{35} = \alpha_{45} = \alpha_{56} = \beta_{45} = \beta_{46} = \beta_{56} = 0,$$

то система диференціальних рівнянь (3.8) розпадеться на шість незалежних рівнянь

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 &= 0; \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \alpha_{44}\varphi_1 &= 0; \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}\beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \alpha_{55}\varphi_2 &= 0; \\ \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0.\end{aligned}$$

З першого рівняння можна знайти частоту власних поступальних коливань вздовж осі X

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha_{11}}{\beta_{11}}} = \sqrt{\sum \frac{c_x}{m}}. \quad (3.29)$$

із другого – частоту власних поступальних коливань вздовж осі Y

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha_{22}}{\beta_{11}}} = \sqrt{\sum \frac{c_y}{m}} \quad (3.30)$$

а із третього - частоту власних поступальних коливань вздовж осі Z

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{\alpha_{33}}{\beta_{11}}} = \sqrt{\sum \frac{c_z}{m}}. \quad (3.31)$$

Із четвертого, п'ятого і шостого рівнянь можна визначити частоти власних обертальних коливань навколо осей X, Y, Z відповідно [3]:

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{\alpha_{44}}{\beta_{44}}} = \sqrt{\sum \frac{(c_z y^2 + c_y z^2)}{I_x}}, \quad (3.32)$$

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{\alpha_{55}}{\beta_{55}}} = \sqrt{\sum \frac{(c_x z^2 + c_z x^2)}{I_y}}, \quad (3.33)$$

$$\omega_6 = \sqrt{\frac{\alpha_{66}}{\beta_{66}}} = \sqrt{\sum \frac{(c_x y^2 + c_y x^2)}{I_z}}. \quad (3.34)$$

3.1.8 Встановлення об'єкта на похилих опорах

Суміщення центру тяжіння і центру жорсткості системи, яка амортизується, що приводить до розв'язки коливань обертання та зсуву, по конструктивним міркуванням не завжди можливе. Існує спосіб, який дозволяє, залишаючи точки кріплення амортизаторів нижче рівня центра тяжіння, поєднати обидва центри в одній точці. Суть способу полягає в нахилі амортизаторів під деяким кутом до горизонтальної площини з такою умовою, щоб рівнодіючі їх опорних реакцій проходили через центр тяжіння (див. рис. 3.7).

Цей метод часто застосовують в автомобілебудуванні, авіації і суднобудуванні при встановленні двигунів.

Перевагою похилого кріплення амортизаторів є також те, що забезпечується надійність кріплення системи при її роботі на зсув.

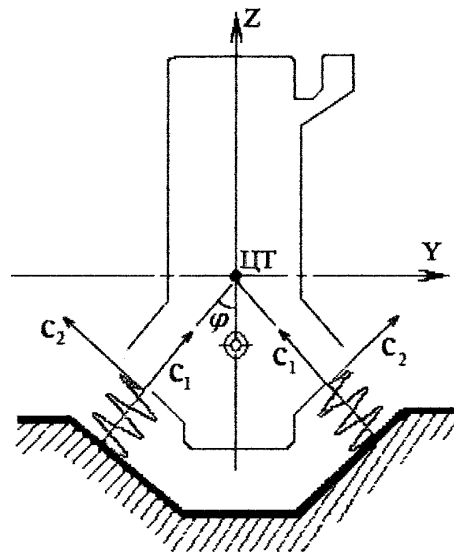


Рисунок 3.7 – Об'єкт на похилих опорах

При певному нахилі амортизаторів горизонтальна сила інерції, що прикладена до центру тяжіння, викликає лише горизонтальний зсув установки, який не супроводжується її поворотом. При цьому досягається розділення коливань зсуву і повороту, а отже, з'являється можливість робити розрахунок власних частот незалежно один від одного.

При нахилі амортизаторів їх жорсткості визначаються з наступних виразів:

в напрямку осі Y

$$c_y = c_1 \sin^2 \varphi + c_2 \cos^2 \varphi, \quad (3.35)$$

в напрямку осі Z

$$c_z = c_1 \cos^2 \varphi + c_2 \sin^2 \varphi, \quad (3.36)$$

де c_1 і c_2 – жорсткості амортизаторів в напрямку двох їхніх головних осей.

Відповідні власні частоти поступальних коливань в напрямку вказаних осей

$$\omega_y = \sqrt{\frac{nc_y}{m}}, \quad (3.37)$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{nc_z}{m}}, \quad (3.38)$$

де n – загальна кількість амортизаторів; m – маса об'єкта, що амортизується.

Власну частоту обертальних коливань навколо осі X можна визначити з виразу (3.32), а власну частоту обертальних коливань навколо осі Z – з виразу (2.34). Власні частоти зв'язаних коливань в площині ZX знаходять з рівняння (3.17).

Щоб розв'язати власні частоти в площині ZX , потрібно нахилити амортизатори і цій площині (наприклад, по квадрату, прямокутнику, еліпсу і т.д.). Вказаних випадках амортизатори нахилені в двох і більше площинах.

Встановлення об'єктів на похилих амортизаторах не тільки зменшує поперечний зсув, але також збільшує надійність кріплення і стійкість об'єктів. При похилому розташуванні амортизаторів, крім того, зменшуються їх жорсткість частота власних коливань системи в вертикальному напрямку, що підвищує ефективність віброізоляції.

3.2 Вимушені коливання об'єкту на ізоляторах без демпфування

Сили обурення, що діють на підресорну установку та приведені до її центру тяжіння, можна представити узагальненими параметрам: головним вектором сил $\vec{W}$ і головним моментом $\vec{M}$. Проекції головного вектора і головного моменту на осі координат X, Y, Z дають три складових головного вектора $\vec{W}_1, \vec{W}_2, \vec{W}_3$ і три складових головного моменту $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3$, які є заданими функціями часу.

Якщо в рівняннях власних коливань (3.8) замінити їх праві частини, рівні нулю, що відповідають узагальненим силам і моментам, то отримаємо диференціальні рівняння вимушених коливань підресорної установки в загальному випадку:

$$\begin{aligned}
 \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\varphi_1 + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3 &= \vec{W}_1(t); \\
 \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 &= \vec{W}_2(t); \\
 \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2 &= \vec{W}_3(t); \\
 \beta_{44}\varphi_1 + \beta_{45}\varphi_2 + \beta_{46}\varphi_3 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{34}\delta_3 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3 &= \vec{M}_1(t);
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

$$\beta_{45}\varphi_1 + \beta_{55}\varphi_2 + \beta_{56}\varphi_3 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{56}\varphi_3 = \overrightarrow{M_2}(t);$$

$$\beta_{46}\varphi_1 + \beta_{56}\varphi_2 + \beta_{66}\varphi_3 + \alpha_{16}\delta_2 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3 = \overrightarrow{M_3}(t).$$

Найбільш часто зустрічається випадок, коли узагальнені сили обурення є гармонічними функціями часу

$$\begin{aligned}\overrightarrow{W}_i &= W_{mi} \cos(p_i t + \psi_i); \\ \overrightarrow{M}_i &= M_{mi} \cos(p_i t + \psi_i).\end{aligned}\tag{3.40}$$

У цьому випадку частковий розв'язок потрібно шукати того ж вигляду і з тими ж тригонометричними множниками, тобто

$$\begin{aligned}\delta_i &= \delta_{mi} \cos(p_i t + \psi_i); \\ \varphi_i &= \varphi_{mi} \cos(p_i t + \psi_i).\end{aligned}\tag{3.41}$$

Підставивши ці вирази в рівняння (3.39), будемо мати для визначення невідомих коефіцієнтів δ_{mi} та φ_{mi} систему з шести алгебраїчних рівнянь.

Якщо сили обурення є довільними періодичними функціями часу, то їх можна розкласти в тригонометричний ряд Фур'є, кожний із членів якого має вигляд (3.40). Внаслідок лінійності диференціальних рівнянь (3.39) розв'язок в цьому випадку виходить сумуванням часткових розв'язків, що відповідають окремим членам ряду Фур'є.

У загальному випадку сили обурення виражають довільними неперіодичними функціями часу. Це має місце при несталих коливальних процесах, наприклад при неперіодичних поштовхах та ударах і т.п.

На практиці найбільш корисні два шляхи розв'язування задачі: використання способів операційного числення і перехід до головних координат

системи. Застосуванням способів операційного числення виконується перехід від функції часу t до функцій оператора p і наступна заміна диференціальних рівнянь їх алгебраїчними зображеннями. Розв'язуючи ці алгебраїчні рівняння, знаходимо вирази для узагальнених координат. Користуючись теоремою розкладання Хевісайда, повертаємося від зображень до оригіналів та знаходимо шукані вирази для узагальнених координат у вигляді функцій часу.

З загальної теорії коливань системи з багатьма степенями свободи, узагальнені координати можна обирати таким чином, що в виразі для потенціальної та кінетичної енергії системи будуть відсутніми члени з взаємними добутками узагальнених координат. Тоді замість системи зв'язаних один з одним диференціальних рівнянь коливань будемо мати таке ж число незалежних один від одного диференціальних рівнянь, в кожне з яких входить тільки одна узагальнена координата. Такі, спеціально вибрані, узагальнені координати називаються головними координатами системи, вони пов'язані з будь якими іншими узагальненими координатами лінійними співвідношеннями.

Для визначення головних координат або виконують лінійне перетворення узагальнених координат таким чином, щоб у виразах для потенціальної і кінетичної енергій зникли члени з взаємними добутками координат, або, користуючись будь яким попередньо вибраними узагальненими координатами, знаходять власні частоти системи і відповідні їм головні коливання.

Обчислити шість головних координат s_i системи і відповідні узагальнені сили $\vec{W}_i(t)$ ($i=1,2,\dots, 6$), будемо мати замість виразів (3.39) шість незалежних диференціальних рівнянь виду

$$\beta_i \ddot{s}_i + \alpha_i \dot{s}_i = \vec{W}_i(t), \quad (3.42)$$

де β_i та α_i – постійні коефіцієнти.

Тоді для кожної із головних координат s_i можна написати розв'язок для вимушених коливань системи з однією степеню свободи, що визиваються силою обурення, доволіно міняючись в часі,

$$s_i = s_0 \cos(\omega_i t) + \frac{s_{0i}}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + \frac{\omega_i}{\alpha_i} \int_0^t W_i(\tau) \sin \varphi_i(t - \tau) d\tau, \quad (3.43)$$

де s_0 і s_{0i} – значення головної координати s_i та її похідної при $t = 0$.

Отримавши після обчислення інтегралів типу (3.43) вирази для головних координат у вигляді функцій часу $s_1(t), s_2(t), \dots, s_6(t)$ за допомогою відповідного лінійного перетворення, перейдемо до початкових узагальнених координатам $\delta_1(t), \delta_2(t), \delta_3(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$.

Так розв'язується задача про вимушені коливання підресорної установки в загальному випадку, коли система диференціальних рівнянь (3.39) не розбивається на окремі незалежні одна від одної групи рівнянь. В ряді часткових випадків, які розглянуті в пункті 3.1, також як для власних коливань, маємо незалежні групи рівнянь з тією відмінністю, що їх праві частини рівні не нулю, а відповідним узагальненим силам. Розрахунок вимушених коливань при цьому спрощується.

Наприклад, для випадку, при виконанні монтажу на амортизаторах, коли відцентрові моменти інерції виробу дорівнюють нулю, який при гармонічному збудженні маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \beta_{11} \ddot{\delta}_3 + \alpha_{33} \delta_3 &= \vec{W}_3 \cos pt; \\ \beta_{66} \varphi_3 + \alpha_{66} \varphi_3 &= \vec{M}_3 \cos pt; \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_1 + \alpha_{11} \delta_1 + \alpha_{15} \varphi_2 &= \vec{W}_1 \cos pt; \\ \beta_{55} \varphi_2 + \alpha_{15} \delta_1 + \alpha_{55} \varphi_2 &= \vec{M}_2 \cos pt; \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_2 + \alpha_{22} \delta_2 + \alpha_{24} \varphi_1 &= \vec{W}_2 \cos pt; \\ \beta_{44} \ddot{\varphi}_1 + \alpha_{24} \delta_2 + \alpha_{44} \varphi_1 &= \vec{M}_1 \cos pt. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Перші два рівняння незалежні від інших, і їх розв'язки для вимушених коливань мають вигляд:

для поступальних коливань вздовж осі Z

$$\delta_3 = A_3 \cos pt, \quad (3.45)$$

де

$$A_3 = \frac{\vec{W}_3}{(\alpha_{33} - \beta_{11}p^2)}$$

для обертальних коливань навколо осі Z

$$\varphi_3 = \Phi_3 \cos pt, \quad (3.46)$$

де

$$\Phi_3 = \frac{\vec{M}_3}{(\alpha_{66} - \beta_{66}p^2)}.$$

Третя і четверта групи рівнянь складаються із двох взаємозв'язаних рівнянь, що відповідають складним коливанням в площинах ZX і ZY. Їх розв'язок.

$$\varphi_2 = \Phi_2 \cos pt, \quad (3.47)$$

де

$$\Phi_2 = \vec{M}_2 - \frac{\alpha_{15}\vec{W}_1}{(\alpha_{11} - \beta_{11}p^2)} : \left(\alpha_{55} - \beta_{55}p^2 - \frac{\alpha_{15}^2}{\alpha_{11} - \beta_{11}p^2} \right);$$

$$\delta_1 = A_1 \cos pt, \quad (3.48)$$

де

$$A_1 = \vec{W}_1 - \frac{\alpha_{15} \left(\vec{M}_2 - \frac{\alpha_{15} \vec{W}_1}{(\alpha_{11} - \beta_{11} p^2)} \right)}{\left(\alpha_{55} - \beta_{55} p^2 - \frac{\alpha_{15}^2}{(\alpha_{11} - \beta_{11} p^2)} \right)} : (\alpha_{11} - \beta_{11} p^2);$$

для складних коливань в площині ZY

$$\varphi_1 = \Phi_1 \cos pt, \quad (3.49)$$

де

$$\Phi_1 = \vec{M}_1 - \frac{\alpha_{24} \vec{W}_2}{(\alpha_{22} - \beta_{11} p^2)} : \left(\alpha_{44} - \beta_{44} p^2 - \frac{\alpha_{24}^2}{\alpha_{11} - \beta_{11} p^2} \right);$$

$$\delta_2 = A_2 \cos pt, \quad (3.50)$$

де

$$A_2 = \vec{W}_2 - \frac{\alpha_{24} \left(\vec{M}_1 - \frac{\alpha_{24} \vec{W}_1}{(\alpha_{22} - \beta_{11} p^2)} \right)}{\left(\alpha_{44} - \beta_{44} p^2 - \frac{\alpha_{24}^2}{(\alpha_{22} - \beta_{11} p^2)} \right)} : (\alpha_{22} - \beta_{11} p^2).$$

3.3 Власні коливання підресорних систем при наявності демпфування

Практичне встановлення об'єкту на пружні амортизатори. Що опираються на нерухому основу, часто виконується без врахування демпфування в амортизаторах. При цьому вважається, що різниця між власними та вимушеними

частотами системи достатньо велика, а резонанси відсутні. Але досягти цього на практиці буває важко, так як збуджуючі навантаження нерідко мають складний полігармонічний частотний спектр. Ізоляція всіх збуджуючих гармонік цього спектру або хоча б виключення можливих резонансів стає нездійсненою задачею. Тому приходится миритися з деякими із резонансів, що викликаються окремими гармоніками збуджуючого спектру. Основною проблемою в цих випадках є отримання мінімального посилення в резонансі за рахунок введення в систему значного демпфування. Математичний опис коливань системи з демпфуванням виконується за допомогою узагальнених рівнянь Лагранжа [2], що мають коефіцієнт демпфування, комплексно введений в рівняння.

Малі коливання такої системи характеризують шість узагальнених координат $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, три зосереджених параметра – коефіцієнти жорсткості c_x, c_y, c_z , маса установки m , шість моментів інерції $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$ і шість зосереджених параметрів - коефіцієнти демпфування $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}, \gamma_{0z}$ амортизаторів в напрямку та навколо відповідних осей X, Y, Z .

Якщо знехтувати гіроскопічними ефектами обертаючих мас і масою амортизатора, диференціальні рівняння власних коливань системи, що амортизується, можна скласти за допомогою узагальнених рівнянь Лагранжа, які для кожної координати можна представити у вигляді

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) + (1 + i\gamma_j) \frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (3.51)$$

де $x_j = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; $\gamma_j = \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}, \gamma_{0z}$; T, U, γ_j, x_j комплексні функції часу.

Величина γ_j , що входить у вираз (3.51), є еквівалентним коефіцієнтом демпфування всієї системи в цілому по j - й головній координаті. При паралельному з'єднанні амортизаторів еквівалентний коефіцієнт демпфування системи виражається через коефіцієнти демпфування окремих амортизаторів наступним чином:

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} \frac{c_k}{c}.$$

Якщо всі амортизатори виготовлені з одного матеріалу, то

$$\gamma_j = \frac{\gamma_{jk}}{c} \sum_{k=1}^n c_k = \gamma_{jk},$$

тобто еквівалентний коефіцієнт демпфування системи дорівнює коефіцієнту демпфування одного амортизатора.

Якщо припустити, що $\gamma_j = \gamma_{jk}$, то коефіцієнт демпфування одного амортизатора по кожній j -й координаті можна позначити відповідно через $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}, \gamma_{0z}$.

У функції від узагальнених координат потенціальна енергія системи представлена виразом (3.4), а кінетична - виразом (3.6). Тоді, виконавши дії відповідно рівнянню (3.51), отримаємо шість взаємопов'язаних диференціальних рівнянь власних коливань системи з демпфування в загальному випадку:

$$\begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + (1 + i\gamma_x)(\alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3) &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + (1 + i\gamma_y)(\alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3) &= 0; \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + (1 + i\gamma_z)(\alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2) &= 0; \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{45}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{46}\ddot{\varphi}_3 + (1 + i\gamma_{0x})(\alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{34}\delta_3 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3) &= 0; \\ \beta_{45}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_3 + (1 + i\gamma_{0y})(\alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_3) &= 0; \\ \beta_{46}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + (1 + i\gamma_{0z})(\alpha_{16}\delta_1 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Оскільки матеріали амортизаторів ізотропні, коефіцієнти $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \gamma_{0x}, \gamma_{0y}, \gamma_{0z}$ в одного і того ж амортизатора практично можуть бути прийняті однаковими та рівними γ_m [4].

3.4 Ізолюючий ефект амортизаторів

Установлюючи об'єкт на ізолятори важливо оцінити отриманий в результаті ефект, який виражається в зменшенні коливань в порівнянні з діючими вібраціями.

Щоб оцінити ізолюючий ефект ізоляторів потрібно аналізувати вимушені коливання підресорної системи. Якщо збуджуючі сили періодичні, то зручно робити дослідження методом головних координат. Наприклад, вводячи шість головних координат s_i і відповідні їм узагальнені збуджуючі сили $W_i(t)$, де $i = 1, 2, \dots, 6$, для кінематичної та потенціальної енергій підресорної системи отримаємо вираз без членів з взаємними добутками координат:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \beta_i s_i^2;$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \alpha_i s_i^2.$$

Якщо розглядувати власні коливання підресорної установки, знехтують демпфуванням системи, думаючи, що сили спротиву не настільки великі, щоб суттєво впливати на власних частотах системи. Але демпфування суттєво впливає на ефективність віброізоляції, особливо коли різниця між частотами збудження і власними коливаннями системи набуває малих значень. Розглянемо два основних типи демпфування, які зустрічаються в практиці віброізоляції: в'язке та за рахунок внутрішнього поглинання в матеріалі.

У випадку в'язкого демпфування сили затухання лінійно залежать від швидкості та енергії, що переходить в тепло завдяки силам затухання, можна описати функцією розсіювання, яку представимо в головних координатах:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 h_i s_i^2.$$

При цьому $\frac{\partial R}{\partial \dot{s}_i}$ сила затухання, що діє на i -й головній координаті;
 h_i – відповідний коефіцієнт в'язкого тертя.

Відповідно до рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} + \frac{\partial U}{\partial s_i} = W_i(t) - \frac{\partial R}{\partial \dot{s}_i} + \frac{\partial T}{\partial s_i}$$

зробивши з U , T та R певні операції, отримаємо шість незалежних один від одного диференціальних рівнянь вимушених коливань наступного вигляду:

$$\beta_i \ddot{s}_i + h_i \dot{s}_i + \alpha_i s_i = W_i(t). \quad (3.53)$$

У випадку демпфування за рахунок внутрішнього поглинання енергії в матеріалі ізолятора з рівнянь Лагранжа виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i} + (1 + j\gamma_{M_i}) \frac{\partial U}{\partial s_i} = W_i(t) + \frac{\partial T}{\partial s_i}$$

отримаємо шість незалежних один від одного диференціальних рівнянь вимушених коливань

$$\beta_i \ddot{s}_i + (1 + j\gamma_{M_i}) \alpha_i s_i = W_i(t). \quad (3.54)$$

Якщо припустити, що сили збудження є гармонічними функціями часу, тобто

$$W_i(t) = W_{mi} \sin p_i t$$

де p_i – частота збудження.

Тоді рівняння (3.53) і (3.54) матимуть вигляд:

$$\beta_i \ddot{s}_i + h_i \dot{s}_i + \alpha_i s_i = W_{mi} \sin p_i t, \quad (3.55)$$

$$\beta_i \ddot{s}_i + (1 + j_{M_i}) + \alpha_i s_i = W_{mi} \sin p_i t, \quad (3.56)$$

де коефіцієнт демпфування γ_{M_i} ізоляторів у вигляді малих коливань системи можна вважати постійним параметром.

Замінивши $W_{mi} \sin p_i t$ через $W_{mi} e^{jp_i t}$, можна знайти часткові розв'язки для (3.55) та (3.56) у вигляді

$$\bar{s}_i = \bar{A} e^{jp_i t},$$

де $\bar{A}$ – комплексна амплітуда зміщення.

Якщо підставити вказаний розв'язок в рівняння (3.55) і (3.56) отримаємо відношення, яке пов'язує комплексні амплітуди зміщення і сили збудження,

$$\bar{W}_{mi} = \bar{A}(\alpha_i - \beta_i p_i^2 + jp_i h_i);$$

$$\bar{W}_{mi} = \bar{A}(\alpha_i - \beta_i p_i^2 + j\gamma_{M_i} \alpha_i),$$

звідки модуль сили для першого і другого випадків

$$W_{mi} = \sqrt{(\alpha_i - \beta_i p_i^2)^2 + p_i^2 h_i^2}, \quad (3.57)$$

$$W_{mi} = \sqrt{(\alpha_i - \beta_i p_i^2)^2 + \gamma_{M_i}^2 \alpha_i^2}, \quad (3.58)$$

У лінійних системах віброізоляції при вимушених коливаннях, що збуджуються зовнішньою гармонічною силою, всі елементи системи

коливаються з частотою зовнішньої сили p_i . Узагальнена сила, яка діє на опорну основу під ізоляторами в напрямку координати s_i для першого випадку

$$W'_{mi} = \frac{\partial U}{\partial s_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{s}_i} = \alpha_i s_i + h_i \dot{s}_i,$$

або в комплексних амплітудах

$$\overline{W'_{mi}} = \overline{A}(\alpha_i + jp_i h_i,$$

тоді модуль сили

$$W'_{mi} = A \sqrt{\alpha_i^2 + p_i^2 h_i^2}. \quad (3.59)$$

Для другого випадку

$$W'_{mi} = \frac{\partial U}{\partial s_i} = (1 + j\gamma_{M_i})\alpha_i s_i,$$

або в комплексних амплітудах

$$\overline{W'_{mi}} = \overline{A}(\alpha_i + j\alpha_i \gamma_{mi},$$

тоді модуль сили

$$W'_{mi} = A\alpha_i \sqrt{1 + \gamma_{mi}^2}. \quad (3.60)$$

Відношення сили, що діє на основу при наявності ізоляторів, до відповідної сили, яка діє в об'єкті, називають коефіцієнтом віброізоляції η_i . Таким чином, для координати s_i у випадку в'язкого демпфування маємо

$$\eta_i = \frac{W'_{mi}}{W_{mi}} = \sqrt{\frac{\alpha_i^2 + p_i^2 h_i^2}{(\alpha_i - \beta_i p_i^2)^2 + p_i^2 h_i^2}} = \sqrt{\frac{1 + 4\gamma^2 D^2}{(1 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2 D^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{4\gamma^2 \vartheta^2}{2\pi^2 + \vartheta^2}}{(1 - \gamma^2)^2 + \frac{4\gamma^2 \vartheta^2}{4\pi^2 + \vartheta^2}}}, \quad (3.61)$$

де $\gamma = \frac{p_i}{\omega_i}$ – відношення частоти збудження до власної; $\omega_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}$ – власна частота підресорної системи по i -й головній координаті; $D = \frac{h_i}{2\beta_i \omega_i} = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi^2 + \vartheta^2}}$ – відносний коефіцієнт демпфування коливань; $\vartheta = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{\beta_i \alpha_i}{h_i^2} - \frac{1}{4}}}$ – логарифмічний

декремент затухання коливань системи в напрямку i -ї головної координати.

Для шести головних координат отримаємо шість подібних до (3.61) виразів для η .

При демпфуванні, яке обумовлено внутрішнім поглинанням енергії в матеріалі ізолятора, коефіцієнт віброізоляції визначається по формулі:

$$\eta_i = \frac{W'_{mi}}{W_{mi}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma_{M_i}^2}{(1 - \gamma^2)^2 + \gamma_{M_i}^2}}, \quad (3.62)$$

де $\gamma = \frac{p_i}{\omega_i}$; $\gamma_{M_i} = \frac{\psi_i}{2\pi} = \frac{\vartheta}{\pi}$ – коефіцієнт демпфування ізоляторів;

ψ_i – коефіцієнт «поглинання» ізоляторів.

Формула ефективності віброізоляторів записується так:

$$\Xi = (1 - \eta) \cdot 100\%. \quad (3.63)$$

Можна навести декілька властивостей віброізоляції:

а) величина η незначно відрізняється від одиниці, якщо частота збуджень p мала в порівнянні з частотами власних коливань системи, що ізолюється ω і застосування амортизаторів є марним;

б) якщо власна частота ізолюючої системи ω приблизно співпадає з частотами збудження p , тобто відношення частот γ наближається до одиниці, коефіцієнт η зростає, при малому демпфуванні амплітуди коливань приймають великих значень. Пружна система повинна бути виконана так, щоб можливість виникнення резонансу була виключена;

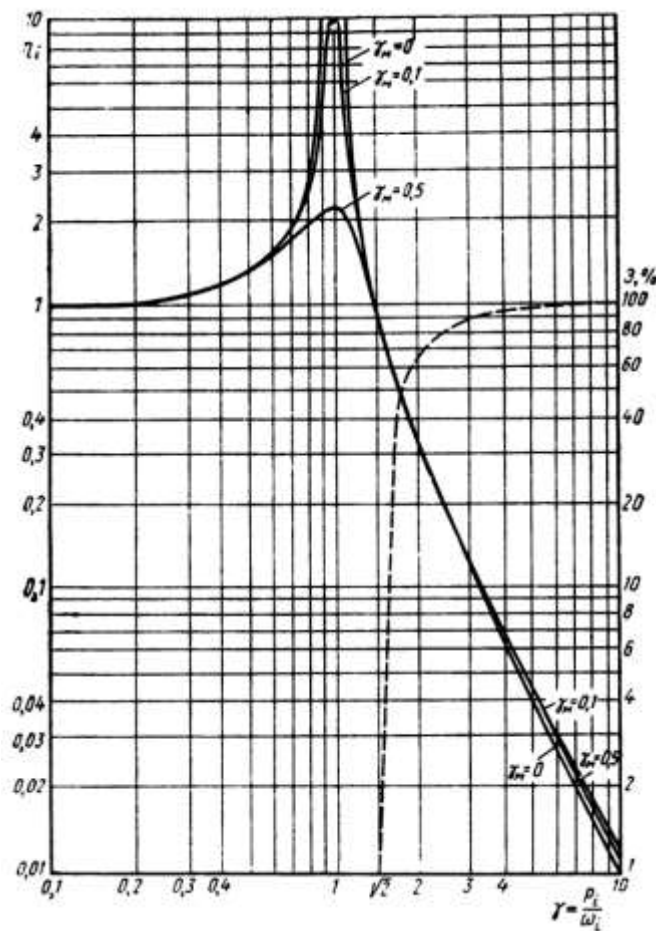


Рисунок 3.8 – Резонансні криві

в) ізоляція коливань для всіх значень демпфування буде ефективною за умови, коли відношення частот (див. рис. 3.8)

$$\gamma = \frac{p_i}{\omega_i} > \sqrt{2}.$$

Тому раціональна ізоляція об'єкту з періодичними збудженнями полягає в установленні його на ізолятори без додаткового демпфування, при цьому відношення частот бажано мати в межах $2,5 \leq \gamma < 5$ [3].

4 Алгоритмізація захисту об'єктів від механічних збурень

4.1 Алгоритм захисту об'єктів від механічних збурень

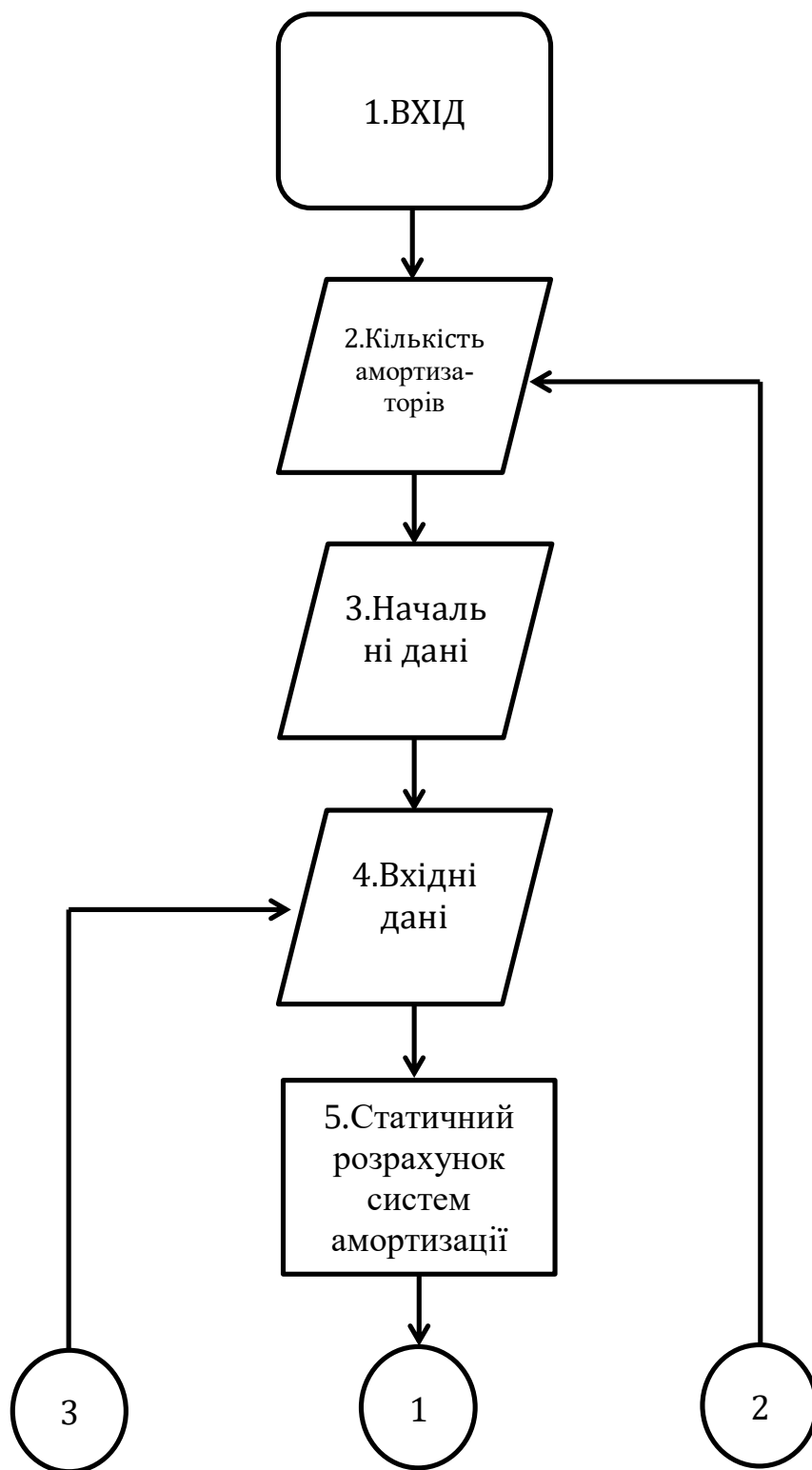


Рисунок 4.1 – Частина №1 алгоритм захисту об'єктів від механічних збурень

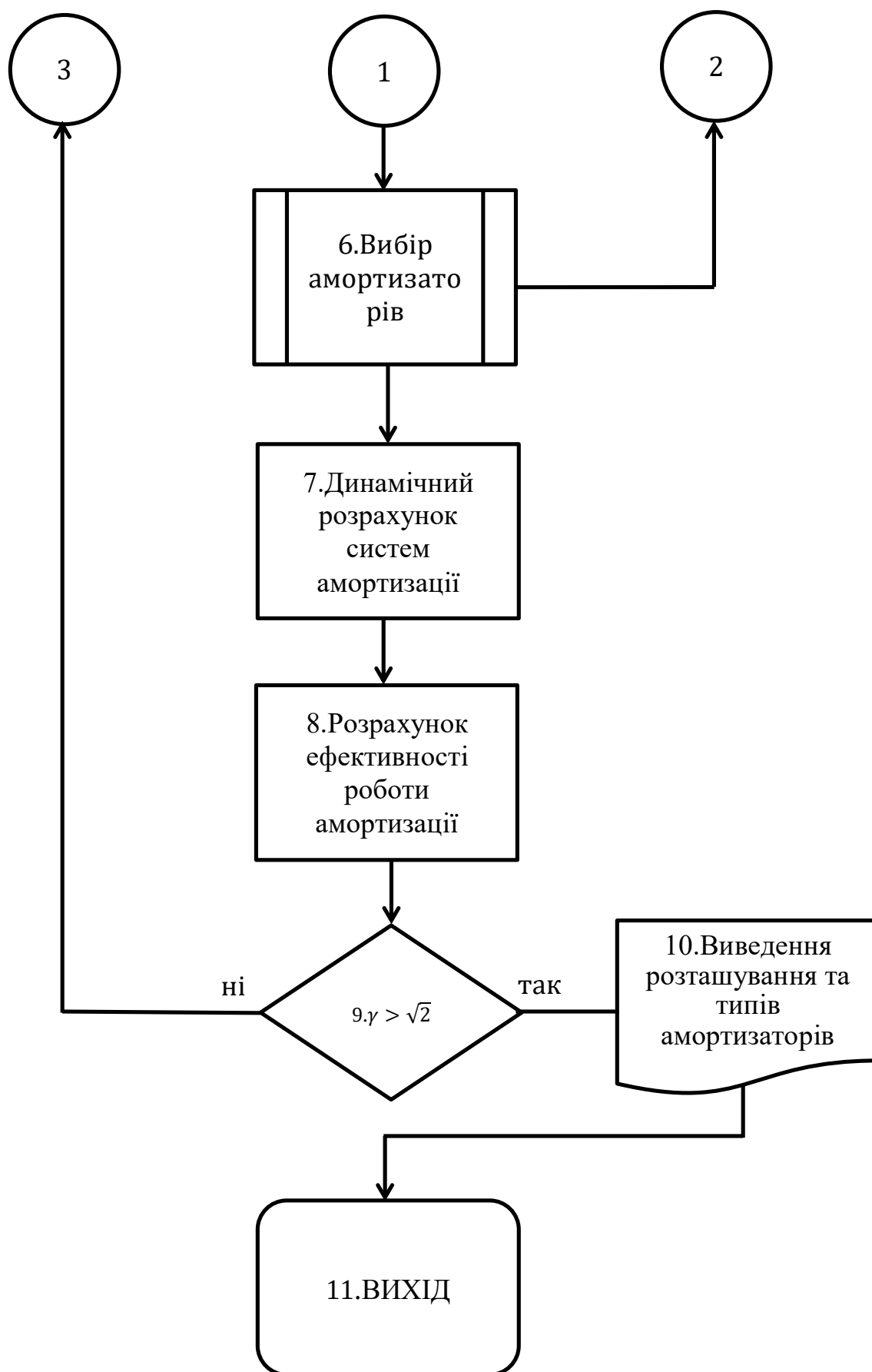


Рисунок 4.2 – Частина №2 алгоритм захисту об'єктів від механічних збурень

Крок 1. Начало алгоритму.

Крок 2. Вибір кількості амортизаторів.

Крок 3. Начальні дані (умови експлуатації: температура, вологість, тиск).

Крок 4. Вхідні дані (опис віброізольованої конструкції з вказівкою величин і координат мас її конструктивних вузлів, характеристики можливих до застосування віброізоляторів, координати можливих місць установки віброізоляторів, параметри зовнішніх механічних дій, мінімальне допустиме значення резонансних частот, необхідне послаблення вібрації і перевантаження при ударній дії, початкові координати установки віброізоляторів).

Крок 5. Завдання мінімальних початкових жорсткостей віброізоляторів виходячи з умови мінімального допустимого статичного навантаження на віброізолятори.

Крок 6. Процедура вибору амортизаторів (якщо амортизатори, які задовольняють вхідним даним закінчились, змінюємо їх кількість).

Крок 7. Динамічний розрахунок систем амортизації.

Крок 8. Розрахунок ефективності роботи амортизації.

Крок 9. Проводиться порівняння обчисленого значення глобального критерію оптимальності з мінімальним значенням, отриманим на $(j-1)$ -му циклі обходу. Якщо $\gamma > \sqrt{2}$, то пункт 10, якщо немає - в пункті 4 змінюємо геометричне розміщення амортизаторів.

Крок 10. Висновок розташування та типів амортизаторів.

Крок 11. Кінець алгоритму.

4.2 Лабораторні роботи статичного розрахунку системи амортизації

Метою статичного розрахунку системи амортизації є визначення статичних навантажень на кожен з амортизаторів і подальший вибір типорозміру амортизаторів відповідно до знайдених навантажень. Іноді буває необхідно визначити чи уточнити координати розташування амортизаторів - це дозволяє розташувати амортизатори відповідно до умов раціонального монтажу.

Схема монтажу амортизаторів вибирається залежно від умов експлуатації та конструктивних можливостей амортизаторів. Визначення статичних навантажень на амортизатори і координати їх розташувань для деяких схем амортизаторів розглянуті нижче. Центр тяжкості об'єкта приймається за початок прямокутної системи координат X, Y, Z , осі якої спрямовані по головним центральним осям інерції об'єкта. Передбачається, що об'єкт монтується на амортизаторах таким чином, що координатна площина XOZ розташована горизонтально, а вісь Y , отже, вертикально.

З'єднання амортизаторів паралельно робить систему більш жорсткою, а з'єднання їх послідовно - м'якшою. Цей висновок може бути поширений на довільне число амортизаторів, з'єднаних між собою будь-яким чином. Якщо, наприклад з'єднані послідовно p амортизаторів з однаковими статичними прогинами δ_1 і q таких груп з'єднані між собою паралельно, то загальний статичний прогин при тому ж навантаженні дорівнює $\delta = (p/q)\delta_1$.

4.2.1 Лабораторна робота №1

Визначити статичні навантаження на амортизатори, точки кріплення яких розташовані в горизонтальній площині XOZ , що проходить через центр ваги блоку, якщо вони мають наступні задані координати:

Якщо амортизатори розташовані в горизонтальній площині XOZ , то вертикальна координата $y = 0$.

Для заданого завдання було розроблене програмне забезпечення на мові програмування Pascal (Додаток А).

4.2.2 Лабораторна робота №2

Амортизуємий блок встановлюється на три амортизатора, координати двох з них визначені. Третій амортизатор може бути встановлений на відстані z_3 від осі, що проходить через центр ваги блоку. Потрібно визначити навантаження на амортизатори, а також вибрати положення третього амортизатора таким чином, щоб були забезпечені умови раціонального монтажу системи.

Для заданого завдання було розроблене програмне забезпечення на мові програмування Pascal (Додаток Б).

4.2.3 Лабораторна робота №3

Знайти навантаження P_1, P_2, P_3, P_4 якщо відомі координати точок кріплення всіх шести амортизаторів, а також відомі навантаження P_5, P_6 .

Для заданого завдання було розроблене програмне забезпечення на мові програмування Pascal (Додаток В).

4.2.4 Лабораторна робота №4

За заданими координатами точок кріплення амортизаторів, розташованих в двох вертикальних площинах, таких що $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = -b$, і відомому навантаженні P_8 , потрібно знайти невідомі статичні навантаження $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$.

Для заданого завдання було розроблене програмне забезпечення на мові програмування Pascal (Додаток Г).

4.2.5 Лабораторна робота №5

Потрібно спроектувати просторову систему, яка складається з 4 амортизаторів таким чином, щоб вона задовольняла умовам раціонального монтажу, а також визначити статичні навантаження на амортизатори. Враховуючи, що $x_1=x_2$, $x_3=x_4$, потрібно визначити навантаження P_1, P_2, P_3, P_4 і координати y_1, y_2, z_1 .

Для заданого завдання було розроблене програмне забезпечення на мові програмування Pascal (Додаток Д).

4.3 Практична робота з динамічного розрахунку системи амортизації та її ефективності

Постановка задачі. Необхідно ізолювати блок масою 45 кг, складові електрорадіоелементи якого витримують граничне віброприскорення 10g (по ТУ). По даним, в місцях кріплення об'єктів трьохкомпонентні вібраційні перевантаження, що досягають 15g на частоті 500 Гц і 2g в частотному діапазоні 30 - 80Гц. Лінійні перевантаження по осям досягають при цьому 30g. Ізолятори повинні мати мінімальну масу та габаритні розміри. Переміщення блоку на ізоляторах не повинне перевищувати ± 10 мм. Жорсткість проводів і кабелів, що підводяться до об'єкту, допускається до не враховувати. Якщо відомі координати кріплення ізоляторів $x_1 = 25$, $x_2 = 25$, $x_3 = -25$, $x_4 = -25$, $y_1 = 18$, $y_2 = -18$, $y_3 = -18$, $y_4 = 18$.

А також відомі моменти інерції об'єкту відносно осей X , Y та Z : $I_x = 2,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_y = 3,0 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $I_z = 4,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Розв'язання. З метою розв'язки окремих форм коливань об'єкту, що амортизується і наближення всіх шести його власних частот одна до одної приймаємо симетричну схему кріплення об'єкту на чотирьох амортизаторах, які розміщені на вертикальній стіні. В цьому випадку центр тяжіння об'єкту буде співпадати з центром жорсткості, а точки кріплення амортизаторів

розташовуються симетрично відносно площини, що проходить через центр тяжіння об'єкту.

Але спочатку знайдемо статичні навантаження на ізолятори для того, щоб вибрати тип ізолятора.

Якщо в систему (2.6) підставити відомі координати, то вона матиме вигляд:

$$\begin{cases} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 45; \\ 25P_1 + 25P_2 - 25P_3 - 25P_4 = 0; \\ 18P_1 - 18P_2 - 18P_3 + 18P_4 = 0; \\ 450P_1 - 450P_2 + 450P_3 - 450P_4 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Щоб визначити статичні навантаження на амортизатори використаємо формулу (2.12), але спочатку знайдемо визначники по формулам (2.14) – (2.17):

$$\begin{aligned} D_1 &= -18 \cdot 18 \cdot (-25) \cdot (-25-25) - 18 \cdot (-25) \cdot (-18) \cdot (25+25) - 25 \cdot 18 \cdot 18 \cdot (-25+25) = \\ &= -18 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 50 - 18 \cdot 25 \cdot 18 \cdot 50 - 25 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 0 = -405000 - 405000 = -810000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= -18 \cdot 18 \cdot (-25) \cdot (-25-25) - 18 \cdot (-25) \cdot (-18) \cdot (-25+25) - 25 \cdot 18 \cdot 18 \cdot (25+25) = \\ &= -18 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 50 - 18 \cdot 25 \cdot 18 \cdot 0 - 25 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 50 = -405000 - 405000 = -810000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= 18 \cdot 18 \cdot 25 \cdot (-25-25) - 18 \cdot 25 \cdot 18 \cdot (25+25) - 25 \cdot 18 \cdot (-18) \cdot (25-25) = \\ &= -18 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 50 - 18 \cdot 25 \cdot 18 \cdot 50 + 25 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 0 = -405000 - 405000 = -810000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_4 &= -18 \cdot (-18) \cdot 25 \cdot (-25-25) - 18 \cdot (-25) \cdot (-18) \cdot (25-25) - 25 \cdot (-18) \cdot (-18) \cdot (25+25) = \\ &= -18 \cdot 18 \cdot 25 \cdot 50 - 18 \cdot 25 \cdot 18 \cdot 0 - 25 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 50 = -405000 - 405000 = -810000. \end{aligned}$$

Потім відповідно формулі (2.13) отримаємо $D = -3240000$.

Тоді навантаження можна визначити за формулами (2.12):

$$P_1 = \frac{-810000}{-3240000} \cdot 45 = 0,25 \cdot 45 = 11,25 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$P_2 = \frac{-810000}{-3240000} \cdot 45 = 0,25 \cdot 45 = 11,25 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$P_3 = \frac{-810000}{-3240000} \cdot 45 = 0,25 \cdot 45 = 11,25 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$P_4 = \frac{-810000}{-3240000} \cdot 45 = 0,25 \cdot 45 = 11,25 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Знайшовши статичні навантаження, тепер по каталогу знаходимо ізолятори одного і того ж типорозміру. В якості таких обираємо ізолятори типу АРМД, які мають вібраційні жорсткості $c_z = 100 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ – по осі ізолятора; $c_x = c_y = 82 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ – перпендикулярно осі ізолятора. Переміщення об'єкту на амортизаторах при дії лінійного перевантаження $30g$, становить $\Delta \approx 7 \div 8 \text{ мм}$. З характеристики «сила – переміщення» у ізоляторів типу АРМД вібраційні жорсткості практично незмінні при дії лінійного навантаження.

Годі при розміщенні ізоляторів на об'єкті, що показано на рисунку 4.1, власні частоти системи можна визначити із рівнянь (3.29) – (3.34).

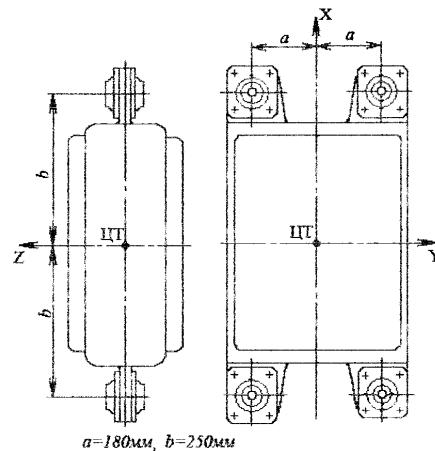


Рисунок 4.1 – Розташування ізоляторів на об'єкті

Частота власних поступальних коливань вздовж осі X , знаходимо по формулі (3.29)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 82 \cdot 10^4}{45}} \approx 268 \text{ с}^{-1} \approx 42,65 \text{ Гц}.$$

Частота власних поступальних коливань вздовж осі Y , знаходимо по формулі (3.30)

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 82 \cdot 10^4}{45}} \approx 268 \text{ с}^{-1} \approx 42,65 \text{ Гц.}$$

Частота власних поступальних коливань вздовж осі Z , знаходимо за формулою (3.31)

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 100 \cdot 10^4}{45}} \approx 298 \text{ с}^{-1} \approx 47,43 \text{ Гц.}$$

За формулою (3.32), знайдемо частоту власних коливань навколо осі X

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{4 \cdot (100 \cdot 10^4 \cdot 0,18^2 + 82 \cdot 10^4 \cdot 0)}{21 \cdot 10^{-1}}} \approx 248 \text{ с}^{-1} \approx 39,47 \text{ Гц.}$$

За формулою (3.33), знайдемо частоту власних коливань навколо осі Y

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{4 \cdot (82 \cdot 10^4 \cdot 0 + 100 \cdot 10^4 \cdot 0,25^2)}{30 \cdot 10^{-1}}} \approx 288 \text{ с}^{-1} \approx 45,84 \text{ Гц.}$$

За формулою (3.34), знайдемо частоту власних коливань навколо осі Z

$$\omega_6 = \sqrt{\frac{4 \cdot (82 \cdot 10^4 \cdot 0,18 + 82 \cdot 10^4 \cdot 0,25^2)}{45 \cdot 10^{-1}}} \approx 263 \text{ с}^{-1} \approx 41,86 \text{ Гц.}$$

Ефективність роботи амортизаторів знаходимо по формулі (3.62). Так, при

$$\gamma = \frac{\rho}{\omega_4} = \frac{500}{39.47} = 12,67.$$

Отримаємо

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{(1 - 160.4744)^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{25432}} \approx 0,00627,$$

і за формулою (3,63)

$$\Xi = (1 - 0,00627) \cdot 100\% \approx 0,993729 \cdot 100\% \approx 99,37\%,$$

а при

$$\gamma = \frac{\rho}{\omega_3} = \frac{500}{47.43} \approx 10.54,$$

будемо мати

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{(1 - 111.13)^2}} \approx \sqrt{\frac{1}{12128.75}} \approx 0,00908,$$

$$\Xi = (1 - 0,00908) \cdot 100\% \approx 0,9992 \cdot 100\% \approx 99,92\%.$$

Отже, таким чином амортизатори АРМД ізолюють від 99,37 до 99,92%.

ДОДАТОК А

Програма на Turbo Pascal для розрахунку статичних навантажень у системі з чотирьох амортизаторів

Задача. Визначити статичні навантаження на амортизатори, точки кріплення яких розташовані в горизонтальній площині XOZ, що проходить через центр тяжіння блока, якщо вони мають наступні координати:

$$X1 = 17, X2 = 15, X3 = -1, X4 = -3,$$

$$Y1 = 0, Y2 = 0, Y3 = 0, Y4 = 0,$$

$$Z1 = 20, Z2 = -3, Z3 = -7, Z4 = 10.$$

Код програми:

```

type
  mas = array[1..4] of integer;
  mas1 = array[1..4] of real;
var dd,i: integer;
  x : mas;
  y : mas;
  z : mas;
  D : mas;
  P : mas1;
begin
  x[1]:=17;x[2]:=15;x[3]:=-1;x[4]:=-3;
  y[1]:=0;y[2]:=0;y[3]:=0;y[4]:=0;
  z[1]:=20;z[2]:=-3;z[3]:=-7;z[4]:=10;
  for i:= 1 to 4 do write ( ' X',i,' = ',x[i]); writeln();
  for i:= 1 to 4 do write ( ' Y',i,' = ',y[i]); writeln();

```

```
for i:= 1 to 4 do write (‘ Z’,i,’ = ‘,z[i]); writeln();
```

```
D[1]:=z[2]*z[4]*x[3]*(x[4]-x[2])+z[2]*z[3]*x[4]*(x[2]-x[3])+z[3]*z[4]*x[2]*(x[3]-x[4]);
```

```
D[2]:=-z[1]*z[4]*x[3]*(x[4]-x[1])-z[1]*z[3]*x[4]*(x[1]-x[3])-z[3]*z[4]*x[1]*(x[3]-x[4]);
```

```
D[3]:=z[1]*z[4]*x[2]*(x[4]-x[1])+z[1]*z[2]*x[4]*(x[1]-x[2])+z[2]*z[4]*x[1]*(x[2]-x[4]);
```

```
D[4]:=-z[1]*z[3]*x[2]*(x[3]-x[1])-z[1]*z[2]*x[3]*(x[1]-x[2])-z[2]*z[3]*x[1]*(x[2]-x[3]);
```

```
writeln(‘D1 = ‘, D[1]);writeln(‘D2 = ‘, D[2]);writeln(‘D3 = ‘,  
D[3]);writeln(‘D4 = ‘, D[4]);  
dd:= D[1]+D[2]+D[3]+D[4];  
writeln(‘D = ‘,dd);
```

```
for i:= 1 to 4 do begin  
P[i]:=D[i]/dd;  
write(‘ P’,i,’ = ‘,P[i],’G’);  
end;writeln();  
writeln(‘Sum Pi = ‘,p[1]+p[2]+p[3]+p[4]);  
  
end.
```

Результат:

X1 = 17

X2 = 15

$$X3 = -1$$

$$X4 = -3$$

$$Y1 = 0$$

$$Y2 = 0$$

$$Y3 = 0$$

$$Y4 = 0$$

$$Z1 = 20$$

$$Z2 = -3$$

$$Z3 = -7$$

$$Z4 = 10$$

$$D1 = -3648$$

$$D2 = -9180$$

$$D3 = -68820$$

$$D4 = -43632$$

$$D = -125280$$

$$P1 = 0.0291187739463602G$$

$$P2 = 0.0732758620689655G$$

$$P3 = 0.549329501915709G$$

$$P4 = 0.348275862068965G$$

$$\text{Sum } P_i = 1$$

ДОДАТОК Б

Програма на Turbo Pascal для розрахунку статичних навантажень у системі з трьох амортизаторів и для знаходження координат х системі одного з них

Задача. Блок, який амортизується, встановлюється на три амортизатори координати двох з них визначені. Третій амортизатор може бути встановлений на відстані z_3 від осі, що проходить через центр тяжіння блоку. Треба визначити навантаження на амортизатори, а також обрати положення третього амортизатора таким чином, щоб були забезпечені умови раціонального монтажу системи.

$$X_1 = 15, X_2 = -3,$$

$$Z_1 = 15, Z_2 = 10, Z_3 = -3.$$

Код програми:

```
type
```

```
  mas = array[1..3] of integer;
```

```
  mas1 = array[1..3] of real;
```

```
  var i: integer;
```

```
  x,p : mas1;
```

```
  z : mas;
```

```
begin
```

```
  x[1]:=15;x[2]:=-3;
```

```
  z[1]:=15;z[2]:=10;z[3]:=-3;
```

```
  for i:= 1 to 2 do write ( ' X',i,' = ',x[i]); writeln();
```

```
  for i:= 1 to 3 do write ( ' Z',i,' = ',z[i]); writeln();
```

$$x[3]:=(x[1]*x[2]*z[3]*(z[1]-z[2]))/(z[1]*x[2]*(z[3]-z[2])-x[1]*z[2]*(z[3]-z[1]));$$

```

writeln(' X3 = ', x[3]);
p[1]:=(z[3]*x[2]-x[3]*z[2])/((z[3]-z[1])*(x[2]-x[1])-(x[3]-x[1])*(z[2]-z[1]));
p[2]:=(z[1]*x[3]-x[1]*z[3])/((z[3]-z[1])*(x[2]-x[1])-(x[3]-x[1])*(z[2]-z[1]));
p[3]:=(z[2]*x[1]-x[2]*z[1])/((z[3]-z[1])*(x[2]-x[1])-(x[3]-x[1])*(z[2]-z[1]));
  for i:=1 to 3 do write(' P',i,' = ',P[i],'G');writeln();
  writeln('Sum Pi = ',p[1]+p[2]+p[3]);
end.

```

Результат:

```

X1 = 15 X2 = -3
Z1 = 15 Z2 = 10 Z3 = -3
X3 = 0.205479452054795
P1 = 0.0277777777777778G
P2 = 0.192307692307692G
P3 = 0.77991452991453G
Sum Pi = 1

```

ДОДАТОК В

Програма на Turbo Pascal для розрахунку статичних навантажень у системі з шести амортизаторів

Задача. Знайти навантаження P_1, P_2, P_3, P_4 , якщо відомі координати точок кріплення шести амортизаторів, а так відомі навантаження P_5, P_6 .

$$X_1 = 1, X_2 = 5, X_3 = -5, X_4 = 5, X_5 = 4, X_6 = -1,$$

$$Z_1 = 2, Z_2 = 5, Z_3 = 5, Z_4 = -2, Z_5 = -6, Z_6 = -9,$$

$$P_5 = 0.29G, P_6 = 0.34G.$$

Код програми:

type

mas = array[1..6] of integer;

mas1 = array[1..6] of real;

var i: integer; a, b, u, delt, d: real;

p : mas1;

z, x : mas;

begin

x[1]:=1; x[2]:=5; x[3]:=-5; x[4]:=5; x[5]:=4; x[6]:=-1;

z[1]:=2; z[2]:=5; z[3]:=5; z[4]:=-2; z[5]:=-6; z[6]:=-9;

p[5]:=0.29; p[6]:=0.34;

for i:= 1 to 6 do write (' X', i, ' = ', x[i]); writeln();

for i:= 1 to 6 do write (' Z', i, ' = ', z[i]); writeln();

for i:= 5 to 6 do write (' P', i, ' = ', p[i], 'G'); writeln();

a:=1-p[5]-p[6];

b:=-x[5]*p[5]-x[6]*p[6];

u:=-z[5]*p[5]-z[6]*p[6];

```

delt:=-z[5]*x[5]*p[5]-z[6]*x[6]*p[6];
writeln(' a = ',a,'G b = ',b,'G y = ',u,'G delt = ',delt,'G');
d:=((x[2]-x[1])*(z[3]-z[1])*(z[4]*x[4]-z[1]*x[1])+
(x[3]-x[1])*(z[4]-z[1])*(z[2]*x[2]-z[1]*x[1])+
(x[4]-x[1])*(z[2]-z[1])*(z[3]*x[3]-z[1]*x[1])-
(x[4]-x[1])*(z[3]-z[1])*(z[2]*x[2]-z[1]*x[1])-
(z[4]-z[1])*(z[3]*x[3]-z[1]*x[1])*(x[2]-x[1])-
(z[4]*x[4]-z[1]*x[1])*(x[3]-x[1])*(z[2]-z[1]));
writeln(' D = ',d);
p[1]:= (1/a*a*d)*((a*x[2]-b)*(a*z[3]-u)*(a*z[4]*x[4]-delt)+
(a*x[3]-b)*(a*z[4]-u)*(a*z[2]*x[2]-delt)+
(a*x[4]-b)*(a*z[2]-u)*(a*z[3]*x[3]-delt)-
(a*x[4]-b)*(a*z[3]-u)*(a*z[2]*x[2]-delt)-
(a*z[4]-u)*(a*z[3]*x[3]-delt)*(a*x[2]-b)-
(a*z[4]*x[4]-delt)*(a*x[3]-b)*(a*z[2]-u));
p[2]:= (-1/a*a*d)*((a*x[1]-b)*(a*z[3]-u)*(a*z[4]*x[4]-delt)+
(a*x[3]-b)*(a*z[4]-u)*(a*z[1]*x[1]-delt)+
(a*x[4]-b)*(a*z[1]-u)*(a*z[3]*x[3]-delt)-
(a*x[4]-b)*(a*z[3]-u)*(a*z[1]*x[1]-delt)-
(a*z[4]-u)*(a*z[3]*x[3]-delt)*(a*x[1]-b)-
(a*z[4]*x[4]-delt)*(a*x[3]-b)*(a*z[1]-u));
p[3]:= (1/a*a*d)*((a*x[1]-b)*(a*z[2]-u)*(a*z[4]*x[4]-delt)+
(a*x[2]-b)*(a*z[4]-u)*(a*z[1]*x[1]-delt)+
(a*x[4]-b)*(a*z[1]-u)*(a*z[2]*x[2]-delt)-
(a*x[4]-b)*(a*z[2]-u)*(a*z[1]*x[1]-delt)-
(a*z[4]-u)*(a*z[2]*x[2]-delt)*(a*x[1]-b)-
(a*z[4]*x[4]-delt)*(a*x[2]-b)*(a*z[1]-u));
p[4]:= (-1/a*a*d)*((a*x[1]-b)*(a*z[2]-u)*(a*z[3]*x[3]-delt)+
(a*x[2]-b)*(a*z[3]-u)*(a*z[1]*x[1]-delt)+
(a*x[3]-b)*(a*z[1]-u)*(a*z[2]*x[2]-delt)-

```

```

(a*x[3]-b)*(a*z[2]-u)*(a*z[1]*x[1]-delt)-
(a*z[3]-u)*(a*z[2]*x[2]-delt)*(a*x[1]-b)-
(a*z[3]*x[3]-delt)*(a*x[2]-b)*(a*z[1]-u));
for i:= 1 to 4 do write (' P',i,' = ',p[i],'G'); writeln();
writeln('Sum Pi = ',p[1]+p[2]+p[3]+p[4]+p[5]+p[6]);
end.

```

Результат:

$$X1 = 1$$

$$X2 = 5$$

$$X3 = -5$$

$$X4 = 5$$

$$X5 = 4$$

$$X6 = -1$$

$$Z1 = 2$$

$$Z2 = 5$$

$$Z3 = 5$$

$$Z4 = -2$$

$$Z5 = -6$$

$$Z6 = -9$$

$$P5 = 0.29G$$

$$P6 = 0.34G$$

$$a = 0.37G$$

$$b = -0.82G$$

$$y = 4.8G$$

$$\text{delt} = 3.9G$$

$$D = -840$$

$$P1 = -54335.61G$$

$$P2 = 59972.71392G$$

$$P3 = 47525.54688G$$

$$P4 = -17421.894G$$

$$\text{Sum } P_i = 35741.3868$$

ДОДАТОК Г

Програма на Turbo Pascal для розрахунку статичних навантажень у системі з восьми амортизаторів

Задача. За заданими координатами точок кріплення амортизаторів, які розташовані у двох вертикальних поверхнях, таких, що $x_1=x_2=x_3=x_4=a$, $x_5=x_6=x_7=x_8=-b$, з відомим навантаженням P_8 , потрібно знайти невідомі статичні навантаження $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$.

$X_1 = 9, X_2 = 9, X_3 = 9, X_4 = 9, X_5 = -9, X_6 = -9, X_7 = -9, X_8 = -9,$
 $Y_1 = 9, Y_2 = 9, Y_3 = -7, Y_4 = -7, Y_5 = -6, Y_6 = -6, Y_7 = 9, Y_8 = 9,$
 $Z_1 = 9, Z_2 = -9, Z_3 = 10, Z_4 = 8, Z_5 = -6, Z_6 = 6, Z_7 = 9, Z_8 = -9,$
 $P_8 = 0.2G.$

Код програми:

```
type
  mas = array[1..8] of integer;
  mas1 = array[1..8] of real;
  var i: integer; q, b, u, delt, d, a, d1: real;
  p : mas1;
  z, x, y : mas;
begin
  x[1]:=9;x[2]:=9;x[3]:=9;x[4]:=9;x[5]:=-9;x[6]:=-9;x[7]:=-9;x[8]:=-9;
  y[1]:=9;y[2]:=9;y[3]:=-7;y[4]:=-7;y[5]:=-6;y[6]:=-6;y[7]:=9;y[8]:=9;
  z[1]:=9;z[2]:=-9;z[3]:=10;z[4]:=8;z[5]:=-6;z[6]:=6;z[7]:=9;z[8]:=-9;
  p[8]:=0.2;
  for i:= 1 to 8 do write (' X',i,' = ',x[i]); writeln();
  for i:= 1 to 8 do write (' Y',i,' = ',y[i]); writeln();
```

```

for i:= 1 to 8 do write ( ' Z',i,' = ',z[i]); writeln();
for i:= 8 to 8 do write ( ' P',i,' = ',p[i],'G'); writeln();
b:=(9/(9+9)-0.2);
u:=-9*0.2;
q:=9*0.2; a:=0.5;
write ( ' a = ',a, ' G B = ',b,' G y = ',u,' G Q = ', q,'G'); writeln();
d:=((y[6]-y[5])*(z[7]-z[5])-(y[7]-y[5])*(z[6]-z[5]));
writeln( ' D = ',d);
p[5]:=(1/d)*(b*y[6]*z[7]+y[7]*q+u*z[6]-u*y[6]-y[7]*z[6]*b-z[7]*u);
p[6]:=(1/d)*(u*z[7]+b*y[7]*z[5]+y[5]*q-z[5]*u-q*y[7]-z[7]*y[5]*b);
p[7]:=(1/d)*(y[6]*q+u*z[5]+b*y[5]*z[6]-z[5]*y[6]*b-z[6]*u-y[5]*q);
for i:= 5 to 7 do write ( ' P',i,' = ',p[i],'G'); writeln();
delt:=-(y[5]*z[5]*p[5]+y[6]*z[6]*p[6]+y[7]*z[7]*p[7]+y[8]*z[8]*p[8]);
writeln( ' delt = ',delt,'G');
d1:=((y[2]-y[1])*(z[3]-z[1])*(y[4]*z[4]-y[1]*z[1])+
(y[3]-y[1])*(z[4]-z[1])*(y[2]*z[2]-y[1]*z[1])+
(y[4]-y[1])*(z[2]-z[1])*(y[3]*z[3]-y[1]*z[1])-
(y[4]-y[1])*(z[3]-z[1])*(y[2]*z[2]-y[1]*z[1])-
(z[4]-z[1])*(y[3]*z[3]-y[1]*z[1])*(y[2]-y[1])-
(y[4]*z[4]-y[1]*z[1])*(y[3]-y[1])*(z[2]-z[1]));
writeln( ' D1 = ',d1);

p[1]:=(1/d1)*(y[2]*z[3]*(a*y[4]*z[4]-delt)+y[3]*z[4]*(a*y[2]*z[2]-delt)+y[4]*z[2]*
(a*y[3]*z[3]-delt)-

y[4]*z[3]*(a*y[2]*z[2]-delt)-z[4]*(a*y[3]*z[3]-delt)*y[2]-(a*y[4]*z[4]-delt)*z[2]*y[
3]);

p[2]:=(-1/d1)*(y[1]*z[3]*(a*y[4]*z[4]-delt)+y[3]*z[4]*(a*y[1]*z[1]-delt)+y[4]*z[1]
*(a*y[3]*z[3]-delt)-

```

$y[4]*z[3]*(a*y[1]*z[1]-delt)-z[4]*(a*y[3]*z[3]-delt)*y[1]-(a*y[4]*z[4]-delt)*z[1]*y[3]);$

$p[3]:=(1/d1)*(y[1]*z[2]*(a*y[4]*z[4]-delt)+y[2]*z[4]*(a*y[1]*z[1]-delt)+y[4]*z[1]*(a*y[2]*z[2]-delt)-$

$y[4]*z[2]*(a*y[1]*z[1]-delt)-z[4]*(a*y[2]*z[2]-delt)*y[1]-(a*y[4]*z[4]-delt)*z[1]*y[2]);$

$p[4]:=(-1/d1)*(y[1]*z[2]*(a*y[3]*z[3]-delt)+y[2]*z[3]*(a*y[1]*z[1]-delt)+y[3]*z[1]*(a*y[2]*z[2]-delt)-$

$y[3]*z[2]*(a*y[1]*z[1]-delt)-z[3]*(a*y[2]*z[2]-delt)*y[1]-(a*y[3]*z[3]-delt)*z[1]*y[2]);$

for i:= 1 to 4 do write (' P',i,' = ',p[i],'G'); writeln();

writeln('Sum Pi = ',p[1]+p[2]+p[3]+p[4]+p[5]+p[6]+p[7]+p[8]);

end.

Результат:

$X1 = 9, X2 = 9, X3 = 9, X4 = 9, X5 = -9, X6 = -9, X7 = -9, X8 = -9,$

$Y1 = 9, Y2 = 9, Y3 = -7, Y4 = -7, Y5 = -6, Y6 = -6, Y7 = 9, Y8 = 9,$

$Z1 = 9, Z2 = -9, Z3 = 10, Z4 = 8, Z5 = -6, Z6 = 6, Z7 = 9, Z8 = -9,$

$P8 = 0.2G,$

$a = 0.5G, B = 0.3G, y = -1.8G. Q = 1.8G,$

$D = -180,$

$P5 = 0.12G, P6 = 0.3G, P7 = -1.97372982155583E-17G,$

$delt = 22.68G,$

$$D1 = -9216,$$

$$P1 = 0.188125G, P2 = 0.030625G, P3 = -1.83375G, P4 = 1.995G,$$

$$\text{Sum } P_i = 1$$

ДОДАТОК Д

Програма на Turbo Pascal для розрахунку статичних навантажень у просторовій системі з 4 амортизаторів.

Задача. Потрібно спроектувати просторову систему, яка складається з 4 амортизаторів таким чином, щоб вона задовольняла умовам раціонального монтажу, а також визначити статичні навантаження на амортизатори.

Враховуючи, що $x_1=x_2$, $x_3=x_4$, потрібно визначити навантаження P_1, P_2, P_3, P_4 і координати y_1, y_2, z_1 .

$$x_1=x_2=3, x_3=x_4=-7, y_4=7, z_2=-5, z_4=-8, \lambda_1=1,1, \lambda_2=1,3.$$

Код програми:

```
const n=4; G=1;
var
x:array[1..n] of integer;
y:array[1..n] of real;
z:array[1..n] of real;
p:array[1..n] of real;
i,j,a,b:integer;
lymda1,lymda2,alpha,beta:real;
f1:text;
begin
assign(f1,'D:\lab5.txt');
reset(f1);
for i := 1 to 4 do read(f1,x[i]);
read(f1,y[4]);
```

```

read(f1,z[2]);
read(f1,z[4]);
read(f1,lymda1);
read(f1,lymda2);
close(f1);
writeln('Координаты точек крепления амортизатора:');
writeln('X1 X2 X3 X4 Y4 Z2 Z4 lymda1 lymda2');
for i:=1 to n do write(x[i], ' ');
write(y[4], ' ');
write(z[2], ' ');
write(z[4], ' ');
write(lymda1, ' ',lymda2);
y[3] := -lymda2*y[4];
z[3] := -lymda2*z[4];
z[1] := -lymda1*z[2];
a := x[1];b := -x[3];
alpha := (G*b)/(a+b);
beta := (G*a)/(a+b);
y[1] := (-beta*y[3]*z[4])/(alpha*z[2]);
y[2] := -(y[1]/lymda1);
p[1] := alpha/(1+lymda1);
p[2] := (alpha*lymda1)/(1+lymda1);
p[3] := beta/(1+lymda2);
p[4] := (beta*lymda2)/(1+lymda2);
writeln();
writeln('Результаты подсчетов:');
writeln('X1 X2 X3 X4 Y1 Y2 Y3 Y4 Z1 Z2 Z3 Z4');
for i := 1 to n do write(x[i], ' ');
for i := 1 to n do write(y[i]:1:2, ' ');
for i := 1 to n do write(z[i]:1:2, ' ');

```

```
writeln();
for i:=1 to n do
writeln('P',i,' = ',p[i]:1:4,'*G');
end.
```

Результат:

```
Координаты точек крепления амортизатора:
X1    X2    X3    X4    Y4    Z2    Z4    lymda1    lymda2
3      3     -7     -7     7     -5    -8      1.1      1.3
Результаты подсчетов:
X1    X2    X3    X4    Y1    Y2    Y3    Y4    Z1    Z2    Z3    Z4
3      3     -7     -7     6.24  -5.67  -9.10  7.00  5.50  -5.00  10.40  -8.00
P1   = 0.3333*G
P2   = 0.3667*G
P3   = 0.1304*G
P4   = 0.1696*G
```