## Тема 3 ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА ДВОЇСТІ ОЦІНКИ В АНАЛІЗІ РОЗВ’ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

### 3.1 Пряма та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач ЛП

З кожною задачею лінійного програмування пов’язується інша задача, також задача лінійного програмування, яку називають ***двоїстою*** (або спряженою) стосовно вихідної задачі, що називається ***прямою***.

Двоїсту задачу будують відносно прямої задачі, записаної у стандартній формі. У табл. 3.1 подано математичні моделі пари двоїстих задач, а в табл. 3.2 продемонстровано правила побудови математичних моделей двоїстих задач.

Таблиця 3.1 – Форми запису пари двоїстих задач

| Прями ЗЛП | Двоїста ЗЛП |
|---|---|
| $\boldsymbol{F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max}$ | $\boldsymbol{L = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to min}$ |
| $\boldsymbol{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n = \\ \qquad = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,l}, l \le n. \end{cases}}$ | $\boldsymbol{\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,1+1}y_2 + \dots + a_{m,l+1}y_m = \\ \qquad c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n, \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,k}, k \le m. \end{cases}}$ |

Таблиця 3.2 – Правила побудови двоїстих задач

| **Структурні характеристики ЗЛП** | **ЗЛП** | |
|---|---|---|
| | **Пряма** | **Двоїста** |
| 1.ЦФ | $(max)$ | $(min)$ |
| 2.К– ть змінних | $n$ змінних | Дорівнює кількості обмежень прямої задачі $y_i$, $i = \overline{1,m}$, тобто $m$ |
| 3.к– ть обмежень | $m$ обмежень | Дорівнює кількості змінних ПЗ $x_j$, $j = \overline{1,n}$, тобто $n$ |
| 4.Матриця коефіцієнтів в СО | $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ | $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ |
| 5.Коеф. при змінних ЦФ | $c_1, c_2, \dots, c_n$ | $b_1, b_2, \dots, b_m$ |
| 6.Права частина СО | $b_1, b_2, \dots, b_m$ | $c_1, c_2, \dots, c_n$ |

| Структурні характеристики ЗЛП | ЗЛП | |
|---|---|---|
| | **Пряма** | **Двоїста** |
| 7.Знаки в СО | а) $x_j \geq 0$– умова невід'ємності | $j$– е обмеження має знак «≥» |
| | б) на змінну $x_j$ не накладено умову невід'ємності | $j$– е обмеженні має знак «=» |
| | в) $i$-е обмеження має знак «≤» | змінна $y_i \geq 0$ |
| | г) ) $i$-е обмеження має знак «=» | на змінну $y_i$ не накладається обмеження невід'ємності |

### 3.2 Математична модель двоїстої задачі

Розглянемо задачу лінійного програмування, змістовно постановка якої надана в прикладі 1.1.

Випишемо математичну модель прямої (вихідної) задачі:

$x_1$ пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

$x_2$ пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 900; \\ 3x_1 + \quad x_2 \leq 900; \\ \qquad\quad x_2 \leq 400; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Складемо математичну модель двоїстої задачі:

1) дана пряма задача на максимум, у ній усі нерівності системи обмежень мають знак «≤», тому змінювати форму запису математичної моделі прямої задачі немає необхідності;

2) випишемо розширену матрицю системи і рядок коефіцієнтів цільової функції

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 900 \\ 3 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 400 \\ \hline 50 & 70 & F \end{array}\right);$$

3) складаємо транспоновану матрицю

$$A^t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 70 \\ \hline 900 & 900 & 400 & L \end{array}\right);$$

4) складаємо **математичну модель двоїстої задачі** (див. табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Математична модель двоїстої задачі

| | | |
|---|---|---|
| **ЦФ** двоїстої задачі: | $L(y_1, y_2, y_3) = 900y_1 + 900y_2 + 400y_3 \to min$ | |
| **СО** двоїстої задачі: | $\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 50, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 70, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{cases}$ | |
| *Економічний зміст* ***змінних двоїстої задачі*** *визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі.* | | |
| Характеристика ресурсу | | Характеристика двоїстої змінної |
| першій двоїстій змінній відповідає перше обмеження по витратах робочого часу, | | $y_1$ у.г.о. – «тіньова ціна» 1 люд.-год. робочого часу; |
| другій – по витратах шкіри I сорту, | | $y_2$ у.г.о. – «тіньова ціна» 1 шматка шкіри I сорту; |
| третій – по витратах шкіри II сорту, | | $y_3$ у.г.о. – «тіньова ціна» 1 шматка шкіри I сорту. |

### 3.3 Метод штучного базису розв'язання задач лінійного програмування

Метод штучного базису розглянемо на прикладі розв'язання двоїстої задачі до задачі про використання ресурсів.

**<u>Крок 1.</u>** Зведемо математичну модель двоїстої задачі до канонічного вигляду, уводячи додаткові невід'ємні змінні $y_4$, $y_5$. Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком «≥», то *додаткові змінні* ввійдуть у систему обмежень з коефіцієнтом «– 1». У цільову функцію додаткові змінні завжди входять з коефіцієнтом «0». Оскільки двоїста задача на мінімум, то складемо допоміжну функцію $Z = -L$. *Канонічний вигляд запису двоїстої задачі:*

$$Z = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \to max;$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_4 = 50; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 70; \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

**<u>Крок 3</u>.** Побудова первинного базису.

Основна матриця системи (3.1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & -1 & 0 \\ 2 & 1 & & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

містить одиничний двовимірний вектор $(0; 1)$, що відповідає змінній $y_3$, яка увійде у первинний базис. Ця змінна міститься у другому рівнянні системи (3.1) з коефіцієнтом «1». <u>Щоб отримати одиничну підматрицю</u> у цій матриці, введемо невід'ємну *штучну базисну змінну* $y_6$, яку додамо до лівої частини першого рівняння. Штучну змінну $y_6$, включимо в цільову функцію з коефіцієнтом «–10000» (на порядок більший за інші коефіцієнти ЦФ). Зазначимо, що абсолютна величина коефіцієнтів при штучних змінних повинна бути на порядок вище за всі абсолютні величини коефіцієнтів цільової функції. У результаті складемо математичну модель *розширеної задачі*:

$$Z_1 = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 - 10000 \cdot y_6 \to max;$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \quad - y_4 \quad + y_6 = 50; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \quad - y_5 \quad = 70; \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6, \geq 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Отже, маємо: по-перше, усі вільні елементи системи (3.2) – невід'ємні; по-друге, основна матриця системи (3.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & -1 & 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 2 & 1 & & 0 & -1 & \end{pmatrix}$$

містить одиничну підматрицю, що утворена двовимірними векторами

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

котрим відповідають базисні змінні $y_3,\ y_6$, причому кількість базисних змінних дорівнює кількості рівнянь системи (3.2), тому система (3.2) має первинний базис.

**<u>Крок 5.</u>** Розв'язуємо отриману задачу симплексним методом за алгоритмом, що описано в п. 2.2.3. Відповідні симплексні таблиці задачі і зразки формул для Excel наведені на рис. 3.1 і рис. 3.2 відповідно.

Слід зазначити, що *ітераційний процес симплексного методу продовжується доти, поки оцінки оптимальності* $\Delta_j$ *містять від'ємні елементи.*

*Якщо серед оцінок оптимальності немає від'ємних елементів, однак не всі штучні змінні виключені з базису, то така задача не має розв'язку.*

Із третьої симплексної таблиці двоїстої задачі випливає, що всі оцінки оптимальності $\Delta_j$ невід'ємні і всі штучні змінні виведені з базису. Це означає, що опорний план третьої ітерації є оптимальним:

$$y_1^* = 32;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 0;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 0;\ y_6^* = 0,$$

а значення функції $Z_1(Y^*) = -34200$ – максимальним. Оскільки $L(Y) = -Z(Y)$, то

$$L *^*{}_{min} \text{ у.г.о.}$$

Повна *змістовна відповідь* щодо двоїстої задачі буде надана в наступній темі.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | Перша симплекс-таблиця двоїстої задачя | | | | | | |
| 2 | | | | -900 | -900 | -400 | 0 | 0 | -10000 | |
| 3 | базис | сб | bi | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | bi/aik |
| 4 | y6 | -10000 | 50 | 1 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 16,66667 |
| 5 | y3 | -400 | 70 | 2 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 70 |
| 6 | | Δj | -528000 | -9900 | -29500 | 0 | 10000 | 400 | 0 | |
| 7 | | | | Друга симплекс-таблиця двоїстої задачі | | | | | | |
| 8 | | | | -900 | -900 | -400 | 0 | 0 | -10000 | |
| 9 | базис | сб | bi | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | bi/aik |
| 10 | y2 | -900 | 16,66667 | 0,333333 | 1 | 0 | -0,33333 | 0 | 0,333333 | 50 |
| 11 | y3 | -400 | 53,33333 | 1,666667 | 0 | 1 | 0,333333 | -1 | -0,33333 | 32 |
| 12 | | Δj | -36333,3 | -66,6667 | 0 | 0 | 166,6667 | 400 | 9833,333 | |
| 13 | | | | Третя симплекс-таблиця двоїстої задачі | | | | | | |
| 14 | | | | -900 | -900 | -400 | 0 | 0 | -10000 | |
| 15 | базис | сб | bi | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | bi/aik |
| 16 | y2 | -900 | 6 | 0 | 1 | -0,2 | -0,4 | 0,2 | 0,4 | |
| 17 | y1 | -900 | 32 | 1 | 0 | 0,6 | 0,2 | -0,6 | -0,2 | |
| 18 | | Δj | -34200 | 0 | 0 | 40 | 180 | 360 | 9820 | |
| 19 | | | | x4 | x5 | x1 | x1 | x2 | | |

Рис. 3.1 – Результати обчислень методом штучного базису

**Питання для самоконтролю до теми 3**

1. Пояснити правила побудови двоїстої задачі до основної (прямої).
2. Пояснити сутність штучного базису при розв'язання задачі симплексним методом.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | Перша симплекс-таблиця двоїстої задачя | | | | | | |
| 2 | | | | -900 | -900 | -400 | 0 | 0 | -10000 | |
| 3 | базис | cб | bi | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | bi/aik |
| 4 | y6 | -10000 | 50 | 1 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | =C4/E4 |
| 5 | y3 | -400 | 70 | 2 | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | =C5/E5 |
| 6 | | Δj | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;C4:C5) | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;D4:D5)-D2 | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;E4:E5)-E2 | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;F4:F5)-F2 | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;G4:G5)-G2 | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;H4:H5)-H2 | =SUMPRODUCT($B$4:$B$5;I4:I5)-I2 | |
| 7 | | | | Друга симплекс-таблиця двоїстої задачі | | | | | | |
| 8 | | | | -900 | -900 | -400 | 0 | 0 | -10000 | |
| 9 | базис | cб | bi | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | bi/aik |
| 10 | y2 | -900 | =C4/$E$4 | =D4/$E$4 | =E4/$E$4 | =F4/$E$4 | =G4/$E$4 | =H4/$E$4 | =I4/$E$4 | =C10/D10 |
| 11 | y3 | -400 | =C5-C4*$E$5/$E$4 | =D5-D4*$E$5/$E$4 | =E5-E4*$E$5/$E$4 | =F5-F4*$E$5/$E$4 | =G5-G4*$E$5/$E$4 | =H5-H4*$E$5/$E$4 | =I5-I4*$E$5/$E$4 | =C11/D11 |
| 12 | | Δj | =C6-C4*$E$6/$E$4 | =D6-D4*$E$6/$E$4 | =E6-E4*$E$6/$E$4 | =F6-F4*$E$6/$E$4 | =G6-G4*$E$6/$E$4 | =H6-H4*$E$6/$E$4 | =I6-I4*$E$6/$E$4 | |
| 13 | | | | Третя симплекс-таблиця двоїстої задачі | | | | | | |
| 14 | | | | -900 | -900 | -400 | 0 | 0 | -10000 | |
| 15 | базис | cб | bi | y1 | y2 | y3 | y4 | y5 | y6 | bi/aik |
| 16 | y2 | -900 | =C10-C11*$D$10/$D$11 | =D10-D11*$D$10/$D$11 | =E10-E11*$D$10/$D$11 | =F10-F11*$D$10/$D$11 | =G10-G11*$D$10/$D$11 | =H10-H11*$D$10/$D$11 | =I10-I11*$D$10/$D$11 | |
| 17 | y1 | -900 | =C11/$D$11 | =D11/$D$11 | =E11/$D$11 | =F11/$D$11 | =G11/$D$11 | =H11/$D$11 | =I11/$D$11 | |
| 18 | | Δj | =C12-C11*$D$12/$D$11 | =D12-D11*$D$12/$D$11 | =E12-E11*$D$12/$D$11 | =F12-F11*$D$12/$D$11 | =G12-G11*$D$12/$D$11 | =H12-H11*$D$12/$D$11 | =I12-I11*$D$12/$D$11 | |
| 19 | | | | x4 | x5 | x1 | x1 | x2 | | |

Рис.3.2 – Формули розрахунку методу штучного базису в таблицях Excel