Тема 4 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

4.1 Економіко-математичний аналіз результатів задачі про ресурси

4.1.1 Визначення характеристик прямої та двоїстої задач різними способами

Спочатку випишемо результати розв'язання прямої і двоїстої задач прикладу 1.1 ***симплексним методом*** відповідно до результатів, наведених на рис. 1.2 і 3.1. Зведемо їх в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Значення змінних прямої та двоїстої задач з прикладу 1.1

Характеристика ЗЛП	**Пряма задача**	**Двоїста задача**
Цільова функція	$F_{max}(X) = 34200$	$L_{min}(Y) = 34200$
Основні змінні	$x_1^* = 180,\ x_2^* = 360$	$y_1^* = 32;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 0$
Додаткові змінні	$x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 40$	$y_4^* = 0;\ y_5^* = 0$

Звіт по стійкості (рис. 2.14), крім значень оптимальних змінних прямої задачі, містить значення оптимальних основних змінних двоїстої задачі, занесених у стовпчик «Shadow Price» (E15:E16); оптимальні значення додаткових змінних двоїстої задачі можна легко обчислити, якщо підставити оптимальні значення основних змінних в систему рівнянь (3.1). Результати збігаються з описаними вище в табл. 4.1.

Визначення взаємодвоїстих змінних на основі симплекс-таблиць. Розглянемо розв'язання прямої задачі симплексним методом (рис. 2.2).

Нагадування про спосіб визначення додаткових змінних в математичних моделях прямої та двоїстої задач розміщено в першому та останньому рядку табл. 4.2, а взаєморозміщення позначень змінних прямої задачі і значень змінних двоїстої задачі в рядках остаточної симплексної таблиці для прямої задачі – в центральній частині табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Розміщення змінних в рядках симплекс-таблиці прямої задачі

<table>
<tr><td colspan="3">Додаткові змінні ПЗ
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* \le b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Рядок симплекс-таблиці ПЗ</td><td colspan="2">Змінні ПЗ</td></tr>
<tr><td>Основні змінні ПЗ</td><td>Додаткові змінні ПЗ</td></tr>
<tr><td>2– ий рядок симплекс-таблиці</td><td>$x_1,\quad x_2,\ \dots,\quad x_n$</td><td>$x_{n+1},\ x_{n+2},\ \dots,\ x_{n+m}$</td></tr>
<tr><td>Рядок оцінок оптимальності Δ_j</td><td>$y_{m+1},\ y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$</td><td>$y_1,\quad y_2 \dots,\quad y_m$</td></tr>
<tr><td></td><td>Додаткові змінні ДЗ</td><td>Основні змінні ДЗ</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Змінні ДЗ</td></tr>
<tr><td colspan="3">$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \ge c_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - y_{m+j}^* = c_j$$
Додаткові змінні ДЗ</td></tr>
</table>

Зазначимо, що аналогічне взаємне розміщення і в остаточній симплекс-таблиці для двоїстої задачі (рис. 3.1) з однією відмінністю – потрібно нехтувати змінними штучного базису.

За допомогою інформації, наведеної в табл. 4.2, знайдемо значення змінних ПЗ і ДЗ в інший спосіб.

З останнього рядка симплексної таблиці прямої задачі можна визначити значення двоїстих змінних, а з останньої симплексної таблиці двоїстої задачі – значення змінних прямої задачі так, як це показано на рис. 2.2 і рис. 3.1 відповідно. Як бачимо, результати відповідають знайденим вище.

4.1.2 Теореми про зв'язок між парою двоїстих задач про ресурси

В табл. 4.3 коротко охарактеризовано зв'язок між характеристиками прямої та двоїстої задач.

Таблиця 4.3 – Зв'язок між парою двоїстих задач про ресурси

Пряма задача	**Двоїста задача**
Скласти такий **план випуску продукції** $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, за якого **прибуток** від її реалізації буде **максимальним** $F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max,$	Знайти такий **набір цін** (оцінок) ресурсів $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, за якого дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими («тіньовими») цінами буде мінімальним $L(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$
за умови, що використання кожного ресурсу для виготовлення продукції не перевищує наявних запасів, тобто	за умови, що витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, оцінені в грошовому вираженні, будуть неменшими за прибуток від її реалізації
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;\; (i = 1, \dots, m),$ $x_j \ge 0 \;\; (j = 1, \dots, n)$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \;\; (j = 1, \dots, n),$ $y_i \ge 0 \;\; (i = 1, \dots, m)$
Дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими цінами, який мінімізується, дорівнюватиме ефекту від здійснення виробничої діяльності, тобто величині прибутку фабрики, який повинен бути максимальним $F_{max}(X) = L_{min}(Y)$	

Опишемо причини виникнення висновків, зазначених в табл. 4.3. Спочатку наведемо формулювання теорем, які покладені в основу економіко-математичного аналізу.

Теорема 4.1

I. Якщо одна з пар двоїстих задач має оптимальний план, то й інша теж має оптимальний план, а ЦФ таких задач при оптимальних планах мають рівні значення.

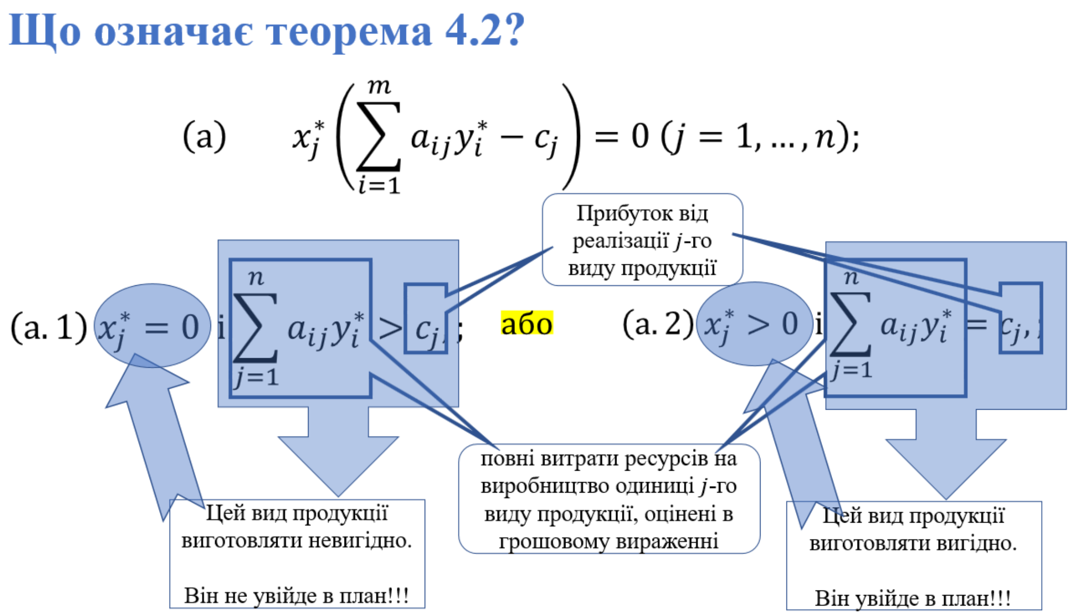
II. Якщо ЦФ однієї з двоїстих задач не має розв'язку, то інша теж не має розв'язку.

Теорема 4.2 Для того, щоб допустимий розв'язок пари двоїстих задач був оптимальним, необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j,\right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n); \qquad \text{(а)}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, m); \qquad \text{(б)}$$

Економічна інтерпретація теореми 4.2 в термінах постановки задачі про використання ресурсів проілюстрована ра рис. 4.1: зміст умови (а) – на рис. 4.1, а, умови (б) – на рис. 4.1., б. Крім того, на рис. 4.1 містяться інтерпретації основних змінних прямої та двоїстої задач, лівої та правої частин систем обмежень двоїстої та прямої задач.



а)

б)

Рис. 4.1 – Економічна інтерпретація теореми 4.2

Зміст змінних прямої ЗЛП

<u>*Основні змінні*</u> показують план випуску продукції для досягнення максимального прибутку.

<u>*Додаткові змінні,*</u> відповідно до їх означення з рівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

показують на обсяг невикористаного і-ого ресурсу

Зміст двоїстих змінних

<u>*Основні двоїсті змінні*</u> показують, на скільки змінюється ЦФ прямої задачі при зміні відповідного дефіцитного ресурсу на 1 одиницю.

<u>Покажемо причину такої інтерпретації.</u> Дійсно, якщо $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_i^*, \dots, y_m^*) -$ вектор оптимальних оцінок ресурсів (вектор «тіньових цін»), то значення ЦФ двоїстої задачі на цьому векторі визначається як

$$L(Y^*) = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \dots + b_iy_i^* + \dots + b_my_m^*.$$

Збільшення i– го дефіцитного ресурсу на 1 означатиме, що ЦФ буде подана у вигляді

$$L'(Y^*) = b_1y_1^* + b_2y_2^* + \dots + (b_i + 1)\, y_i^* + \dots + b_my_m^*.$$

Тоді зміна (приріст) ЦФ буде дорівнювати

$$L'(Y^*) - L(Y^*) = b_i.$$

<u>*Отже,*</u> ненульові двоїсті оцінки вказують на дефіцитність ресурсу в околі оптимального плану, тоді як нульові – на його надлишковість.

<u>*Додаткові двоїсті змінні*</u>, відповідно до їх означення з рівності

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - y_{m+j}^* = c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

показують, на скільки внутрішні оцінки ресурсів, необхідних для виробництва j-го виду продукції (ліві частини нерівностей в системі обмежень ДЗ), перевищують його зовнішню оцінку (прибуток).

<u>*Таким чином,*</u>

- j-та НЕНУЛЬОВА додаткова двоїста змінна виражає розмір збитку від реалізації одиниці j- ої продукції, випуск якої є нерентабельним;
- для рентабельного j-го виду продукції його двоїста додаткова змінна дорівнює НУЛЮ.

Проведення такого аналізу дозволяє виявити «вузькі» місця, усунення яких призводить до збільшення економічного ефекту.

4.1.3 Економічний аналіз основних характеристик прямої та двоїсті задач прикладу 1.1

Цільові функції прямої і двоїстої задач. Із теорем про зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач випливає, що мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі $L_{min}(Y)$ повинно збігатися з максимальним значенням цільової функції прямої задачі $F_{max}(X)$. У даному випадку

$$L_{min}(Y) = F_{max}(X) = 34200 \text{ у.г.о.} \qquad (4.1)$$

Що стосується прямої задачі, то цільова функція в ній характеризувала тижневий прибуток від реалізації продукції, яку виготовлено на фабриці; і цей прибуток повинен бути максимальним. Для з'ясування економічного змісту цільової функції двоїстої задачі про використання ресурсів розглянемо ситуацію, коли керівництво фабрики стоїть перед альтернативним вибором: чи здійснювати процес виробництва взуття, чи реалізувати на стороні власні виробничі ресурси (продати, здати в оренду тощо) за ринковими цінами. У разі вибору першої альтернативи, оптимальний розв'язок прямої задачі саме й дає нам оптимальний план виробництва взуття, за яким прибуток (ефект від виробничої діяльності підприємства) фабрики буде найбільшим. Якщо ж керівництво фабрики вирішує задачу реалізації власних ресурсів на стороні, то, з одного боку, воно прагнутиме реалізувати їх якомога дорожче, проте, з іншого боку, ринкова ціна не повинна штучно завищуватися, інакше ресурси за такими цінами не знайдуть покупця. А отже, керівництво фабрики має призначувати об'єктивні (незавищені) ціни («тіньові ціни») на виробничі ресурси, виходячи з того, що корисність обох альтернатив повинна бути однаковою, тобто дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими цінами, який мінімізується, дорівнюватиме ефекту від здійснення виробничої діяльності, тобто величині прибутку фабрики, який повинен бути максимальним. Цей принцип саме й відбиває співвідношення (4.1), яке говорить про те, що максимальний прибуток фабрики збігається з її можливим мінімальним доходом у зв'язку із відмовою від виробничої діяльності і продажом ресурсів на сторону і складає 34200 у.г.о. за тиждень.

Основні змінні прямої задачі. Для одержання максимального прибутку, фабрика повинна випускати $x_1^* = 180$ пар взуття моделі №1 і $x_2^* = 360$ пар взуття моделі №2 за тиждень.

Додаткові змінні прямої задачі характеризують обсяг невикористаного ресурсу:

1) третя (додаткова) змінна x_3 відповідає першому обмеженню, причому $x_3^* = 0$ люд.-год., тому ресурс робочого часу використаний цілком, що свідчить про його дефіцитність;

2) четверта змінна x_4 відповідає другому обмеженню, причому $x_4^* = 0$ шматків, тому ресурс шкіри I сорту використаний цілком, значить і цей ресурс дефіцитний;

3) п'ята змінна x_5 відповідає третьому обмеженню, і $x_5^* = 40$ шматків, тому 40 шматків шкіри II сорти не використані, значить цей ресурс недефіцитний.

Основні змінні двоїстої задачі. Як уже відзначалося вище, економічний зміст основних змінних двоїстої задачі визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі, а саме: їх оптимальні значення кількісно характеризують граничне значення «тіньової ціни» (об'єктивної ціни, рівноважної ціни і т.ін.) за одиницю обмеженого ресурсу, вище за яку його залучення (зокрема додаткове залучення) до виробничого процесу буде збитковим для фірми, що втілюється у ситуацію, коли витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, оцінені в грошовому вираженні ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$), перевищуватимуть зовнішню оцінку одиниці продукції – її ринкову ціну (або як в нашому випадку прибуток) c_j. А відтак, оптимальні основні двоїсті змінні надають керівництву фабрики (менеджерам з питань постачання) цінну додаткову інформацію для прийняття рішень в умовах ринкових відношень: додаткове залучення у виробництво дефіцитних ресурсів доцільно лише за умови, коли ринкова ціна за одиницю такого ресурсу не перевищує його «тіньову ціну».

«Тіньова ціна» для першого обмеження (ресурс робочого часу) складає $y_1^* = 32$ у.г.о. за одиницю, для другого обмеження (ресурс шкіри I сорту) – $y_2^* = 6$ у.г.о. за одиницю, для третього (ресурс шкіри II сорту) – $y_4^* = 0$ у.г.о. за одиницю. Із цього випливає, що

1) $y_1^* > 0$, тому ресурс робочого часу дефіцитний, і його збільшення вигідне (рентабельне), а саме: збільшення робочого часу на 1 люд.-год. призведе до збільшення прибутку на 32 у.г.о.;

2) $y_2^* > 0$, тому ресурс шкіри I сорту є дефіцитним, і його збільшення рентабельне, а саме: збільшення запасу шкіри I сорту на 1 шматок дасть підприємству прибуток, що складатиме 6 у.г.о.;

3) $y_4^* = 0$, тому ресурс шкіри II сорту не є дефіцитним, а збільшення його запасу не рентабельно.

Якщо деяка ***додаткова змінна двоїстої задачі*** додатна, то випуск продукції, що відповідає цій змінній є нерентабельним, а величина цієї змінної характеризує розмір збитку від реалізації одиниці цієї продукції: $\Delta_j = y_{i+n}^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j$. Дана властивість дозволяє оцінити рентабельність нової продукції (з умови $\Delta_j \leq 0$), якщо відомі планові норми витрат ресурсів на виготовлення її одиниці, а також визначитися з мінімально допустимою (прийнятною) ціною за одиницю продукції, яку планується виробляти (з умови $\Delta_j = 0$).

У даній задачі змінна y_4 відповідає обсягу випуску взуття моделі №1, а y_5 – моделі №2, причому $y_4^* = 0$; $y_5^* = 0$, тому випуск обох видів виробів вигідний (рентабельний) – грошова оцінка сумарних витрат ресурсів на одну пару взуття дорівнює розміру прибутку.

Взаємозамінність ресурсів. У табл. 4.4 внесемо значення коефіцієнтів $\eta_{ik} = y_k^*/y_i^*$ взаємозамінності ресурсів.

Таблиця 4.4 – Допоміжна таблиця для аналізу взаємозамінності ресурсів

$i \setminus k$	1	2	3
1	1	3/16	0
2	5 ⅓	1	0
3	∞	∞	1

Коефіцієнт η_{21} дорівнює 5⅓, це означає, що при зменшенні запасу робочого часу на 1 люд.-год. необхідно додатково збільшити запас шкіри I сорту на 5⅓ шматків, щоб значення цільової функції не змінилося. Ресурс робочого часу більш дефіцитний, ніж ресурс шкіри I сорту, тому коефіцієнт взаємозамінності більш дефіцитного ресурсу менш дефіцитним ресурсом η_{12} =5⅓ більше 1. Коефіцієнти η_{31} і η_{32} дорівнюють ∞. Це означає, що замінити зменшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту недефіцитним ресурсом шкіри II сорту не можливо. Коефіцієнти η_{13} і η_{23} дорівнюють 0. Це означає, що при зменшенні недефіцитного ресурсу шкіри II сорту не потрібне збільшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту.

Питання до самоконтролю до теми 4 та лабораторної роботи №2

1. Як пов'язані математичні моделі прямої та двоїстої задач лінійного програмування?
2. Які методи розв'язання двоїстих задач лінійного програмування Ви знаєте? Чи є якась специфіка в розв'язанні двоїстої ЗЛП?
3. Сформулювати теореми про зв'язок між парою двоїстих задач.
4. Дати економічну інтерпретацію кожної характеристики прямої та двоїстої задач лінійного програмування.
5. Викласти алгоритм розв'язання двоїстої ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» MS Excel.
6. Як за допомогою остаточних симплекс таблиць визначити значення всіх характеристик пар двоїстих задач? Як це зробити за допомогою звітів про стійкість та про результати в MS Excel?