МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**С. М. Гребенюк,
О. Г. Спиця,
Н. В. Матвіїшина,
Н. М. Д'яченко**

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

**методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»**

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від «   »   202 р.

**Запоріжжя
2025**

УДК: 519.8(076.5)
Д703

Гребенюк С.М., Спиця О.Г., Матвіїшина Н.В., Д’яченко Н.М. Дослідження операцій : методичні рекомендації до лабораторних занять для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Комп’ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 163 с.

Методичні рекомендації призначені для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти спеціальності «Комп’ютерні науки» та спрямоване формуванню системних знань і практичних навичок з математичного моделювання, алгоритмізації та розв’язування задач дослідження операцій і оптимізації.

У рекомендаціях викладено основні теоретичні положення та прикладні аспекти курсу дослідження операцій, зокрема методи лінійного та нелінійного програмування, теорію двоїстості, спеціальні оптимізаційні та мережеві моделі, елементи теорії ігор, теорії масового обслуговування, управління запасами, а також багатокритеріальні й цілочислові задачі оптимізації. Матеріал подано з акцентом на алгоритмічні методи розв’язання, аналіз результатів та їх практичну інтерпретацію.

Видання містить лабораторні роботи, індивідуальні завдання, методичні рекомендації та питання для самоконтролю, що забезпечує ефективне поєднання теоретичної підготовки з практичною діяльністю. Методичні рекомендації можуть бути використані як під час аудиторних занять, так і для самостійної роботи здобувачів освіти спеціальності «Комп’ютерні науки», а також може бути корисним здобувачам магістерського рівня, які застосовують методи дослідження операцій у навчальній та дослідницькій діяльності.

Рецензент
С. І. Гоменюк, доктор технічних наук, професор, декан математичного факультету

Відповідальний за випуск
С. М. Гребенюк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «Дослідження операцій» є важливою складовою професійної підготовки здобувачів вищої освіти за спеціальністю «Комп'ютерні науки», оскільки формує системне уявлення про методи обґрунтування та прийняття рішень на основі математичного моделювання. У сучасних умовах розвитку інформаційних технологій та цифрової економіки задачі оптимізації, планування, управління ресурсами, логістики, аналізу даних, мережевого моделювання та дослідження складних систем посідають провідне місце в діяльності фахівців ІТ-сфери.

Методичні рекомендації охоплюють основні розділи курсу дослідження операцій і поєднують виклад теоретичних положень з практичними аспектами їх застосування. У ньому розглянуто задачі лінійного програмування та методи їх розв'язування, теорію двоїстості й економіко-математичний аналіз оптимальних рішень, транспортні та мережеві задачі, задачу про призначення і задачу комівояжера, елементи теорії ігор, теорії масового обслуговування та управління запасами, а також питання нелінійного, багатокритеріального й цілочислового програмування.

Особливе місце у виданні відведено лабораторним роботам, метою яких є формування у студентів практичних навичок побудови математичних моделей, вибору адекватних методів їх розв'язання, аналізу та інтерпретації отриманих результатів з урахуванням прикладного змісту задач. Лабораторні роботи супроводжуються необхідними теоретичними відомостями, алгоритмами розв'язання, прикладами виконання та методичними рекомендаціями щодо оформлення результатів.

Методичні рекомендації орієнтовані на забезпечення цілісної підготовки здобувачів освіти у галузі дослідження операцій і спрямовані на розвиток аналітичного мислення, навичок формалізації та оптимізації, що є важливими складовими професійної компетентності фахівця з комп'ютерних наук.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Дослідження операцій» є набуття фундаментальних теоретичних знань і практичних навичок з питань постановки та розв'язування оптимізаційних задач засобами дослідження операцій.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Дослідження операцій» є:

- розширення та поглиблення теоретичних знань щодо загальних принципів математичного моделювання економічних процесів.
- оволодіння методологією та методикою побудови, аналізу та застосування математичних моделей.
- вивчення найбільш типових моделей та формування вмінь практичної роботи з моделями, що використовуються в практичній діяльності.
- знайомство з основними аналітичними та чисельними методами розв'язування різних класів задач дослідження операцій.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких результатів навчання (знання, уміння тощо) та компетентностей:

результати навчання:

– застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук;
– використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв'язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проєктування та реалізації об'єктів інформатизації;
– проєктувати, розробляти та аналізувати алгоритми розв'язання обчислювальних та логічних задач, оцінювати ефективність та складність алгоритмів на основі застосування формальних моделей алгоритмів та обчислюваних функцій;
– використовувати методи чисельного диференціювання та інтегрування функцій, розв'язання звичайних диференціальних та інтегральних рівнянь, особливостей чисельних методів та можливостей їх адаптації до інженерних задач, мати навички програмної реалізації чисельних методів;

компетентності:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
– здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;
– здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;
– здатність до математичного формулювання та досліджування неперервних та дискретних математичних моделей, обґрунтовування вибору методів і підходів для розв'язування теоретичних і прикладних задач у галузі комп'ютерних наук, аналізу та інтерпретування;
– здатність до логічного мислення, побудови логічних висновків, використання формальних мов і моделей алгоритмічних обчислень, проєктування, розроблення й аналізу алгоритмів, оцінювання їх ефективності та складності, розв'язності та нерозв'язності алгоритмічних проблем для адекватного моделювання предметних областей і створення програмних та інформаційних систем;
– здатність використовувати сучасні методи математичного моделювання об'єктів, процесів і явищ, розробляти моделі й алгоритми чисельного розв'язування задач математичного моделювання, враховувати похибки наближеного чисельного розв'язування професійних задач.

Міждисциплінарні зв'язки. Основою для вивчення даного курсу є знання, набуті студентами з курсів «Алгебра та геометрія», «Алгоритми та структури даних», «Дискретна математика», «Математичний аналіз», «Методи обчислень», «Теорія ймовірностей та математична статистика». Теоретичні знання і практичні навички, надбані при вивченні навчальної дисципліни «Дослідження операцій» можуть бути використані при вивченні курсів «Комп'ютерна графіка», «Теорія прийняття рішень», а також при виконанні кваліфікаційної роботи бакалавра та у подальшій професійній діяльності.

Тема 1 ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ – НАУКА ПРО ОБҐРУНТУВАННЯ ТА ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Дослідження операцій вивчає методи раціонального вибору дій у складних ситуаціях, коли потрібно оптимально використовувати ресурси. Метою є прийняття найкращого рішення за наявних обмежень та критеріїв ефективності.

Поняття математичної моделі

Математична модель – це формалізоване відображення реальної ситуації за допомогою змінних, функцій, рівнянь і обмежень, що дозволяє аналізувати та оптимізувати систему.

Предмет, об'єкт і завдання курсу

Об'єкт – процеси прийняття рішень у технічних, економічних, виробничих та організаційних системах.

Предмет – методи побудови моделей та їх оптимального дослідження.

Завдання – формалізація проблеми, вибір критерію, побудова моделі, пошук оптимального розв'язку та аналіз результатів.

Задачі економічного вибору

Це задачі раціонального розподілу ресурсів, планування, виробництва, транспортування, інвестування, запасів тощо.

Сутність однокритеріальної оптимізації

Однокритеріальна оптимізація передбачає мінімізацію або максимізацію **одного** критерію (витрат, доходу, часу, ризику тощо) за відповідних обмежень.

Сутність багатокритеріальної оптимізації полягає в ухваленні рішень за умов, коли необхідно одночасно врахувати кілька, часто суперечливих критеріїв ефективності. На відміну від однокритеріального випадку, де оптимум визначається однозначно, у багатокритеріальних задачах зазвичай не існує одного універсально найкращого рішення. Тому застосовують поняття *компромісності* та *Парето-оптимальності*, які дають змогу визначити множину розв'язків, що не можуть бути покращені за одним критерієм без погіршення іншого. Метою є вибір найбільш збалансованого варіанта з урахуванням важливості критеріїв та пріоритетів особи, що приймає рішення.

Економічна та математична постановка задач

Економічна постановка описує реальну ситуацію словами, визначає мету, ресурси та обмеження.

Математична постановка подає її у вигляді:

– змінних,
– цільової функції,
– функціональних та нефункціональних обмежень.

Вибір критерію та обмежень

Критерій оптимізації відображає мету (прибуток, витрати, продуктивність).

Функціональні обмеження виражаються рівняннями/нерівностями.

Нефункціональні обмеження – умови типу невід'ємності, цілочисельності, логічні вимоги.

Класифікація моделей і методів

Моделі: лінійні, нелінійні, стохастичні, динамічні, мережеві, імітаційні.

Методи: симплекс-метод, градієнтні методи, динамічне програмування, теорія масового обслуговування, теорія ігор, імітаційне моделювання.

Питання для самоконтролю з теми 1

1. Що є предметом та об’єктом дослідження операцій і яку роль відіграє математична модель у процесі прийняття рішень?
2. У чому полягає сутність однокритеріальної оптимізації та які елементи містить її математична постановка?
3. Що таке критерій оптимізації та які фактори впливають на його вибір у практичних задачах?
4. Чим багатокритеріальна оптимізація відрізняється від однокритеріальної? Поясніть поняття Парето-оптимальності.
5. Які основні типи моделей використовуються в дослідженні операцій та які методи застосовують для їх розв’язання?

Тема 2 ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

2.1 Вступні зауваження щодо задач лінійного програмування

На практиці для випуску асортименту своєї продукції виробничі підприємства мають у своєму розпорядженні деякий запас, як правило, обмежених ресурсів (сировинних, трудових, енергетичних, паливних, грошових), деякий набір взаємозамінних технологій, устаткування і т.п. Транспортна фірма, що здійснює постачання від підприємств-виробників до замовників-споживачів, має можливість вибору в розподілі вантажу. Координатор з логістики повинен скласти такий план випуску продукції, при якому досягається найкращий (оптимальний) результат: або підприємство максимізує прибуток, або максимізує випуск продукції, або мінімізує витрати на випуск продукції, або мінімізує виробничі відходи і т.п.

Зазначений клас задач дослідження операцій є найбільш поширеним і відноситься до задач лінійного програмування (ЗЛП); розгляду методів розв'язання деяких із них присвячені перші теми курсу.

Спочатку вивчається графічний метод розв'язання ЗЛП, що дозволяє наочно представити як суть математичної постановки задачі, так і її результат. Потім вивчається розв'язання задачі з використанням убудованого в Microsoft Excel for Windows інструмента «Solver». Цей інструмент дозволяє розв'язувати більш складні задачі не тільки лінійного програмування. Традиційний симплексний метод розв'язання ЗЛП дозволяє одержати багато результатів, корисних для економічного аналізу рентабельності випуску окремих видів продукції, аналізу дефіцитності ресурсів, що використовуються, їхньої взаємозамінності. Однак цей метод досить трудомісткий. Вирішити цю проблему дозволяє Microsoft Excel із своєю вбудованою можливістю модифікації формул.

Також вивчається розв'язання транспортної задачі, модель якої лінійна, однак розв'язання цієї задачі симплексним методом є досить трудомістким. Для розв'язання цієї задачі розроблений зручний і наочний метод потенціалів, що став класичним. Крім цього методу, розглянуто розв'язок транспортної задачі з використанням інструмента «Solver».

2.2 Аналітичні методи розв'язування задач лінійного програмування

2.2.1 Різні форми подання задач лінійного програмування

Загальною задачею ЛП називається задача, яка полягає у визначенні максимального (мінімального) значення функції:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \;\le\; b_i\,, \quad i = \overline{1,k}, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ \geq b_i\,, \quad i = \overline{k+1, l}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ = \ b_i\,, \quad i = \overline{l+1,\ m}, \tag{2.4}$$

$$x_j \ \geq \ 0, \quad j = \overline{1,\ s}, \quad s \leq \ n, \tag{2.5}$$

де a_{ij}, b_i, c_j – задані постійні величини, а $k \leq m$.

Функція (2.1) називається ***цільовою функцією*** (ЦФ) задачі лінійного програмування (2.1) – (2.5), а умови (2.2) – (2.5) – ***системою обмежень*** (СО) даної задачі.

Розрізняють ще дві основні форми задач ЛП залежно від наявності обмежень різного типу: стандартну та канонічну.

Стандартною (або ***симетричною) ЗЛП*** називається завдання, яке полягає у визначенні максимального значення функції (2.1) при виконанні умов (2.2) та (2.5), де $k = m,\ s = n$, тобто

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \ max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ \leq \ b_i\,, \quad i = \overline{1,\ m}, \tag{2.6}$$

$$x_j \ \geq \ 0, \quad j = \overline{1,\ n}.$$

Канонічною (або ***основною) ЗЛП*** називається задача, яка полягає у визначенні максимального значення цільової функції (2.1) при виконанні умов (2.4) та (2.5), де $s = n$, тобто

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \ max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ = \ b_i\,, \quad i = \overline{1,\ m}, \tag{2.7}$$

$$x_j \ \geq \ 0, \quad j = \overline{1,\ n}.$$

2.2.2 Розв'язання задач лінійного програмування графічним методом

Розберемо розв'язок однієї *задачі оптимального виробничого планування (або задачі про використання ресурсів)*.

Приклад 1.1 ***Змістовна постановка задачі***. Для виготовлення взуття двох моделей на фабриці використовується два сорти шкіри. Тижневі ресурси робочої сили і матеріалу, витрати праці і матеріалу для виготовлення кожної пари взуття, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці:

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний запас ресурсів
	№1	№2	
Рабочий час (люд.-год.) Шкіра I сорту (шмат.) Шкіра II сорту (шмат.)	1 3 –	2 1 1	900 900 400
Прибуток (у.г.о.)	50	70	

Скласти план випуску взуття в асортименті, що максимізує щотижневий прибуток (в умовних грошових одиницях).

Розв'язання. Спочатку складемо <u>*математичну модель*</u> поставленої задачі. Вона містить у собі змінні задачі, цільову функцію і систему обмежень.

Змінні задачі. Оскільки в задачі потрібно скласти тижневий план випуску взуття, то змінними задачі є:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2.

Цільова функція задачі. Оскільки прибуток від випуску 1 пари взуття моделі №1 складає 50 у.г.о., а моделі №2 – 70 у.г.о., то загальний тижневий прибуток від випуску x_1 пар взуття моделі №1 і x_2 пар взуття моделі №2 складатиме $50x_1 + 70x_2$ (у.г.о.). Таким чином, цільова функція задачі, яку необхідно максимізувати, має вигляд

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to max.$$

Система обмежень задачі. З урахуванням наведених у таблиці даних можна скласти такі обмеження у вигляді нерівностей.

– *робочий час*, затрачуваний на випуск запланованого взуття, складає $x_1 + 2x_2$ (люд.-год.). З урахуванням загального фонду робочого часу в 900 люд.-год., який не можна перевищити, одержимо нерівність:

$$x_1 + 2x_2 \le 900 \;;$$

– *витрата шкіри I сорту* (у шматках) на виготовлення запланованої партії взуття представиться за аналогією з попередньою нерівністю:

$$3x_1 + x_2 \le 900 \;;$$

– *витрата шкіри II сорту* (у шматках) – відповідно:

$$x_2 \le 400 \;;$$

– план випуску взуття за смислом не може набувати від'ємних значень, тому останнє *обмеження невід'ємності змінних*:

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \;.$$

Таким чином, <u>*математична модель*</u> задачі має вигляд:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to max; \qquad (2.8)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 900; \\ 3x_1 + \quad x_2 \le 900; \\ \qquad\quad x_2 \le 400; \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Математична модель виражається через дві змінні, тому для розв'язання задачі можна застосовувати графічний метод.

На координатній площині x_1Ox_2 зобразимо множину точок Ω, координати яких задовольняють системі обмежень. Ця множина називається *областю допустимих розв'язків* (*областю допустимих значень*).

Спочатку зауважимо, що система обмежень містить нерівності $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$, які означають, що шукана область Ω лежить у першій чверті. Далі побудуємо прямі

$$x_1 + 2x_2 = 900 \quad (1),$$
$$3x_1 + \quad x_2 = 900 \ (2),$$
$$x_2 = 400 \quad (3).$$

Для цього знайдемо по дві пари точок, через які проходить кожна з цих прямих:

1) $x_1 + 2x_2 = 900$: (0, 450), (900, 0);

2) $3x_1 + \quad x_2 = 900$: (0, 900), (300, 0);

3) $x_2 = 400$: (0, 400), (500, 400).

Ці прямі з відповідними мітками зображені на рис. 2.1.

Множина точок, які задовольняють нерівність $x_1 + 2x_2 \leq 900$, являє собою півплощину, що обмежена прямою $x_1 + 2x_2 = 900$ (1). Оскільки точка O(0,0) задовольняє нерівності ($0 + 2 \cdot 0 \leq 900$ – вірно), то шукана півплощина містить цю точку; це зображено на рис. 2.1 за допомогою стрілок. Аналогічно, точка O(0,0) задовольняє кожній із нерівностей $3x_1 + x_2 \leq 900$ і $x_2 \leq 400$, тому ця точка міститься у відповідних півплощинах (див. рис. 2.1). З урахуванням розташування в першій чверті область допустимих розв'язків Ω являє собою заштрихований многокутник OABCD.

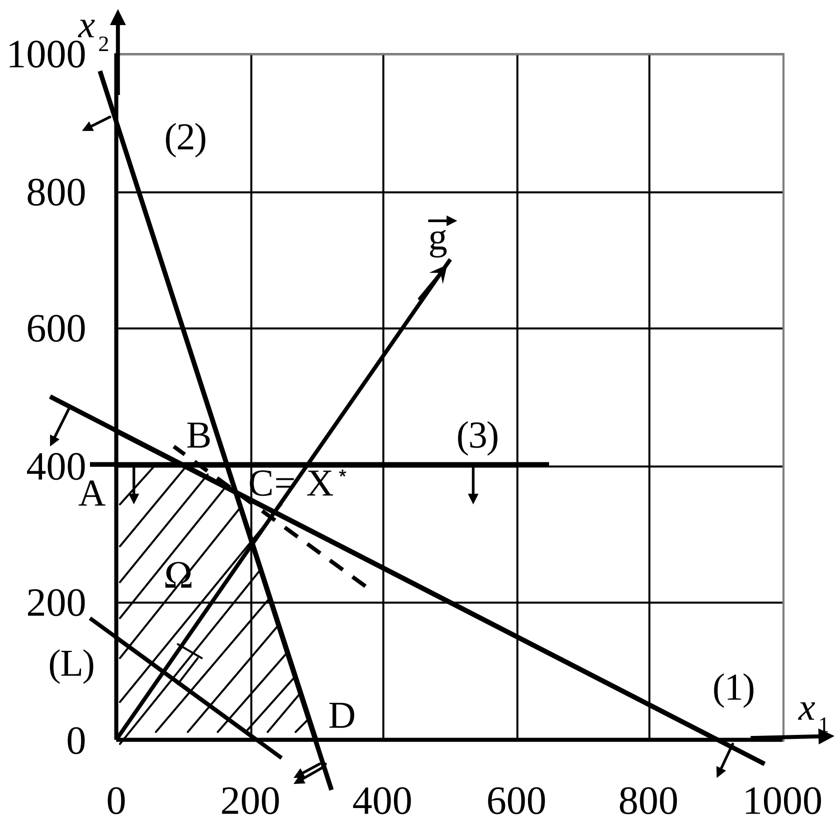


Рис. 2.1 – Розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом

Тепер зобразимо вектор $\vec{g}$ найшвидшого росту цільової функції $F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2$, яким є вектор, співспрямований її *градієнту*. Координатами вектора градієнта (для лінійної відносно змінних функції) є коефіцієнти при змінних цільової функції, тобто $\overrightarrow{grad} = (50{,}70)$. Як вектор $\vec{g}$ оберемо для зручності побудови вектор

$$\vec{g} = 10 \cdot \overrightarrow{grad} = (500,\ 700)\ .$$

Для зображення цього вектора з'єднуємо спрямованим відрізком точки з координатами (0, 0) і (500, 700). Довільна *лінія рівня цільової функції* (L) проходить перпендикулярно до вектора $\vec{g}$.

Для пошуку точки області допустимих розв'язків, у якій цільова функція досягає свого максимуму (мінімуму), необхідно лінію рівня пересувати в напрямку вектора градієнта (відповідно у зворотному напрямку). Крайня точка X^* області Ω при такому русі буде відповідати *оптимальному розв'язку*. У даній задачі такою точкою X^* буде точка C. Знайдемо її координати, зауваживши, що вона є точкою перетинання прямих (1) і (2). Тому розв'яжемо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 900; \\ 3x_1 + \ x_2 = 900. \end{cases}$$

Із першого рівняння виразимо x_1:

$$x_1 = 900 - 2x_2. \qquad (2.10)$$

Потім підставимо знайдений вираз у друге рівняння:

$$3 \cdot (900 - 2x_2) + x_2 = 900,$$

звідки одержимо

$$2700 - 6x_2 + x_2 = 900;$$
$$5x_2 = 1800;$$
$$x_2 = 360.$$

Знаючи x_2, за допомогою (2.10) знаходимо x_1:

$$x_1 = 900 - 2 \cdot 360 = 180\,.$$

У результаті дійдемо висновку, що $x_1^* = 180$, $\quad x_2^* = 360$, а точка, яка відповідає оптимальному розв'язку, має координати $X^* = C(180,\ 360)$. Максимальне значення цільової функції:

$$F_{\max}(X) = F\left(X^*\right) = 50x_1^* + 70x_2^* = 50 \cdot 180 + 70 \cdot 360 = 34200 \text{ (у.г.о.).}$$

Відповідь. Для одержання максимального тижневого прибутку, що складає 34200 у.г.о., фабрика повинна випускати 180 пар взуття моделі №1 і 360 пар взуття моделі №2 за тиждень.

2.2.3 Розв'язання задач лінійного програмування симплексним методом

<u>Крок 1.</u> Випишемо математичну модель вихідної задачі:
x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,
x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 900; \\ 3x_1 + \quad x_2 \le 900; \\ \qquad\quad x_2 \le 400; \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Крок 2. Зведемо математичну модель вихідної задачі до *канонічного виду*, уводячи додаткові невід'ємні змінні $x_3,\ x_4,\ x_5$. Помітимо, що кількість додаткових змінних відповідає кількості нерівностей у системі обмежень. Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком «≤», то додаткові змінні в систему обмежень увійдуть з коефіцієнтом «+1». У цільову ж функцію вони ввійдуть з коефіцієнтом «0». *Канонічний вид запису даної задачі:*

$$F(x_1, x_2) = 50 \cdot x_1 + 70 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 900; \\ 3x_1 + \ x_2 \qquad + x_4 \qquad = 900; \\ \qquad\quad x_2 \qquad\qquad + x_5 = 400; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Крок 3. Побудуємо *первинний базис* системи обмежень (*початковий опорний план задачі*).

По-перше, усі вільні елементи системи (2.11) – невід'ємні. По-друге, основна матриця системи (5)

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

містить одиничну підматрицю, якій відповідають змінні $x_3,\ x_4,\ x_5$. Тому ці змінні є *базисними,* а їхня кількість дорівнює кількості рівнянь системи (2.11), отже система (2.11) має первинний базис, який утворено тривимірними одиничними векторами (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), що відповідають базисним змінним $x_3,\ x_4,\ x_5$. У результаті одержано: кількість основних змінних $n = 2$, базисних – $m = 3$.

Крок 4. Складаємо ***першу симплексну таблицю***.

– заносимо вихідні дані в таблицю Excel (див. першу симплексну таблицю на рис. 2.2 і 2.3):
  1) у комірки D3:H3 вносимо найменування змінних;
  2) у комірки D2:H2 – коефіцієнти цільової функції при відповідних змінних;
  3) у комірки D4:H6 – основну матрицю системи (2.11);
  4) у комірки A4:A6 – найменування базисних змінних;
  5) у комірки B4:B6 – коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;
  6) у комірки C4:C6 – стовпець вільних елементів;
– знайдемо опорний план, що відповідає побудованій симплексній таблиці. Для цього ставимо у відповідність змінній базису те значення, що знаходиться у стовпці «b_i» того ж рядка. Якщо змінна не входить у базис, то її значення дорівнює нулю. У даному випадку

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 900,\ x_4 = 900,\ x_5 = 400;$$

– заповнюємо комірки C7:H7:
  1) комірка C7 повинна містити *значення цільової функції* на зазначеному опорному плані:

$$F(X) = \Delta_0 \ = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i b_i,$$

тому вносимо формулу в цю комірку, як показано на рис. 2.3, а на рис. 2.2 бачимо результат обчислення за цією формулою, тобто $F(X) = \Delta_0 = 0$ у.г.о.;

2) комірки D7:H7 повинні містити значення *оцінок оптимальності* для зазначеного опорного плану:

$$\Delta_j \ = \sum_{i=n+1}^{n+m} c_i a_{ij} - c_j, \ \ j = 1, \dots, n+m,$$

тому в комірку D7 вносимо формулу (див. рис. 2.3)

SUMPRODUCT($B$4:$B$6;D4:D6)– D2,

у який комірки B4:B6 мають абсолютні значення, з тієї причини, що у формулі для Δ_j коефіцієнти цільової функції c_i $(i = \overline{n+1, n+m})$, що містяться в сумі добутків не залежать від j. Потім копіюємо формулу з модифікаціями в комірки E7:H7; результати обчислень у цих комірках показані на рис. 2.2;

– ***перевірка оптимальності опорного плану***. Оцінки оптимальності Δ_j містять від'ємні значення (див. першу симплексну таблицю на рис. 2.2), тому зазначений опорний план не є оптимальним. Вибираємо серед оцінок оптимальності найбільше за модулем від'ємне значення. У даному випадку це «–70». Стовпець, що відповідає цьому значенню оптимальності, є *розв'язувальним стовпцем*; виділимо його;
– у комірки I4:I6 вносимо значення *оцінних обмежень.* Для $i^{\underline{\text{го}}}$ рядка оцінне обмеження дорівнює $\frac{b_i}{a_{ik}}$, де b_i – вільний елемент цього рядка, а a_{ik} – елемент матриці, що знаходиться в розв'язувальному стовпці $i^{\underline{\text{го}}}$ рядка (див. рис. 2.3). Якщо a_{ik}=0 або $\frac{b_i}{a_{ik}} \le 0$, то оцінне обмеження такого рядка не розглядаємо. Серед додатних оцінних обмежень вибираємо найменше. У даному випадку – це «400» (див. рис. 2.2). Рядок, що відповідає цьому значенню, є розв'язувальним рядком; виділимо його. Елемент, що стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, називається *розв'язувальним елементом*.

Крок 5. *Побудова наступної симплексної таблиці*. У загальному випадку, якщо розв'язувальний стовпець має номер k, а розв'язувальний рядок – r, то подальший алгоритм полягає в наступному.

По-перше, змінну x_k вводимо до базису замість змінної x_r.

По-друге, робимо перетворення, за яких нова матриця буде мати $k^{\underline{\text{й}}}$ стовпець, що містить нулі на всіх місцях, окрім $r^{\underline{\text{го}}}$. Для цього елементи нової симплексної таблиці a'_{ij}, b'_i виражаємо через елементи a_{ij}, b_i попередньої симплексної таблиці за формулами:

– елементи розв'язувального рядка ділимо на розв'язувальний елемент і записуємо у відповідному за номером рядку нової таблиці:

$$a'_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}, \ b'_r = \frac{b_r}{a_{rk}}, \text{ при } i = r; \qquad (*)$$

– усі інші елементи нової таблиці розраховуємо за формулами:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{\boxed{a_{ik}} \cdot a_{rj}}{a_{rk}}, \;\; b'_i = b_i - \frac{\boxed{a_{ik}} \cdot b_r}{a_{rk}} \text{ при } i \neq r. \qquad (**)$$

Тут a_{rk} – *розв'язувальний елемент*, він міститься в обох формулах (*) і (**) незалежно від i чи j, тому йому потрібно привласнити абсолютне значення, тобто після його введення натиснути функціональну клавішу F4. Формула (**) містить a_{ik} для усіх j, тому цьому елементу також привласнюється абсолютне значення.

Відповідно до зазначеного алгоритму будуємо ***другу симплексну таблицю***.

– заповнюємо таблицю Excel (див. другу симплексну таблицю на рис. 2.2 і 2.3):
  1) перші два рядки симплексної таблиці не змінюються;
  2) змінну x_2 вводимо до базису замість змінної x_5;
  3) у комірках B11:B13 поміщаємо коефіцієнти при базисних змінних;
  4) для заповнення комірок C11:H13 формулами (див. рис. 2.3) відповідно до співвідношень (*) і (**) вносимо спочатку формули у комірки C11:C13 і копіюємо їх з модифікаціями.

Зауважимо, що в комірки C14:H14 можна внести як формули, аналогічні коміркам C11:H11 чи C12:H12 (див. рис. 2.3), так і формули, аналогічні C7:H7. Результат буде той самий.

– опорний план, що відповідає другій симплекс-таблиці:

$$x_1 = 0,\; x_2 = 400,\; x_3 = 100,\; x_4 = 500,\; x_5 = 0,$$

  а значення цільової функції на ньому $F(X) = 28000$ у.г.о.;
– аналогічно першій симплексній таблиці в другій симплексній таблиці вибираємо розв'язувальний стовпець, що відповідає найбільшій за модулем від'ємній оцінці Δ_j оптимальності (див. другу симплексну таблицю рис. 2.2). Потім обчислюємо оцінні обмеження, за якими вибираємо розв'язувальний рядок.

Ітераційний процес симплексного методу продовжуємо доти, поки оцінки оптимальності Δ_j ($j = 1,...,n+m$) містять від'ємні елементи. У даному випадку вже четверта симплексна таблиця не містить від'ємних оцінок оптимальності, тому опорний план, що відповідає їй, є оптимальним:

$$x_1^* = 180,\; x_2^* = 360,\; x_3^* = 0,\; x_4^* = 0,\; x_5^* = 40,$$

а значення цільової функції на ньому $F(X^*) = 34200$ у.г.о. – максимальним.

Відповідь. Для одержання максимального тижневого прибутку, що складає 34200 у.г.о., фабрика повинна випускати 180 пар взуття моделі №1 і 360 пар взуття моделі №2 за тиждень.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Перша симплекс-таблиця					
2				50	70	0	0	0	
3	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
4	x3	0	900	1	2	1	0	0	450
5	x4	0	900	3	1	0	1	0	900
6	x5	0	400	0	1	0	0	1	400
7		Δj	0	-50	-70	0	0	0	
8				Друга симплекс-таблиця					
9				50	70	0	0	0	
10	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
11	x3	0	100	1	0	1	0	-2	100
12	x4	0	500	3	0	0	1	-1	166,6667
13	x2	70	400	0	1	0	0	1	
14		Δj	28000	-50	0	0	0	70	
15				Третя симплекс-таблиця					
16				50	70	0	0	0	
17	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
18	x1	50	100	1	0	1	0	-2	
19	x4	0	200	0	0	-3	1	5	40
20	x2	70	400	0	1	0	0	1	400
21		Δj	33000	0	0	50	0	-30	
22				Четверта симплекс-таблиця					
23				50	70	0	0	0	
24	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
25	x1	50	180	1	0	-0,2	0,4	0	
26	x5	0	40	0	0	-0,6	0,2	1	
27	x2	70	360	0	1	0,6	-0,2	0	
28		Δj	34200	0	0	32	6	0	
29				y4	y5	y1	y2	y3	

Рис. 2.2 – Результати розрахунків симплексним методом

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Перша симплекс-таблиця					
2				50	70	0	0	0	
3	базис	сб	bi	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**bi/aik**
4	x3	0	900	1	2	1	0	0	=C4/E4
5	x4	0	900	3	1	0	1	0	=C5/E5
6	x5	0	400	0	1	0	0	1	=C6/E6
7		Δj	=SUMPRODUCT($B$4:$B$6;C4:C6	=SUMPRODUCT($B$4:$B$6;D4:D6)-D2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$6;E4:E6)-E2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$6;F4:F6)-F2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$6;G4:G6)-G2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$6;H4:H6)-H2	
8				Друга симплекс-таблиця					
9				50	70	0	0	0	
10	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
11	x3	0	=C4-C6*$E$4/$E$6	=D4-D6*$E$4/$E$6	=E4-E6*$E$4/$E$6	=F4-F6*$E$4/$E$6	=G4-G6*$E$4/$E$6	=H4-H6*$E$4/$E$6	=C11/D11
12	x4	0	=C5-C6*$E$5/$E$6	=D5-D6*$E$5/$E$6	=E5-E6*$E$5/$E$6	=F5-F6*$E$5/$E$6	=G5-G6*$E$5/$E$6	=H5-H6*$E$5/$E$6	=C12/D12
13	x2	70	=C6/$E$6	=D6/$E$6	=E6/$E$6	=F6/$E$6	=G6/$E$6	=H6/$E$6	
14		Δj	=C7-C6*$E$7/$E$6	=D7-D6*$E$7/$E$6	=E7-E6*$E$7/$E$6	=F7-F6*$E$7/$E$6	=G7-G6*$E$7/$E$6	=H7-H6*$E$7/$E$6	
15				Третя симплекс-таблиця					
16				50	70	0	0	0	
17	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
18	x1	50	=C11/$D$11	=D11/$D$11	=E11/$D$11	=F11/$D$11	=G11/$D$11	=H11/$D$11	
19	x4	0	=C12-C11*$D$12/$D$11	=D12-D11*$D$12/$D$11	=E12-E11*$D$12/$D$11	=F12-F11*$D$12/$D$11	=G12-G11*$D$12/$D$11	=H12-H11*$D$12/$D$11	=C19/H19
20	x2	70	=C13-C11*$D$13/$D$11	=D13-D11*$D$13/$D$11	=E13-E11*$D$13/$D$11	=F13-F11*$D$13/$D$11	=G13-G11*$D$13/$D$11	=H13-H11*$D$13/$D$11	=C20/H20
21		Δj	=C14-C11*$D$14/$D$11	=D14-D11*$D$14/$D$11	=E14-E11*$D$14/$D$11	=F14-F11*$D$14/$D$11	=G14-G11*$D$14/$D$11	=H14-H11*$D$14/$D$11	
22				Четверта симплекс-таблиця					
23				50	70	0	0	0	
24	базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
25	x1	50	=C18-C19*$H$18/$H$19	=D18-D19*$H$18/$H$19	=E18-E19*$H$18/$H$19	=F18-F19*$H$18/$H$19	=G18-G19*$H$18/$H$19	=H18-H19*$H$18/$H$19	
26	x5	0	=C19/$H$19	=D19/$H$19	=E19/$H$19	=F19/$H$19	=G19/$H$19	=H19/$H$19	
27	x2	70	=C20-C19*$H$20/$H$19	=D20-D19*$H$20/$H$19	=E20-E19*$H$20/$H$19	=F20-F19*$H$20/$H$19	=G20-G19*$H$20/$H$19	=H20-H19*$H$20/$H$19	
28		Δj	=C21-C19*$H$21/$H$19	=D21-D19*$H$21/$H$19	=E21-E19*$H$21/$H$19	=F21-F19*$H$21/$H$19	=G21-G19*$H$21/$H$19	=H21-H19*$H$21/$H$19	
29				**y4**	**y5**	**y1**	**y2**	**y3**	

Рис. 2.3 – Формули розрахунку симплексного методу в таблицях Excel

Лабораторна робота №1 Задачі лінійного програмування

Мета роботи: засвоїти основні методи розв'язання прямої задачі лінійного програмування (ЗЛП) та аналізу її економічного змісту.

Цілі роботи:

- навчитися будувати математичну модель задачі лінійного програмування;
- ознайомитися з графічним та симплексним методом розв'язання ЗЛП;
- набути вміння розв'язувати ЗЛП в Microsoft Excel for Windows за допомогою інструмента «Solver»;
- навчитися робити висновки в термінах постановки задачі.

2.3 Завдання до лабораторної роботи №1

- побудувати математичну модель економічної задачі;
- розв'язати задачу за допомогою побудованої моделі з використанням інструмента "Solver";
- зробити висновки в термінах постановки задачі.

2.4 Варіанти завдань лабораторної роботи №1

Номер варіанта визначаються відповідно до порядкового номеру прізвища студента в списку академічної групи. З нижченаведеного списку обрати номер задачі, що відповідає Вашому варіанту, і розв'язати її відповідно до наданого завдання.

1. Фірма виготовляє дві моделі А і В книжкових полиць. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів (дощок і машинного часу) на одну полицю кожної моделі. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний запас ресурсів, який може використовувати фірма протягом тижня. Скільки виробів кожної моделі фірмі необхідно випускати за тиждень для одержання максимального прибутку від їхньої реалізації?

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки ($м^2$) Машинний час (год.)	3 0,2	4 0,5	1700 160
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	20	40	

2. Фірма виготовляє два продукти А і В, ринок збуту яких необмежений. Кожен продукт повинний бути оброблений кожною з машин I, II й III. Час обробки в годинах для кожного з виробів А і В, загальний запас машинного часу за тиждень і прибуток від реалізації виробів наведені нижче в таблиці:

Машина виду	Час обробки одиниці виробу (год.)		Загальний обсяг машинного часу (год.)
	A	B	
I II III	0,5 0,4 0,2	0,25 0,3 0,4	40 36 36
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	50	30	

Фірмі треба визначити план випуску виробів А і В, при якому прибуток від їхньої реалізації буде максимальною.

3. Для виробництва столів і шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, прибуток від реалізації одного виробу і загальний обсяг наявних ресурсів кожного виду наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина ($м^3$):			
I виду	0,2	0.1	40
II виду	0.1	0,3	60
Трудомісткість (люд.-год.)	1,2	1,5	371,4
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	120	160	

Визначити, скільки столів і шаф фабриці варто виготовляти, щоб прибуток від їхньої реалізації був максимальним.

4. На промисловому комплексі по виробництву м’яса відгодовують свиней двох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Види корму	Потрібна кількість корму (ц) для породи свиней		Запаси корму, ц
	I	II	
Грубі (сінне борошно, трав’яні)	2	3	1000
Соковиті (коренеплоди, картопля)	4	2	1200
Комбікорми	1	1	380
Продуктивність, ц	3	2,5	

Потрібно знайти таке поголів’я свиней кожної породи, щоб продуктивність 1 ц м’яса була максимальною.

5. Для виробництва двох видів виробів А і В використовується токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Норми витрат часу для кожного з типів устаткування на один виріб даного виду наведені в таблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу. Визначити план випуску виробів А і В, що забезпечує максимальний прибуток від їхньої реалізації.

Тип устаткування	Витрати часу (верст.-год.) на обробку одного виробу виду:		Загальний фонд робочого часу устаткування (год.)
	А	В	
Фрезерне Токарне Шліфувальне	1 0,5 0,6	0,8 0,1 1,2	168 180 144
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	140	180	

6. Для виробництва двох видів виробів А і В підприємство використовує три види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний обсяг сировини даного виду, що може бути використано підприємством.

З огляду на те, що вироби А і В можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений), потрібно скласти такий план їхнього випуску, при якому прибуток підприємства від реалізації всіх виробів буде максимальним.

Ресурси	Норми витрат ресурсів (кг) на один виріб		Загальний обсяг ресурсів (кг)
	А	В	
I II III	12 4 3	4 4 12	300 120 252
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	30	40	

7. У цеху по виробництву консервованих фруктів виготовляються два види компотів із трьох видів фруктів (яблука, груші і сливи). Перед відправленням у торгову мережу компоти розливають у банки: компот I виду – у 5-літрові, II виду – у 3-літрові. Усі дані, необхідні для розв’язання задачі, наведені в таблиці.

Фрукти	Витрати фруктів (кг) для компоту виду		Запас, кг
	I	II	
Яблука Груші Сливи	1 0,3 0,75	0,5 0,25 1	200 65 200
Прибуток від реалізації 1 банки компоту, у.г.о.	3	2	

Потрібно скласти такий план виробництва двох видів компоту, для якого прибуток був би найбільшим.

8. Компанія виготовляє полиці двох розмірів – А і В. Агенти в справах продажу вважають, що за тиждень на ринку може бути реалізовано до 550 полиць. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів (дощок і машинного часу) на одну полицю відповідного розміру. У ній же зазначено прибуток від реалізації одного виробу кожного виду і загальний запас ресурсів, який може використовувати фірма протягом тижня.

Скільки полиць кожного типу варто випускати протягом тижня, щоб прибуток від їхньої реалізації був найбільшим?

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	А	В	
Дошки (м^2) Машинний час (год.)	2 0,2	3 0,5	1200 160
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	30	40	

9. На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їхнього вирощування використовують три види кормів. Кількість кормів кожного виду, які повинні щодня одержувати лисиці і песці, наведено в таблиці. У ній же зазначені загальний обсяг корму кожного виду, що може бути використано звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця. Визначити, скільки лисиць і песців варто вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їхніх шкурок був максимальним.

Вид корму	Кількість одиниць щоденного корму для		Загальний обсяг корму
	лисиці	песця	
I II III	2 4 6	3 1 7	180 240 426
Прибуток від реалізації однієї шкурки (у.г.о.)	320	240	

10. Металургійний цех випускає два види продукції А і Б. Цех має у своєму розпорядженні три види устаткування, кожне з яких має свій фонд робочого часу і продуктивність, наведені нижче в таблиці. У ній же наведений прибуток від реалізації 1 тонни продукції кожного виду. Скласти план випуску продукції, що забезпечує максимальний прибуток.

Тип устаткування	Продуктивність (т/год.) виду продукції		Фонд часу (год.)
	А	Б	
Плавильна піч Травильний агрегат Прокатний стан	7 6 2	6 4 1	4200 3000 900
Прибуток від реалізації 1 т продукції (тис. у.г.о.)	4	3	

11. У цеху підприємства вирішено встановити додаткове устаткування двох видів – I і II. Площа, необхідна для установки одного комплекту устаткування відповідного виду, ціна такого комплекту, а також загальний обсяг ресурсів (виробничих площ і грошових ресурсів), що виділяються підприємством, наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один комплект устаткування виду		Загальний обсяг ресурсів за день
	I	II	
Виробничі площі (м^2)	2	1,5	7
Грошові ресурси (тис. у.г.о.)	2	3	10

Придбання одного комплекту устаткування 1$^{\underline{го}}$ виду дозволяє збільшити випуск продукції в зміну на 3 одиниці, а одного комплекту устаткування 2$^{\underline{го}}$ виду – на 4 одиниці. Визначити такий набір додаткового устаткування, що дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

12. Підприємство має у своєму розпорядженні виробничі потужності чотирьох видів. Норми витрат потужностей (у год.) кожного виду на одиницю продукції кожного із двох типів, загальний запас таких потужностей і прибуток від реалізації одиниці продукції №1 і №2 наведені в таблиці. Скласти план виробництва продукції двох видів, при якому дохід підприємства від реалізації всієї продукції виявився б максимальним.

Потужності (у год.)	Норми витрат потужностей (у год.) на одиницю продукції типу		Загальний запас потужностей (год.)
	№1	№2	
M1	2	1	16
M2	1	1	10
M3	–	1	6
M4	1	–	7
Прибуток від реалізації одиниці продукції (у.г.о.)	30	40	

13. На промисловому комплексі по виробництву м’яса відгодовують свиней двох порід. Усі дані представлені в таблиці.

Види корму	Потрібна кількість корму (ц) для породи свиней		Види корму
	№1	№2	
Грубі (сінне борошно, трав’яні)	2	5	900
Соковиті (коренеплоди, картопля)	4,5	2	1150
Комбікорми	1	1,5–	340
Продуктивність, ц	4	5	

Потрібно знайти таке поголів’я свиней кожної породи, щоб продуктивність 1 ц м’яса була максимальною.

14. Підприємство випускає два види продукції і використовує три типи основного устаткування: токарське, фрезерне і шліфувальне устаткування. Витрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів устаткування наведені в таблиці. У ній же зазначений загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду. Визначити такий обсяг випуску виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

Тип устаткування	Витрати часу (верст- год.) на обробку одиниці продукції виду:		Загальний фонд робочого часу устаткування (год.)
	1	2	
Фрезерне	1	–	100
Токарне	2	1	280
Шліфувальне	1	2	320
Прибуток від реалізації 1 т продукції (тис. у.г.о.)	80	60	

15. Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі A і B використовує три види вихідної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі кожного виду наведені в таблиці. У ній же наведені загальні запаси сировини і прибуток від реалізації 1 т продукції. Знайти план випуску карамелі, що забезпечує максимальний прибуток.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі		Загальний обсяг сировини (т)
	A	B	
Цукровий пісок Патока Фруктове пюре	0,8 0,5 –	0,6 0,8 0,1	80 60 8
Прибуток від реалізації 1 т карамелі (тис. у.г.о.)	1,5	2	

16. Для виробництва двох видів виробів A і B використовуються три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду наведені в таблиці. У ній же наведені загальні запаси сировини і прибуток від реалізації одного виробу.

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальний обсяг сировини (кг)
	A	B	
I II III	5 2 2	2 2 5	300 150 300
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	30	40	

Фірмі треба визначити план випуску виробів A і B, при якому прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

17. Трикотажна фабрика для виготовлення светрів і кофточок використовує чисту вовну, силон і нітрон, запаси якого складають відповідно 190, 120 і 80 кг. Кількість пряжі кожного виду (у кг), необхідної для виготовлення 10 виробів, а також прибуток від їхньої реалізації наведені в таблиці.

Вид сировини	Витрати пряжі на 10 шт.	
	Светри	Кофточки
Вовна Силон Нітрон	3 2 1	2 1 1
Прибуток (у.г.о)	50	30

Установити план випуску виробів, що максимізує прибуток.

18. Завод-виробник високоточних елементів для автомобілів випускає два різні типи деталей: X і V. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на одну деталь кожного типу. У ній же зазначені прибуток від реалізації однієї деталі кожного типу і загальний запас ресурсів, який може витратити фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	X	V	
Металеві стрижні (кг) Листовий метал (кг) Робочий час (люд.-год.)	2 5 1	5 2 2	10 000 10 000 4 000
Прибуток від реалізації однієї деталі (у.г.о.)	90	120	

Скільки деталей кожного типу варто робити, щоб максимізувати загальний прибуток за тиждень?

19. Фірма виготовляє дві моделі A і B письмових столів. Їхнє виробництво обмежене наявністю сировини (дошки) і часом машинної обробки. У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на один стіл відповідної моделі. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу і загальний запас ресурсів, які має в розпорядженні фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	A	B	
Дошки ($м^2$) Машинний час (год.)	6 0,25	4 0,5	2000 180
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	100	160	

Скільки столів кожної моделі фірмі необхідно випускати за тиждень для одержання максимального прибутку від їхньої реалізації?

20. Автозавод випускає дві моделі автомобілів: «Каприз» і (більш дешеву) «Фіаско». У таблиці наведені дані по нормах витрат ресурсів на одну модель кожного типу. У ній же зазначені прибуток від реалізації однієї моделі кожного типу і загальний запас ресурсів, який може витрачати фірма протягом тижня

Ресурси	Норми витрат ресурсів на одну модель автомобіля		Загальний обсяг ресурсів на тиждень
	«Каприз»	«Фіаско»	
Робочий час (люд.-год.) – некваліфіковані робітники – кваліфіковані робітники Витрати на комплектуючі (у.о.)	 30 40 500	 40 20 1500	 40000 32000 900000
Прибуток від реалізації одного автомобіля (у.г.о.)	1000	750	

Робітники, що здійснюють доставку, працюють п’ять днів на тиждень і можуть забрати з заводу не більш 210 машин у день. Який обсяг випуску кожної моделі Ви б рекомендували? Що б Ви рекомендували для підвищення прибутку фірми?

21. Цех випускає два види виробів. Представлена нижче таблиця містить інформацію про витрати ресурсів на одиницю виробу, про загальний запас ресурсів, про ціни продажу одного виробу.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальний обсяг ресурсів
	1	2	
Устаткування (верст.-год.) Сировина (кг) Електроенергія (кВт/год.)	0,2 1 2	0,3 4 4	78 850 880
Ціна одного виробу (у.г.о.)	30	100	

Скільки необхідно виготовляти виробів кожного виду, щоб вартість продукції була максимальною?

22. Швейною фабрикою для виготовлення двох видів виробів можуть бути використані тканини трьох артикулів. Норми витрат тканини всіх артикулів на пошиття одного виробу даного виду наведені в таблиці. У ній же наведене наявна в розпорядженні фабрики загальний обсяг тканини даного артикула і ціна одного виробу даного виду.

Артикул тканини	Норми витрат тканини (м) на один виріб виду		Загальний обсяг тканини (м)
	1	2	
I II III	1 – 3	– 1 2	150 150 600
Ціна одного виробу (у.г.о.)	80	60	

Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виготовити фабрика, щоб вартість продукції була максимальною.

23. На ткацькій фабриці для виготовлення двох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох видів, пряжа і барвники. У таблиці представлена продуктивність верстатів кожного виду, норми витрат пряжі і вовни, ціна 1 м тканини даного артикула, а також загальний фонд робочого часу верстатів кожного виду, фонд пряжі і барвників.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 м тканини артикула		Загальний обсяг ресурсів
	1	2	
Продуктивність верстатів (верст.-год.) Пряжа (кг) Барвники (кг)	0,06 1,0 0,01	0,03 1,5 0,01	600 15000 120
Ціна 1 м тканини (у.г.о.)	80	50	

Скласти такий план виготовлення тканини, відповідно якому будуть виготовлені тканини кожного артикула, з максимальною загальною вартістю

24. Майстерня виготовляє костюми і сукні з двох видів тканин. У таблиці наведені дані по нормах витрат тканин на один виріб. У ній же зазначені прибуток від реалізації одного виробу і загальний запас тканин, які має використати у своєму розпорядженні майстерня.

Визначити, скількох суконь і костюмів треба зшити майстерні, щоб домогтися найвищої рентабельності виробництва.

Тканина	Норми витрат тканини на один виріб		Загальний обсяг ресурсів ($м^2$)
	сукня	костюм	
Вид №1 ($м^2$) Вид №2 ($м^2$)	1,5 0,5	1,6 1	139 65
Прибуток від реалізації одного виробу (у.г.о.)	30	50	

25. Для будівництва будинків обрані два проєкти. По кожному з прєектів відома: тривалість різних видів будівельних робіт, кількість будівельних об'єктів, на яких можна вести одночасно ці види робіт, а також житлова площа будинку.

Вид робіт	Тривалість виконання (дні) для типового проєкту		Кількість об'єктів будівництва, на яких можна одночасно вести роботи
	А	В	
Закладка фундаменту Монтажні роботи Інші роботи	20 8 30	30 7 15	15 4 12
Житлова площа ($м^2$)	3000	2000	

Скласти план будівництва, який максимізує введення житлової площі протягом року (300 робочих днів).

26. У деякій лікарні лікують два види хвороб: напади і травми хребта. У таблиці наведений час лікування одного хворого в хірургічній палаті, час використання для хворого томографічного сканера і час лікування хворого. У ній же наведено загальний обсяг зазначених ресурсів у рік.

Ресурси	Час лікування одного хворого		Загальний обсяг ресурсів
	Напади	Травми	
Хірургічна палата (год.) Томографічний сканер (год.) Місця (дні)	– 1 4	2 1 10	2600 2600 14600

Уряд забезпечує винагороду за кожен випадок лікування: 1000 у.г.о. за лікування нападу і 2000 у.г.о. за операцію на хребті. Якщо допустити, що лікарня може вільно приймати рішення про кількість пацієнтів, прийнятих для кожного виду лікування, то потрібно з'ясувати, яке поєднання пацієнтів принесе лікарні найбільший доход.

27. Приватна виробнича фірма спеціалізується на виробництві технічних лаків. Представлена нижче таблиця містить інформацію про витрати ресурсів на 1 кг відповідного лаку, про загальний запас ресурсів, про ціни продажу і відповідні витрати виробництва для одиниці полірувального і матового лаків.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на 1 кг лаку		Загальний обсяг ресурсів на день
	матового	полірувального	
Робочий час (люд.-год.) Хімічна суміш (г)	0,1 0,05	0,2 0,02	400 100
Ціна продажу 1 кг, у.г.о.	13	16	
Витрати виробництва на 1 кг, у.г.о.	9	10	

Технологічні можливості заводу дозволяють випускати не більш 3000 кг лаку в день. Адміністрації даної компанії необхідно визначити щоденні обсяги виробництва кожного виду лаку, що дозволяють одержувати максимальний загальний доход на тиждень.

28. З пункту А до пункту В щодня вирушають пасажирські і швидкі поїзди. У таблиці зазначені кількості вагонів різних типів, з яких щодня можна комплектувати поїзди, і число пасажирів, на які розраховані вагони. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, при якому кількість перевезених пасажирів буде максимальною.

Тип вагону	К– ть вагонів (шт) кожного типу в складі:		Парк вагонів, шт.	Число пасажирів в одному вагоні, люд.
	швидкого	пасажирського		
багажний	1	–	1	12
поштовий	1	–	–	18
жорсткий	4	58	8	88
купейний	6	40	4	79
м’який	4	32	2	35

29. З пункту А до пункту В щодня вирушають пасажирські і швидкі поїзди. У таблиці зазначені кількості вагонів різних типів, з яких щодня можна комплектувати поїзди, і число пасажирів, на яких розраховані вагони. Визначити оптимальне число швидких і пасажирських поїздів, при якому кількість перевезених пасажирів буде максимальною, за умови, що пропускна здатність дороги обмежує число пасажирських потягів до шести на день.

Тип вагону	К– ть вагонів (шт) кожного типу в складі:		Парк вагонів, шт.	Число пасажирів в одному вагоні, люд.
	швидкого	пасажирського		
багажний	1	–	1	12
поштовий	1	–	–	18
жорсткий	4	58	8	88
купейний	6	40	4	79
м’який	4	32	2	36

30. Для будівництва будинків обрані два проєкти. По кожному з проєктів відома: тривалість різних видів будівельних робіт, кількість будівельних об’єктів, на яких можна вести одночасно ці види робіт, а також житлова площа будинку.

Вид робіт	Тривалість виконання (дні) для типового проєкту		Кількість об’єктів будівництва, на яким можна одночасно вести роботи
	А	В	
Закладка фундаменту	20	30	10
Монтажні роботи	10	5	5
Інші роботи	30	15	12
Житлова площа ($м^2$)	3000	2000	

Скласти план будівництва, який максимізує введення житлової площі протягом року (300 робочих днів).

2.5 Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи №1

Розв'язання задач лінійного програмування за допомогою інструмента «Solver»

Розглянемо задачу з прикладу 1.1.

Відповідно до математичної моделі поставленої задачі (2.8) і (2.9) підготуємо аркуш Excel для застосування інструмента «Solver» (див. рис. 2.4):

1) комірки B2:C2 (блакитна заливка) резервуємо для оптимальних значень змінних x_1 і x_2 (оптимального плану задачі), що будуть знайдені як результат застосування процедури «Solver»;
2) комірку D4 (зелена заливка) резервуємо для значення цільової функції на оптимальному плані;
3) у комірки B4:C4 вносимо значення коефіцієнтів цільової функції;
4) комірки B6:C6, B7:C7, B8:C8 заповнюємо коефіцієнтами при змінних у лівій частині відповідних обмежень;
5) у комірки F6:F8 (темно помаранчева заливка) записуємо значення правих частин відповідних обмежень;
6) у комірки E6:E8 вносимо знак нерівності у відповідному обмеженні;
7) комірки D6:D8(світло помаранчева заливка) резервуємо для значень лівих частин системи обмежень на оптимальному плані.

	A	B	C	D	E	F
1	**Змінні задачі**	x1	x2			
2	Значення					
3	**Цільво функція (ЦФ)**	Коеф. в ЦФ				
4	Прибуток (у.г.о)	50	70			
5	**Система обмежень (СО)**	Коеф. в СО		Ліва частина	знак	Права частина
6	Рабочий час (люд.-год)	1	2		<=	900
7	Шкіра I сорту (шмат.)	3	1		<=	900
8	Шкіра II сорту (шмат.)	0	1		<=	400

Рис. 2.4 – Представлення вихідних даних на аркуші Excel

Розглянемо подання цільової функції (2.9) і системи обмежень (2.10). Внесемо формули, помітивши, що значення цільової функції (зелена комірка D4) дорівнює сумі добутків невідомих значень змінних (блакитні комірки B2:C2) на коефіцієнти цільової функції (комірки B4:C4), а значення лівих частин системи обмежень (світло помаранчеві комірки D6, D7 і D8) дорівнюють сумі добутків невідомих значень змінних (блакитні комірки B2:C2) на коефіцієнти лівих частин системи обмежень (комірки B6:C6, B7:C7, B8:C8 відповідно). Для цього в цільову комірку D3 вносимо формулу

SUMPRODUCT($B$2;$C$2;B4;C4),

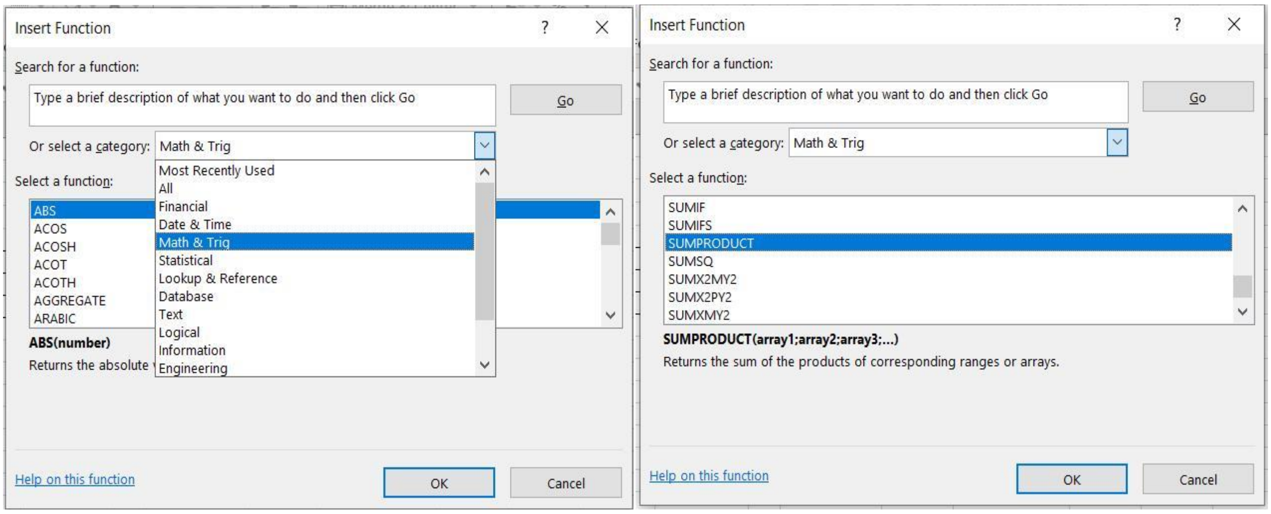
яку копіюємо в комірки D5, D6 і D7 з модифікаціями.

Для внесення в комірку D4 зазначених формул необхідно
1) поставити курсор у комірку D3;
2) викликати "Insert Function" за допомогою кнопки f_x (див. рис. 2.5);

Рис. 2.5 – Розміщення кнопки майстра функцій

3) серед категорій майстра функцій вибрати «Math & Trig» (рис. 2.6, а);

4) серед вбудованих функцій цієї категорії відмітити «SUMPRODUCT» (рис. 2.6, б) і натиснути «ОК»;



а) б)

Рис. 2.6 – Екранна форма «Мастер функций»

5) в екранній формі (див. рис. 2.7), що з'явилася, поставити курсор у «Array 1», виділити на аркуші Excel комірки B2:C2 (відповідають зарезервованим значенням змінних), потім привласнити їм абсолютні адреси натисканням функціональної клавіші «**F4**»; перевести курсор у «Array 2» і виділити на аркуші Excel комірки B3:C3 (відповідають значенням коефіцієнтів цільової функції).

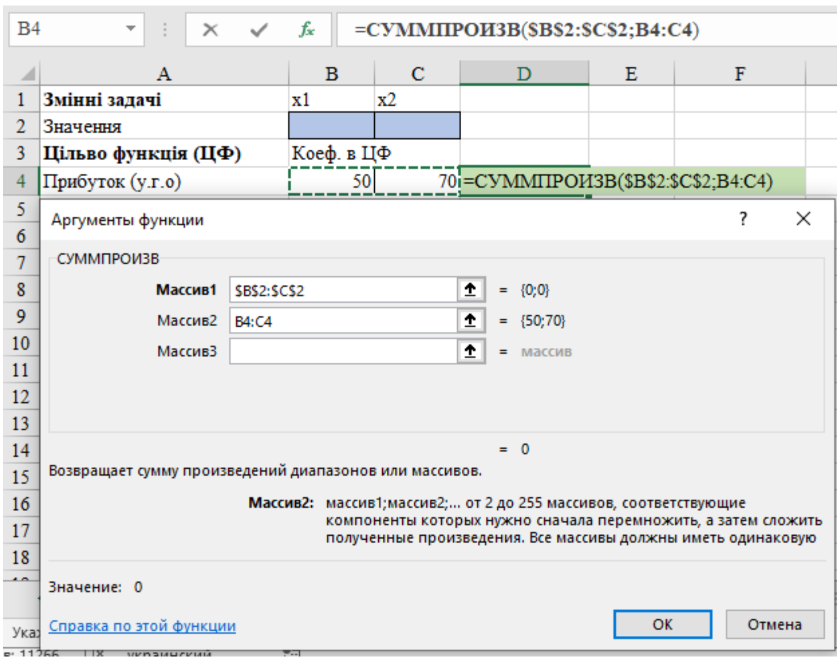


Рис. 2.7 – Програмування цільової комірки

Після копіювання формул у комірки D5, D6 і D7 вони будуть модифіковані так, як показано на рис. 2.8.

	A	B	C	D	E	F
1	**Змінні задачі**	x1	x2			
2	Значення					
3	**Цільво функція (ЦФ)**	Коеф. в ЦФ				
4	Прибуток (у.г.о)	50	70	=SUMPRODUCT($B$2:$C$2:B4:C4)		
5	**Система обмежень (СО)**	Коеф. в СО		Ліва частина	знак	Права частина
6	Рабочий час (люд.-год)	1	2	=SUMPRODUCT($B$2:$C$2:B6:C6)	<=	900
7	Шкіра І сорту (шмат.)	3	1	=SUMPRODUCT($B$2:$C$2:B7:C7)	<=	900
8	Шкіра ІІ сорту (шмат.)	0	1	=SUMPRODUCT($B$2:$C$2:B8:C8)	<=	400

Рис. 2.8 – Програмування комірок, що відповідають значенню цільової функції і значенням лівих частин системи обмежень

Якщо вкладка «Data» у меню Microsoft Excel не містить інструмент «Solver», як це показано на рис. 2.9, то для додавання цього інструмента в перелік необхідно виконати такі дії:

1) натиснути «File» в меню MS Excel, потім «More», після чого «Options» (рис. 2.10, а);

2) в екранній формі «Excel Options» клацнути «Add-ins», а у формі, що з'явилася, клацнути «Go…» (рис. 2.10, б);

3) у вікні «Add-ins» відмітити прапорцем «Solver Add-in» (рис. 2.10, в).

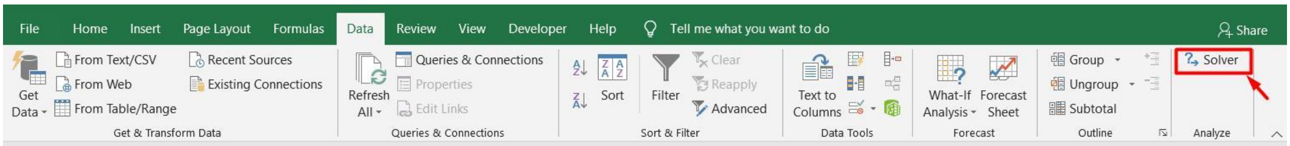
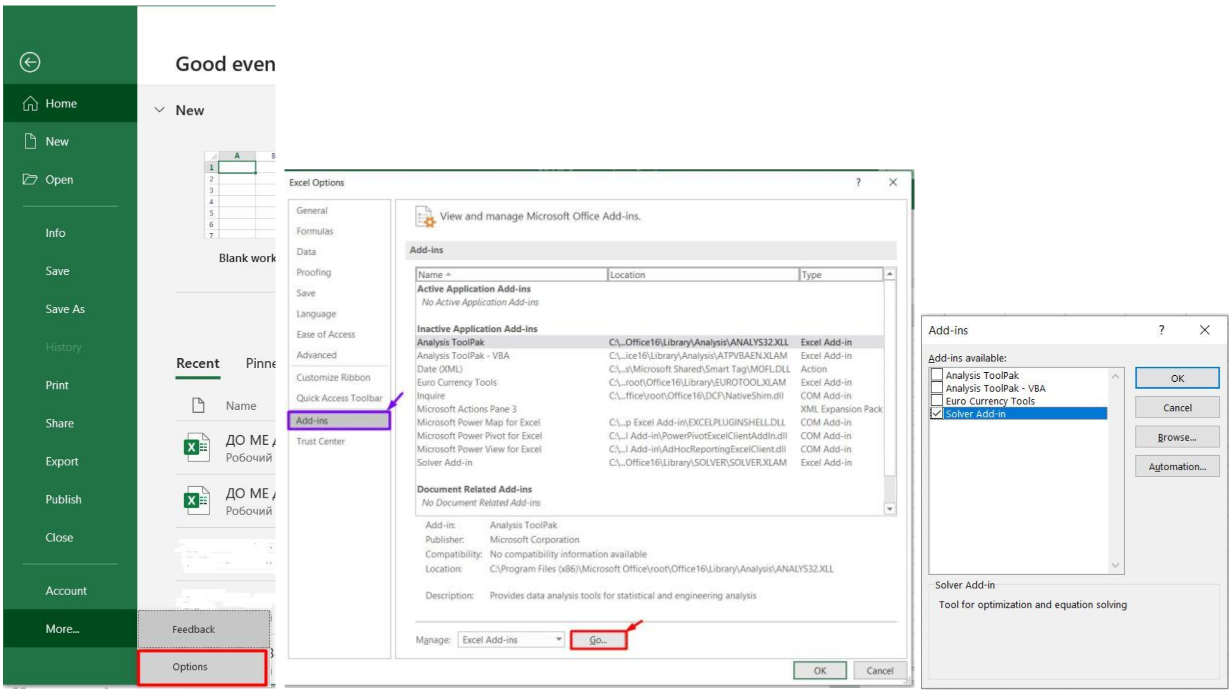


Рис. 2.9 – Місце розміщення інструмента «Solver»



а) б) в)

Рис. 2.10 – Додавання процедури «Solver» в меню «File» MS Excel

У результаті пророблених операцій аркуш Excel готовий для запуску процедури «Solver». Вибираємо в «Data» процедуру «Solver» (див. рис. 2.9).

Відповідно до математичної моделі (2.9), (2.10) в екранній формі «Solver Parameters» (див. рис 1.11)

1) встановлюємо цільову комірку $D$4 (зелена), відзначаючи її на аркуші Excel;

2) відзначаємо прапорцем тип оптимізації, виходячи з умов задачі: у даному випадку – це максимум;

3) переводимо курсор в «By Changing Variable Cells:» і виділяємо на аркуші Excel комірки $B$2:$C$2, що відповідають зарезервованим значенням змінних (блакитні);

4) переводимо курсор в «Subject to the Constraints:», клацаємо «Add»;

5) в екранній формі «Add Constraint» (рис. 2.12)

   а) робимо посилання на комірки в «Cell Reference:» (шляхом їхнього виділення на аркуші Excel), що відповідають лівим частинам системи обмежень $D$6:$D$8; ці комірки містять результат обчислень відповідно до введених раніше формул;

   б) установлюємо знак, що відповідає знаку нерівності системи обмежень: у даному випадку це «<=»; якщо не всі обмеження мають однаковий знак, то, розташувавши поруч нерівності одного знака, програмуємо окремо кожну з груп, що утворилися;

   в) переводимо курсор в «Constraint:», посилаючись на комірки, що відповідають правим частинам системи обмежень $F$6:$F$8, виділяючи їх на аркуші Excel;

   г) натискання «ОК» повертає нас в екранну форму «Solver Parameters»;

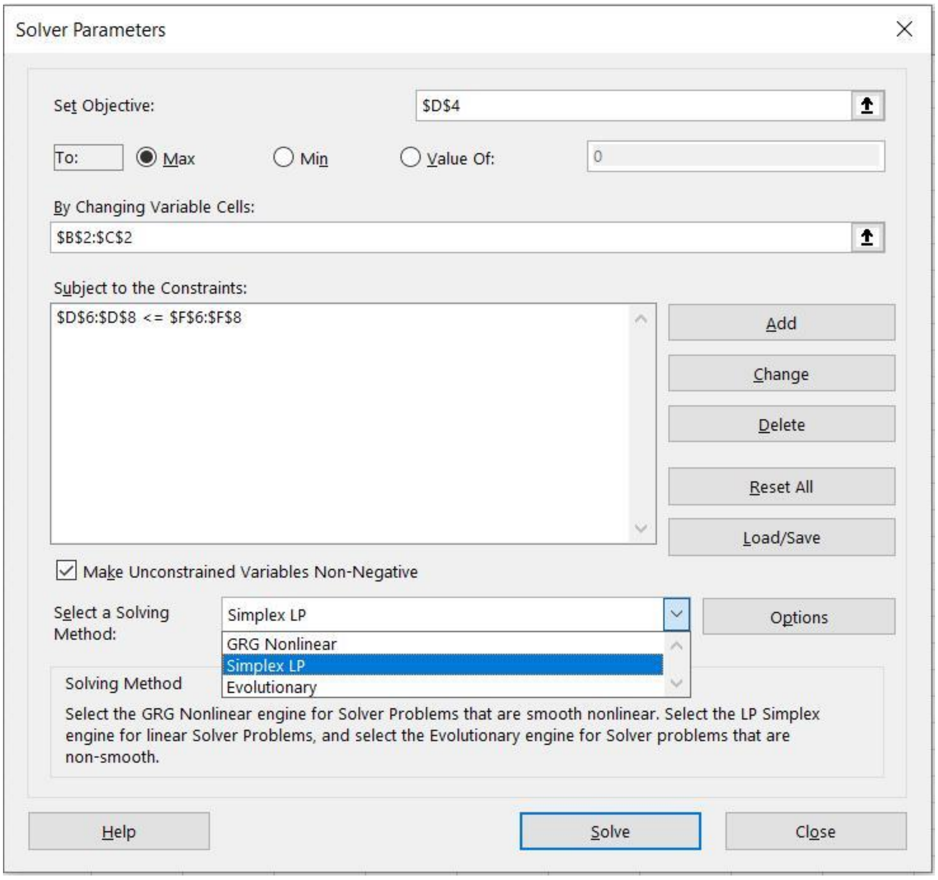


Рис. 2.11 – Екранна форма «Solver Parameters»

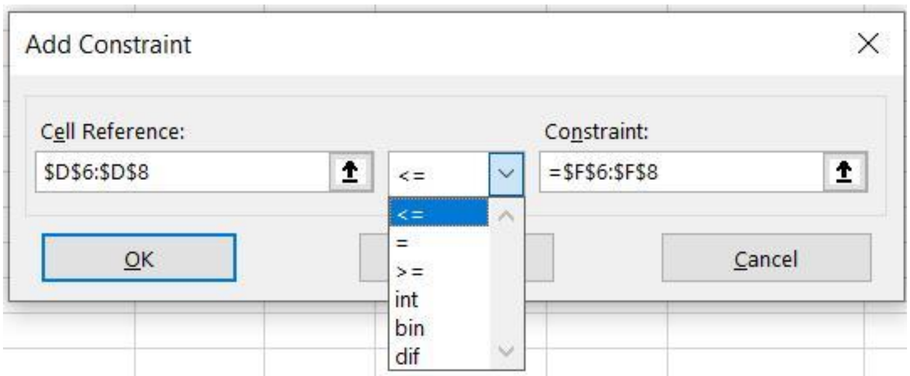


Рис. 2.12 – Екранна форма «Add Constraint»

6) відмічаємо прапорцем «Make Unconstraint Variables Non-Negative»;

7) у вікні «Solver Parameters» обираємо метод розв'язання у спадному меню: «Simplex LP» (рис. 2.11);

8) натискаємо «Solve», у результаті чого (рис. 2.13) на аркуші Excel у комірках B2:C2 висвічуються шукані значення оптимальних змінних (оптимальний план), у комірці D4 – значення цільової функції на оптимальному плані, а в екранній формі, що з'явилися, «Solver Resultats», пропонується зробити один з видів звіту («Reports»), з яких вибираємо звіт «Sensitivity» і натискаємо «ОК». Аркуш «Sensitivity Report» представлений на рис. 2.14.

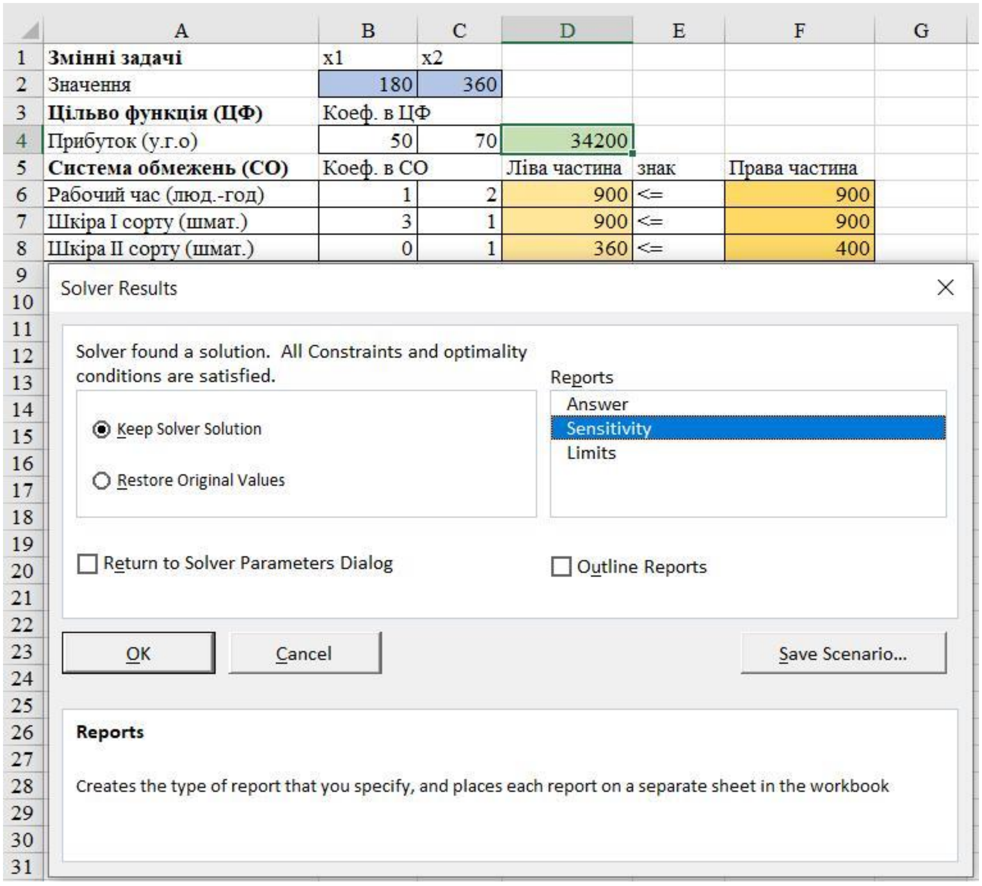


Рис. 2.13 – Результати роботи процедури «Solver»

Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report
Worksheet: [ДО МЕ Д_яченко.xlsx]Пряма
Report Created: 04.01.2026 21:39:40

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$2	Значення x1	180	0	50	160	15
$C$2	Значення x2	360	0	70	30	53,33333333

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$D$6	Рабочий час (люд.-год) Ліва частина	900	32	900	66,66666667	600
$D$7	Шкіра I сорту (шмат.) Ліва частина	900	6	900	1800	200
$D$8	Шкіра II сорту (шмат.) Ліва частина	360	0	400	1E+30	40

Sensitivity Report 1 | Пряма | Sheet1 | Двоїста | Транспорта | Макс потік Формули

Рис. 2.14 – Екранна форма аркуша «Sensitivity Report»

На аркуші «Sensitivity Report» наявна інформація про значення змінних, розміщена в комірках D9, D10, а також «тіньових цін» – в E15:E17. Останні будуть корисними для порівняння результатів, отриманих при розв'язанні двоїстої задачі.

Проте, значення цільової функції відсутнє. Повторно запустимо на виконання «Solver» і зробимо запит на звіт «Answer». На рис 2.15 наведена екранна форма аркуша «Answer Report». У цій формі можна знайти, як значення основних змінних (E21:E22) і додаткових (G27:G29), так і цільової функції в комірці E16.

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$D$4	Прибуток (у.г.о)	0	34200

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$2	Значення x1	0	180	Contin
$C$2	Значення x2	0	360	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$D$6	Рабочий час (люд.-год) Ліва частина	900	$D$6<=$F$6	Binding	0
$D$7	Шкіра I сорту (шмат.) Ліва частина	900	$D$7<=$F$7	Binding	0
$D$8	Шкіра II сорту (шмат.) Ліва частина	360	$D$8<=$F$8	Not Binding	40

Sensitivity Report 1 | Answer Report 2 | Пряма | Sheet1 | Двоїста | Транспорта

Рис. 2.15 – Екранна форма аркуша «Answer Report»

Змістовна відповідь при отриманні розв'язку таким способом не відрізняється від наведеної у п. 2.2.2 або 2.2.3.

Питання для самоконтролю до теми 2 і лабораторної роботи №1

1. Викласти алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування з двома змінними графічним методом.
2. Викласти алгоритм розв'язання ЗЛП симплексним методом.
3. Викласти алгоритм розв'язання ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» MS Excel.

Тема 3 ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ ТА ДВОЇСТІ ОЦІНКИ В АНАЛІЗІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

3.1 Пряма та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач ЛП

З кожною задачею лінійного програмування пов'язується інша задача, також задача лінійного програмування, яку називають ***двоїстою*** (або спряженою) стосовно вихідної задачі, що називається ***прямою***.

Двоїсту задачу будують відносно прямої задачі, записаної у стандартній формі. У табл. 3.1 подано математичні моделі пари двоїстих задач, а в табл. 3.2 продемонстровано правила побудови математичних моделей двоїстих задач.

Таблиця 3.1 – Форми запису пари двоїстих задач

Прямі ЗЛП	Двоїста ЗЛП
$\boldsymbol{F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to max}$	$\boldsymbol{L = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to min}$
$\boldsymbol{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n = \\ \qquad = b_{k+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,l}, l \le n. \end{cases}}$	$\boldsymbol{\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1,l+1}y_1 + a_{2,1+1}y_2 + \dots + a_{m,l+1}y_m = \\ \qquad c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n, \\ y_i \ge 0, i = \overline{1,k}, k \le m. \end{cases}}$

Таблиця 3.2 – Правила побудови двоїстих задач

Структурні характеристики ЗЛП	**ЗЛП**	
	Пряма	**Двоїста**
1.ЦФ	(max)	(min)
2.К– ть змінних	n змінних	Дорівнює кількості обмежень прямої задачі y_i, $i = \overline{1,m}$, тобто m
3.к– ть обмежень	m обмежень	Дорівнює кількості змінних ПЗ x_j, $j = \overline{1,n}$, тобто n
4.Матриця коефіцієнтів в СО	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
5.Коеф. при змінних ЦФ	$c_1, c_2, \dots, c_n$	$b_1, b_2, \dots, b_m$
6.Права частина СО	$b_1, b_2, \dots, b_m$	$c_1, c_2, \dots, c_n$

Структурні характеристики ЗЛП	ЗЛП	
	Пряма	**Двоїста**
7.Знаки в СО	а) $x_j \geq 0$– умова невід’ємності	j– е обмеження має знак «≥»
	б) на змінну x_j не накладено умову невід’ємності	j– е обмеженні має знак «=»
	в) i-е обмеження має знак «≤»	змінна $y_i \geq 0$
	г)) i-е обмеження має знак «=»	на змінну y_i не накладається обмеження невід’ємності

3.2 Математична модель двоїстої задачі

Розглянемо задачу лінійного програмування, змістовно постановка якої надана в прикладі 1.1.

Випишемо математичну модель прямої (вихідної) задачі:

x_1 пар взуття – тижневий план випуску моделі №1,

x_2 пар взуття – тижневий план випуску моделі №2,

$$F(x_1, x_2) = 50x_1 + 70x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 900; \\ 3x_1 + \quad x_2 \leq 900; \\ \qquad x_2 \leq 400; \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Складемо математичну модель двоїстої задачі:

1) дана пряма задача на максимум, у ній усі нерівності системи обмежень мають знак «≤», тому змінювати форму запису математичної моделі прямої задачі немає необхідності;

2) випишемо розширену матрицю системи і рядок коефіцієнтів цільової функції

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 900 \\ 3 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 400 \\ \hline 50 & 70 & F \end{array}\right);$$

3) складаємо транспоновану матрицю

$$A^t = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 70 \\ \hline 900 & 900 & 400 & L \end{array}\right);$$

4) складаємо **математичну модель двоїстої задачі** (див. табл. 3.3).

Таблиця 3.3 – Математична модель двоїстої задачі

ЦФ двоїстої задачі:	$L(y_1, y_2, y_3) = 900y_1 + 900y_2 + 400y_3 \rightarrow min$	
СО двоїстої задачі:	$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \geq 50, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 70, \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{cases}$	
Економічний зміст ***змінних двоїстої задачі*** *визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі.*		
Характеристика ресурсу	Характеристика двоїстої змінної	
першій двоїстій змінній відповідає перше обмеження по витратах робочого часу,	y_1 у.г.о. – «тіньова ціна» 1 люд.-год. робочого часу;	
другій – по витратах шкіри I сорту,	y_2 у.г.о. – «тіньова ціна» 1 шматка шкіри I сорту;	
третій – по витратах шкіри II сорту,	y_3 у.г.о. – «тіньова ціна» 1 шматка шкіри I сорту.	

3.3 Метод штучного базису розв'язання задач лінійного програмування

Метод штучного базису розглянемо на прикладі розв'язання двоїстої задачі до задачі про використання ресурсів.

<u>Крок 1.</u> Зведемо математичну модель двоїстої задачі до канонічного вигляду, уводячи додаткові невід'ємні змінні y_4, y_5. Оскільки всі нерівності системи обмежень виражаються знаком «≥», то *додаткові змінні* ввійдуть у систему обмежень з коефіцієнтом «– 1». У цільову функцію додаткові змінні завжди входять з коефіцієнтом «0». Оскільки двоїста задача на мінімум, то складемо допоміжну функцію $Z = -L$. *Канонічний вигляд запису двоїстої задачі:*

$$Z = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - y_4 = 50; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 70; \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

<u>Крок 3</u>. Побудова первинного базису.

Основна матриця системи (3.1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \\ 2 & 1 & & \end{pmatrix}$$

містить одиничний двовимірний вектор $(0; 1)$, що відповідає змінній y_3, яка увійде у первинний базис. Ця змінна міститься у другому рівнянні системи (3.1) з коефіцієнтом «1». <u>Щоб отримати одиничну підматрицю</u> у цій матриці, введемо невід'ємну *штучну базисну змінну* y_6, яку додамо до лівої частини першого рівняння. Штучну змінну y_6, включимо в цільову функцію з коефіцієнтом «–10000» (на порядок більший за інші коефіцієнти ЦФ). Зазначимо, що абсолютна величина коефіцієнтів при штучних змінних повинна бути на порядок вище за всі абсолютні величини коефіцієнтів цільової функції. У результаті складемо математичну модель *розширеної задачі*:

$$Z_1 = -900 \cdot y_1 - 900 \cdot y_2 - 400 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 - 10000 \cdot y_6 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \quad - y_4 \quad + y_6 \; = 50; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \quad - y_5 \quad = 70; \\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6, \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Отже, маємо: по-перше, усі вільні елементи системи (3.2) – невід’ємні; по-друге, основна матриця системи (3.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & -1 & 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

містить одиничну підматрицю, що утворена двовимірними векторами

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

котрим відповідають базисні змінні $y_3,\ y_6$, причому кількість базисних змінних дорівнює кількості рівнянь системи (3.2), тому система (3.2) має первинний базис.

<u>Крок 5.</u> Розв’язуємо отриману задачу симплексним методом за алгоритмом, що описано в п. 2.2.3. Відповідні симплексні таблиці задачі і зразки формул для Excel наведені на рис. 3.1 і рис. 3.2 відповідно.

Слід зазначити, що *ітераційний процес симплексного методу продовжується доти, поки оцінки оптимальності* Δ_j *містять від’ємні елементи.*

Якщо серед оцінок оптимальності немає від’ємних елементів, однак не всі штучні змінні виключені з базису, то така задача не має розв’язку.

Із третьої симплексної таблиці двоїстої задачі випливає, що всі оцінки оптимальності Δ_j невід’ємні і всі штучні змінні виведені з базису. Це означає, що опорний план третьої ітерації є оптимальним:

$$y_1^* = 32;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 0;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 0;\ y_6^* = 0,$$

а значення функції $Z_1(Y^*) = -34200$ – максимальним. Оскільки $L(Y) = -Z(Y)$, то

$$L *^*{}_{min} \text{ у.г.о.}$$

Повна *змістовна відповідь* щодо двоїстої задачі буде надана в наступній темі.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Перша симплекс-таблиця двоїстої задачя						
2				-900	-900	-400	0	0	-10000	
3	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
4	y6	-10000	50	1	3	0	-1	0	1	16,66667
5	y3	-400	70	2	1	1	0	-1	0	70
6		Δj	-528000	-9900	-29500	0	10000	400	0	
7				Друга симплекс-таблиця двоїстої задачі						
8				-900	-900	-400	0	0	-10000	
9	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
10	y2	-900	16,66667	0,333333	1	0	-0,33333	0	0,333333	50
11	y3	-400	53,33333	1,666667	0	1	0,333333	-1	-0,33333	32
12		Δj	-36333,3	-66,6667	0	0	166,6667	400	9833,333	
13				Третя симплекс-таблиця двоїстої задачі						
14				-900	-900	-400	0	0	-10000	
15	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
16	y2	-900	6	0	1	-0,2	-0,4	0,2	0,4	
17	y1	-900	32	1	0	0,6	0,2	-0,6	-0,2	
18		Δj	-34200	0	0	40	180	360	9820	
19				x4	x5	x1	x1	x2		

Рис. 3.1 – Результати обчислень методом штучного базису

Питання для самоконтролю до теми 3

1. Пояснити правила побудови двоїстої задачі до основної (прямої).
2. Пояснити сутність штучного базису при розв’язання задачі симплексним методом.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1				Перша симплекс-таблиця двоїстої задачя						
2				-900	-900	-400	0	0	-10000	
3	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
4	y6	-10000	50	1	3	0	-1	0	1	=C4/E4
5	y3	-400	70	2	1	1	0	-1	0	=C5/E5
6		Δj	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;C4:C5)	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;D4:D5)-D2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;E4:E5)-E2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;F4:F5)-F2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;G4:G5)-G2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;H4:H5)-H2	=SUMPRODUCT($B$4:$B$5;I4:I5)-I2	
7				Друга симплекс-таблиця двоїстої задачі						
8				-900	-900	-400	0	0	-10000	
9	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
10	y2	-900	=C4/$E$4	=D4/$E$4	=E4/$E$4	=F4/$E$4	=G4/$E$4	=H4/$E$4	=I4/$E$4	=C10/D10
11	y3	-400	=C5-C4*$E$5/$E$4	=D5-D4*$E$5/$E$4	=E5-E4*$E$5/$E$4	=F5-F4*$E$5/$E$4	=G5-G4*$E$5/$E$4	=H5-H4*$E$5/$E$4	=I5-I4*$E$5/$E$4	=C11/D11
12		Δj	=C6-C4*$E$6/$E$4	=D6-D4*$E$6/$E$4	=E6-E4*$E$6/$E$4	=F6-F4*$E$6/$E$4	=G6-G4*$E$6/$E$4	=H6-H4*$E$6/$E$4	=I6-I4*$E$6/$E$4	
13				Третя симплекс-таблиця двоїстої задачі						
14				-900	-900	-400	0	0	-10000	
15	базис	сб	bi	y1	y2	y3	y4	y5	y6	bi/aik
16	y2	-900	=C10-C11*$D$10/$D$11	=D10-D11*$D$10/$D$11	=E10-E11*$D$10/$D$11	=F10-F11*$D$10/$D$11	=G10-G11*$D$10/$D$11	=H10-H11*$D$10/$D$11	=I10-I11*$D$10/$D$11	
17	y1	-900	=C11/$D$11	=D11/$D$11	=E11/$D$11	=F11/$D$11	=G11/$D$11	=H11/$D$11	=I11/$D$11	
18		Δj	=C12-C11*$D$12/$D$11	=D12-D11*$D$12/$D$11	=E12-E11*$D$12/$D$11	=F12-F11*$D$12/$D$11	=G12-G11*$D$12/$D$11	=H12-H11*$D$12/$D$11	=I12-I11*$D$12/$D$11	
19				x4	x5	x1	x1	x2		

Рис.3.2 – Формули розрахунку методу штучного базису в таблицях Excel

Тема 4 АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ МОДЕЛЕЙ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

4.1 Економіко-математичний аналіз результатів задачі про ресурси

4.1.1 Визначення характеристик прямої та двоїстої задач різними способами

Спочатку випишемо результати розв’язання прямої і двоїстої задач прикладу 1.1 ***симплексним методом*** відповідно до результатів, наведених на рис. 1.2 і 3.1. Зведемо їх в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Значення змінних прямої та двоїстої задач з прикладу 1.1

Характеристика ЗЛП	**Пряма задача**	**Двоїста задача**
Цільова функція	$F_{max}(X) = 34200$	$L_{min}(Y) = 34200$
Основні змінні	$x_1^* = 180,\ x_2^* = 360$	$y_1^* = 32;\ y_2^* = 6;\ y_3^* = 0$
Додаткові змінні	$x_3^* = 0,\ x_4^* = 0,\ x_5^* = 40$	$y_4^* = 0;\ y_5^* = 0$

Звіт по стійкості (рис. 2.14), крім значень оптимальних змінних прямої задачі, містить значення оптимальних основних змінних двоїстої задачі, занесених у стовпчик «Shadow Price» (E15:E16); оптимальні значення додаткових змінних двоїстої задачі можна легко обчислити, якщо підставити оптимальні значення основних змінних в систему рівнянь (3.1). Результати збігаються з описаними вище в табл. 4.1.

Визначення взаємодвоїстих змінних на основі симплекс-таблиць. Розглянемо розв’язання прямої задачі симплексним методом (рис. 2.2).

Нагадування про спосіб визначення додаткових змінних в математичних моделях прямої та двоїстої задач розміщено в першому та останньому рядку табл. 4.2, а взаєморозміщення позначень змінних прямої задачі і значень змінних двоїстої задачі в рядках остаточної симплексної таблиці для прямої задачі – в центральній частині табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Розміщення змінних в рядках симплекс-таблиці прямої задачі

<table>
<tr><td colspan="3">Додаткові змінні ПЗ
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* \le b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* + x_{n+i}^* = b_i$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Рядок симплекс-таблиці ПЗ</td><td colspan="2">Змінні ПЗ</td></tr>
<tr><td>Основні змінні ПЗ</td><td>Додаткові змінні ПЗ</td></tr>
<tr><td>2– ий рядок симплекс-таблиці</td><td>$x_1, \quad x_2, \ \dots, \quad x_n$</td><td>$x_{n+1}, x_{n+2}, \ \dots, x_{n+m}$</td></tr>
<tr><td>Рядок оцінок оптимальності Δ_j</td><td>$y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+n}$</td><td>$y_1, \quad y_2 \dots, \quad y_m$</td></tr>
<tr><td></td><td>Додаткові змінні ДЗ</td><td>Основні змінні ДЗ</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Змінні ДЗ</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* \ge c_j \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - y_{m+j}^* = c_j$
Додаткові змінні ДЗ</td></tr>
</table>

Зазначимо, що аналогічне взаємне розміщення і в остаточній симплекс-таблиці для двоїстої задачі (рис. 3.1) з однією відмінністю – потрібно нехтувати змінними штучного базису.

За допомогою інформації, наведеної в табл. 4.2, знайдемо значення змінних ПЗ і ДЗ в інший спосіб.

З останнього рядка симплексної таблиці прямої задачі можна визначити значення двоїстих змінних, а з останньої симплексної таблиці двоїстої задачі – значення змінних прямої задачі так, як це показано на рис. 2.2 і рис. 3.1 відповідно. Як бачимо, результати відповідають знайденим вище.

4.1.2 Теореми про зв'язок між парою двоїстих задач про ресурси

В табл. 4.3 коротко охарактеризовано зв'язок між характеристиками прямої та двоїстої задач.

Таблиця 4.3 – Зв'язок між парою двоїстих задач про ресурси

<table>
<tr><th>Пряма задача</th><th>Двоїста задача</th></tr>
<tr><td>Скласти такий план випуску продукції
$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
за якого прибуток від її реалізації буде максимальним
$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max,$$</td><td>Знайти такий набір цін (оцінок) ресурсів
$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$,
за якого дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими («тіньовими») цінами буде мінімальним
$$L(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min$$</td></tr>
<tr><td>за умови, що використання кожного ресурсу для виготовлення продукції не перевищує наявних запасів, тобто</td><td>за умови, що витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, оцінені в грошовому вираженні, будуть неменшими за прибуток від її реалізації</td></tr>
<tr><td>$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \ (i = 1, \dots, m),$$
$x_j \ge 0 \ \ (j = 1, \dots, n)$</td><td>$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \ \ (j = 1, \dots, n),$$
$y_i \ge 0 \ \ (i = 1, \dots, m)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими цінами, який мінімізується, дорівнюватиме ефекту від здійснення виробничої діяльності, тобто величині прибутку фабрики, який повинен бути максимальним
$F_{max}(X) = L_{min}(Y)$</td></tr>
</table>

Опишемо причини виникнення висновків, зазначених в табл. 4.3. Спочатку наведемо формулювання теорем, які покладені в основу економіко-математичного аналізу.

Теорема 4.1

I. Якщо одна з пар двоїстих задач має оптимальний план, то й інша теж має оптимальний план, а ЦФ таких задач при оптимальних планах мають рівні значення.

II. Якщо ЦФ однієї з двоїстих задач не має розв'язку, то інша теж не має розв'язку.

Теорема 4.2 Для того, щоб допустимий розв'язок пари двоїстих задач був оптимальним, необхідно й достатньо, щоб виконувалися умови:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j,\right) = 0 \quad (j = 1, \dots, n); \qquad \text{(а)}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, m); \qquad \text{(б)}$$

Економічна інтерпретація теореми 4.2 в термінах постановки задачі про використання ресурсів проілюстрована ра рис. 4.1: зміст умови (а) – на рис. 4.1, а, умови (б) – на рис. 4.1., б. Крім того, на рис. 4.1 містяться інтерпретації основних змінних прямої та двоїстої задач, лівої та правої частин систем обмежень двоїстої та прямої задач.

а)

б)

Рис. 4.1 – Економічна інтерпретація теореми 4.2

Зміст змінних прямої ЗЛП

<u>Основні змінні</u> показують план випуску продукції для досягнення максимального прибутку.

<u>Додаткові змінні,</u> відповідно до їх означення з рівності

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* + x_{n+i}^* = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

показують на обсяг невикористаного i-ого ресурсу

Зміст двоїстих змінних

<u>Основні двоїсті змінні</u> показують, на скільки змінюється ЦФ прямої задачі при зміні відповідного дефіцитного ресурсу на 1 одиницю.

<u>Покажемо причину такої інтерпретації.</u> Дійсно, якщо $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_i^*, \dots, y_m^*) -$ вектор оптимальних оцінок ресурсів (вектор «тіньових цін»), то значення ЦФ двоїстої задачі на цьому векторі визначається як

$$L(Y^*) = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + \dots + b_i y_i^* + \dots + b_m y_m^*.$$

Збільшення $i-$ го дефіцитного ресурсу на 1 означатиме, що ЦФ буде подана у вигляді

$$L'(Y^*) = b_1 y_1^* + b_2 y_2^* + \dots + (b_i + 1)\, y_i^* + \dots + b_m y_m^*.$$

Тоді зміна (приріст) ЦФ буде дорівнювати

$$L'(Y^*) - L(Y^*) = b_i.$$

<u>Отже,</u> ненульові двоїсті оцінки вказують на дефіцитність ресурсу в околі оптимального плану, тоді як нульові – на його надлишковість.

<u>Додаткові двоїсті змінні</u>, відповідно до їх означення з рівності

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - y_{m+j}^* = c_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

показують, на скільки внутрішні оцінки ресурсів, необхідних для виробництва j-го виду продукції (ліві частини нерівностей в системі обмежень ДЗ), перевищують його зовнішню оцінку (прибуток).

<u>Таким чином,</u>

– j-та НЕНУЛЬОВА додаткова двоїста змінна виражає розмір збитку від реалізації одиниці j- ої продукції, випуск якої є нерентабельним;
– для рентабельного j-го виду продукції його двоїста додаткова змінна дорівнює НУЛЮ.

Проведення такого аналізу дозволяє виявити «вузькі» місця, усунення яких призводить до збільшення економічного ефекту.

4.1.3 Економічний аналіз основних характеристик прямої та двоїсті задач прикладу 1.1

Цільові функції прямої і двоїстої задач. Із теорем про зв’язок між розв’язками прямої і двоїстої задач випливає, що мінімальне значення цільової функції двоїстої задачі $L_{min}(Y)$ повинно збігатися з максимальним значенням цільової функції прямої задачі $F_{max}(X)$. У даному випадку

$$L_{min}(Y) = F_{max}(X) = 34200 \text{ у.г.о.} \quad (4.1)$$

Що стосується прямої задачі, то цільова функція в ній характеризувала тижневий прибуток від реалізації продукції, яку виготовлено на фабриці; і цей прибуток повинен бути максимальним. Для з'ясування економічного змісту цільової функції двоїстої задачі про використання ресурсів розглянемо ситуацію, коли керівництво фабрики стоїть перед альтернативним вибором: чи здійснювати процес виробництва взуття, чи реалізувати на стороні власні виробничі ресурси (продати, здати в оренду тощо) за ринковими цінами. У разі вибору першої альтернативи, оптимальний розв'язок прямої задачі саме й дає нам оптимальний план виробництва взуття, за яким прибуток (ефект від виробничої діяльності підприємства) фабрики буде найбільшим. Якщо ж керівництво фабрики вирішує задачу реалізації власних ресурсів на стороні, то, з одного боку, воно прагнутиме реалізувати їх якомога дорожче, проте, з іншого боку, ринкова ціна не повинна штучно завищуватися, інакше ресурси за такими цінами не знайдуть покупця. А отже, керівництво фабрики має призначувати об'єктивні (незавищені) ціни («тіньові ціни») на виробничі ресурси, виходячи з того, що корисність обох альтернатив повинна бути однаковою, тобто дохід фабрики від реалізації власних ресурсів за цими цінами, який мінімізується, дорівнюватиме ефекту від здійснення виробничої діяльності, тобто величині прибутку фабрики, який повинен бути максимальним. Цей принцип саме й відбиває співвідношення (4.1), яке говорить про те, що максимальний прибуток фабрики збігається з її можливим мінімальним доходом у зв'язку із відмовою від виробничої діяльності і продажом ресурсів на сторону і складає 34200 у.г.о. за тиждень.

Основні змінні прямої задачі. Для одержання максимального прибутку, фабрика повинна випускати $x_1^* = 180$ пар взуття моделі №1 і $x_2^* = 360$ пар взуття моделі №2 за тиждень.

Додаткові змінні прямої задачі характеризують обсяг невикористаного ресурсу:

1) третя (додаткова) змінна x_3 відповідає першому обмеженню, причому $x_3^* = 0$ люд.-год., тому ресурс робочого часу використаний цілком, що свідчить про його дефіцитність;

2) четверта змінна x_4 відповідає другому обмеженню, причому $x_4^* = 0$ шматків, тому ресурс шкіри I сорту використаний цілком, значить і цей ресурс дефіцитний;

3) п'ята змінна x_5 відповідає третьому обмеженню, і $x_5^* = 40$ шматків, тому 40 шматків шкіри II сорти не використані, значить цей ресурс недефіцитний.

Основні змінні двоїстої задачі. Як уже відзначалося вище, економічний зміст основних змінних двоїстої задачі визначається економічним змістом відповідних їм нерівностей системи обмежень прямої задачі, а саме: їх оптимальні значення кількісно характеризують граничне значення «тіньової ціни» (об'єктивної ціни, рівноважної ціни і т.ін.) за одиницю обмеженого ресурсу, вище за яку його залучення (зокрема додаткове залучення) до виробничого процесу буде збитковим для фірми, що втілюється у ситуацію, коли витрати ресурсів на виробництво одиниці продукції, оцінені в грошовому вираженні ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$), перевищуватимуть зовнішню оцінку одиниці продукції – її ринкову ціну (або як в нашому випадку прибуток) c_j. А відтак, оптимальні основні двоїсті змінні надають керівництву фабрики (менеджерам з питань постачання) цінну додаткову інформацію для прийняття рішень в умовах ринкових відношень: додаткове залучення у виробництво дефіцитних ресурсів доцільно лише за умови, коли ринкова ціна за одиницю такого ресурсу не перевищує його «тіньову ціну».

«Тіньова ціна» для першого обмеження (ресурс робочого часу) складає $y_1^* = 32$ у.г.о. за одиницю, для другого обмеження (ресурс шкіри І сорту) – $y_2^* = 6$ у.г.о. за одиницю, для третього (ресурс шкіри ІІ сорту) – $y_4^* = 0$ у.г.о. за одиницю. Із цього випливає, що

1) $y_1^* > 0$, тому ресурс робочого часу дефіцитний, і його збільшення вигідне (рентабельне), а саме: збільшення робочого часу на 1 люд.-год. призведе до збільшення прибутку на 32 у.г.о.;

2) $y_2^* > 0$, тому ресурс шкіри І сорту є дефіцитним, і його збільшення рентабельне, а саме: збільшення запасу шкіри І сорту на 1 шматок дасть підприємству прибуток, що складатиме 6 у.г.о.;

3) $y_4^* = 0$, тому ресурс шкіри ІІ сорту не є дефіцитним, а збільшення його запасу не рентабельно.

Якщо деяка ***додаткова змінна двоїстої задачі*** додатна, то випуск продукції, що відповідає цій змінній є нерентабельним, а величина цієї змінної характеризує розмір збитку від реалізації одиниці цієї продукції: $\Delta_j = y_{i+n}^* = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j$. Дана властивість дозволяє оцінити рентабельність нової продукції (з умови $\Delta_j \leq 0$), якщо відомі планові норми витрат ресурсів на виготовлення її одиниці, а також визначитися з мінімально допустимою (прийнятною) ціною за одиницю продукції, яку планується виробляти (з умови $\Delta_j = 0$).

У даній задачі змінна y_4 відповідає обсягу випуску взуття моделі №1, а y_5 – моделі №2, причому $y_4^* = 0$; $y_5^* = 0$, тому випуск обох видів виробів вигідний (рентабельний) – грошова оцінка сумарних витрат ресурсів на одну пару взуття дорівнює розміру прибутку.

Взаємозамінність ресурсів. У табл. 4.4 внесемо значення коефіцієнтів $\eta_{ik} = y_k^* / y_i^*$ взаємозамінності ресурсів.

Таблиця 4.4 – Допоміжна таблиця для аналізу взаємозамінності ресурсів

$i \setminus k$	1	2	3
1	1	3/16	0
2	5 ⅓	1	0
3	∞	∞	1

Коефіцієнт η_{21} дорівнює 5⅓, це означає, що при зменшенні запасу робочого часу на 1 люд.-год. необхідно додатково збільшити запас шкіри І сорту на 5⅓ шматків, щоб значення цільової функції не змінилося. Ресурс робочого часу більш дефіцитний, ніж ресурс шкіри І сорту, тому коефіцієнт взаємозамінності більш дефіцитного ресурсу менш дефіцитним ресурсом η_{12} =5⅓ більше 1. Коефіцієнти η_{31} і η_{32} дорівнюють ∞. Це означає, що замінити зменшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту недефіцитним ресурсом шкіри II сорту не можливо. Коефіцієнти η_{13} і η_{23} дорівнюють 0. Це означає, що при зменшенні недефіцитного ресурсу шкіри II сорту не потрібне збільшення дефіцитних ресурсів робочого часу чи ресурсу шкіри I сорту.

Лабораторна робота №2. Двоїста задача лінійного програмування

Мета роботи: засвоїти основні методи розв’язання двоїстої задачі лінійного програмування та проведення її економічного аналізу.

Цілі роботи:

– навчитися будувати математичну модель двоїстої ЗЛП;
– засвоїти методи розв’язання двоїстої ЗЛП;
– оволодіти підходами для аналізу економічного змісту двоїстості.

4.2 Завдання до лабораторної роботи № 2.

– побудувати математичну модель двоїстої задачі для задач з лабораторної роботи №1;
– розв’язати двоїсту задачу за допомогою процедури «Solver» в Excel;
– порівняти отриманий результат виходячи зі звіту про стійкість процедури «Solver» прямої задачі;
– зробити економічний аналіз результатів.

4.3 Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи №2

Розглянемо задачу з прикладу 1.1. В табл. 3.3 виписано повне формулювання математичної моделі двоїстої задачі. Повторимо тут запис для цільової функції та системи обмежень з табл. 3.3:

$$L(y_1, y_2, y_3) = 900y_1 + 900y_2 + 400y_3 \to min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 \qquad \geq 50; \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 70; \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Аналогічно до рекомендацій до лабораторної роботи №1, викладених у підрозділі 2.5, заповнюємо комірки таблиці Excel відповідно до рис. 4.2.

Запускаємо процедуру «Solver» і заповнюємо комірки екранної форми «Solver Parameters», як показано на рис. 4.3.

Результат роботи процедури показано на рис. 4.4. Звідки випливає відповідь по значенню цільової функції 34200 у.г.о (в комірці E4) та основних замінних двоїстої задачі:

$$y_1^* = 32 \text{ у.г.о.};\ y_2^* = 6 \text{ у.г.о.};\ y_3^* = 0 \text{ у.г.о.}$$

Для порівняння значень характеристик пари двоїстих задач дамо запит на створення звіту про стійкість (рис. 4.5) та звіту про результати (рис. 4.6).

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Змінні задачі**	y1	y2	y3			
2	Значення						
3	**Цільво функція (ЦФ)**	Коеф. в ЦФ			Значення ЦФ		
4	Дохід від реалізації власних ресурсів	900	900	400	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2;B4:D4)		
5	**Система обмежень**	Коеф. в СО	0	0	Ліва частина	знак	Права частина
6	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 1	1	3	0	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2;B6:D6)	>=	50
7	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 2	2	1	1	=SUMPRODUCT($B$2:$D$2;B7:D7)	>=	70

Рис. 4.2 – Заповнення таблиці Excel відповідно до математичної моделі двоїстої задачі

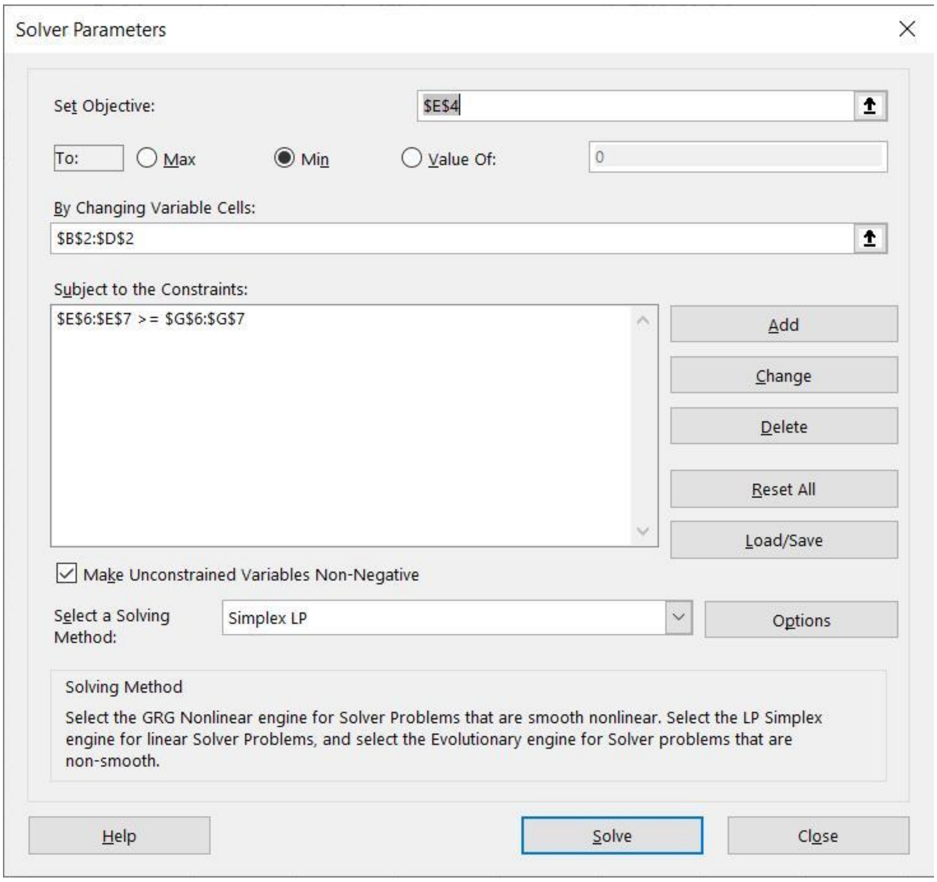
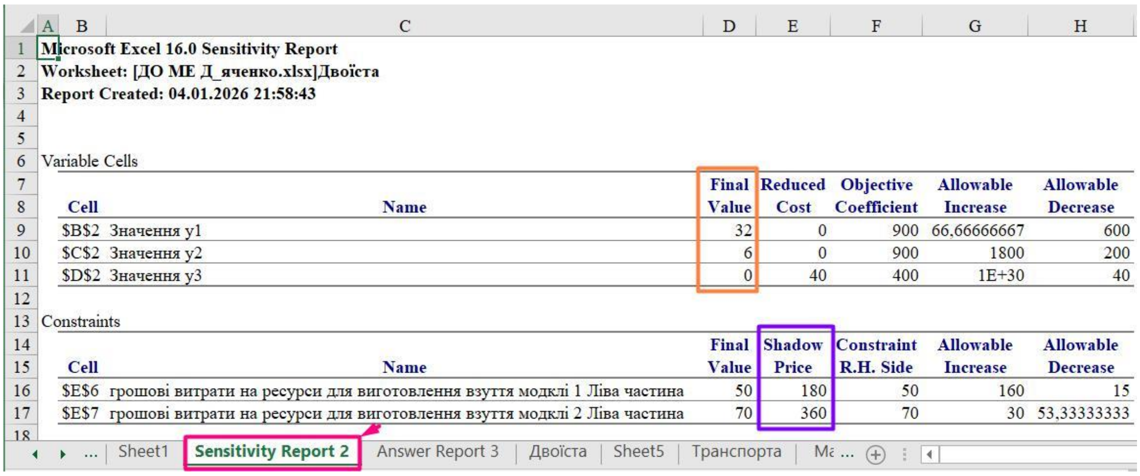


Рис. 4.3 – Заповнення екранної форми «Solver Parameters» для двоїстої задачі

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Змінні задачі**	y1	y2	y3			
2	Значення	32	6	0			
3	**Цільво функція (ЦФ)**	Коеф. в ЦФ			Значення ЦФ		
4	Дохід від реалізації власних ресурсів	900	900	400	34200		
5	**Система обмежень**	Коеф. в СО	0	0	Ліва частина	знак	Права частина
6	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 1	1	3	0	50	>=	50
7	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 2	2	1	1	70	>=	70

Рис. 4.4 – Результат роботи процедури «Solver» для двоїстої задачі



Microsoft Excel 16.0 Sensitivity Report
Worksheet: [ДО МЕ Д_яченко.xlsx]Двоїста
Report Created: 04.01.2026 21:58:43

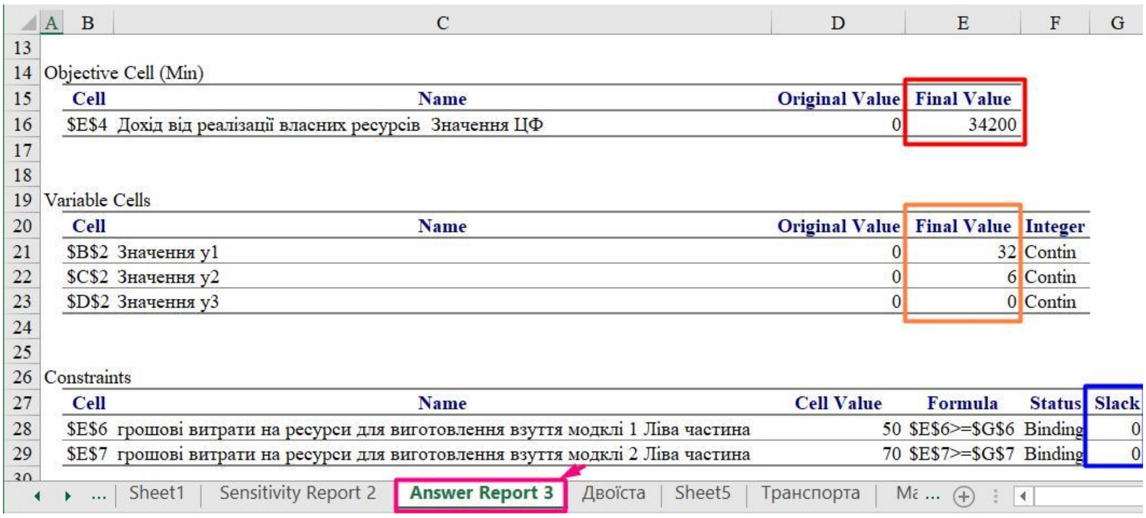
Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$2	Значення у1	32	0	900	66,66666667	600
$C$2	Значення у2	6	0	900	1800	200
$D$2	Значення у3	0	40	400	1E+30	40

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$6	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 1 Ліва частина	50	180	50	160	15
$E$7	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 2 Ліва частина	70	360	70	30	53,33333333

Рис. 4.5 – Екранна форма аркуша «Sensitivity Reports»



Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$E$4	Дохід від реалізації власних ресурсів Значення ЦФ	0	34200

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
$B$2	Значення у1	0	32	Contin
$C$2	Значення у2	0	6	Contin
$D$2	Значення у3	0	0	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$E$6	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 1 Ліва частина	50	$E$6>=$G$6	Binding	0
$E$7	грошові витрати на ресурси для виготовлення взуття модклі 2 Ліва частина	70	$E$7>=$G$7	Binding	0

Рис. 4.6 – Екранна форма аркуша «Answer Report»

У звіті про стійкість

- в комірках D9:D11 містяться остаточні результати по значеннях двоїстих змінних;
- в комірках E16:E17 – змінних прямої задачі.

У звіті про результати

- в комірці E16 розміщено значення цільової функції двоїстої задачі, яка мінімізувалася;
- в комірках E21:E23 – основних двоїстих змінних;
- в G28:G29 – додаткових двоїстих змінних.

Ті самі результати отримано при розв'язання прямої та двоїстої задач іншими методами (див., зокрема, табл. 4.1).

Детальний аналіз щодо **змістовної відповіді для двоїстої задачі** проведено в підрозділі 4.1. Тут повторимо коротку відповідь.

Максимальний прибуток фабрики збігається з її можливим мінімальним доходом у зв'язку із відмовою від виробничої діяльності і продажом ресурсів на сторону і складає 34200 у.г.о. за тиждень.

«Тіньова ціна» для першого обмеження (ресурс робочого часу) складає $y_1^* = 32$ у.г.о. за одиницю, для другого обмеження (ресурс шкіри I сорту) – $y_2^* = 6$ у.г.о. за одиницю, для третього (ресурс шкіри II сорту) – $y_4^* = 0$ у.г.о. за одиницю. Із цього випливає, що

1) $y_1^* > 0$*, тому ресурс робочого часу дефіцитний, і його збільшення вигідне (рентабельне), а саме: збільшення робочого часу на 1 люд.-год. призведе до збільшення прибутку на 32 у.г.о.;*

2) $y_2^* > 0$*, тому ресурс шкіри І сорту є дефіцитним, і його збільшення рентабельне, а саме: збільшення запасу шкіри І сорту на 1 шматок дасть підприємству прибуток, що складатиме 6 у.г.о.;*

3) $y_4^* = 0$*, тому ресурс шкіри ІІ сорту не є дефіцитним, а збільшення його запасу не рентабельно.*

Питання до самоконтролю до теми 4 та лабораторної роботи №2

1. Як пов'язані математичні моделі прямої та двоїстої задач лінійного програмування?
2. Які методи розв'язання двоїстих задач лінійного програмування Ви знаєте? Чи є якась специфіка в розв'язанні двоїстої ЗЛП?
3. Сформулювати теореми про зв'язок між парою двоїстих задач.
4. Дати економічну інтерпретацію кожної характеристики прямої та двоїстої задач лінійного програмування.
5. Викласти алгоритм розв'язання двоїстої ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» MS Excel.
6. Як за допомогою остаточних симплекс таблиць визначити значення всіх характеристик пар двоїстих задач? Як це зробити за допомогою звітів про стійкість та про результати в MS Excel?

Тема 5 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ПОСТАНОВКА, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

5.1 Економічна та математична постановки транспортної задачі

Транспортна задача полягає у визначенні оптимального плану перевезення однорідного вантажу від пунктів постачання до пунктів споживання з мінімальними сукупними витратами.

Економічна постановка транспортної задачі передбачає наявність кількох постачальників із заданими обсягами пропозиції та кількох споживачів із відомими обсягами попиту. Для кожної пари «постачальник-споживач» відомі витрати перевезення одиниці вантажу. Потрібно скласти план перевезень, який повністю задовольняє попит споживачів і використовує наявні ресурси постачальників таким чином, щоб сумарні витрати транспортування були мінімальними.

Математична постановка транспортної задачі полягає у формуванні задачі лінійного програмування, де змінними є обсяги перевезень між кожною парою пунктів постачання і споживання. Цільова функція мінімізує сумарні витрати перевезень, а система лінійних обмежень забезпечує виконання балансу постачання і попиту, а також невід'ємність змінних. Таким чином, транспортна задача є окремим випадком задачі лінійного програмування зі спеціальною структурою обмежень.

Наведемо *найпростіше формулювання транспортної задачі*. Нехай існує m пунктів виробництва однорідної продукції з обсягами виробництва $a_i (i = 1,2,\dots,m)$ та n пунктів споживання з обсягами споживання $b_j (j = 1,2,\dots,n)$, причому передбачається, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\,. \tag{5.1}$$

Позначимо через x_{ij} кількість вантажу, що перевозиться з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання, а через c_{ij} – вартість транспортування одного виробу (одиниці вантажу) з пункту виробництва i до пункту споживання j.

Задача полягає в тому, щоб знайти такий план перевезень x_{ij}, який мінімізує сумарні витрати на перевезення:

$$F = \sum_{i=1}^{m\sum} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min\,. \tag{5.2}$$

Змінні x_{ij} повинні задовольняти обмеження за запасами та потребами, а також умови невід'ємності.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i; \\ &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n. \quad (5.4)$$

Умови (5.3) та (5.4) утворюють систему обмежень: перша група обмежень (5.3) вказує, що сумарний обсяг перевезень з кожного пункту виробництва дорівнює обсягу виготовленої продукції; друга група обмежень (5.3) вимагає, щоб сумарні перевезення до кожного пункту споживання повністю задовольняли попит на цю продукцію. Умови балансу (5.1) означають, що сумарний обсяг виробництва дорівнює сумарному попиту.

Модель транспортної задачі називається ***закритою***, якщо виконується умова (5.1), і ***відкритою*** – у протилежному випадку.

Теорема 5.1. Для розв'язності транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб її модель була закритою.

У реальних задачах ця умова виконується не завжди. Проте транспортну задачу завжди можна збалансувати, ввівши фіктивний пункт виробництва або фіктивний пункт споживання (склад):

- якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ то вводиться фіктивний $(n+1)$-й пункт призначення (споживання) з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{i\,n+1} = 0 \ (i = 1,\ldots,m)$;
- якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться фіктивний $(m+1)$-й пункт відправлення (виробництва) із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, і $c_{m+1\,j} = 0 \ (j = 1,\ldots,n)$.

За допомогою цих перетворень відкрита транспортна задача зводиться до закритої.

Будь-який план перевезень x_{ij}, що задовольняє систему обмежень (5.3) та (5.4), називається **допустимим**.

Опорний невироджений план транспортної задачі повинен мати рівно $n + m - 1$ ненульових змінних.

Отже, транспортну задачу можна сформулювати таким чином: задано систему обмежень (5.3), (5.4) та цільову функцію (5.2). Потрібно серед множини розв'язків системи (5.3), (5.4) знайти такий план перевезень, який мінімізує цільову функцію.

5.2 Постановка конкретної транспортної задачі та зведення її до збалансованої

Приклад 5.1 У трьох пунктах виробництва **A_1, A_2, A_3** зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних **a_1, a_2, a_3** тон. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах **B_1, B_2, B_3, B_4,** а потреби в ньому в цих пунктах складають **b_1, b_2, b_3, b_4,** тон відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\underline{го}}$ пункту виробництва до $j^{\underline{го}}$ пункту споживання:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} c_{14} \\ c_{21} c_{22} c_{23} c_{24} \\ c_{31} c_{32} c_{33} c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \\ x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \\ x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розглянемо поставлену задачу для таких вихідних даних:

$$a_1 = 30\text{т}, a_2 = 20\text{т}, a_3 = 40\text{т},$$

$$b_1 = 20\text{т}, b_2 = 30\text{т}, b_3 = 20\text{т}, b_4 = 30\text{т},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Занесемо дані до таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Умова задачі

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
Потреби	20	30	20	30	90 / 100

До нижнього правого куту цієї таблиці занесемо значення сумарних потреб і сумарних витрат:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 \text{ т}, \sum_{j=1}^{4} b_j = 100 \text{ т}.$$

У даному випадку $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, тому модель транспортної задачі є *відкритою*. Відповідно до теореми, для існування в транспортної задачі допустимого плану необхідно і достатньо, щоб її модель була *закритою*, тобто, щоб $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Збалансуємо дану задачу, уводячи фіктивний пункт виробництва A_4 з запасом вантажу $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i$=100– 90=10(т). При цьому вартість перевезень із цього пункту в кожний із пунктів споживання дорівнює 0 (див. табл. 5.2).

Таблиця 5.2 – Збалансована транспортна задача

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
A_4	0	0	0	0	10
Потреби	20	30	20	30	100 / 100

Складемо ***математичну модель*** даної задачі:

1) *змінні задачі*: x_{ij}– планований обсяг перевезення (у тоннах) з $i^{\underline{\text{го}}}$ пункту виробництва в $j^{\underline{\text{й}}}$ пункт споживання ($i = \overline{1,4}$,$j = \overline{1,4}$). Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$ утворить матрицю

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \\ x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \\ x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \end{bmatrix};$$

2) *цільова функція задачі* виражає транспортні витрати, які необхідно мінімізувати:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 3x_{11} + 1x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} +$$
$$+ 1\ x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 2x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} \quad \to\ min\ ;$$

3) обмеження задачі: на вивіз вантажу

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10, \tag{5.5}$$

на задоволення потреб у вантажі

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 20$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 30$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 20$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 30, \tag{5.6}$$

невід'ємність змінних:

$$x_{ij} \geq 0\ \ (i = \overline{1,4}\ \ ,j = \overline{1,4}\ ). \tag{5.7}$$

Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$, що задовольняють обмеженням (5.5)–(5.7), утворюють допустимий опорний план. Матриця системи (5.5)–(5.6) має ранг на 1 менший кількості рядків цієї системи, тобто на 1 менший від суми кількостей пунктів виробництва і пунктів споживання, у даному випадку це – 7. Це означає, що *кількість базисних змінних повинна дорівнювати 7.*

5.2 Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Нульова ітерація транспортної задачі. Підготуємо таблицю (табл. 5.3). Другий рядок і другий стовпець зарезервуємо для значень потенціалів. В останній стовпець внесемо відповідні значення запасів, а в останній рядок – потреб. У праві верхні кути комірок A_iB_j ($i = \overline{1,4}$,$j = \overline{1,4}$) внесемо матрицю транспортних витрат.

Таблиця 5.3 – Нульова ітерація транспортної задачі

		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
		$v_1=1$	$v_2=1$	$v_3=1$	$v_4=1$	
A_1	$u_1=0$	3 −2	1 **30**	4 −3	2 −1	30|0
A_2	$u_2=0$	1 **20**	4 −3	3 −2	3 −2	20|0
A_3	$u_3=3$	2 ⊕ 2	2 2	4 **20**	4 ϴ **20**	40|20|0
A_4	$u_4=-1$	0 ϴ **0**	0 **0**	0 0	0 ⊕ **10**	10|0
Потреби		20 0	30 0	20 0	30 20 0	

Крок 1. Побудову вихідного опорного плану здійснюємо *методом найменшої вартості*. Завантажуючи комірки, відповідні значення обсягів перевезення x_{ij} будемо заносити в нижні ліві кути комірок A_iB_j $(i=\overline{1,4}, j=\overline{1,4})$:

1) вибираємо комірку з найменшою вартістю (транспортним тарифом). Найменша вартість дорівнює 0, а комірок, що відповідають цій вартості – чотири: A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, A_4B_4. Завантажимо, наприклад, комірку A_4B_4 так, щоб $x_{44}=min\{a_4;b_4\}=min\{10;30\}$. Перерахуємо запаси, що залишилися, $a_4'=a_3-x_{44}=10-10=0$, і потреби, що залишилися, $b_4'=b_4-x_{44}$=30 – 10=20, а отримані значення запишемо у відповідних комірках таблиці через риску;

2) оскільки запаси четвертого пункту виробництва вичерпані, то завантажувати комірки рядка A_4 поки не будемо. Серед комірок, що залишилися, виберемо комірку з найменшою вартістю. Маємо дві комірки з вартістю 1. Завантажимо спочатку, наприклад, комірку A_1B_2: $x_{12}=min\{a_1;b_2\}=min\{30;30\}=30$. Перерахуємо запаси, що $a_1'=a_1-x_{12}=30-30=0$ залишилися, і потреби, що залишилися, $b_2'=b_2-x_{12}=30-30=0$. Потім завантажимо комірку A_2B_1: $x_{12}=min\{a_2;b_1\}=min\{20;20\}=20$, $a_2'=a_2-x_{21}=20-20=0$, $b_1'=b_1-x_{12}=20-20=0$;

3) на даний момент вичерпані запаси пунктів виробництва A_1, A_2 і A_4, а також задоволені потреби споживачів B_1 і B_2. У нашому розпорядженні залишилися дві комірки з однаковими вартостями: A_3B_3 і A_3B_4. Завантажимо, наприклад, комірку A_3B_3: $x_{33}=min\{a_3;b_3\}==\min\{40;20\}=20$, $a_3'=a_3-x_{33}=40-20=20$, $b_3'=b_3-x_{33}=20-20=0$. Тепер завантажимо комірку A_3B_4: $x_{34}=min\{a_3';b_4'\}=min\{20;20\}=20$, $a_3''=a_3'-x_{34}=20-20=0$, $b_4''=b_4'-x_{34}$=20 − $20=0$;

4) завантажені комірки відповідають базисним змінним транспортної задачі, їхня кількість на даний момент дорівнює 5, однак, як було відзначено

вище, повинна дорівнювати 7. Два відсутні елементи поповнюємо, завантажуючи нульовим обсягом перевезення дві вільні комірки з найменшими тарифами. Причому необхідно подбати про те, щоб жодна з цих комірок не *утворювала циклу* з наявними завантаженими комірками. Під *циклом* розуміють замкнуту ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. За такі комірки оберемо A_4B_1 і A_4B_2;

5) опорний план нульової ітерації утворить матрицю

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Його елементи задовольняють системі обмежень (5.5)– (5.7). Значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$F(X_0) = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 210$ (у.о.).

Чи є цей план оптимальним? Відповідь на це питання дає метод потенціалів.

Крок 2. *Перевірка оптимальності опорного плану:*

1) *побудова системи потенціалів* $\{u_i, v_j\}$ $(i = \overline{1,4}\ , j = \overline{1,4}\ )$. Кожному постачальнику A_i поставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачу B_j – потенціал v_j. При цьому для кожної базисної змінної відповідні їй потенціали u_i і v_j повинні задовольняти рівності

$$u_i + v_j = c_{ij}\ (i = \overline{1,4}\ , j = \overline{1,4}\ ). \tag{5.8}$$

Оскільки базисних змінних 7, то сукупність рівностей (5.8) утворить систему з 8 рівнянь із 7 невідомими. Ця система має нескінченну множину розв'язків, знайдемо одне з них:

– для зручності візьмемо $u_1 = 0$;
– у рядку A_1 знаходиться базисна змінна x_{12}, тому згідно з (5.8) $v_2 = c_{12} - u_1 = 1 - 0 = 1$;
– у стовпці B_2 знаходиться ще одна (крім x_{12}) базисна змінна x_{42}, тому $u_4 = c_{42} - v_2 = 0 - 1 = -1$;
– за базисною змінною x_{41} знайдемо $v_1 = c_{41} - u_4 = 0 - (-1) = 1$,
– за базисною змінною x_{44} – $v_4 = c_{44} - u_4 = 0 - (-1) = 1$;
– за базисною змінною x_{34} – $u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 1 = 3$;
– за базисною змінною x_{33} – $v_3 = c_{33} - u_3 = 4 - 3 = 1$;
– за базисною змінною x_{21} – $u_2 = c_{21} - v_1 = 1 - 1 = 0$;

2) знайдемо *оцінки оптимальності* Δ_{ij} *для небазисних змінних*. Значення Δ_{ij} будемо обчислювати за формулою

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}\ (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,4}),$$

а результат заносити в нижні ліві кути комірок A_iB_j $(i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4})$., відокремлюючи їх у рамку:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 3 = -2;$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 4 = -3;$$
$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 2 = -1;$$
$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 1 - 4 = -3;$$
$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 1 - 3 = -2;$$
$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 1 - 3 = -2;$$
$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 1 - 2 = 2;$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 1 - 2 = 2;$$
$$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -1 + 1 - 0 = 0;$$

3) *перевірка оптимальності опорного плану*:

- якщо всі оцінки оптимальності небазисних змінних недодатні, тобто $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорний план є оптимальним, і обчислення більше не проводяться;
- якщо серед оцінок оптимальності є додатні, то опорний план не оптимальний, і його необхідно поліпшувати.
- оскільки для розглянутого плану деякі з оцінок оптимальності є додатними, то вихідний опорний план не є оптимальним.

<u>**Крок 3.**</u> Виконаємо наступні дії:

1) визначимо *змінну, що вводиться до базису*. Серед знайдених оцінок оптимальності виберемо найбільше додатне значення. Таким є 2, що відповідає $\Delta_{31} = \Delta_{32} = 2$. У базис необхідно вводити ту з змінних x_{31} чи x_{32}, якій відповідає менший тариф. У даному випадку $c_{31} = c_{32} = 2$. Тому введемо до базису будь-яку із цих змінних, наприклад, x_{31};

2) визначимо *змінну, що виводиться з базису*. Для цього побудуємо цикл, що проходить через деякі з завантажених комірок і комірку A_3B_1 (що відповідає змінній x_{31}, яка вводиться з базису). Нагадаємо, що під *циклом* розуміють замкнену ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. Відомо, що цикл у транспортній задачі можна побудувати єдиним чином. У даному випадку цикл виглядає так, як це показано в табл. 5.3. Вершину циклу в комірці A_3B_1 відзначаємо знаком «+», а далі інші вершини позначаємо знаками, що чергуються: «– » або «+», послідовно пересуваючись циклом у будь-якому напрямку. Серед комірок, у які потрапив знак «– », вибираємо комірку з найменшим значенням базисної змінної. У даному випадку це значення дорівнює нулю, воно обведене ромбом, а відповідає воно базисній змінній x_{41}, котру будемо виводити з базису;

3) *побудова нового базису*.

Підготуємо нову таблицю ***першої ітерації*** (див. табл. 5.4).

- заносимо в неї дані в умові значення транспортних тарифів, запасів і потреб;
- без зміни необхідно перенести в таблицю значення базисних змінних, не задіяних циклом;
- оскільки виведена з базису змінна дорівнює 0, то змінна, що вводиться з базису, також дорівнюватиме нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться. Комірка змінної, що виведена з базису, стане в результаті вільною;

4) побудований опорний план першої ітерації утворить ту ж матрицю, що і для вихідного опорного плану, тому значення цільової функції на цьому плані не зміниться:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_1) = 210 \text{ (у.о).}$$

Таблиця 5.4 – Перша ітерація транспортної задачі

	$v_1 =-1$	$v_2 =1$	$v_3 =1$	$v_4 =1$	
$u_1 =0$	3 – 4	1 **30**	4 – 3	2 – 1	30
$u_2 =2$	1 **20**	4 – 1	3 0	3 0	20
$u_3 =3$	2 **0**	2 ⊕ 2	4 **20**	4 ϴ **20**	40
$u_4 =-1$	0 – 2	0 ϴ **0**	0 0	0 ⊕ **10**	10
	20	30	20	30	

Чи є новий опорний план оптимальним? Для відповіді на це питання повертаємося до кроку 2 і кроку 3, виконуючи послідовно аналогічні дії. Результати цих дій занесені в табл. 5.4.

– будуємо систему потенціалів;
– обчислюємо оцінки оптимальності небазисних змінних;
– перевіряємо план на оптимальність: серед оцінок оптимальності є додатна Δ_{32}; тому *план першої ітерації не оптимальний*, і вводиться до базису змінна – x_{32};
– будуємо цикл, за допомогою якого визначаємо змінну, що виводиться з базису; такою є x_{42};
– будуємо нову таблицю ***другої ітерації*** (табл. 5.5), зберігаючи дані умови і значення базисних змінних, не задіяних циклом. Оскільки $x_{42} = 0$, то змінна, що вводиться до базису, також буде дорівнювати нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться.

Для опорного плану другої ітерації одержимо

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_2) = 210 \text{ (у.о.).}$$

Повертаємося до кроку 2 і кроку 3, результати виконаних дій занесені в табл.

Таблиця 5.5 – Друга ітерація транспортної задачі

	v_1 =1	v_2 =1	v_3 =3	v_4 =3	
u_1 =0	3 – 2	1 ϴ **30**	4 – 1	2 ⊕ 1	30
u_2 =0	1 **20**	4 – 3	3 0	3 0	20
u_3 =1	2 **0**	2 ⊕ **0**	4 **20**	4 ϴ **20**	40
u_4 =– 3	0 – 2	0 – 2	0 0	0 **10**	10
	20	30	20	30	

Опорний план другої ітерації не оптимальний. У цьому випадку змінна, що вводиться до базису, – x_{14}, а та, яка виводиться з базису, – $x_{34} = 20$. Зауважимо, що при побудові таблиці ***третьої ітерації*** (табл.5.6) значення змінних, задіяним циклом, перераховуємо, додаючи до тих із них, що відмічені знаком «+» значення змінної, що виводиться з базису (тобто «20»), а від змінних, відмічених знаком «– », віднімаємо це значення. Змінна, що вводиться до базису, приймає значення 20. Комірка A_3B_4 виявиться вільною.

Для опорного плану третьої ітерації одержимо

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$F(X_3) = 10 \cdot 1 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 = 190 \text{ (у.о.)}.$$

Таблиця 5.6 – Третя ітерація транспортної задачі

	v_1 =1	v_2 =1	v_3 =3	v_4 =2	
u_1 =0	3 – 4	1 ϴ **10**	4 – 1	2 ⊕ **20**	30
u_2 =0	1 **20**	4 – 3	3 0	3 – 1	20
u_3 =1	2 **0**	2 ⊕ **20**	4 ϴ **20**	4 – 1	40
u_4 =– 2	0 – 1	0 – 1	0 ⊕ 1	0 ϴ **10**	10
	20	30	20	30	

Із табл. 5.6 бачимо, що *опорний план третьої ітерації не оптимальний.* Змінна в цьому випадку, що вводиться до базису, – x_{43}, а змінна, що виводиться з базису, – $x_{12} = 10$. Проводимо перерахування базисних змінних. Результати обчислень у четвертій ітерації занесені в табл. 5.7. Для опорного плану цієї ітерації виконана умова оптимальності: всі оцінки оптимальності недодатні.

У результаті маємо

$$X^* = X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{min}(X) = F(X^*) =$$

$$= 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 180 \text{ (у.о.).}$$

Таблиця 5.7 – Четверта ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	3 – 3	1 – 1	4 – 2	2 **30**	30
$u_2 = 1$	1 **20**	4 – 3	3 0	3 0	20
$u_3 = 2$	2 **0**	2 **30**	4 **10**	4 0	40
$u_4 = -2$	0 – 2	0 – 2	0 **10**	0 **0**	10
	20	30	20	30	

Зауважимо, що серед оцінок оптимальності останньої ітерації є такі, значення яких дорівнює нулю, тому побудований ***опорний план не єдиний***, для якого цільова функція приймає мінімальне значення 180 у.о.

Відповідь. Найменші сумарні транспортні витрати, що складають 180 у.о., будуть відповідати такому плану перевезень:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2 – 20 т вантажу до пункту споживання B_1;
- з пункту виробництва A_3 – 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в B_3.

Оскільки пункт A_4 є фіктивним, то споживачB_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Результат обчислень можна оформити також у вигляді схеми, показуючи, з якого пункту виробництва в який пункт споживання перевозиться вантаж:

$$A_1 \overset{30\text{т}}{\rightarrow} B_4, \quad A_2 \overset{20\text{т}}{\rightarrow} B_1, \quad \begin{array}{l} A_3 \overset{30\text{т}}{\rightarrow} B_2 \\ \;\downarrow \overset{10\text{т}}{\rightarrow} B_3. \end{array}$$

Лабораторна робота №3 Розв'язування транспортної задачі

Мета роботи: засвоїти методи розв'язання транспортної задачі.

Цілі роботи:

- навчитися формулювати змістовну постановку транспортної задачі;
- навчитися будувати математичну модель транспортної задачі;

– оволодіти способами зведення транспортної задачі до збалансованого виду;
– засвоїти методи розв’язання транспортної задачі;
– набути навичок формулювання математичними та економічними висновками щодо отриманого розв’язку транспортної задачі.

5.3 Завдання до лабораторної роботи №3

У трьох пунктах виробництва $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$ зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних $\mathbf{a_1, a_2, a_3}$ тон. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах $\mathbf{B_1, B_2, B_3, B_4}$, а потреби в ньому в цих пунктах складають $\mathbf{b_1, b_2, b_3, b_4}$, тон відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\underline{\text{го}}}$ пункту виробництва до $j^{\underline{\text{го}}}$ пункту споживання:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} c_{14} \\ c_{21} c_{22} c_{23} c_{24} \\ c_{31} c_{32} c_{33} c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \\ x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \\ x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розв’язати поставлену транспортну задачу за допомогою інструмента «Solver».

В табл. 5.8 наведено індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №3.

Таблиця 5.8 – Варіанти лабораторної роботи №3

№ вар	**ПАРАМЕТРИ МОДЕЛІ**																	
	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}
1	25	50	20	15	15	40	30	1	8	2	3	4	7	5	1	5	3	4	4
2	46	30	35	20	30	16	10	1	2	6	3	4	8	1	5	9	7	3	4
3	60	70	20	30	30	30	50	2	4	5	1	2	3	9	4	3	4	22	5
4	30	20	40	50	20	20	15	5	2	4	1	3	5	6	7	11	5	3	1
5	45	15	20	30	25	25	10	9	4	1	4	5	6	7	10	2	1	4	3
6	60	65	70	40	60	70	30	2	4	3	2	3	1	2	3	5	4	1	5
7	50	40	20	30	25	25	20	3	2	4	1	2	3	1	5	3	2	7	4
8	20	10	40	35	25	10	15	4	1	2	6	5	3	4	8	2	5	1	4
9	50	10	10	25	25	20	10	5	6	4	2	1	5	3	8	1	2	4	1
10	45	25	20	30	15	30	40	2	1	5	1	4	2	6	3	1	5	2	4
11	60	70	10	40	25	35	20	5	4	1	2	6	3	1	2	4	5	3	2
12	25	25	30	20	25	25	15	4	8	6	7	2	1	5	1	1	3	5	4
13	20	20	40	30	25	15	20	6	4	1	2	5	8	3	1	5	4	2	6
14	60	10	40	30	40	20	10	1	2	4	5	6	8	2	3	2	5	7	1
15	30	50	20	15	10	40	30	3	1	5	6	4	2	1	5	3	7	4	5
16	45	35	70	20	60	55	55	6	1	4	5	2	3	2	1	4	5	2	3
17	30	70	50	10	40	20	60	5	1	4	2	6	3	8	2	4	5	1	3
18	70	10	20	45	10	35	20	6	1	5	4	2	3	2	5	4	7	9	2
19	20	50	40	45	20	45	5	4	5	3	2	8	4	1	6	2	5	4	1
20	30	20	45	25	25	30	20	1	5	3	4	2	1	5	7	4	2	1	4
21	60	10	50	30	40	40	25	5	1	9	3	2	7	5	6	1	2	4	3
22	30	70	20	65	15	30	5	6	4	2	1	4	5	3	8	5	1	3	5
23	50	40	60	35	45	50	30	2	4	1	5	3	2	5	6	7	4	5	9
24	40	30	20	25	35	25	15	1	5	2	4	8	3	6	7	4	2	1	5
25	50	40	60	40	60	25	35	2	4	1	9	8	3	6	10	2	4	5	7
26	20	30	50	45	25	20	15	6	4	1	5	7	10	2	3	5	6	11	2
27	25	35	50	30	10	30	25	5	8	4	3	1	2	7	5	2	1	2	6
28	50	40	20	20	40	30	25	2	4	5	8	9	7	3	1	6	2	5	2
29	25	45	30	40	20	25	20	6	4	5	8	1	2	3	7	5	1	2	4
30	30	20	45	25	25	30	20	8	7	5	1	2	12	4	5	8	6	2	4

5.4 Методичні рекомендації до розв'язання лабораторної роботи №3

Транспортна задача вже була зведена до закритої моделі. *Результат внесений у табл. 5.2.* Відповідно до цієї таблиці підготуємо аркуш Excel для застосування інструмента «Solver» (див. рис. 5.1):

1) комірки B4:E7 заповнюємо матрицею транспортних тарифів транспортної задачі, зведеної до закритого вигляду;

2) у комірках F4:F7 записуємо обсяги запасів a_i на підприємстві A_i $(i=\overline{1,4})$;

3) у комірки B8:E8 вносимо обсяги потреб b_j споживача B_j $(j=\overline{1,4}$);

4) комірки B11:E14 резервуємо для значень змінних моделі, що будуть знайдені після виконання процедури «Solver»;

5) комірка F15 (цільова комірка) резервується для обчислення оптимального значення цільової функції моделі.

	A	B	C	D	E	F	
1							
2							
3		B1	B2	B3	B4	Запаси	
4	A1	3	1	4	2	30	
5	A2	1	4	3	3	20	
6	A3	2	2	4	4	40	
7	A4	0	0	0	0	10	
8	Потреби	20	30	20	30	Сума=100	
9							
10		B1	B2	B3	B4	Запаси	
11	A1						
12	A2						
13	A3						
14	A4						
15	Потреби						ЦФ

Рис. 5.1 – Представлення вихідних даних у таблиці Excel

Математична модель подається формулами (5.2) і (5.3), (5.4). Відповідно до цього, після заповнення вихідних даних у цільову комірку F15 вносимо формули SUMPRODUCT(B4:E7; B11:E14), у комірку F11 – SUM(B11:E11), що копіюємо з модифікаціями в комірки F12:F14, і в комірку B15 – SUM (B11:B14), що копіюємо з модифікаціями в комірки C15:E15. Результат представлений на рис. 5.2.

Таким чином, усі підготовчі процедури закінчені тому вибираємо в «Data» інструмент «Solver». Відповідно до математичної моделі (5.2)–(5.4), заповнюємо екранну форму так, як це показано на рис. 5.3, виконуючи дії, аналогічні описаним у п. 2.5.

Результат розв'язання транспортної задачі з використанням інструмента «Solver» представлений на рис. 5.4. Оптимальний розв'язок транспортної задачі в цьому випадку можна представити матрицею

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

а мінімальне значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$$F_{min}(X) = F(X^*) = 180(\text{у.о.}).$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
4	**A1**	3	1	4	2	30	
5	**A2**	1	4	3	3	20	
6	**A3**	2	2	4	4	40	
7	**A4**	0	0	0	0	10	
8	**Потреби**	20	30	20	30	**Сума=100**	
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
11	**A1**	0	0	0	30	=SUM(B11:E11)	
12	**A2**	20	0	0	0	=SUM(B12:E12)	
13	**A3**	0	30	10	0	=SUM(B13:E13)	
14	**A4**	0	0	10	0	=SUM(B14:E14)	
15	**Потреби**	=SUM(B11:B14)	=SUM(C11:C14)	=SUM(D11:D14)	=SUM(E11:E14)	=SUMPRODUCT(B4:E7;B11:E14)	**ЦФ**

Рис. 5.2 – Формули розрахунку в таблиці Excel

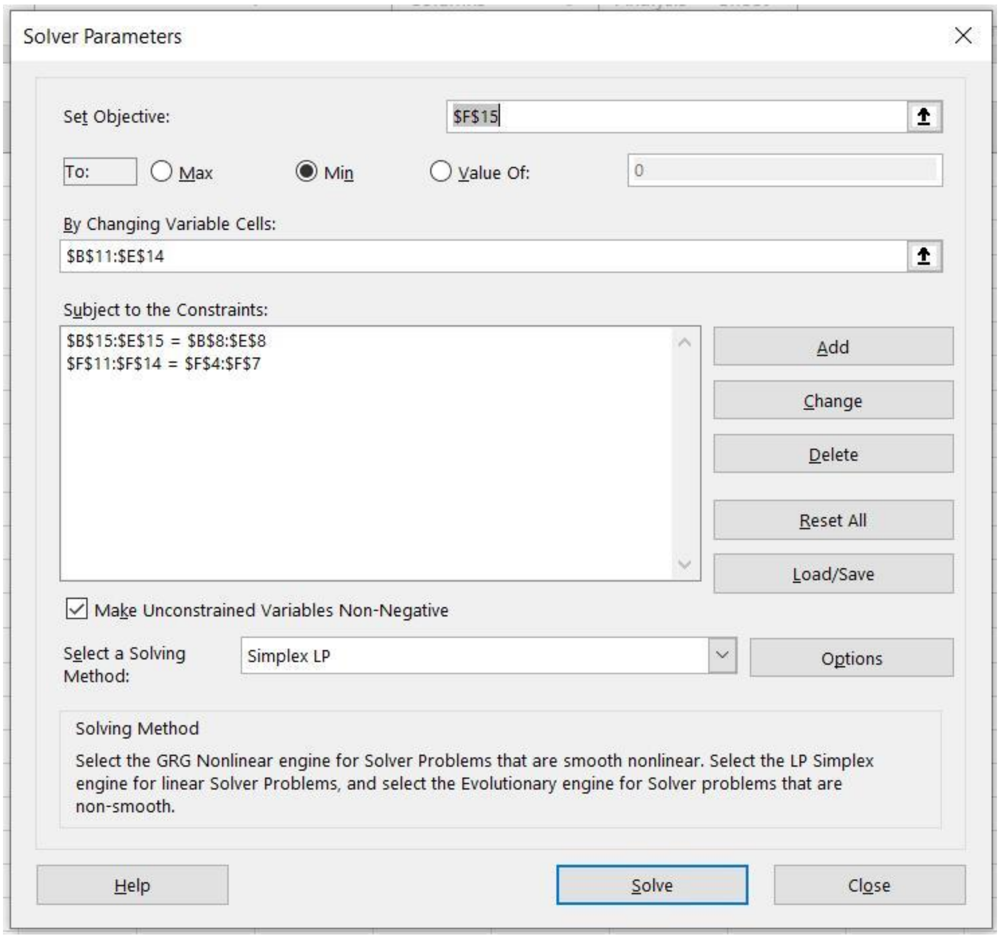


Рис. 5.3 – Екранна форма «Solver»

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
4	**A1**	3	1	4	2	30	
5	**A2**	1	4	3	3	20	
6	**A3**	2	2	4	4	40	
7	**A4**	0	0	0	0	10	
8	**Потреби**	20	30	20	30	**Сума=100**	
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**	
11	**A1**	0	0	0	30	30	
12	**A2**	20	0	0	0	20	
13	**A3**	0	30	10	0	40	
14	**A4**	0	0	10	0	10	
15	**Потреби**	20	30	20	30	180	**ЦФ**

Рис. 5.4 – Результати роботи процедури «Solver» (перший варіант)

Як було зауважено вище (перед остаточним записом результатів методу потенціалів), розв’язок даної задачі не єдиний. Другий варіант розв’язку представлено на рис. 5.5. Оптимальний розв’язок транспортної задачі в цьому випадку можна представити матрицею

$$X^{**} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

Мінімальне значення цільової функції при цьому не зміниться, а саме:

$$F_{min}(X) = F(X^{**}) = 180(\text{у.о.}).$$

Зауважимо, що для отримання різних варіантів розв’язку транспортної задачі (якщо розв’язок не єдиний) потрібно повторно запускати на виконання процедуру «Solver» без зміни вхідних даних.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**
4	**A1**	3	1	4	2	30
5	**A2**	1	4	3	3	20
6	**A3**	2	2	4	4	40
7	**A4**	0	0	0	0	10
8	**Потреби**	20	30	20	30	**Сума=100**
9						
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**Запаси**
11	**A1**	0	0	0	30	30
12	**A2**	10	0	10	0	20
13	**A3**	10	30	0	0	40
14	**A4**	0	0	10	0	10
15	**Потреби**	20	30	20	30	**180** **ЦФ**

Рис. 5.5 – Результати роботи процедури «Solver» (другий варіант)

Відповідь. Найменші сумарні транспортні витрати складають 180 у.о. Це відповідає двом варіантам плану перевезень.

Перший варіант:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2 – 20 т вантажу до пункту споживання B_1;
- з пункту виробництва A_3 – 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в B_3;
- при цьому плані споживачB_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Другий варіант:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2 – 10 т вантажу до пункту споживання B_1 і 10 т – в B_3;
- з пункту виробництва A_3 – 10 т вантажу до пункту споживання B_1 і 30 т – в B_2;
- при цьому плані споживачB_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Питання для самоконтролю до теми 5 та лабораторної роботи №3

1. Сформулювати змістовну постановку задачі.
2. Виписати математичну модель транспортної задачі у загальному вигляді.
3. Охарактеризувати способи зведення транспортної задачі до збалансованого виду.
4. Викласти ідею розв’язання транспортної задачі методом потенціалів.
5. Викласти алгоритм розв’язання транспортної задачі за допомогою інструмента «Solver» в MS Excel.

Тема 6 МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ НА МЕРЕЖАХ

6.1 Типові задачі оптимізації на мережах та методи їх розв'язання

Задачі оптимізації на мережах є важливим розділом дослідження операцій і широко застосовуються для моделювання та аналізу систем транспортування, зв'язку, логістики, виробничих процесів, комп'ютерних мереж і проєктного управління. Мережа зазвичай подається у вигляді графа, вершини якого відповідають об'єктам або станам системи, а дуги – можливим зв'язкам між ними з певними характеристиками (вартість, пропускна здатність, тривалість тощо).

Задача найкоротшого шляху полягає в знаходженні шляху з мінімальною сумарною вагою між двома вершинами мережі. Вони застосовується в навігації, маршрутизації даних, плануванні перевезень. Методи розв'язання цієї задачі: алгоритм Дейкстри, алгоритм Беллмана-Форда, алгоритм Флойда-Воршелла.

Задача максимального потоку полягає у визначенні максимального можливого потоку від джерела до стоку за умови обмеженої пропускної здатності дуг. Вона використовується для аналізу транспортних, інформаційних та енергетичних мереж. Методи розв'язання задачі: алгоритм Форда-Фалкерсона, алгоритм Едмондса-Карпа, алгоритм Дініца.

Задача мінімальної вартості потоку передбачає знаходження потоку заданої величини з мінімальними сумарними витратами, вона є узагальненням транспортної задачі. Методи розв'язання: метод потенціалів, алгоритм послідовного найкоротшого шляху, симплекс-метод для мережевих задач.

Задача мінімального кістякового дерева полягає у побудові підмножини ребер, що з'єднує всі вершини мережі з мінімальною сумарною вагою. Застосовується при проєктуванні мереж зв'язку, електромереж, трубопроводів. Методи розв'язання: алгоритм Крускала, алгоритм Прима.

Задачі мережевого планування пов'язані з оптимізацією виконання проєктів у часі. Такі задачі дають змогу визначати тривалість проєкту, критичні роботи та часові резерви. Методи розв'язання: метод критичного шляху (CPM), метод PERT.

Задачі потоків з обмеженнями та узгодження. До них належать задачі призначення, паросполучення та узгодження в двочасткових графах. Вони використовуються у задачах розподілу ресурсів і планування. Методи розв'язання: угорський алгоритм, алгоритми пошуку максимального паросполучення.

Деякі з зазначених задач та методів їх розв'язання вивчаються здобувачами вищої освіти спеціальності «Комп'ютерні науки» в межах курсу «Дискретна математика». Тут коротко розглянемо деякі з таких задач.

6.2 Поняття і термінологія теорії графів та мереж

Теорія графів – це розділ математики, який вивчає властивості та структури графів і методи їх аналізу. Вона широко застосовується в комп'ютерних науках, теорії алгоритмів, логістиці, телекомунікаціях, транспортних і виробничих системах.

Граф – це математична модель, що описується парою

$$G = (V, E),$$

де V – множина вершин (вузлів),

E – множина ребер (дуг), які з'єднують пари вершин.

У контексті *мережевих задач* вершини зазвичай відповідають об'єктам або станам системи, а ребра – зв'язкам між ними (перевезення, передача інформації, залежності робіт тощо).

Основні терміни теорії графів:

– *вершина (вузол)* – елемент графа, що представляє об'єкт або пункт системи;
– *ребро* – зв'язок між двома вершинами в неорієнтованому графі;
– *дуга* – орієнтований зв'язок між вершинами;
– *суміжні вершини* – вершини, з'єднані ребром (дугою);
– *ступінь вершини* – кількість ребер, інцидентних вершині;
– *шлях* – послідовність вершин, з'єднаних ребрами;
– *цикл* – шлях, у якому початкова і кінцева вершини збігаються;
– *зв'язний граф* – граф, у якому між будь-якими двома вершинами існує шлях;
– *кістякове дерево* – зв'язний неорієнтовний граф без циклів.

Неорієнтований граф – це граф, у якому ребра не мають напряму, тобто зв'язок між вершинами є двостороннім.

Приклад неорієнтовного графа наведено на рис. 6.1. У цьому графі

– $1, 2, 3, 4, 5$ – вершини,
– $(1,2), (2,5), (1,5), (3,4)$ – ребра;
– цей граф містить цикл $1 - 2 - 5$;
– граф незв'язний.

Граф на рис. 6.2 є зв'язним. Він не містить циклів. Тому він являє собою кістякове дерево.

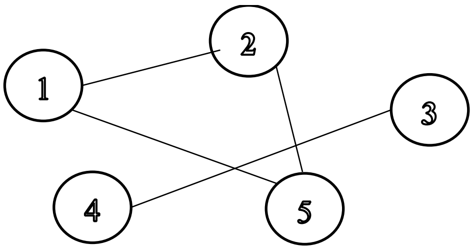


Рис. 6.1 – Неорієнтовний незв'язний граф

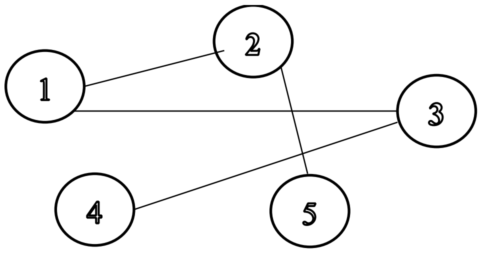


Рис. 6.2 – Неорієнтовний зв'язний граф

Приклади застосування неорієнтовних графів:

– проєктування електричних або комп'ютерних мереж;
– задача мінімального кістякового дерева (алгоритми Прима, Крускала);
– аналіз структур без напрямку руху.

Орієнтований граф – це граф, у якому кожне ребро має напрям і називається дугою.

Приклад орієнтованого графа зображено на рис. 6.3.

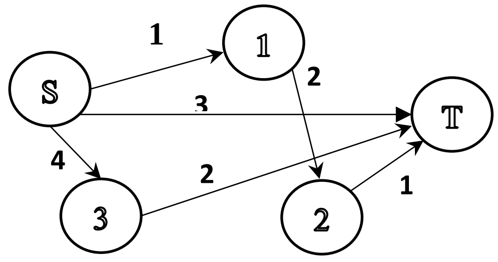


Рис. 6.3 – Орієнтовний граф

Тут:
– дуга 1→2 означає рух або зв’язок лише від вершини 1 до вершини 2;
– напрям має принципове значення;
– шлях можливий лише за напрямом стрілок.

Для орієнтованих графів вводять:
– *вхідний ступінь вершини* – кількість дуг, що входять у вершину;
– *вихідний ступінь вершини* – кількість дуг, що виходять із вершини;
– *вйток (джерело)* – вершина, в якій дуги беруть початок і жодна не закінчується в ній;
– *стік* – вершина, в якій дуги закінчуються і жодна не бере початок.

Приклади застосування:
– транспортні та логістичні мережі;
– комп’ютерні мережі й маршрутизація;
– мережеве планування (CPM, PERT);
– задачі максимального потоку.

Мережі як спеціальний випадок графів

Мережею називають граф (орієнтований або неорієнтований), у якому кожному ребру (дузі) поставлено у відповідність певні характеристики: вартість, пропускну здатність, довжину, тривалість тощо. Така характеристика називається *вагою* ребра (дуги).

Рис. 6.3 є прикладом мережі. Тут:
– S – джерело;
– T – стік;
– дуги мають напрям і мають обмеження на потік.

Таблиця 6.1 – Порівняння орієнтованих і неорієнтованих графів

Ознака	Неорієнтований граф	Орієнтований граф
Напрям зв’язків	Відсутній	Присутній
Тип зв’язку	Двосторонній	Односторонній
Основні задачі	Кістякові дерева	Потоки, шляхи
Приклад	Електромережі	Транспортні мережі

Теорія графів надає універсальний апарат для моделювання та аналізу складних систем. Неорієнтовані графи використовуються для опису симетричних зв’язків, тоді як орієнтовані графи є основою для моделювання потоків, процесів і мережевих задач у дослідженні операцій та комп’ютерних науках.

6.3 Задача мінімізації мережі та її розв’язання методом Крускала

6.3.1 Постановка задачі мінімізації мережі

Нехай задано множину об’єктів (пунктів, вузлів), між якими можливе прокладання з’єднань. Для кожної пари об’єктів, що може бути безпосередньо з’єднана, відома вартість (або довжина) відповідного з’єднання. Необхідно побудувати таку мережу з’єднань, яка забезпечує зв’язність усіх об’єктів, тобто можливість передачі інформації, ресурсів або енергії між будь-якою парою вузлів (безпосередньо або через інші вузли), та при цьому має мінімальну сумарну вартість з’єднань.

Таким чином, задача формалізується як задача *побудови мінімального кістякового дерева зваженого неорієнтованого графа* і може бути розв’язана, зокрема, алгоритмами Крускала або Прима. Викладемо алгоритм Крускала в загальному вигляді.

6.3.2Алгоритм Крускала побудови мінімального кістякового дерева

Вхідні дані:

– неорієнтований зв’язний зважений граф

$$G = (V, E),$$

де кожному ребру $e \in E$ поставлено у відповідність вагу $\omega(e)$.

Вихідні дані:

– мінімальне кістякове дерево $T \subseteq E$.

Кроки алгоритму:

1. *Ініціалізація.*

Вважати, що множина ребер T кістякового дерева порожня:

$$T = \emptyset.$$

Кожну вершину графа розглядати як окрему компоненту зв’язності.

2. *Сортування ребер.*

Впорядкувати всі ребра графа E за зростанням їх ваг:

$$\omega(e_1) \leq \omega(e_2) \leq \cdots \leq \omega\left(e_{|E|}\right),$$

де $|E|$ −кількість ребер графа G.

3. *Послідовний перегляд ребер.*

Послідовно переглядати ребра у відсортованому списку.

Для кожного ребра $e = (u, v)$:

- якщо вершини u і v належать *різним компонентам зв’язності*, то:
  - додати ребро e до множини T;
  - об’єднати відповідні компоненти;
- інакше (якщо додавання ребра утворює цикл) – ребро пропустити.

4. *Умова завершення.*

Алгоритм завершується, коли

$$|T| = |V| - 1.$$

Результат

Множина ребер T утворює *мінімальне кістякове дерево,* тобто:

– граф є зв’язним;

– не містить циклів;

– сумарна вага ребер

$$\sum_{e \in T} \omega(e)$$

є мінімальною серед усіх кістякових дерев графа G.

Зауваження:

– алгоритм Крускала є *жадібним алгоритмом*, який на кожному кроці побудови розв'язку робить локально оптимальний вибір, тобто обирає найкращий варіант за заданим критерієм на поточному етапі, не переглядаючи попередні розв'язки і не аналізуючи всі можливі майбутні наслідки, з метою отримання оптимального або наближено оптимального глобального розв'язку;
– алгоритм застосовується *лише до неорієнтованих графів.*

Приклад 6.1 Для заданого графа (див. рис. 6.4):

– скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі мінімізації мережі;
– знайти у побудованому графі мінімальне кістякове дерево за допомогою алгоритмів Крускала;
– зробити висновки в термінах постановки задачі.

Розв'язання.

Змістовна постановка задачі

Комунальне підприємство планує модернізацію системи електропостачання житлового району. Відоме розташування трансформаторних підстанцій та можливі варіанти прокладання кабельних ліній, які можуть з'єднувати підстанції між собою, а також з центральною розподільчою підстанцією. Необхідно спроєктувати таку схему прокладання кабельних ліній мінімальної загальної довжини, яка забезпечить електропостачання кожної трансформаторної підстанції від центральної (безпосередньо або через інші підстанції). Відомі довжини можливих кабельних ліній (у кілометрах), що з'єднують усі підстанції між собою та з центральною підстанцією.

Математична модель. Математичною моделлю цієї задачі є її зображення у вигляді мережі (див. рис. 6.4).

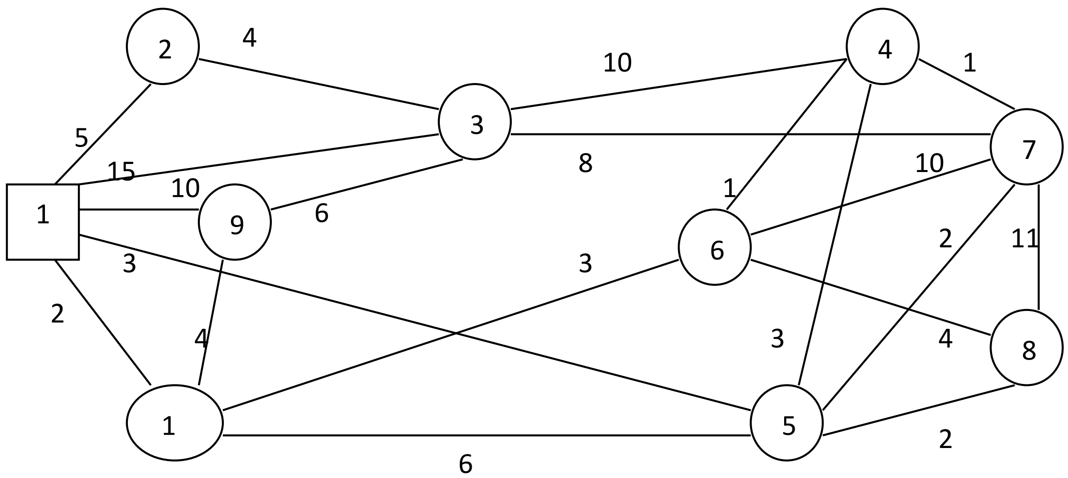


Рис. 6.4 – Мережева модель задачі

Нехай вершина 1 мережі відповідає центральній розподільчій підстанції, а вершини 2–10 – трансформаторній підстанції. Ребра, що з'єднують пари вершин мережі, позначають кабельні лінії, а їхні ваги – довжину відповідної лінії. Необхідно знайти в заданій мережі кістякове дерево мінімальної ваги, яке з’єднує вершину 1 з усіма іншими вершинами мережі.

Розв’яжемо початкову задачу за допомогою побудованої математичної моделі, використовуючи *алгоритм Крускала*. Для цього впорядкуємо ребра за зростанням їхніх ваг(див. табл. 6.2).

Таблиця 6.2 – Реалізація алгоритму Крускала

Ребро, l	$(4,7)^*$	$(4,6)^*$	$(1,10)^*$	$(5,7)^*$	$(5,8)^*$	$(1,5)^{*(-)}$	$(6,10)^{-(*)}$	$(4,5)^-$	$(9,10)^*$	$(2,3)^*$
Вага ребра, $w(l)$	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4
Ребро, l	$(6,8)^-$	$(1,2)^*$	$(3,9)^-$	$(5,10)^-$	$(3,7)^-$	$(1,9)^-$	$(3,4)^-$	$(6,7)^-$	$(7,8)^-$	$(1,3)^-$
Вага ребра, $w(l)$	4	5	6	6	8	10	10	10	11	15

В табл. 6.2 знаком «*» позначені ребра, що включаються до кістякового дерева, знаком «– » – не включаються.

При реалізації алгоритму включається одне з ребер (5,8) або (1,5), чим пояснюються позначення «*(-)» або «-(*)» відповідно.

Таким чином, дана задача має два оптимальні розв’язки (кістякові дерева мінімальної ваги), побудована на рис. 6.5.

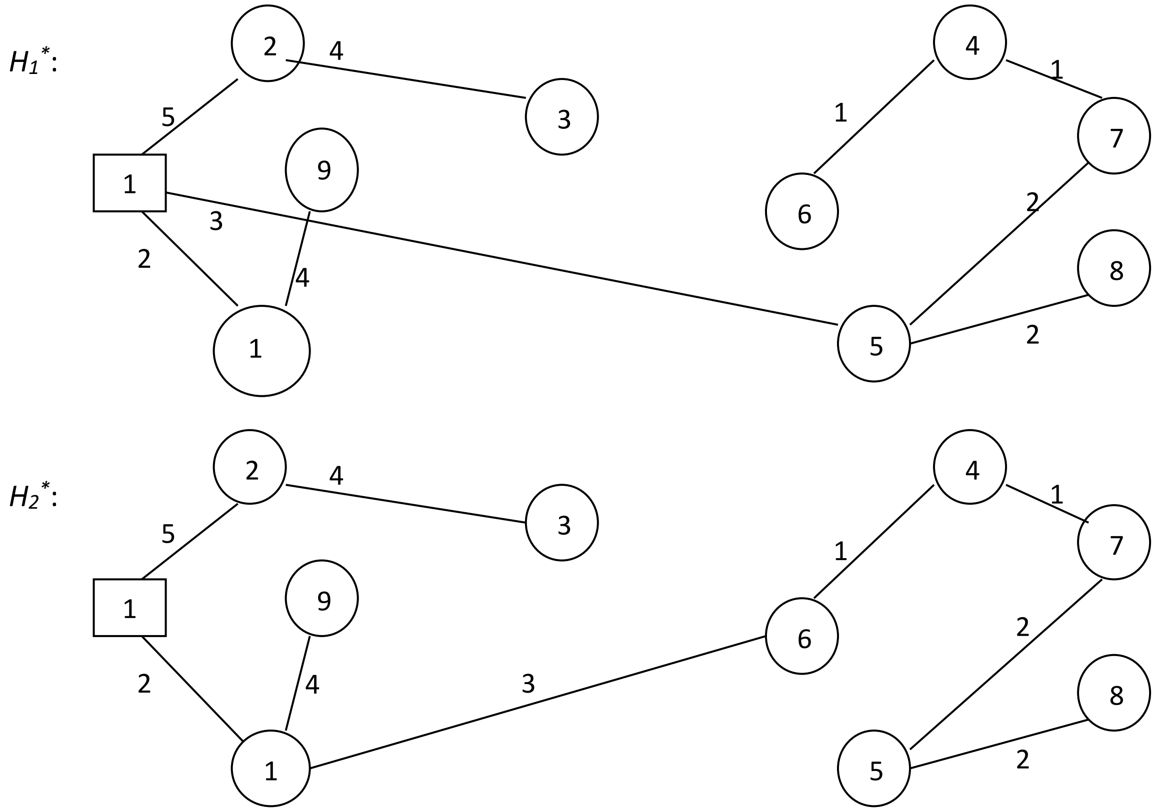


Рис. 6.5 – Оптимальні розв’язки задачі

Розрахуємо вагу мінімального кістякового дерева:

$$\omega(l) = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 = 24.$$

Відповідь. Для прокладки системи електропостачання житлового району знадобиться мінімум 24 км кабельних ліній, укладеного двома можливими способами так, як показано на рис. 6.5.

6.4 Задача про максимальний потік та її розв’язування за алгоритмом Форда-Фалкерсона

6.4.1 Постановка задачі про максимальний потік

Розглянемо $G = (V, E)$ – орієнтовний граф. Нехай вершина $S' \epsilon V$ – виток, а $S'' \epsilon V$ – стік. Припустимо, в G існує рівно один виток S' і один стік S''.

Функція φ: A→R_+ − *пропускна спроможність*, тобто $\varphi(l)$ − пропускна спроможність дуги l, яка визначає максимальну кількість потоку, що проходить по дузі l.

Потік $\mu(u, v)$ – величина, що задовольняє умови:

– обмеження пропускної здатності:

$$0 \leq \mu(u, v) \leq \phi(u, v);$$

– умова збереження потоку для всіх $v \in V \setminus \{s, t\}$:

$$\sum_{u:(u,v)\in E} \mu(u, v) = \sum_{w:(v,w)\in E} \mu(v, w).$$

Величиною потоку називають число

$$\rho(\mu) = \sum_{(S',v)\in E} \mu(S', v).$$

Теорема 6.1 В графі $G = (V, E)$ сумарний потік вздовж всіх дуг, що виходять з витоку, дорівнює сумарному потоку вздовж всіх дуг, що входять у стік, тобто:

$$\sum_{(S',v)\in E} \mu(S', v) = \sum_{(v,S'')\in E} \mu(v, S'').$$

Постановка задачі про максимальний потік.

Нехай $G = (V, E)$ − орієнтований граф, що має одне джерело та один стік. Нехай φ: A→R_+ − пропускна спроможність дуг цього графа. $M = \{\mu\}$ − множина всіх потоків у графі G, де μ − величина потоку.

Серед усіх потоків у графі G необхідно знайти потік максимальної величини, тобто:

$$\rho(\mu) \to max\,, \text{ де } \mu \in M.$$

6.4.2 Алгоритм Форда-Фалкерсона розв’язання задачі про максимальний потік

Викладемо *алгоритм Форда-Фалкерсона для знаходження максимального потоку* у загальному вигляді.

Вхідні дані:

орієнтована мережа

$$G = (V, E),$$

у якій:

– $S' \in V$ – джерело,
– $S'' \in V$ – стік ($S' \neq S''$),

- кожній дузі $(u, v) \in E$ поставлено у відповідність пропускну здатність $\phi(u, v) \geq 0$.

Вихідні дані:
максимальний потік ρ з вершини S' до вершини S''.

Залишкова мережа G_μ – мережа, що описує можливість збільшення потоку.

Кроки алгоритму

1. *Ініціалізація.*

Покласти початковий потік рівним нулю:

$$\mu(u, v) = 0 \;\; \forall (u, v) \in E.$$

2. *Побудова залишкової мережі.*

Для кожної дуги $(u, v) \in E$ визначити залишкову пропускну здатність:

$$\phi_\mu(u, v) \; = \; \phi(u, v) \; - \; \mu(u, v),$$

а також зворотну дугу (v, u) з пропускною здатністю:

$$\phi_\mu(v, u) \; = \; \mu(u, v).$$

3. *Пошук збільшувального шляху.*

У залишковій мережі G_μ знайти будь-який шлях P від джерела S' до стоку S'', такий що

$$\phi_\mu(u, v) > 0 \text{ для всіх дуг } (u, v) \in P.$$

4. *Збільшення потоку.*

Визначити мінімальну залишкову пропускну здатність уздовж шляху:

$$\alpha = \min_{(u,v) \in P} \phi_\mu(u, v).$$

Для кожної дуги $(u, v) \in P$:

- якщо $(u, v) \in E$, покласти
$$\mu(u, v) = \mu(u, v) + \alpha;$$
- якщо $(v, u) \in E$, покласти
$$\mu(v, u) = \mu(v, u) - \alpha.$$

5. *Повторення.*

Повернутися до кроку 2, доки існує збільшувальний шлях із S' до S''.

6. *Завершення.*

Коли збільшувальних шляхів більше не існує, потік ρ є *максимальним.*

Результат
Максимальний потік дорівнює

$$\rho(\mu) = \sum_{(S', v) \in E} \mu(S', v).$$

Зауваження:

- алгоритм є *жадібним:* на кожному кроці локально збільшує потік;
- час роботи залежить від способу вибору збільшувального шляху;
- модифікація з пошуком найкоротшого (за кількістю дуг) шляху відома як *алгоритм Едмондса-Карпа*.

Приклад 6.2 Задано зважений орієнтований граф (мережева модель). Для заданої мережі:

– скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі про максимальний потік;
– знайти потік максимальної величини за допомогою алгоритму Форда-Фалкерсона;
– зробити висновки в термінах постановки техніко-економічної задачі.

Розв'язання.

Змістовна постановка задачі

Великий логістичний центр здійснює приймання вантажів із двох морських портів. Порти з'єднані зі складським комплексом мережею автомобільних шляхів, кожен з яких має обмежену пропускну здатність, що визначається станом дорожнього покриття та організацією руху. Необхідно визначити такий розподіл вантажопотоку в межах заданої транспортної мережі, за якого сумарний обсяг вантажів, доставлених до логістичного центру з обох портів за одиницю часу, буде максимальним.

Математична модель в термінах теорії графів.

Нехай S_1', S_2', – два морські порти, S'' – логістичний центр (складський центр); вершини *1–4* – проміжні вузли, через які проходить дорожня мережа; *дуги мережі* – це шосейні дороги, що з'єднують морські порти з містом; *вага дуги* – максимальний пасажиропотік, який може пройти цією дорогою за одиницю часу.

Математична модель у формі орієнтованого графа подана на рис. 6.6.

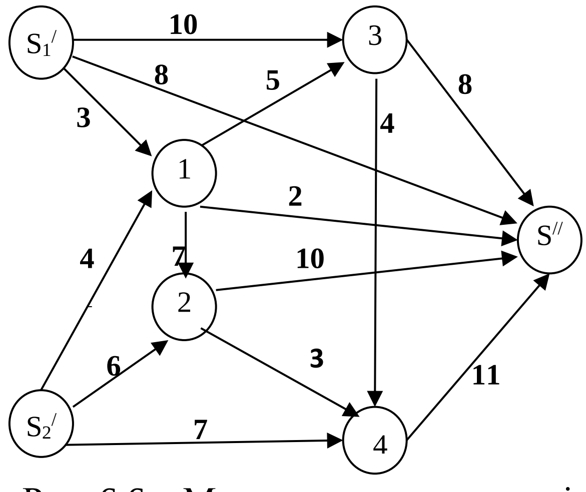


Рис. 6.6 – Мережева модель задачі

Розв'яжемо дану задачу як задачу про максимальний потік у мережі з використанням алгоритму Форда-Фалкерсона.

Спочатку потрібно звести орієнтовний граф до виду, в якому наявний лише один сток і один виток. У даному випадку вводимо фіктивний виток S', з'єднуючи його з фактичними витоками S_1' і S_2',. Ваги з'єднуючих дуг визначаємо як суму ваг тих дуг, що виходять з S_1', S_2',. Вага дуги $(\mathrm{S}', \mathrm{S}_1')$ дорівнюватиме 21, а дуги $(\mathrm{S}', \mathrm{S}_2') - 17$ (див рис. 6.7).

Орієнтовані шляхи від умовного джерела S' до стоку S'' та реалізація алгоритму Форда-Фалекрсона виписано нижче для поставленої задачі.

1) $S' \to S_2' \to 4 \to S''$, $\alpha_1 = min\{17; 7; 11\} = 7$, $(S_2'; 4)$ ↓;

2) $S' \to S_2' \to 1 \to 2 \to S''$, $\alpha_2 = min\{10;4;7;10\} = 4$, $(S_2';1)\downarrow$;
3) $S' \to S_2' \to 2 \to S''$, $\alpha_3 = min\{6;6;6\} = 6$, $(S';S_2'), (S_2';2), (2;S'')\downarrow$;
4) $S' \to S_1' \to 3 \to S''$, $\alpha_4 = min\{21;10;8\} = 8$, $(3;S'')\downarrow$;
5) $S' \to S_1' \to 3 \to 4 \to S''$, $\alpha_5 = min\{13;2;4;4\} = 2$, $(S_1';3)\downarrow$;
6) $S' \to S_1' \to S''$, $\alpha_6 = min\{11;8\} = 8$, $(S';S'')\downarrow$;
7) $S' \to S_1' \to 1 \to 3 \to 4 \to S''$, $\alpha_7 = min\{3;3;5;2;2\} = 2, (3;4), (4;S'')\downarrow$;
8) $S' \to S_1' \to 1 \to S''$, $\alpha_8 = min\{1;1;2\} = 1$, $(S';S_1'), (S_1';1)\downarrow$.

Розв'язання оформимо на мережевій моделі (рис. 6.7).

Величина максимального потоку, знайденого за допомогою даного алгоритму, дорівнює:

$$\rho_{max} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 =$$
$$= 7 + 4 + 6 + 8 + 2 + 8 + 2 + 1 = 38.$$

Оптимальне розв'язання цієї задачі, тобто потік максимальної величини, зображено на рис. 6.8.

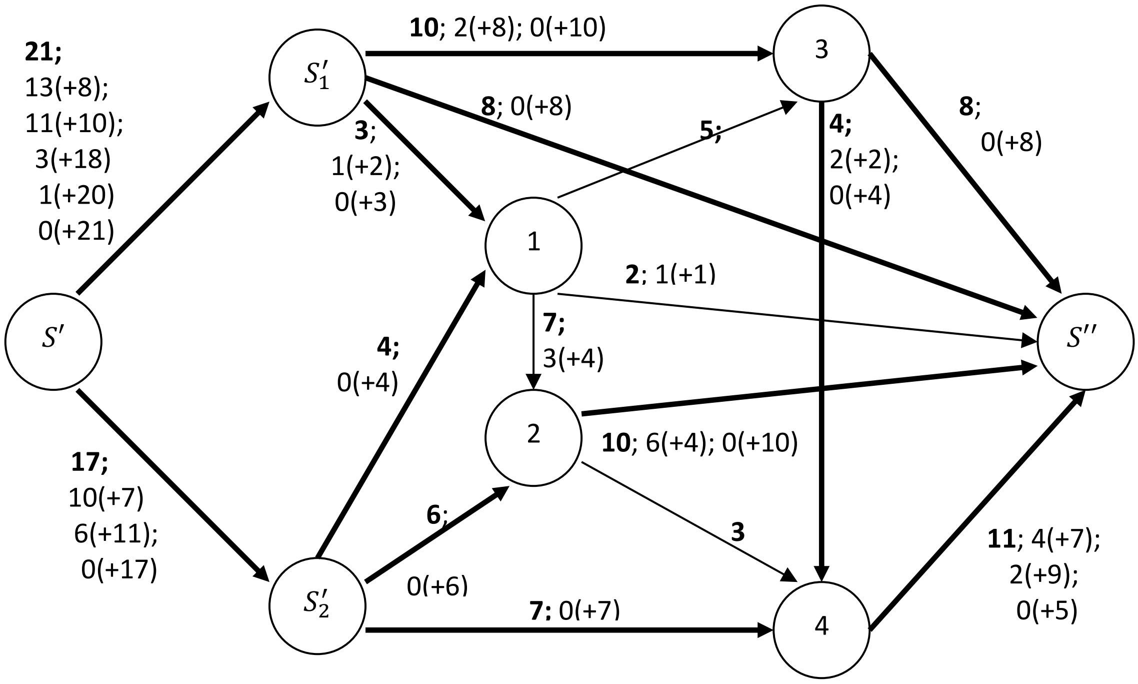


Рис. 6.7 – Розв'язання задачі про максимальний потік за алгоритмом Форда-Фалкерсона

Відповідь. Перевезення вантажу з морських портів до логістичного центру слід здійснювати відповідно до схеми, поданої на рис. 6.8. При цьому сумарний обсяг вантажів буде максимальною і становитиме 38 т на годину (наприклад).

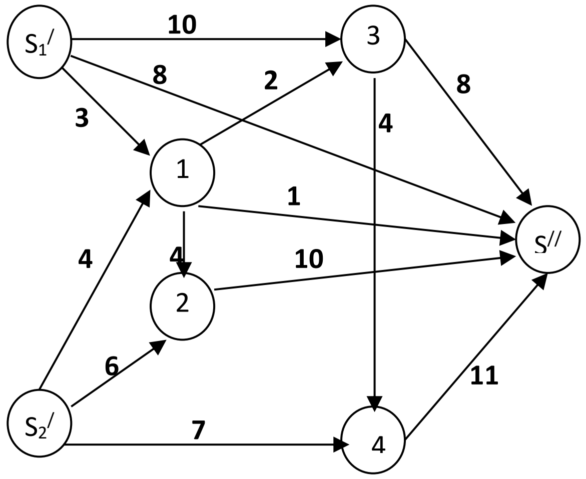


Рис. 6.8 – Оптимальний розв’язок задачі (максимальний потік)

6.5 Задача про максимальний потік як задача лінійного програмування

Задача максимального потоку може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування. Водночас застосування симплекс-методу для безпосереднього розв’язання мережевих задач є неефективним. Разом із тим аналіз мережевих задач у формі задач лінійного програмування дає змогу виявляти моделі ЛП, які на перший погляд не мають мережевої структури, але можуть бути зведені до мережевих задач безпосередньо або після відповідних перетворень. Перевагою такого підходу є можливість використання спеціалізованих мережевих алгоритмів, що забезпечують істотне підвищення обчислювальної ефективності.

Побудуємо математичну модель задачі лінійного програмування про максимальний потік.

Змінні моделі. Нехай X_{ij} – потік, що проходить через дугу (i,j), тобто змінним лінійної моделі відповідає кожна дуга мережевої моделі.

Цільова функція моделі має формалізувати мету задачі – потік, що виходить із джерела, повинен бути максимальним. Сумарний потік, що виходить із джерела S', згідно з введеними змінними, дорівнює сумі $\sum_j X_{S'j}$за всіма дугами, що виходять із вершини S'. Тоді цільову функцію можна записати у вигляді:

$$\rho = \sum_j X_{S'j} \to max.$$

Система обмежень. Відповідно до техніко-економічного змісту введених змінних, на них мають бути накладені такі обмеження:

1) *сумарний потік, що виходить із джерела S', дорівнює сумарному потоку, який надходить у стік S''*. Математично це можна записати так:

$$\sum_{(S';\ j)} X_{S'j} = \sum_{(i;\ S'')} X_{iS''};$$

2) *для будь-якої проміжної вершини мережі* k *сумарний потік, що входить у неї, дорівнює сумарному потоку, що виходить із неї.* Математично це записується так:

$$\sum_{(i;\ k)} X_{ik} = \sum_{(k;\ j)} X_{kj}\ ;$$

3) з визначення поняття потоку в мережі випливає умова обмеження на величину потоку:

$$0 \le X_{ij} \le \phi_{ij},$$

де ϕ_{ij}– пропускна здатність дуги (i, j).

Таким чином, математична лінійна модель задачі про максимальний потік має вигляд:

$$\rho = \sum_{j} X_{S'j} \to max; \qquad (6.1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{(S';\ j)} X_{S'j} = \sum\limits_{(i;\ S'')} X_{iS''}\ ; \\ \sum\limits_{(i;\ k)} X_{ik} = \sum\limits_{(k;\ j)} X_{kj}; \\ 0 \le X_{ij} \le \phi_{ij}. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Лабораторна робота №4. Задача про максимальний потік

Мета роботи: засвоїти методи розв'язання задачі про максимальний потік.

Цілі роботи:

- навчитися формулювати змістовну постановку задачі про максимальний потік;
- навчитися будувати математичну модель задачі про максимальний потік у формі графа та у формі задачі лінійного програмування;
- оволодіти способами зведення задачі до виду, в якому орієнтовний граф має лише один виток і лише один стік;
- засвоїти методи розв'язання задачі про максимальний потік;
- набути навичок формулювання математичними та економічними висновками щодо отриманого розв'язку задачі про максимальний потік.

6.6 Завдання до лабораторної роботи №4

Надано зважений орієнтований граф (мережева модель). Для заданої мережі (див. індивідуальні варіанти):

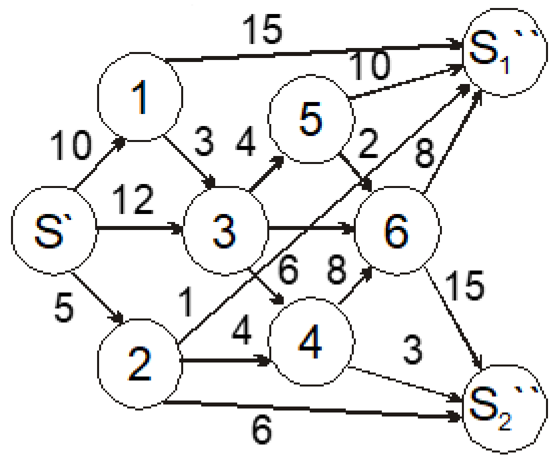
- скласти змістовну постановку певної техніко-економічної задачі як задачі про максимальний потік;

– знайти максимальний потік з використанням процедури «Solver» у Microsoft Excel for Windows;
– зробити висновки в термінах постановки техніко-економічної задачі.

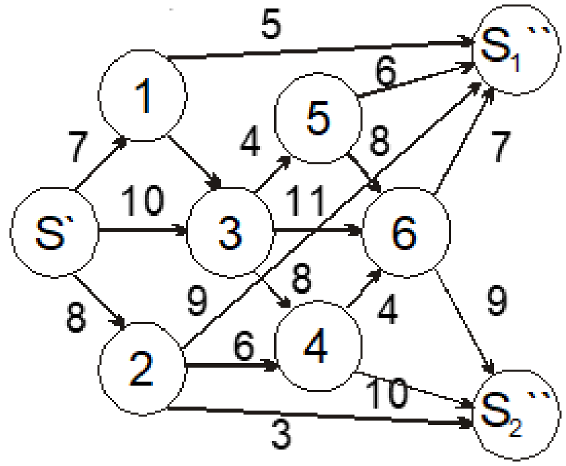
6.7 Варіанти лабораторної роботи №4

Нижче наведено індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №4

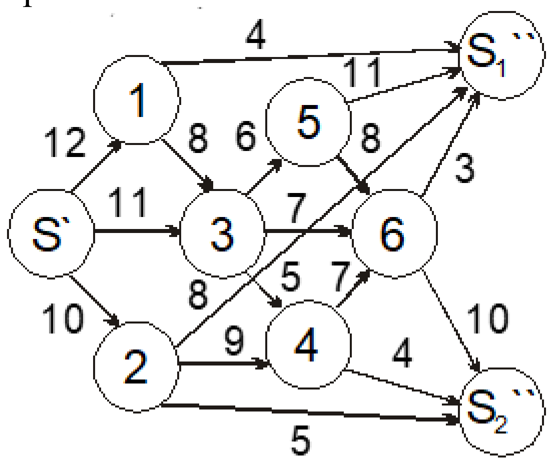
Варіант 1



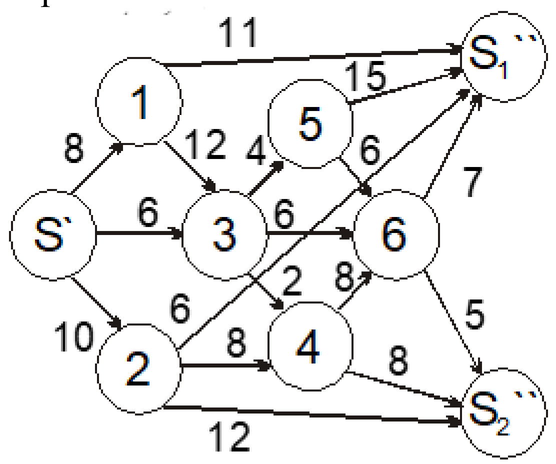
Варіант 2



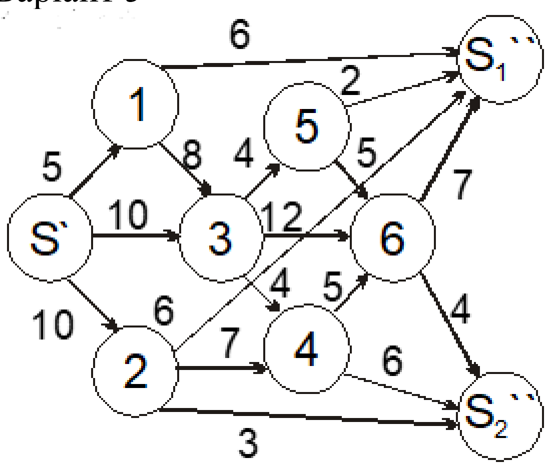
Варіант 3



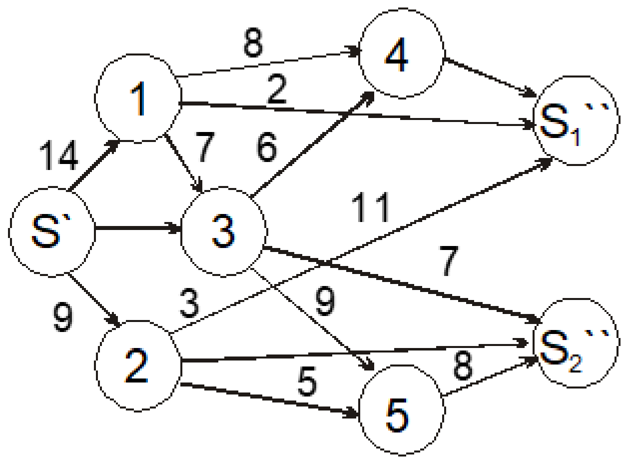
Варіант 4



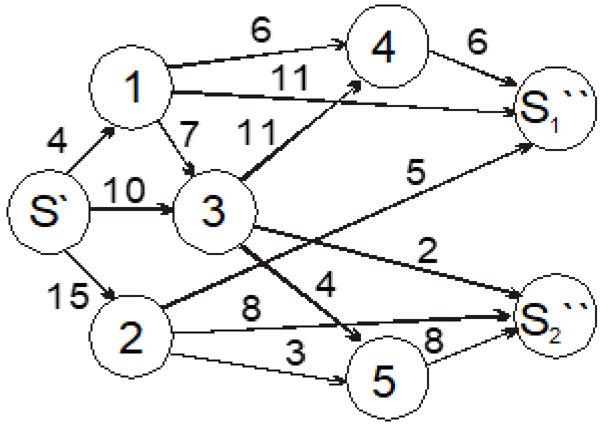
Варіант 5



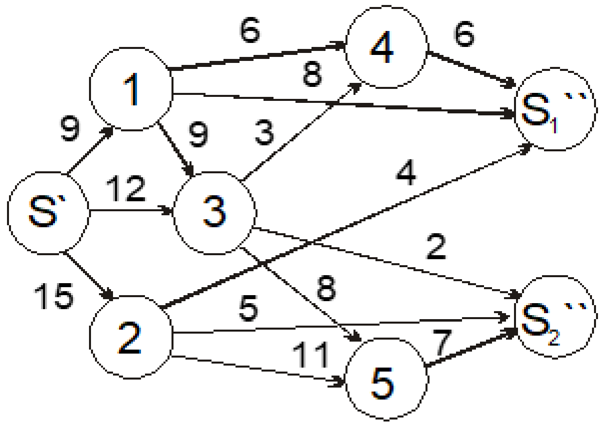
Варіант 6



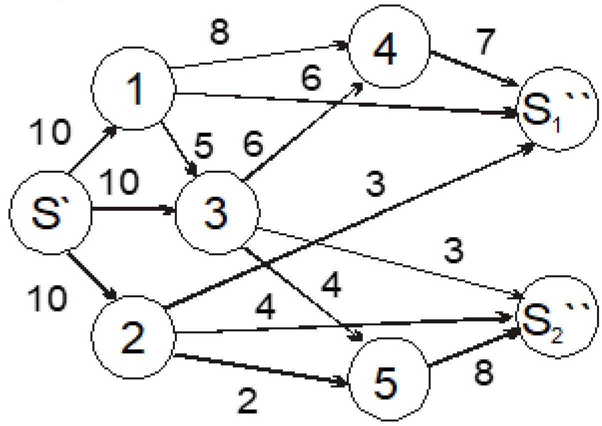
Варіант 7



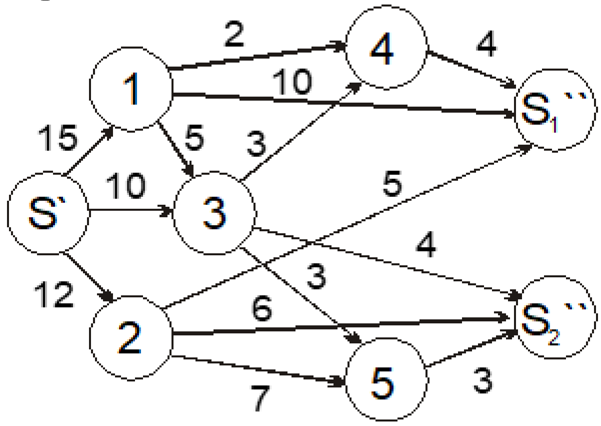
Варіант 8



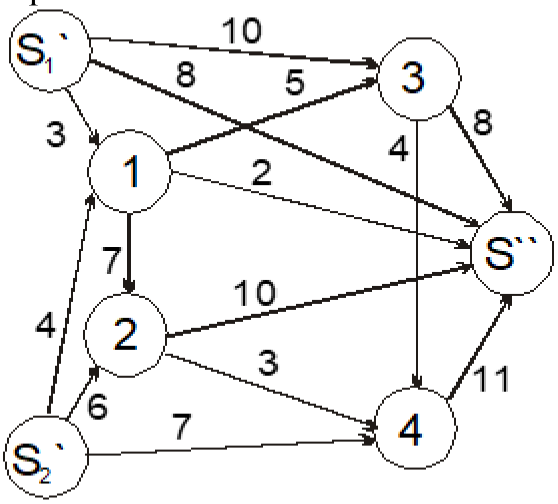
Варіант 9



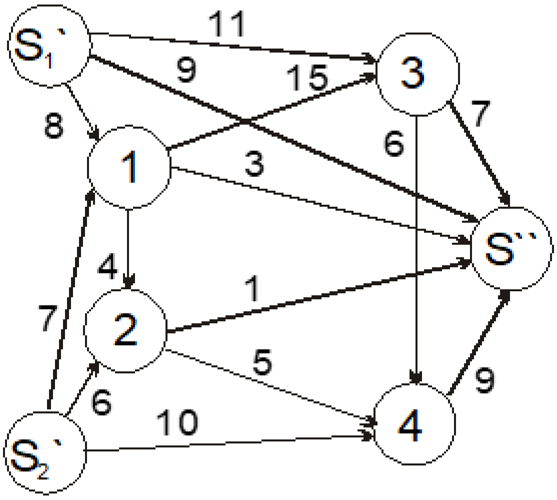
Варіант 10



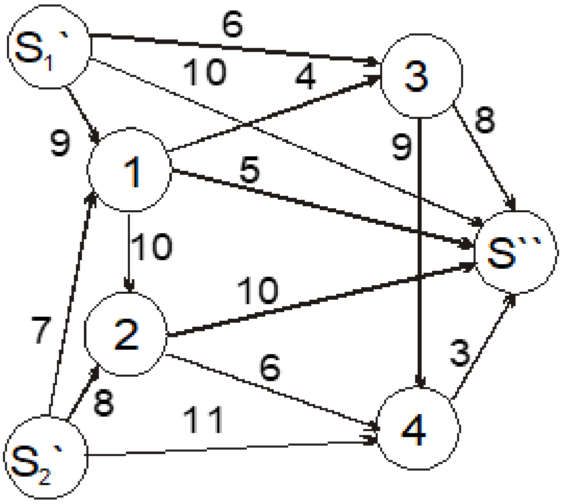
Варіант 11



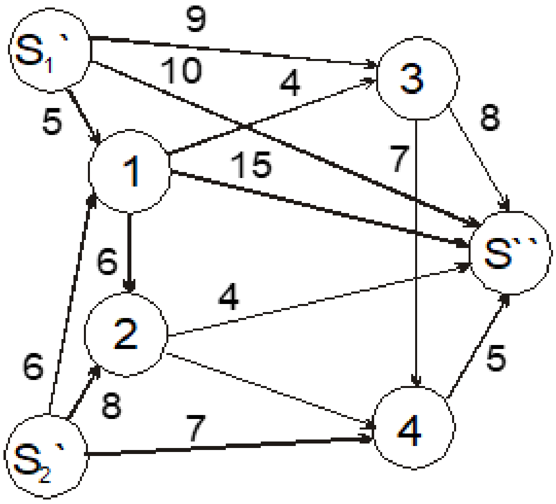
Варіант 12



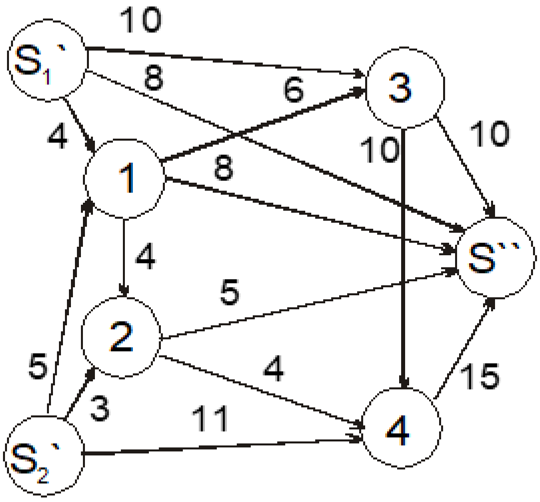
Варіант 13



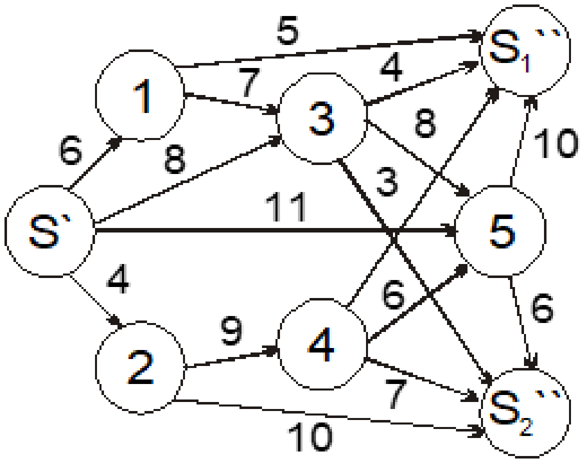
Варіант 14



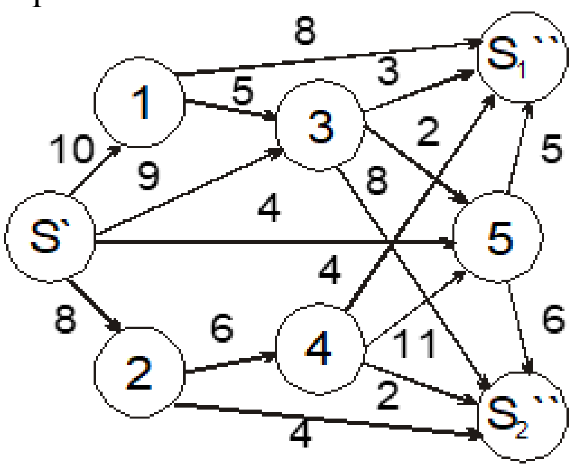
Варіант 15



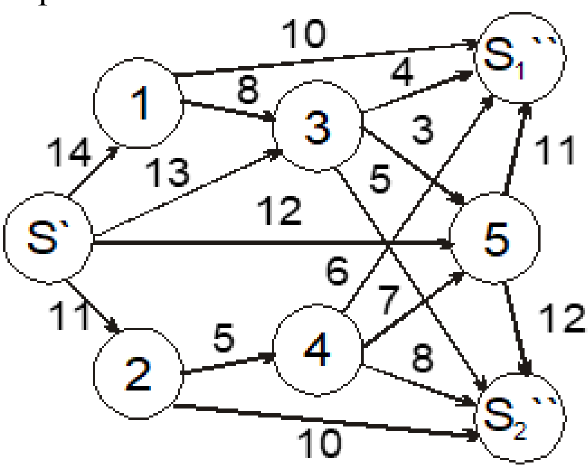
Варіант 16

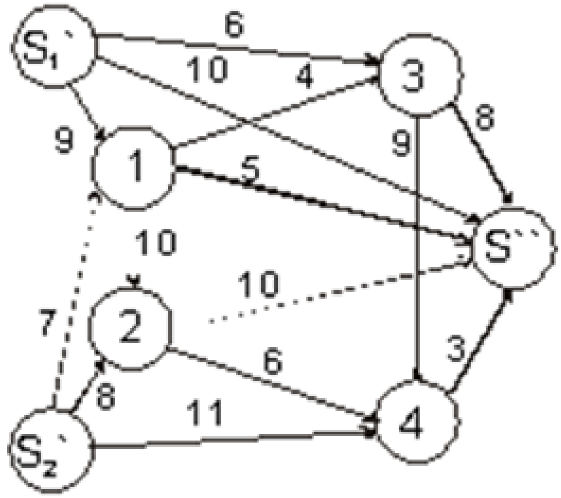
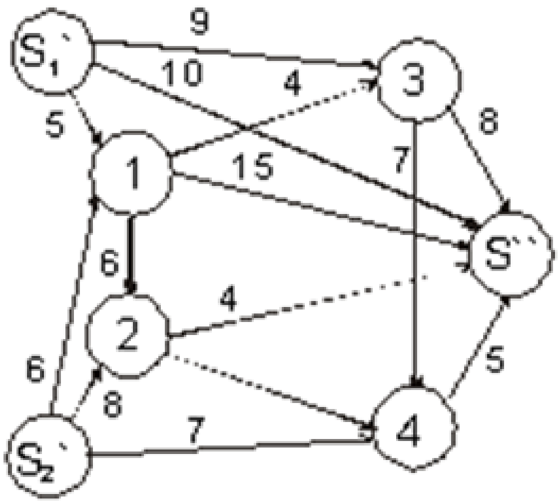
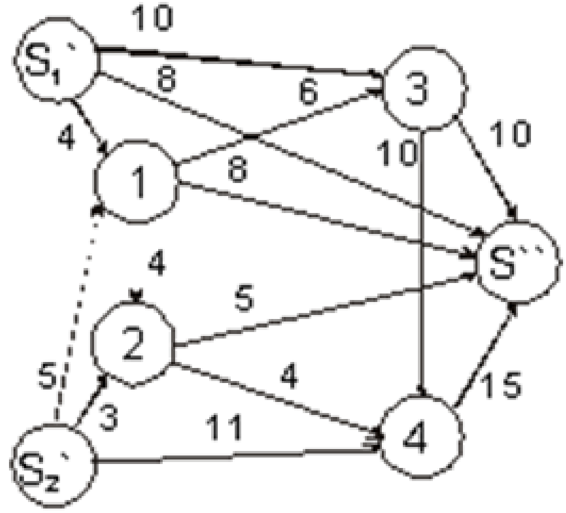
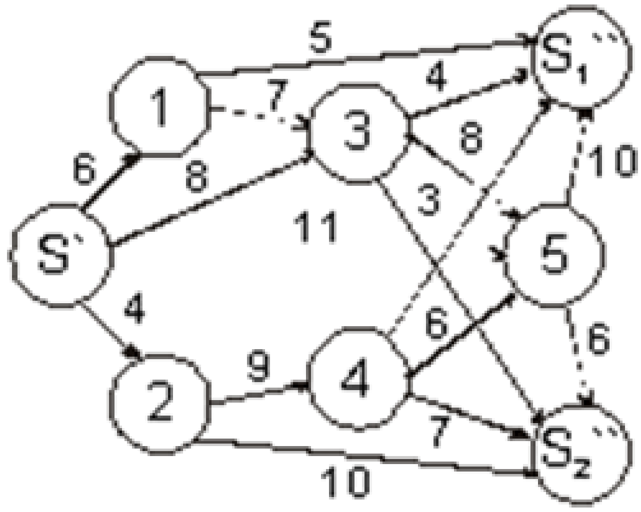
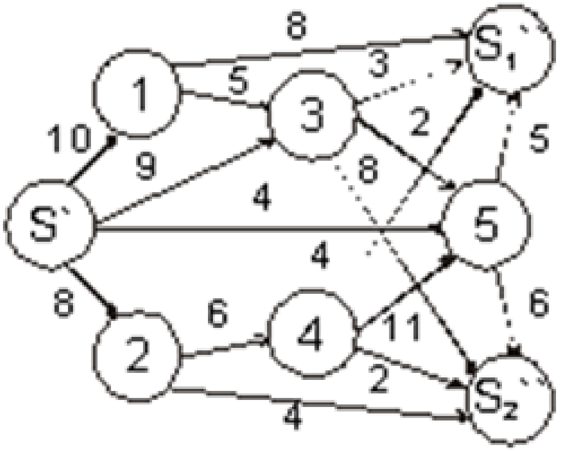
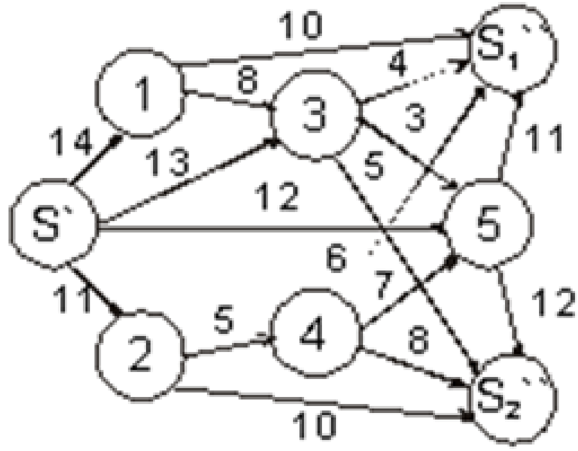


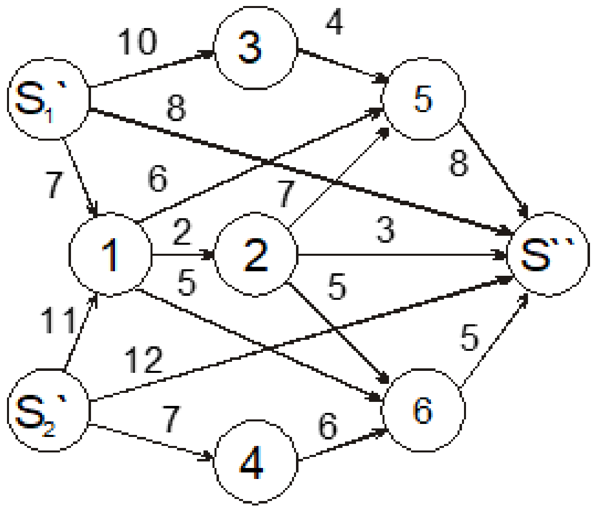
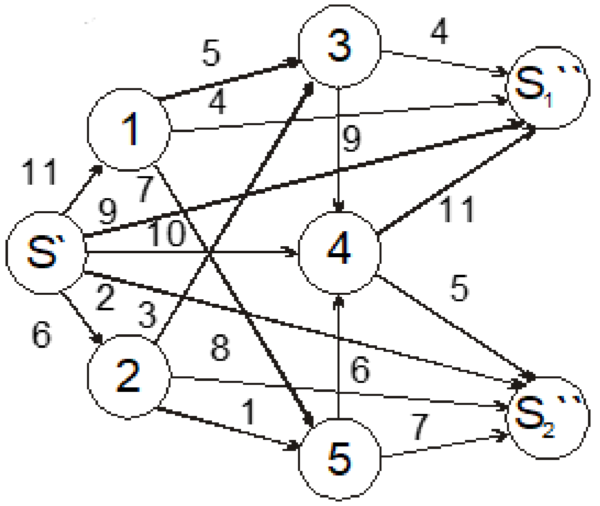
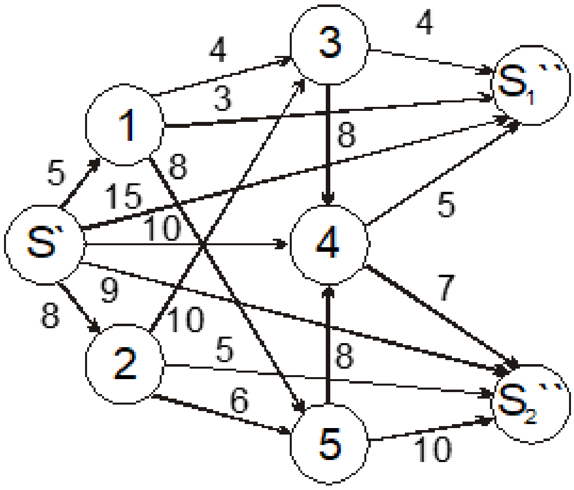
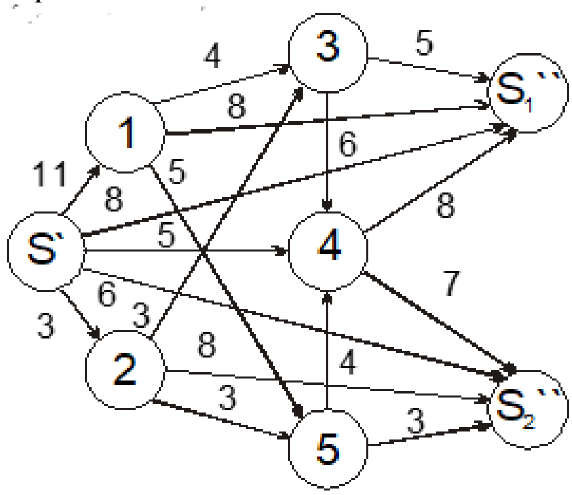
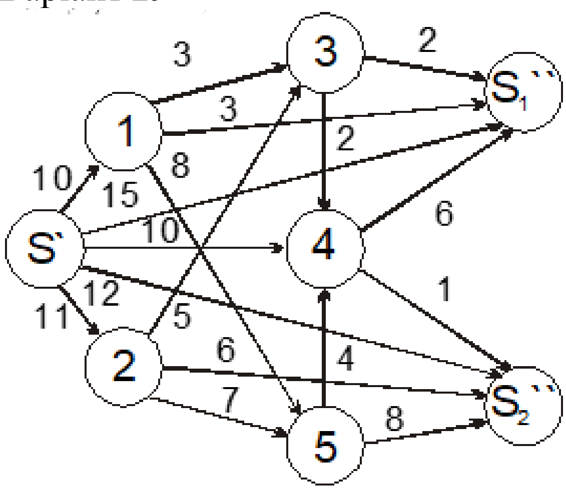
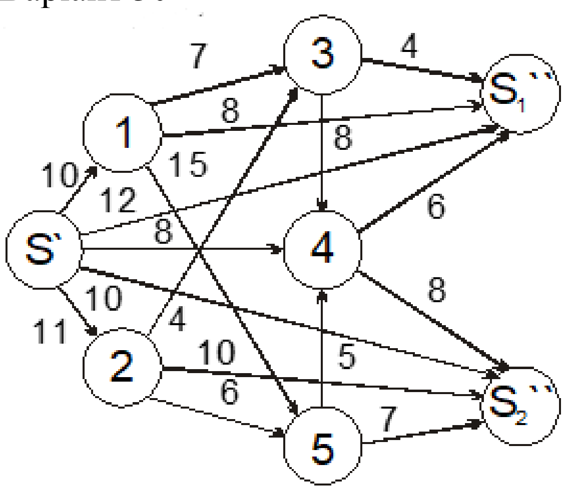
Варіант 17



Варіант 18



Варіант 19 	Варіант 20 
Варіант 21 	Варіант 22 
Варіант 23 	Варіант 24 

Варіант 25 	Варіант 26 
Варіант 27 	Варіант 28 
Варіант 29 	Варіант 30 

6.8 Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи №4

Продемонструємо розв'язання задачі про максимальний потік з використання інструмента «Solver» в Ms Excel для прикладу 6.2. Йому відповідає граф на рис. 6.6.

Спочатку потрібно звести орієнтовний граф до виду, в якому наявний лише один виток і один сток. Деталі такої дії викладено в пп 6.4.2, а результат – на рис. 6.9.

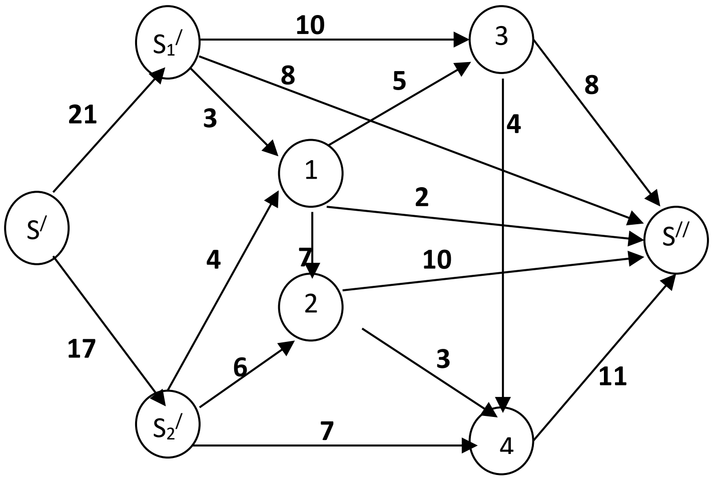


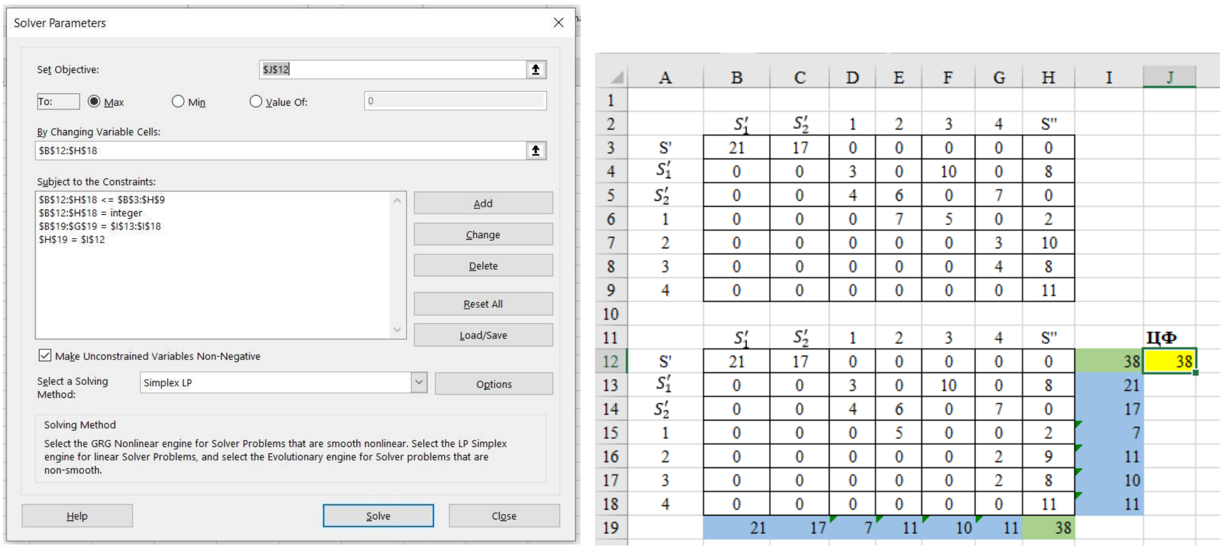
Рис. 6.9 – Мережева модель задачі з доданим фіктивним витоком

Тепер розглянемо математичну модель задачі про максимальний потік, як задачі лінійного програмування у формі (6.1) і (6.2). Відповідно до цього, підготуємо аркуша MS Excel (див. рис. 6.10) з внесенням даних, що відповідають графу на рис. 6.9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		S_1'	S_2'	1	2	3	4	S''		
3	S'	21	17							
4	S_1'			3		10		8		
5	S_2'			4	6		7			
6	1				7	5		2		
7	2						3	10		
8	3						4	8		
9	4							11		
10										
11		S_1'	S_2'	1	2	3	4	S''		**ЦФ**
12	S'								=SUM(B12:H12)	=SUM(B12:H12)
13	S_1'								=SUM(B13:H13)	
14	S_2'								=SUM(B14:H14)	
15	1								=SUM(B15:H15)	
16	2								=SUM(B16:H16)	
17	3								=SUM(B17:H17)	
18	4								=SUM(B18:H18)	
19		=SUM(B12:B18)	=SUM(C12:C18)	=SUM(D12:D18)	=SUM(E12:E18)	=SUM(F12:F18)	=SUM(G12:G18)	=SUM(H12:H18)		

Рис. 6.10 – Внесення даних та формул на аркуш MS Excel

Далі заповнюємо екранну форму вікна «Solver Parameters» (рис. 6.11, а) і запускаємо процедуру на виконання, результат чого продемонстровано на рис. 6.11, б.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		S_1'	S_2'	1	2	3	4	S''		
3	S'	21	17	0	0	0	0	0		
4	S_1'	0	0	3	0	10	0	8		
5	S_2'	0	0	4	6	0	7	0		
6	1	0	0	0	7	5	0	2		
7	2	0	0	0	0	0	3	10		
8	3	0	0	0	0	0	4	8		
9	4	0	0	0	0	0	0	11		
10										
11		S_1'	S_2'	1	2	3	4	S''		ЦФ
12	S'	21	17	0	0	0	0	0	38	38
13	S_1'	0	0	3	0	10	0	8	21	
14	S_2'	0	0	4	6	0	7	0	17	
15	1	0	0	0	5	0	0	2	7	
16	2	0	0	0	0	0	2	9	11	
17	3	0	0	0	0	0	2	8	10	
18	4	0	0	0	0	0	0	11	11	
19		21	17	7	11	10	11	38		

а) б)

Рис. 6.11 – Реалізація використання інструмента «Solver» в задачі про максимальний потік

Оптимальні розв'язки задачі про максимальний потік за допомогою процедури «Пошук розв'язку» в Microsoft Excel for Windows наведені на рис. 6.12.

Зауважимо, що подібні задачі, як правило, мають не один розв'язок. Наведений на рис. 6.12 розв'язок відрізняється від наведеного на рис. 6.8.

Знайдіть третій розв'язок даної задачі самостійно!

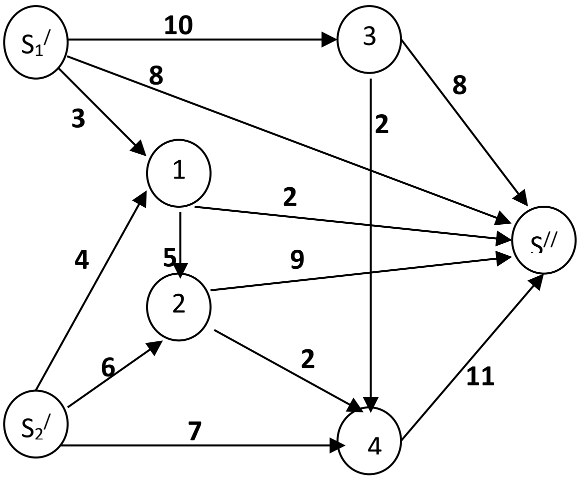


Рис. 6.12 – Другий варіант оптимального розв'язку задачі (максимальний потік)

Питання до самоконтролю до теми 6 та лабораторної роботи №3

1. Надати означення основних термінів теорії графів. Навести приклади.
2. Сформулювати змістовну постановку задачі мінімізації мережі.
3. Викласти алгоритм Крускала пошуку мінімального кістякового дерева.
4. Надати означення потоку в мережі.

5. Сформулювати економічну та математичну постановку задачі про максимальний потік.

6. Викласти алгоритм Форда-Фалкерсона розв’язання задачі про максимальний потік.

7. Виписати математичну модель у загальному вигляді задачі про максимальний потік, як задачі лінійного програмування.

8. Охарактеризувати способи зведення задачі до виду, в якому орієнтовний граф має лише один стік і лише один виток.

9. Викласти алгоритм розв’язання задачі про максимальний потік за допомогою інструмента «Solver» в MS Excel.

Тема 7 ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

7.1 Постановка задачі про призначення (задачі вибору)

Необхідно виконати n робіт (i = 1, …, n). Для цього залучаються n виконавців (j = 1,…,n), кожен з яких здатен виконати будь-яку з робіт. Відомі продуктивності праці/витрати c_{ij} на виконання i– ї роботи j– м виконавцем. Потрібно призначити кожного виконавця на одну роботу так, щоб загальна продуктивність/загальні витрати була/були максимальною/мінімальними.

Математична модель задачі

Змінні моделі: $x = \left\| x_{ij} \right\|_{n \times n}$ – матриця призначень, де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо на } i\text{-у роботу призначено } j\text{-ого виконавця;} \\ 0, & \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to max/min. \tag{7.1}$$

Система обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ i = 1, \dots, n. \tag{7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ j = 1, \dots, n. \tag{7.3}$$

$$x_{ij} \in [0; 1], \ i = 1, \dots, n, \ \ j = 1, \dots, n. \tag{7.4}$$

7.2 Угорський метод розв’язання задачі про призначення

Основні положення, що лежать в основі угорського методу:

1) *розв’язок задачі не зміниться,* якщо до будь-якого стовпця або рядка додати (або відняти) певну сталу величину. Тобто, якщо план x^* – оптимальний план задачі (7.1)–(7.4), то він також буде оптимальним для цільової функції Z' з матрицею $C' = \left(c'_{ij}\right)$, де $c'_{ij} = c\_ij \pm u_i \pm v_j$, $i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, n, \quad x \in \Omega;$

2) якщо всі $c'_{ij} \geq 0$, і знайдено план $x*$, такий що

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x^*_{ij} = 0,$$

то x^*– оптимальний план.

Сутність методу

Шляхом додавання певним чином знайдених чисел до окремих стовпців та віднімання з них інших чисел, формують так звану *систему незалежних нулів.* Набір нулів називається системою незалежних нулів, якщо жодні два (чи більше) нулі *не знаходяться в одному рядку або стовпці*. Якщо кількість незалежних нулів дорівнює n, то, присвоївши відповідним змінним $x_{\text{ij}} = 1$, а всім іншим – $x_{\text{ij}} = 0$, згідно з твердженням 2, отримаємо *оптимальний план призначення.*

Опис ідеї алгоритму угорського методу

Алгоритм складається з початкового кроку та *не більше ніж* $(n-2)$ послідовно повторюваних ітерацій:

- на *попередньому* етапі, якщо задача сформульована як задача *на максимум,* її перетворюють на еквівалентну задачу *на мінімум*. На цьому ж етапі виділяється система незалежних нулів;
- *кожна наступна ітерація* спрямована на збільшення (хоча б на 1) кількості незалежних нулів;
- як тільки кількість незалежних нулів k *дорівнює розмірності матриці* ($k = n$), задача вважається розв'язаною;
- *оптимальний план призначення* визначається положенням незалежних нулів на останній ітерації.

Приклад 7.1 Нехай необхідно розв'язати задачу про призначення на максимум:

$$max\, Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cx_{ij},$$

де

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 11 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Етап підготовки

Відшукуємо максимальний елемент у кожному стовпці матриці і обчислюємо кожний елемент матриці C з максимального елементу відповідного стовпця. В отриманій матриці C' відшукуємо мінімальний елемент в кожному рядку і вираховуємо їх з відповідних елементів c':

$$1)\ C = \left(\begin{array}{cccc} 10 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 11 & 7 & 5 \\ \hline 10 & 11 & 8 & 9 \end{array}\right);\ 2) C' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right);\ 3)\ C_0 = \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0^* & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0^* & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Утворимо первісну систему незалежних нулів, відмічаючи їх зірочкою. Маємо матрицю C_0. Число незалежних нулів в ній $k = 3$. . Так як $k < n = 4,$, то переходимо до основного шагу.

Перша ітерація. В матриці 4) над стовпцями, які містять нулі з зірочками, ставимо знаки виділення (+). Знаходимо невиділений стовпець $j = 4$. Шукаємо в ньому нульовий елемент. Це $c_{14} = 0$. Помічаємо його штрихом $c_{14} = 0'$. Переглядаємо рядок $i = 1$. Він містить помічений нуль $c_{11} = 0^*$. Знімаємо виділення першого стовпця, ставлячи знак $\oplus$. Виділяємо перший рядок знаком «+». Отримуємо матрицю 5).

4)
$$C_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & + & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0^* & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0^* & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array};$$

5)
$$C_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \oplus & + & + & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & 0' \\ 4 & 1 & 0^* & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0^* & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

Якщо тепер в матриці 5) викреслити помічені стовпці $j = 2{,}3$ і помічений рядок, то отримаємо матрицю, в якій немає нулів.

Позначимо множину непомічених рядків через I_1. Вочевидь, $I_1 = \{2{,}3{,}4\}$, а множина непомічених стовпців через J_1, де $J_1 = \{1{,}4\}$. Знаходимо

$$min\{c_{ij}, i \in I_1, j \in J_1\} = 4.$$

Додаємо число 4 до помічених стовпців і віднімаємо його з непомічених рядків. Отримаємо матрицю 6).

6)
$$C_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \oplus & + & + & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

У результаті такого перетворення отримаємо нові непомічені нулі $c_{21} = 0$, $c_{41} = 0$. Беремо будь-який з них і помічаємо штрихом. Наприклад, $c_{21} = 0'$. Зважаючи, що в рядку 2 маємо 0^*, то знімаємо помітку «+» зі стовпця $j = 3$, помічаючи його знаком $\oplus$. Рядок $i = 2$ помічаємо знаком «+». Отримуємо матрицю 7).

7)
$$C_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \oplus & + & \oplus & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Серед непомічених рядків матриці є непомічений нуль. Це $c_{41} = 0'$. Штрихуємо цей нуль. В рядку $i = 4$ маємо 0^*, знімаємо помітку зі стовпця $j = 2$. Помічаємо рядок $i = 4$. Отримуємо матрицю 8).

8)
$$C_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \oplus & \oplus & \oplus & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0' & 2 \\ 0' & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ + \end{array} \end{array}$$

Серед непомічених рядків знаходимо непомічений нуль $c_{33} = 0$. Помічаємо цей нуль: $c_{33} = 0'$в матриці 8). В рядку $i = 3$ немає нулів із зірочками. Тому треба будувати ланцюг.

Побудова ланцюга. Від останнього нуля зі штрихом $c_{33} = 0'$ по стовпцю переходимо до нуля з зірочкою $c_{23} = 0^*$. Від $c_{23} = 0^*$ по рядку *i*=2 переходимо до нуля зі штрихом $c_{21} = 0'$. Від $c_{21} = 0'$по стовпцю *j*=1 переходимо до нуля з зірочкою $c_{11} = 0^*$. Від $c_{11} = 0^*$ переходимо по рядка $i = 1$ до $c_{14} = 0'$. В стовпці $j = 4$ нема нулів з зірочкою. Відповідно, будування ланцюга завершене. Отримаємо побудований ланцюг в матриці 9).

$$9)\quad C_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \oplus & \oplus & \oplus & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0' & 2 \\ 0' & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ + \\ + \\ \\ + \end{array}$$

На ланцюгу $c_{33} \to c_{23} \to c_{21} \to c_{11} \to c_{14}$ нулі зі штрихами міняємо на нулі з зірочками. Зірочки над нулями, які не знаходяться на ланцюгу, зберігаємо. Всі інші знищуємо. Переходимо до матриці 10), в якій кількість незалежних нулів збільшується на одиницю, на цьому перша ітерація закінчується.

$$10)\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 0^* \\ 0^* & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0^* & 2 \\ 0 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Друга ітерація. Підраховуємо кількість незалежних нулів: $k = 4$, Так як $n = 4$, то $k = n$. Задача розв'язана. Отримано оптимальний план задачі, поданий в матриці 11)

$$11)\ x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо значення цільової функції за формуло. (7.1):

$$Z = 9 + 3 + 8 + 11 = 31 \text{ у.о./год.}$$

Відповідь. Потрібно призначити
для виконання роботи 1 працівника 4;
для виконання роботи 2 працівника 1;
для роботи 3 – працівника 3;
для роботи 4 – працівника 2.
Тоді продуктивність буде максимальною і становитиме 31 у.о./год.

Лабораторна робота №5 Задача про призначення (задачі вибору)

Мета роботи: засвоїти методи розв'язання задачі про призначення.
Цілі роботи:
– навчитися формулювати змістовну постановку задачі про призначення;
– навчитися будувати математичну модель задачі про призначення;
– засвоїти методи розв'язання задачі про призначення;
– набути навичок формулювання математичними та економічними висновками щодо отриманого розв'язку задачі про призначення.

7.3 Завдання до лабораторної роботи №5

Розв'язати задачу про призначення <u>як на максимум, так і на мінімум</u> з заданою матрицею продуктивності праці/вартості робіт $C = (c_{ij})$ за допомогою процедури «Solver» MS Excel відповідно до індивідуального варіанту.

Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №5

Варіант 1.

3	10	5	9	16	8	17
6	8	11	8	18	19	20
7	13	10	3	4	14	18
5	9	6	21	12	17	22
5	4	11	6	13	14	11
17	7	12	13	16	17	9
13	0	8	8	10	12	17

Варіант2.

5	13	6	10	13	8	9
10	9	7	11	8	12	11
11	5	8	12	4	18	4
12	6	9	8	5	8	4
9	4	4	5	6	6	5
11	8	7	4	7	3	7
6	5	8	12	13	9	14

Варіант 5.

18	4	6	7	8	11	5
13	5	12	13	5	6	8
10	13	14	17	3	4	2
5	6	5	6	4	15	3
19	20	10	7	8	6	7
12	13	1	13	15	8	7
4	1	2	2	4	16	9

Варіант 3.

6	5	9	10	7	12	8
9	7	11	6	8	11	10
8	10	7	8	10	7	4
5	6	10	5	6	11	12
4	9	8	9	4	1	2
5	6	10	11	10	12	5
4	11	5	4	5	12	13

Варіант 4.

7	10	8	11	7	15	12
	2	5	6	10	18	4
8	11	9	2	16	3	6
5	2	5	14	3	10	5
8	7	6	7	13	8	14
6	8	17	10	11	9	5
15	18	5	9	12	6	10

Варіант 11.

5	1	4	2	10	6	7
4	5	10	4	5	8	10
15	12	14	15	4	5	7
4	8	9	10	12	13	14
5	4	7	8	9	10	5
7	8	4	3	5	6	7
9	10	5	8	11	4	3

Варіант 6.

4	5	9	5	6	14	6
8	12	4	13	16	15	16
2	15	8	10	17	7	9
14	8	4	9	5	6	7
3	5	4	12	10	11	13
10	9	11	5	6	12	8
7	13	8	12	8	11	10

Варіант 7.

8	4	5	18	6	1	9
9	5	7	2	4	8	4
1	10	5	6	12	9	6
2	4	7	13	10	8	5
12	3	11	9	12	10	11
5	13	8	2	13	12	13
7	6	4	18	5	6	7

Варіант 8.

13	4	5	12	3	6	14
7	1	9	4	11	2	10
12	4	7	6	8	7	4
5	4	6	1	7	8	6
8	9	9	7	10	3	5
7	4	4	5	4	3	8
15	3	3	13	5	6	16

Варіант 9.

1	17	1	4	5	18	2
21	5	6	7	8	6	16
9	10	9	14	10	15	8
14	2	3	13	6	7	15
10	8	12	1	11	2	4
6	7	1	10	3	8	6
3	19	4	12	13	20	4

Варіант 10.

1	4	5	8	9	4	5
5	6	7	8	10	11	12
4	18	4	7	6	7	8
5	4	3	6	10	4	5
9	10	8	9	5	13	6
6	8	11	12	7	8	9
12	4	5	6	2	5	4

Варіант 17.

7	8	4	3	5	6	1
3	2	5	6	7	2	13
12	4	5	7	8	2	4
2	1	10	7	6	5	12
5	6	12	13	15	16	3
4	18	2	5	7	8	12
4	5	6	2	3	12	1

Варіант 12.

12	13	8	5	5	16	17
1	2	6	7	8	3	4
6	7	2	16	3	9	10
4	5	15	20	19	11	4
10	1	2	18	17	3	5
5	6	4	10	5	7	8
18	19	11	12	14	14	15

Варіант 13.

1	5	7	10	2	3	4
8	2	5	4	7	10	1
8	3	10	17	8	2	3
5	6	7	10	1	3	7
4	8	12	5	4	5	6
10	15	1	2	5	6	7
8	7	12	6	18	5	4

Варіант14.

3	5	10	7	8	10	12
4	6	7	4	5	6	7
12	13	11	6	7	8	9
10	4	5	8	9	4	5
8	7	9	5	6	7	11
1	3	12	1	4	5	6
4	10	11	13	15	16	8

Варіант 15.

20	5	12	13	4	3	8
9	10	11	12	13	14	15
8	4	5	4	6	7	8
10	5	7	3	4	5	4
3	12	13	4	6	7	8
9	4	8	9	8	5	4
11	4	3	15	4	5	14

Варіант 16.

1	5	2	10	3	12	4
6	7	8	9	10	12	5
8	3	4	5	6	8	9
1	2	13	4	5	6	7
8	9	4	5	6	8	10
3	4	8	7	12	13	1
4	5	1	2	3	8	10

Варіант 23.

1	4	5	6	7	15	2
3	5	7	9	5	12	10
4	7	8	10	7	3	4
6	8	12	12	9	6	1
10	2	3	4	12	7	4
1	9	4	7	15	2	8
2	11	6	10	4	5	10

Варіант 18.

8	4	3	1	12	13	5
4	2	5	3	4	5	6
1	4	2	5	6	7	8
9	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
5	6	7	8	9	10	4
6	1	2	13	3	4	5

Варіант 19.

4	18	17	7	3	2	1
5	6	1	2	14	3	12
6	8	7	12	10	8	6
7	12	5	7	6	7	15
3	1	2	4	17	3	4
6	12	4	5	6	8	9
11	2	1	4	6	7	12

Варіант 20.

20	5	1	8	9	10	18
16	12	4	5	6	7	8
13	15	16	8	9	10	6
7	8	12	5	7	8	9
5	7	9	10	11	12	6
12	5	7	8	9	4	5
7	4	3	4	5	1	2

Варіант 21.

5	4	3	1	2	5	4
8	16	12	3	5	4	2
6	7	8	9	10	6	7
2	3	7	8	4	3	12
6	7	1	2	7	8	5
3	4	7	6	8	9	7
5	8	6	2	1	4	5

Варіант 22.

1	5	3	4	7	6	10
12	2	4	7	8	9	10
13	3	5	6	4	3	2
1	4	5	8	9	12	15
25	5	1	3	8	10	6
7	3	6	1	6	5	1
12	5	8	5	10	4	26

Варіант 24.

12	4	5	6	7	2	1
5	7	8	9	10	11	8
6	3	4	5	6	7	9
8	7	2	11	12	13	2
6	5	1	5	6	7	6
1	4	5	7	12	4	5
8	9	14	5	6	7	4

Варіант 25.

3	2	4	7	5	8	5
4	8	5	6	6	9	6
5	10	7	4	7	4	7
10	4	13	8	3	8	3
12	3	4	9	2	10	14
5	7	6	12	1	7	5
1	10	11	8	4	2	8

Варіант 26.

4	5	6	7	9	4	1
3	7	10	6	8	5	7
4	8	5	7	16	8	9
5	5	3	5	4	2	3
3	6	4	2	5	4	5
1	7	2	6	8	1	2
4	8	1	7	9	6	7

Варіант 27.

0	4	8	5	7	5	2
4	8	6	7	8	4	6
1	5	24	8	8	11	6
2	2	6	14	6	7	2
6	2	14	4	3	8	7
4	2	4	8	9	13	10
7	21	2	9	14	16	3

Варіант 28.

3	4	5	9	7	8	13
5	6	7	8	12	14	8
9	7	8	9	10	11	12
6	12	15	16	5	4	6
7	8	9	10	4	5	7
8	10	12	7	8	9	10
15	16	17	18	19	15	4

Варіант 29.

5	4	8	5	4	8	9
4	7	9	12	6	7	8
6	8	12	7	8	9	12
7	10	13	13	4	5	6
8	4	5	4	5	6	7
9	5	6	8	9	10	15
10	12	7	4	5	6	7

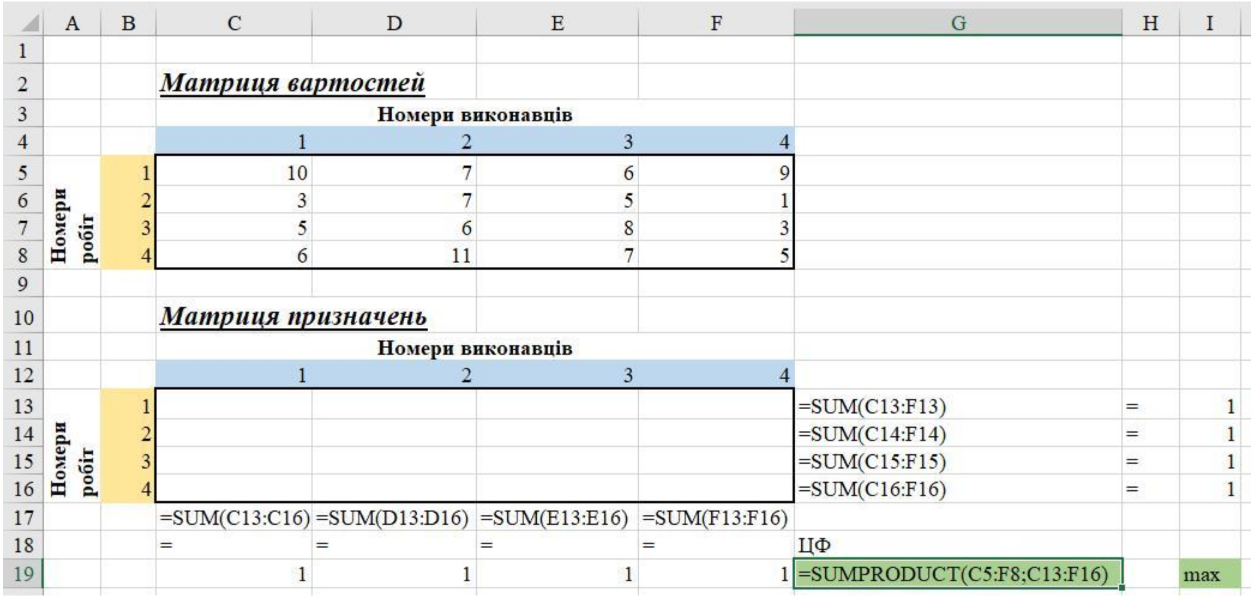
Варіант 30.

5	4	3	6	12	4	5
8	9	10	7	8	13	4
6	7	8	9	12	6	7
8	10	4	8	13	4	5
6	12	5	4	7	8	12
7	8	9	12	5	6	7
6	7	8	9	13	14	15

7.4 Методичні рекомендації до лабораторної роботи №5

Розглянемо завдання з прикладу 7.1, проте будемо розв’язувати не лише задачу на максимум, а також і на мінімум. Економічна постановка задачі надана в підрозділі 7.1, як приклад.

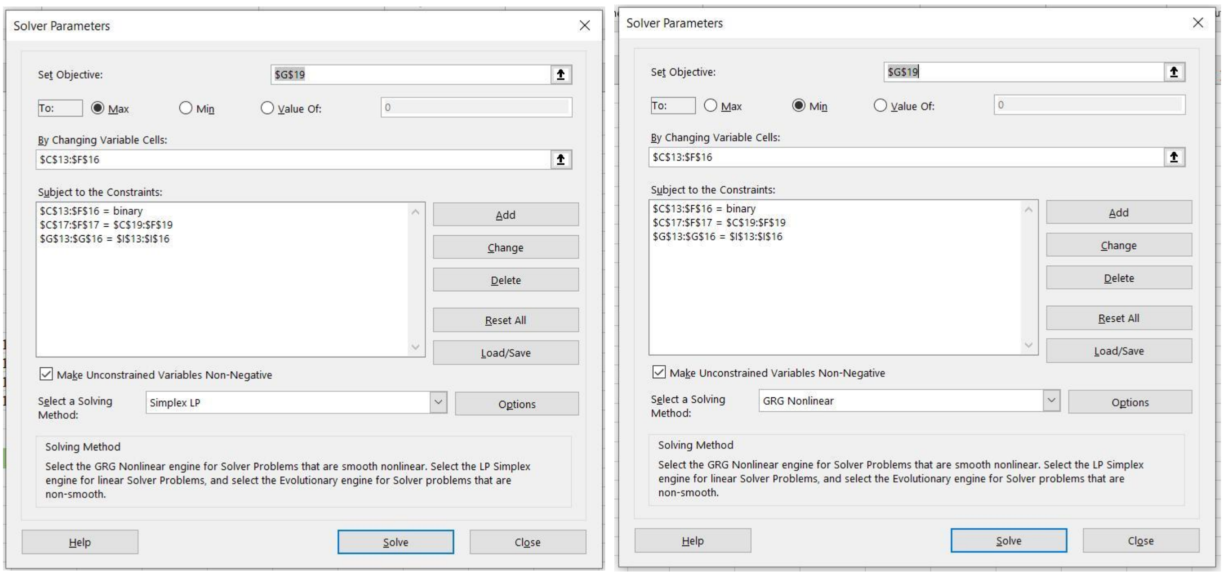
З урахуванням математичної моделі, визначення змінних задачі, подання цільової функції і системи обмежень співвідношеннями (7.1)–(7.3) заповнюємо аркуш MS Excel аналогічно до рис. 7.1



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2			*Матриця вартостей*						
3				Номери виконавців					
4			1	2	3	4			
5	Номери робіт	1	10	7	6	9			
6		2	3	7	5	1			
7		3	5	6	8	3			
8		4	6	11	7	5			
9									
10			*Матриця призначень*						
11				Номери виконавців					
12			1	2	3	4			
13	Номери робіт	1					=SUM(C13:F13)	=	1
14		2					=SUM(C14:F14)	=	1
15		3					=SUM(C15:F15)	=	1
16		4					=SUM(C16:F16)	=	1
17			=SUM(C13:C16)	=SUM(D13:D16)	=SUM(E13:E16)	=SUM(F13:F16)			
18			=	=	=	=	ЦФ		
19			1	1	1	1	=SUMPRODUCT(C5:F8;C13:F16)		max

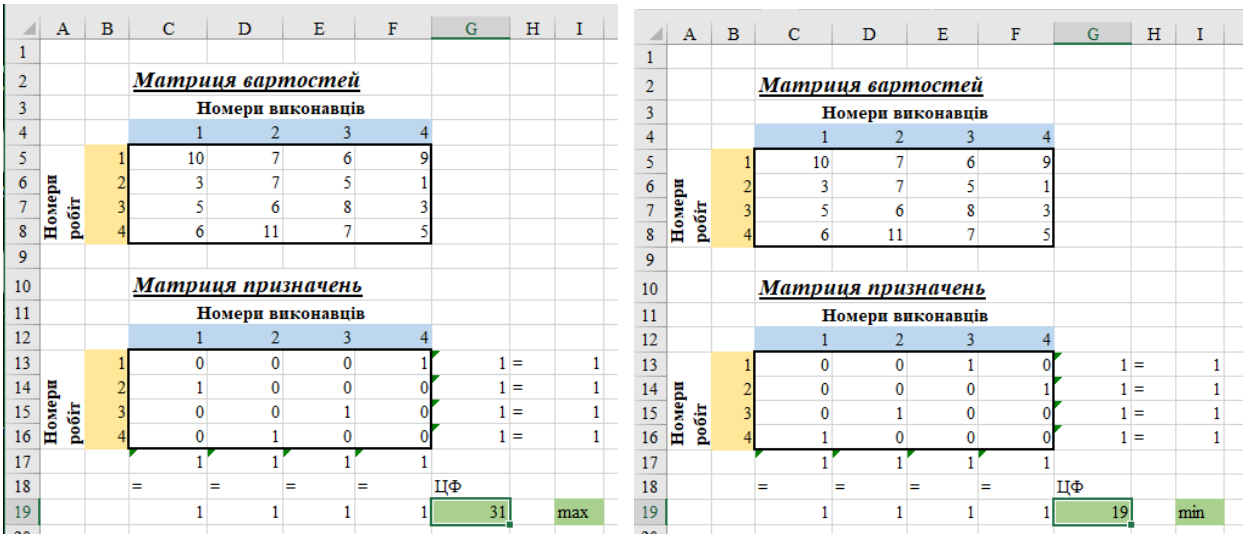
Рис. 7.1 – Подання вхідних даних та програмування комірок, що відповідають цільовій функції та лівим частинам обмежень, на аркуші MS Excel

Якщо на двох різних аркушах MS Excel заповнити екранні форми вікон «Solver Parameters» для задач на максимум та мінімум так, як показано на рис. 7.2, а і б, то отримаємо результати, продемонстровані на рис. 7.3, а і б.



а) б)

Рис. 7.2 – Екранні форми «Solver Parameters»



Матриця вартостей

Номери робіт \ Номери виконавців	1	2	3	4
1	10	7	6	9
2	3	7	5	1
3	5	6	8	3
4	6	11	7	5

Матриця призначень (max)

Номери робіт \ Номери виконавців	1	2	3	4			
1	0	0	0	1	1	=	1
2	1	0	0	0	1	=	1
3	0	0	1	0	1	=	1
4	0	1	0	0	1	=	1
	1	1	1	1			
	=	=	=	=	ЦФ		
	1	1	1	1	31		max

Матриця призначень (min)

Номери робіт \ Номери виконавців	1	2	3	4			
1	0	0	1	0	1	=	1
2	0	0	0	1	1	=	1
3	0	1	0	0	1	=	1
4	1	0	0	0	1	=	1
	1	1	1	1			
	=	=	=	=	ЦФ		
	1	1	1	1	19		min

Рис. 7.3 – Результати роботи процедури «Solver»

Результати, отримані угорським методом для даної задачі про призначення на максимум, збігаються з тими, що знайдено з використанням інструмента «Solver». Відповідь по задачі наведено в підрозділі 7.2. Запис відповіді для задачі на мінімум пропонується зробити студентові самостійно!

Питання для самоконтролю до теми 7 та лабораторної роботи №5

1. Сформулювати змістовну постановку задачі про призначення .
2. Навести математичну модель задачі про призначення.
3. Сформулювати основні положення, на яких ґрунтується угорський метод розв’язування задачі про призначення.
4. Угорський метод застосовується для розв’язання задачі про призначення на мінімум цільової функції. Обґрунтувати процедуру переходу від задачі максимізації цільової функції до задачі мінімізації.
5. Сформулювати ознаку оптимальності плану задачі в угорському методі.
6. Скільки розв’язків може мати задача про призначення?
7. За яке число ітерацій угорського алгоритму може бути отримано розв’язок задачі? Яка максимальна кількість ітерацій алгоритму можлива при розв’язанні задачі заданої розмірності у Ваших варіантах?
8. Сформулювати алгоритм розв’язання задачі про призначення з використанням інструменті «Solver» в MS Excel.

Тема 8 ЗАДАЧА КОМІВОЯЖЕРА

8.1 Постановка та математична модель задачі комівояжера

Формальне означення задачі комівояжера

Задача комівояжера (Travelling Salesman Problem, TSP) – одна з найважливіших задач транспортної логістики. Її суть полягає у знаходженні найкращого маршруту, тобто найкоротшого, а отже, найменш витратного у часовому (і, відповідно, економічному) відношенні.

За умовою задачі «комівояжер» виїжджає з деякого початкового міста й відвідує інші міста у кількості $n-1$, де n – загальна кількість пунктів призначення. Задається матриця відстаней $\{c_{ij}\}$ між пунктами, де i та j змінюються від 1 до n. При цьому необхідно врахувати такі обмеження:

- комівояжер в'їжджає до кожного пункту лише один раз;
- комівояжер виїжджає з кожного пункту лише один раз;
- маршрут є замкненим, без петель.

Приклади задач комівояжера

- оптимізація маршруту доставки товарів;
- планування обходу торгових агентів;
- маршрутизація роботів і дронів;
- виготовлення друкованих плат (мінімізація холостих переміщень);
- секвенування завдань у виробничих процесах;
- біоінформатика (аналіз послідовностей).

Подання задачі у вигляді графа

Задача комівояжера моделюється *зваженим повним графом*

$$G = (V, E),$$

де V – множина вершин (міста);

E – множина ребер;

кожному ребру (i, j) відповідає вага $c_{ij} \geq 0$, яку можна розуміти як, наприклад, відстань між містами, час або вартість подорожі.

Таким чином, граф G за умовою є повним. Задача може бути *симетричною або асиметричною*, коли вага ребра залежить від напряму: $c_{ij} \neq c_{ji}$. На рис. 8.1 продемонстровано приклад граф антисиметричної задачі комівояжера.

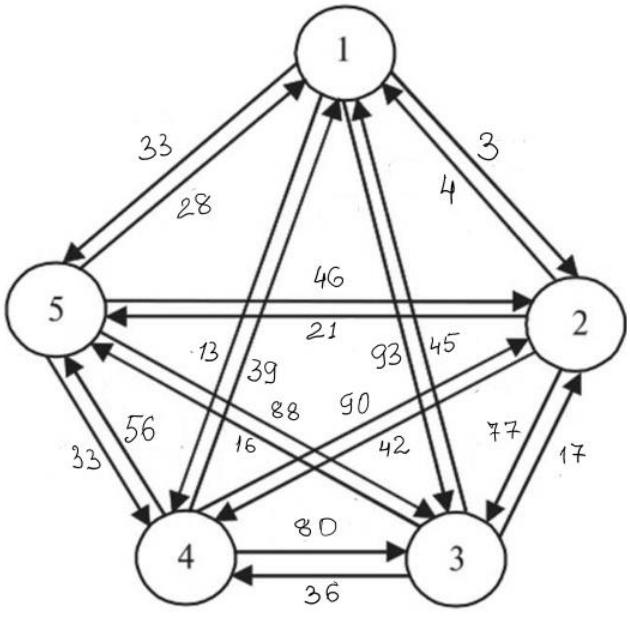


Рис. 8.1 – Приклад представлення графом задачі комівояжера

Шуканий маршрут відповідає ***гамільтоновому циклу мінімальної ваги***. Гамільтонів цикл – маршрут на цьому графі, до якого входить по одному разу кожна вершина графа

Математична модель задачі комівояжера (формулювання як задачі дискретної оптимізації)

Введемо бінарні *змінні*:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо перехід від } i \text{ до } j \text{ використовується;} \\ 0, & \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

Цільова функція:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \tag{8.1}$$

Обмеження:

– з кожної вершини виходить рівно одне ребро:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i; \tag{8.2}$$

– у кожну вершину входить рівно одне ребро:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j; \tag{8.3}$$

– для забезпечення замкненості маршруту й відсутності петель вводяться додаткові змінні U_i $(i = 2, .. n)$ і задається обмеження:

$$U_i - U_j + nX_{ij} \leq n - 1, \tag{8.4}$$

де $i, j = 2, \ldots, n$.

Саме це обмеження визначає послідовність відвідування пунктів

$$x_{ij} \in \{0,1\}. \tag{8.5}$$

Алгоритмічна складність

Задача комівояжера є *NP– складною*. Кількість можливих маршрутів зростає факторіально:

$$(n - 1)!.$$

Для великих n точне розв’язання за поліноміальний час є обчислювально неможливим.

Методи розв’язання

Точні методи:

– повний перебір (для малих n);
– метод гілок і меж;
– динамічне програмування (алгоритм Беллмана-Хелда-Карпа);
– цілочисельне лінійне програмування.

Наближені та евристичні методи:

– жадібні алгоритми;
– локальний пошук (2– opt, 3– opt);
– генетичні алгоритми;
– імітація відпалу;
– мурашині алгоритми.

Лабораторна робота №6 Задача комівояжера

Мета роботи: засвоїти сутність постановки та принципів розв’язання задачі комівояжера.

Цілі роботи:

– навчитися формулювати змістовну постановку задачі комівояжера; зрозуміти зв’язок з поданням у вигляді графі;
– навчитися будувати математичну модель задачі комівояжера з урахуванням обмежень, що ставляться на пов’язаний із задачею граф;
– оволодіти принципами розв’язання задачі комівояжера з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;
– набути навичок формулювання математичних та економічних висновків щодо отриманого розв’язку задачі комівояжера.

8.2 Завдання до лабораторної роботи №6

– сформулювати змістовну постановку задачі комівояжера;
– побудувати математичну модель задачі комівояжера;
– розв’язання задачу з використанням електронних таблиць Excel за допомогою процедури "Solver";
– дати економічну відповідь щодо отриманого розв’язку.

Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №6

Варіант 1

∞	1	6	8	7
6	∞	10	2	8
1	4	∞	0	8
9	7	9	∞	7
2	11	6	4	∞

Варіант 2

∞	2	6	5	6
2	∞	7	7	2
2	11	∞	4	6
7	8	4	∞	8
10	6	4	2	∞

Варіант 3

∞	6	9	7	9
2	∞	6	2	6
4	8	∞	3	2
6	2	3	∞	9
8	11	4	2	∞

Варіант 4

∞	2	5	6	8
9	∞	3	4	2
10	3	∞	10	9
9	8	2	∞	3
7	3	2	11	∞

Варіант 5

∞	3	7	5	7
4	∞	3	3	6
10	6	∞	2	4
6	7	6	∞	2
10	3	3	10	∞

Варіант 6

∞	3	4	9	2
8	∞	1	2	6
6	10	∞	4	6
6	3	9	∞	3
2	4	7	3	∞

Варіант 7

∞	4	4	5	9
7	∞	2	11	1
2	4	∞	3	1
6	2	1	∞	6
1	9	8	7	∞

Варіант 8

∞	9	2	3	1
1	∞	3	4	6
3	4	∞	3	3
1	9	8	∞	9
3	7	6	4	∞

Варіант 9

∞	9	7	10	4
3	∞	6	0	3
1	7	∞	1	9
6	3	11	∞	7
11	8	3	5	∞

Варіант 10

	8	3	5	7
10	∞	3	5	2
9	4	∞	10	4
7	10	8	∞	9
3	9	7	4	∞

Варіант 11

∞	6	8	6	8
3	∞	7	4	6
6	10	∞	1	6
6	6	9	∞	5
3	5	5	9	∞

Варіант 12

∞	7	1	10	7
8	∞	3	1	5
3	5	∞	9	9
1	3	4	∞	10
3	9	2	10	∞

Варіант 13

∞	5	9	4	2
8	∞	3	6	7
0	9	∞	2	3
3	9	2	∞	2
10	2	10	10	∞

Варіант 14

∞	9	3	1	8
2	∞	2	9	10
10	2	∞	10	10
2	0	6	∞	6
1	9	4	4	∞

Варіант 15

∞	1	7	2	1
1	∞	3	6	2
1	9	∞	4	3
4	6	6	∞	7
3	7	1	8	∞

Варіант 16

∞	9	8	6	4
4	∞	1	9	3
4	6	∞	8	7
7	1	5	∞	5
4	3	4	7	∞

Варіант 17

∞	3	7	10	5
7	∞	4	6	3
4	3	∞	7	5
7	11	4	∞	7
2	9	8	10	∞

Варіант 18

∞	4	3	2	4
4	∞	2	5	3
4	6	∞	3	10
2	9	8	∞	11
6	5	6	10	∞

Варіант 19

∞	9	9	1	3
2	∞	5	9	7
6	5	∞	10	0
2	6	8	∞	9
8	4	8	2	∞

Варіант 20

∞	2	11	10	6
9	∞	2	7	5
8	4	∞	2	9
6	3	1	∞	9
3	6	7	2	∞

Варіант 21

∞	4	2	8	11
6	∞	4	8	2
8	1	∞	9	6
9	6	3	∞	10
7	1	4	3	∞

Варіант 22

∞	7	4	3	2
7	∞	4	3	4
3	6	∞	2	3
6	4	8	∞	10
9	8	7	6	∞

Варіант 23

∞	9	7	6	9
2	∞	7	9	3
9	8	∞	6	7
6	9	5	∞	7
3	3	5	7	∞

Варіант 24

∞	6	0	5	8
3	∞	5	7	3
5	4	∞	8	7
4	5	2	∞	5
8	3	3	9	∞

Варіант 25

∞	1	1	10	4
4	∞	2	8	6
2	6	∞	5	10
6	5	8	∞	5
7	9	10	9	∞

Варіант 26

∞	10	3	8	1
7	∞	10	9	6
1	5	∞	4	7
9	6	1	∞	1
6	4	3	8	∞

Варіант 27

∞	6	10	6	5
7	∞	5	4	9
6	4	∞	8	6
4	9	9	∞	8
5	7	2	6	∞

Варіант 28

∞	3	1	11	8
5	∞	2	6	3
4	3	∞	10	4
4	5	2	∞	5
8	3	2	3	∞

Варіант 29

∞	3	7	9	8
9	∞	2	6	9
8	3	∞	3	2
5	6	7	∞	6
4	5	2	4	∞

Варіант 30

∞	2	7	3	5
2	∞	8	5	7
5	7	∞	2	6
4	5	2	∞	5
6	9	7	6	∞

8.3 Методичні рекомендації до лабораторної роботи №6

Розглянемо задачу комівояжера, яка задається матрицею «відстаней»[1]:

$$C = \begin{Vmatrix} \infty & 3 & 93 & 13 & 33 \\ 4 & \infty & 77 & 42 & 21 \\ 45 & 17 & \infty & 36 & 16 \\ 39 & 90 & 80 & \infty & 56 \\ 28 & 46 & 88 & 33 & \infty \end{Vmatrix}$$

[1] Залежно від сформульованої задачі комівояжера замість «відстаней» потрібно вписувати «вартості перевезень», «витрати пального», «витрати часу» тощо.

Граф, що відповідає цій задачі , зображено на рис. 8.1. Значення «відстаней», позначене як ∞, означає, що відповідне ребро має бути виключеним з маршруту. У даному випадку передбачено виключення петель. В MS Excel нескінченності замінюються на числа, які щонайменше на порядок більші за всі інші елементи матриці.

Зважаючи на подання математичної моделі, у тому числі змінних, цільової функції та системи обмежень (8.1)–(8.5), заповнимо аркуш MS Excel, до прикладу так, як це показано на рис. 8.2. **Звернемо увагу,** що при такому заповнення можна ввести формули у комірки G9, B14, C18, які скопіювати з модифікаціями з використанням маркера заповнення у комірки G10:G13, C14:F14, C18:F21 відповідно. Формула у комірці G14 для цільової функції не потребує копіювання.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		1	2	3	4	5		
2	1	10000	3	93	13	33		
3	2	4	10000	77	42	21		
4	3	45	17	10000	36	16		
5	4	39	90	80	10000	56		
6	5	28	46	88	33	10000		
7		**Основні змінні**						
8		1	2	3	4	5		
9	1	0	0	0	1	0	=SUM(B9:F9)	
10	2	1	0	0	0	0	=SUM(B10:F10)	
11	3	0	0	0	0	1	=SUM(B11:F11)	
12	4	0	0	1	0	0	=SUM(B12:F12)	
13	5	0	1	0	0	0	=SUM(B13:F13)	
14		=SUM(B9:B13)	=SUM(C9:C13)	=SUM(D9:D13)	=SUM(E9:E13)	=SUM(F9:F13)	=SUMPRODUCT(B2:F6;B9:F13)	**ЦФ**
15	**Додаткові змінні**							
16			0	2	3	1		
17			u2	u3	u4	u5		
18	=C16	u2	=C$16-$A18+5*C10	=D$16-$A18+5*D10	=E$16-$A18+5*E10	=F$16-$A18+5*F10		
19	=D16	u3	=C$16-$A19+5*C11	=D$16-$A19+5*D11	=E$16-$A19+5*E11	=F$16-$A19+5*F11		
20	=E16	u4	=C$16-$A20+5*C12	=D$16-$A20+5*D12	=E$16-$A20+5*E12	=F$16-$A20+5*F12		
21	=F16	u5	=C$16-$A21+5*C13	=D$16-$A21+5*D13	=E$16-$A21+5*E13	=F$16-$A21+5*F13		

Рис. 8.2 – Заповнення аркуша в програмування комірок MS Excel в задачі комівояжера

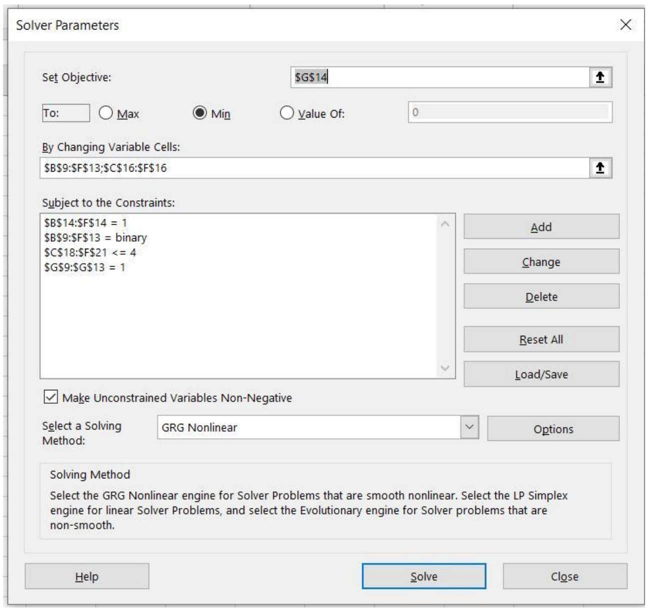
Відповідно до математичної моделі задачі комівояжера (8.1)–(8.5) заповнюємо екранну форму «Solver Parameters», продемонстровану на рис. 8.4, а, з результатом, представленим на рис. 8.4, б. **Зверніть увагу,** що змінні задачі утворюються з двох компонент, розміщений в комірках C16:F16 та A16:A21.

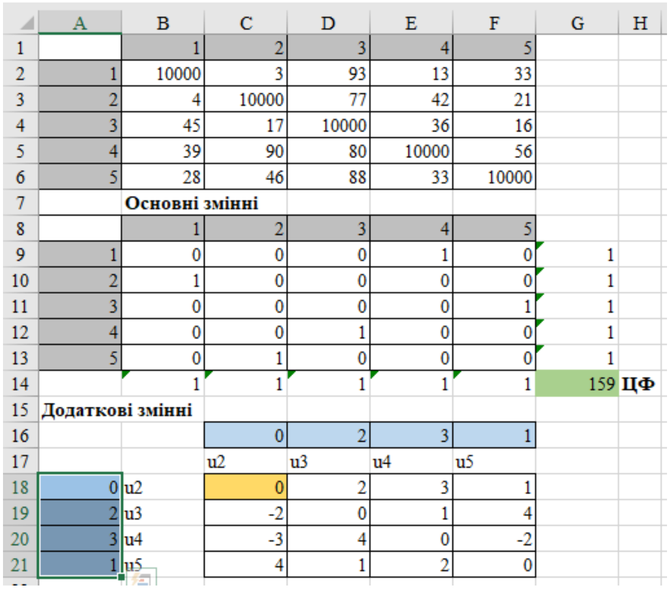
Для висновків по задачі формуємо маршрут за таблицею в комірках B9:F13, а відповідні дугам значення «відстаней» за комірками B2:F6.

Відповідь. Для мінімізації сумарної «відстані», що становитиме 159 у.о., потрібно обрати маршрут:

$$1 \underset{13}{\longrightarrow} 4 \underset{80}{\longrightarrow} 3 \underset{16}{\longrightarrow} 5 \underset{46}{\longrightarrow} 2 \underset{4}{\rightarrow} 1.$$

Варто врахувати, що надбудова «Solver» в Excel має обмеження на кількість рівнянь (нерівностей) задачі. Зокрема, у Excel ***рекомендується*** розв’язувати задачі з кількістю пунктів **до 10**, коли загальне число формульних обмежень не перевищує 100. У разі більшої кількості пунктів варто застосовувати власноруч написані програми для реалізації алгоритму симплекс-методу або інші допоміжні інструменти.





	A	B	C	D	E	F	G	H
1		1	2	3	4	5		
2	1	10000	3	93	13	33		
3	2	4	10000	77	42	21		
4	3	45	17	10000	36	16		
5	4	39	90	80	10000	56		
6	5	28	46	88	33	10000		
7		**Основні змінні**						
8		1	2	3	4	5		
9	1	0	0	0	1	0	1	
10	2	1	0	0	0	0	1	
11	3	0	0	0	0	1	1	
12	4	0	0	1	0	0	1	
13	5	0	1	0	0	0	1	
14		1	1	1	1	1	159	**ЦФ**
15	**Додаткові змінні**							
16			0	2	3	1		
17			u2	u3	u4	u5		
18	0	u2	0	2	3	1		
19	2	u3	-2	0	1	4		
20	3	u4	-3	4	0	-2		
21	1	u5	4	1	2	0		

ф) б)

Рис. 8.4 – Реалізація використання інструмента «Solver» в задачі комівояжера

Питання для самоконтролю до теми 8 та лабораторної роботи №6

1. Сформулювати змістовну та математичну постановку задачі комівояжера. Охарактеризувати зв’язок задачі комівояжера із задачею мережевого програмування.
2. Навести математичну модель задачі комівояжера з урахуванням обмежень, що ставляться на пов’язаний із задачею граф.
3. Охарактеризувати принципи розв’язання задачі комівояжера з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;

Тема 9 ІГРОВІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР

9.1 Основні поняття теорії ігор

Теорія ігор – розділ математики, що вивчає моделі прийняття рішень у конфліктних ситуаціях, коли результат залежить від дій кількох учасників (гравців).

Основні поняття:

- *гравець* – учасник гри;
- *стратегія* – правило вибору дій гравцем;
- *виграш (програш)* – числова оцінка результату гри;
- *платіжна функція* – залежність виграшу від стратегій гравців;
- *розв'язок гри* – оптимальні стратегії гравців.

Класифікація ігор

Ігри класифікують за такими ознаками:

- за кількістю гравців: двоосібні, багатоосібні;
- за характером інтересів: з нульовою сумою, з ненульовою сумою;
- за формою подання: матричні, позиційні;
- за часом: статичні, динамічні;
- за можливістю кооперації: кооперативні, некооперативні;
- за наявністю невизначеності: ігри з повною та неповною інформацією.

Звернемо увагу на важливий тип ігор. *Ігри з нульовою сумою* належать до класу ігор із фіксованою (постійною) сумою, у яких загальний обсяг виграшів і програшів залишається незмінним, тобто учасники не можуть ані збільшити, ані зменшити сумарний ресурс гри. Натомість в іграх з *ненульовою сумою* виграш одного учасника не обов'язково супроводжується втратою іншого. У таких іграх можливі ситуації, коли загальний результат взаємодії є як додатним, так і від'ємним.

Розглянемо *приклад гри з нульовою сумою*: розподіл фіксованого гранту між кількома ІТ-проєктами. Є три групи А, В і С, які подали заявки на один грант із фіксованим бюджетом (наприклад, 1 млн у.г.о.). За результатами конкурсу весь грант отримує лише одна група:

- якщо група А отримує грант, її виграш становить $+1$ (умовна одиниця), а групи В і С отримують по -0.5 кожна;
- аналогічно, якщо виграє В або С.

Сума виграшів у будь-якому результаті дорівнює нулю:

$$(+1) + (-0.5) + (-0.5) = 0.$$

Приклад гри з ненульовою сумою. Спільний ІТ– проєкт двох команд. Дві дослідницькі групи А і В мають вибір:

- співпрацювати (об'єднати зусилля, обмінятися даними);
- або працювати окремо.

Результати залежать від поєднання їхніх рішень, як наведено в табл. 9.1.

Таблиця 9.1 – Приклад розподілу виграшів за різних варіантів взаємної співпраці

Рішення груп	Виграш групи A	Виграш групи B
Обидві співпрацюють	+5	+5
A співпрацює, B – ні	+1	+3
A не співпрацює, B – співпрацює	+3	+1
Обидві не співпрацюють	0	0

Дамо деякі пояснення. *Співпрацювати* означає, що команда:
- ділиться напрацюваннями (даними, попередніми результатами);
- координує план досліджень;
- узгоджує спільну роботу.

Не співпрацювати означає, що команда:
- працює ізольовано;
- не надає своїх результатів іншій стороні;
- використовує лише власні ресурси.

Конкретно по випадках

1. *Обидві співпрацюють*

Обидві команди обмінюються даними й досвідом → швидші та якісніші результати.
Тому обидві отримують великий виграш ($+5$).

2. *A співпрацює, B – ні:*
- команда A відкриває свої напрацювання;
- команда B користується цими матеріалами, але свої результати не надає.

У підсумку:
- B має більше переваг (вищий виграш);
- A отримує користь, але меншу, бо працює «в односторонньому режимі».

3. *A не співпрацює, B – співпрацює*

Дзеркальна ситуація до попередньої.

4. *Обидві не співпрацюють*

Кожна команда працює лише самостійно → повільніше, дорожче, без синергії.
Тому виграші мінімальні або нульові.

Чому це гра з ненульовою сумою?
- сума виграшів не є сталою:
  - $5 + 5 = 10 > 0$.
  - $1+3 = 4 > 0$,
  - $0 + 0 = 0$;
- виграш одного гравця не обов’язково означає програш іншого;
- за співпраці обидва гравці отримують взаємну вигоду, більшу, ніж за індивідуальних дій.

Це типовий приклад:
- *кооперативної або некооперативної гри з ненульовою сумою*;
- ситуації, де можливий взаємовигідний результат;
- моделей прийняття рішень у економіці, управлінні, науці та ІТ-проєктах.

Матричні ігри двох осіб з нульовою сумою

У двоосібній грі з нульовою сумою виграш одного гравця дорівнює програшу іншого. Такі ігри описуються платіжною матрицею.

Матриця гри

$$A = (a_{ij})$$

містить виграші першого гравця за умови, що перший гравець обирає стратегію i, другий – стратегію j.

Верхня та нижня ціна гри

Нижня ціна гри:

$$v^* = \max_{\mathrm{i}} \min_{\mathrm{j}} a_{ij} -$$

гарантований виграш першого гравця.

Верхня ціна гри:

$$v_* = \min_{\mathrm{i}} \max_{\mathrm{j}} a_{ij} -$$

мінімальний програш другого гравця.

Якщо

$$v^* = v_*,$$

то *гра має сідлову точку* і розв'язується у *чистих стратегіях*.

Мішані стратегії – це ймовірнісний розподіл на множині чистих стратегій гравця. Вона застосовується, коли гра не має розв'язку в чистих стратегіях.

Теорема фон Неймана (мінімаксу). Для будь-якої двоосібної гри з нульовою сумою та скінченною множиною стратегій існує число v і такі мішані стратегії гравців, що перший гравець може забезпечити собі виграш не менше v незалежно від вибору стратегії другим гравцем, а другий гравець, у свою чергу, може гарантувати, що виграш першого не перевищить v (тобто його власний виграш становитиме $-v$.

Це означає, що оптимальна стратегія першого гравця забезпечує йому виграш v за будь-яких дій суперника, тоді як другий гравець здатний гарантувати собі виграш $-v$. ***Мінімаксний*** алгоритм ґрунтується на принципі, за яким кожен гравець мінімізує максимально можливий виграш супротивника. У грі з нульовою сумою це еквівалентно максимізації власного мінімального гарантованого виграшу (принцип ***максиміну***).

Позиційні ігри та ігри кількох осіб

Позиційні ігри описуються послідовністю ходів і станів (позицій), часто подаються у вигляді дерева гри. Ігри кількох осіб враховують взаємодію більш ніж двох гравців і можуть мати складніші розв'язки.

Кооперативні ігри допускають утворення коаліцій. Основні методи розв'язання: ядро гри; вектор Шеплі; метод нуклеолуса.

Паралельні та послідовні ігри

У *паралельних іграх* вибір стратегій усіма гравцями відбувається одночасно, або ж гравці не мають інформації про рішення інших доти, доки кожен не зробить свій хід. Натомість у *послідовних іграх* ходи здійснюються у заздалегідь визначеній черзі, при цьому гравці отримують певну інформацію про дії опонентів. Така інформація може бути як повною, так і неповною: зокрема, гравець може знати, що суперник не обрав одну з можливих стратегій, не маючи відомостей щодо решти його виборів.

Гра з повною або неповною інформацією

У *іграх з повною інформацією* (наприклад, шахи) кожен гравець володіє відомостями про всі ходи, здійснені до поточного моменту, а також знає множину можливих стратегій суперника, що дає змогу частково прогнозувати подальший перебіг гри. Водночас переважна більшість ігор, які є об'єктом математичного аналізу, належать до *ігор з неповною інформацією*.

Прийняття рішень в умовах невизначеності

Рішення приймаються без інформації про ймовірності станів середовища. Основні критерії: критерій Вальда (максимін); критерій Лапласа; критерій Севіджа; критерій Гурвіца.

Окрім зазначених вище, існують ще інші типи ігор.

Теорія ігор надає формальний апарат для аналізу конфліктних ситуацій і широко застосовується в економіці, техніці, управлінні та інформаційних технологіях.

9.2 Постановка та алгоритм розв'язання задачі матричних ігор двох осіб з нульовою сумою на одному прикладі

Приклад 9.1 Нехай у грі беруть участь дві сторони A і B. Умови гри задаються матрицею виграшів (платіжною матрицею (табл. 9.1).

Таблиця 9.1 – платіжна матриця для прикладу 9.1

A		B				
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
A_1	Y_1	– 8	3	– 7	1	– 3
A_2	Y_2	2	2	6	0	2
A_3	Y_3	4	– 7	– 7	6	3
A_4	Y_4	5	– 4	4	1	– 3

Якщо елемент матриці гри додатній, то його значення відповідає виграшу сторони A, якщо від'ємне, то його абсолютне значення дорівнює виграшу сторони B.

Якщо виграш сторони A дорівнює програшу сторони B, то така гра називається **грою з нульовою сумою**.

Стратегію, яку обирає сторона A, будемо позначати A_1, A_2, A_3, A_4, а стратегію сторони B символами B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Ймовірність використання відповідної стратегії гравцем A позначимо Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 , а гравцем B – $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4, \mathrm{X}_5$. Мішаною стратегією гравця A, відповідно, гравця B, називаються вектори

$$\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4),\ \bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5),$$

для яких

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 1,\ \sum_{i=1}^{5} X_i = 1,\ Y_i \geq 0\ \left(i = \overline{1,4}\right),\quad X_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,5}\right). \tag{9.1}$$

Цілі гравців: A намагається забезпечити собі максимальний виграш, а B намагається зробити свій програш мінімальним за рахунок обрання відповідної стратегії. Таким чином, цілі гравців A і B є протилежними. Розв'язання задачі полягає у тому, щоб знайти найкращі (оптимальні) стратегії сторін, а також очікуваний середній результат (виграш). Вважаємо, що гравці діють без зайвого ризику і використовують *мінімаксну та максимінну стратегії*. А саме: гравці ***обирають таку з альтернатив стратегій, песимістична оцінка якої найкраща***.

Гравець А використовує принцип ***максиміна***: для кожної стратегії обирається найгірший для А (мінімальний) виграш, і серед них вибирається гарантований максимальний виграш – **нижня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим максимальним виграшем, а гарантованим найбільшим виграшем серед мінімальних виграшів.

Гравець В використовує принцип ***мінмакса***: для кожної стратегії обирається найгірший для А (максимальний) програш, і серед них вибирається гарантований найменший програш – **верхня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим мінімальним програшем, а гарантованим найменшим програшем серед максимальних програшів (табл. 9.2).

Таблиця 9.2 – пошук верхньої та нижньої ціни гри

A		B					
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Мінімум рядків
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
A_1	Y_1	– 8	3	– 7	1	– 3	– 8
A_2	Y_2	2	2	6	0	2	0^*
A_3	Y_3	4	– 7	– 7	6	3	– 7
A_4	Y_4	5	– 4	4	1	– 3	– 4
Максимум стовпчиків		5	3^*	6	6	3	

Нижня ціна гри у даному випадку дорівнює 0, а верхня – 3.

У тих випадках, коли верхня і нижня ціни гри співпадають, гра є грою з сідловидною точкою. У такому випадку стратегії, що відповідають цим цінам, є єдиним можливим способом дій двох гравців, що відповідають розв'язку задачі в чистих стратегіях.

У даному прикладі сідловидної точки не існує, тому для розв'язання задачі використовується *мішана стратегія*, яка пов'язана з випадковим обранням гравцями на кожному ході однієї стратегії серед кількох чистих стратегій.

У випадку гри з нульовою сумою середня величина виграшу (програшу) – математичне сподівання, є функцією від мішаних стратегій $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$:

$$S(\overline{Y}, \overline{X}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} a_{ij} Y_i X_j.$$

Функція $S(\overline{Y}, \overline{X})$ називається **платіжною функцією гри з матрицею** $[a_{ij}]_{4\times5}$. Стратегії $\overline{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ називаються оптимальними, якщо для довільних стратегій $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ виконуються умови

$$S(\overline{Y}, \overline{X}^*) \le S(\overline{Y}^*, \overline{X}^*) \le S(\overline{Y}^*, \overline{X})$$

Це означає, що використання в грі оптимальних мішаних стратегій $\overline{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ забезпечує гравцеві А виграш не менший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$; другому гравцеві – програш не більший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає **ціну гри *C***, тобто

$$S\left(\overline{Y}^*, \overline{X}^*\right) = C.$$

Застосуємо теореми теорії матричних ігор, отримаємо, що для того, щоб значення C було ціною гри, а $\overline{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} Y_i^* \geq C \ \left(j = \overline{1,5}\right), \tag{9.2}$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j^* \leq C \ \left(i = \overline{1,4}\right). \tag{9.3}$$

Для подальшого розв'язування потрібно, щоб $\mathrm{C} > 0$. Це завжди можна мати завдяки тому, що додавання до всіх елементів матриці виграшів одного і того ж постійного числа d не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на d.

Тепер після зазначених припущень можна обидві частини (9.2) і (9.3) поділити на C і увести позначення

$$y_i = \frac{Y_i}{C}, x_j = \frac{X_j}{C},$$

змінивши відповідним чином рівності (9.1)

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^* = \frac{1}{C}, \ \sum_{i=1}^{5} x_i^* = \frac{1}{C},$$

отримати пару двоїстих задач лінійного програмування, поданих в табл. 9.3.

Таблиця 9.3 – Пара двоїстих задач лінійного програмування, до яких зведено задачу матричних ігор

$f = \sum_{i=1}^{4} y_i \to min$ $\sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_i \geq 1 \ \left(j = \overline{1,5}\right),$ $y_i \geq 0 \ (i = \overline{1,4})$	$F = \sum_{i=1}^{5} x_i \to max$ $\sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j \leq 1 \ \left(i = \overline{1,4}\right),$ $x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5})$

<u>*Алгоритм розв'язання задачі теорії матричних ігор:*</u>

1) знаходимо верхню та нижню ціни гри і робимо висновок про розв'язання задачі у чистих чи мішаних стратегіях (у даному випадку задача розв'язується у мішаних стратегіях);

2) якщо серед елементів матриці є від'ємні, то для того, щоб ціна гри була додатною, знаходимо модуль мінімального елементу матриці, позначивши його через d (у даному випадку $d = 8$); додаємо його до всіх елементів матриці;

3) розв'язуємо пару двоїстих задач лінійного програмування;

4) знаходимо значення $C^{'}$ за формулою

$$C' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} y_i^*} \text{ або } C' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*};$$

5) визначаємо стратегії гравців:

гравця А: $Y_i^* = y_i^* \cdot C' \quad (i = \overline{1,4})$

гравця В: $X_j^* = x_j^* \cdot C' \quad (j = \overline{1,5})$,

6) робимо висновок з врахуванням пункту 2 алгоритму, що ціна гри дорівнює

$$C = C' - d.$$

Лабораторна робота №7 Елементи теорії ігор

Мета роботи: засвоїти сутність постановки та принципів розв'язання задачі матричних ігор.

Цілі роботи:

– навчитися формулювати змістовну постановку задачі матричних ігор;
– засвоїти термінологію теорії ігор з нульовою сумою;
– навчитися відрізняти гру в чистих або мішаних стратегіях;
– навчитися будувати математичну модель задачі матричних ігор і зводити її до пари двоїстих задач лінійного програмування;
– оволодіти алгоритмом розв'язання задачі матричних ігор;
– оволодіти принципами розв'язання задачі матричних ігор з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;
– набути навичок формулювання математичними та економічними висновками щодо отриманого розв'язку задачі матричних ігор.

9.3 Завдання до лабораторної роботи №7

За наданими матрицями гри $[a_{ij}]_{4\times5}$ виконати:

– розрахунок нижньої та верхньої ціни гри;
– зробити висновок про наявність чистої або мішаної стратегії;
– скласти взаємодвоїсті задачі лінійного програмування відповідно до матриці гри $[a_{ij}]_{4\times5}$; знайти їх розв'язок за допомогою інструмента «Solver» Microsoft Excel;
– розрахувати ціну гри;
– розрахувати оптимальні стратегії для першого та другого гравця, зробити висновки.

Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №7

Варіант 1

11	1	– 6	– 8	– 7
– 6	9	– 10	– 2	8
– 1	4	– 7	0	8
– 9	– 7	9	– 1	7

Варіант 2

– 2	– 2	– 6	5	6
– 2	9	7	– 7	2
– 2	11	– 6	4	– 6
7	– 8	– 4	– 3	8

Варіант 3

– 7	6	9	7	9
– 2	6	6	1	6
4	8	– 1	0	2
– 6	2	– 1	– 4	9

Варіант 4

– 3	0	5	– 6	8
9	9	3	– 1	2
– 10	3	– 3	10	– 9
– 9	8	– 2	0	1

Варіант 5

4	– 3	– 7	– 5	– 7
– 4	7	– 3	3	– 6
10	– 6	– 4	2	4
6	7	– 6	– 1	1

Варіант 6

– 10	– 1	1	9	– 1
– 8	11	1	2	– 6
– 6	– 10	– 6	4	6
6	3	– 9	7	– 3

Варіант 7

– 8	4	4	– 5	9
7	– 3	2	11	1
2	– 4	7	3	1
– 6	– 2	1	5	6

Варіант 8

– 3	9	– 2	– 3	1
– 1	3	– 3	– 4	6
3	– 4	4	– 3	3
1	9	– 8	7	– 9

Варіант 9

– 9	9	7	– 10	– 4
3	– 7	6	0	– 3
– 1	7	10	1	– 9
6	3	11	– 1	7

Варіант 10

11	– 8	3	– 5	7
– 10	3	– 3	– 5	– 2
9	4	10	10	4
– 7	10	8	9	9

Варіант 11

10	6	8	6	– 8
3	9	7	4	6
– 6	10	2	1	6
– 6	6	– 9	3	0

Варіант 12

6	7	1	10	7
8	3	– 3	– 1	5
0	5	– 5	– 9	9
– 1	– 3	4	– 3	– 10

Варіант 13

8	5	– 9	– 4	2
8	– 1	– 3	– 6	– 7
0	9	– 9	2	3
0	– 9	2	10	– 2

Варіант 14

– 3	9	3	1	8
2	– 1	– 2	9	– 10
10	2	10	10	10
2	0	– 6	– 9	6

Варіант 15

– 7	– 1	7	– 2	– 1
– 1	1	– 3	– 6	2
– 1	– 9	– 4	4	– 3
– 3	7	– 1	8	10

Варіант 16

4	9	– 8	– 6	4
4	– 5	1	– 9	– 3
4	6	– 6	– 8	7
– 7	1	– 5	– 6	5

Варіант 17

0	3	– 7	10	5
– 7	5	– 4	– 6	3
4	– 3	4	7	5
7	11	4	2	7

Варіант 18

6	– 4	3	– 2	– 4
4	9	2	5	3
– 4	– 6	4	– 3	10
– 2	– 9	8	– 10	11

Варіант 19

– 9	– 9	9	– 1	– 3
2	7	5	– 9	7
6	– 5	– 6	– 10	0
2	– 6	8	8	– 9

Варіант 20

0	2	11	10	– 6
– 9	– 3	2	– 7	– 5
8	4	8	2	9
– 6	0	– 1	7	– 9

Варіант 21

– 3	0	2	– 8	11
6	– 1	– 4	– 8	– 2
– 8	– 1	6	– 9	6
– 9	6	1	– 6	10

Варіант 22

– 5	7	4	3	2
7	– 1	4	3	– 4
– 3	6	7	– 2	3
6	4	– 8	7	10

Варіант 23

6	9	7	6	– 9
2	9	7	– 9	3
9	8	– 7	6	– 7
6	– 9	– 5	– 2	– 7

Варіант 24

– 10	– 6	0	5	8
3	3	– 5	– 7	– 3
– 5	0	9	– 8	7
8	– 3	– 1	– 9	– 6

Варіант 25

11	1	1	10	4
– 4	10	– 2	8	– 6
– 2	6	– 4	– 5	– 10
6	– 5	8	– 6	5

Варіант 26

4	10	3	8	– 1
– 7	– 9	10	9	6
– 1	– 5	1	4	7
9	6	– 1	10	1

Варіант 27

– 2	– 1	– 10	– 6	5
7	– 3	– 5	– 4	– 8
– 6	4	– 3	8	6
4	– 9	– 8	– 9	– 8

Варіант 28

– 1	3	– 1	11	8
– 5	– 7	2	6	– 3
1	1	– 5	11	4
4	5	– 2	– 1	5

Варіант 29

– 2	– 3	7	9	8
– 9	2	– 2	6	9
8	1	2	3	2
5	– 1	– 1	– 7	6

Варіант 30

– 10	2	– 7	– 3	1
2	2	8	5	0
5	– 7	– 7	2	6
6	– 9	7	– 1	2

9.4 Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи №7

Розв’яжемо задачу з прикладу 9.1 за допомогою інструмента «Solver» Microsoft Excel з тим самим переліком завдань, що і в лабораторній роботу №7.

На рис. 9.1 надано всі формул для програмування комірок MS Excel для реалізації всіх кроків алгоритму, виписаного в підрозділі 9.1:

1) для визначення верхньої та нижньої ціни гри вносимо формули в комірки H2:H5, I4 та C6:G6, E4;

2) серед елементів матриці є від’ємні, тому знаходимо модуль мінімального елементу матриці, визначаючи його за допомогою формул в комірках D8 і F8. Після цього додаємо знайдене значення в комірці F8 до всіх елементів «платіжної» матриці C12:G15;

3) для подальшого розв’язання пари двоїстих задач лінійного програмування з таблиці 9.3, вносимо формули, що відповідають:

- цільовим функціям – комірки H11 для гравця B і B16 для гравця A;
- лівим частинам систем обмежень – комірки H12:H15 для гравця B і C16: G16 для гравця A;

4) вносимо формулу для обчислення значення C' в комірку B19;

5) формули для визначення стратегії гравців вносимо в комірки B22:B25 для гравця B і C21:G21 для гравця A;

6) остаточне обчислення ціни гри вписуємо в комірку E23.

Відповідно до табл. 9.1

- на рис. 9.2 продемонстровано заповнення екранної форми «Solver Parameters» і результат розв’язання допоміжної задачі лінійного програмування на максимум для гравця B;
- на рис. 9.3 – задачі на мінімум для гравця A.

Відповідно до розрахунків, нижня ціна гри 0 у.о не дорівнює верхній ціні гри 3 у.о., тому задача в мішаних стратегіях.

Результати щодо оптимальних мішаних стратегій гравців наведено на рис. 9.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			B1	B2	B3	B4	B5	min	
2		A1	-8	3	-7	1	-3	=MIN(C2:G2)	max-min
3		A2	2	2	6	0	2	=MIN(C3:G3)	нижня ціна гри
4		A3	4	-7	-7	6	3	=MIN(C4:G4)	=MAX(H2:H5)
5		A4	5	-4	4	1	-3	=MIN(C5:G5)	
6		max	=MAX(C2:C5)	=MAX(D2:D5)	=MAX(E2:E5)	=MAX(F2:F5)	=MAX(G2:G5)		
7		min-max	верхня ціна гри		0				
8			min	-8	d=	8			
9									
10			x1	x2	x3	x4	x5	ЦФ для В	
11								0	
12	y1		=C2+$F$8	=D2+$F$8	=E2+$F$8	=F2+$F$8	5	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C12:G12)	<=
13	y2		=C3+$F$8	=D3+$F$8	=E3+$F$8	=F3+$F$8	10	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C13:G13)	<=
14	y3		=C4+$F$8	=D4+$F$8	=E4+$F$8	=F4+$F$8	11	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C14:G14)	<=
15	y4		=C5+$F$8	=D5+$F$8	=E5+$F$8	=F5+$F$8	5	=SUMPRODUCT($C$11:$G$11;C15:G15)	<=
16	ЦФ для А	=SUM(B12:B15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;C12:C15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;D12:D15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;E12:E15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;F12:F15)	=SUMPRODUCT($B$12:$B$15;G12:G15)		
17			>=	>=	>=	>=	>=		
18			1	1	1	1	1		
19	C'=	=1/B16							
20			X1	X2	X3	X4	X5		
21			=C11*$B$19	=D11*$B$19	=E11*$B$19	=F11*$B$19	=G11*$B$19	для В	
22	Y1	=B12*$B$19							
23	Y2	=B13*$B$19		Ціна гри: С=	=B19-F8				
24	Y3	=B14*$B$19							
25	Y4	=B15*$B$19							
26		для А							

Рис. 9.1 – Програмування комірок аркуша MS Excel

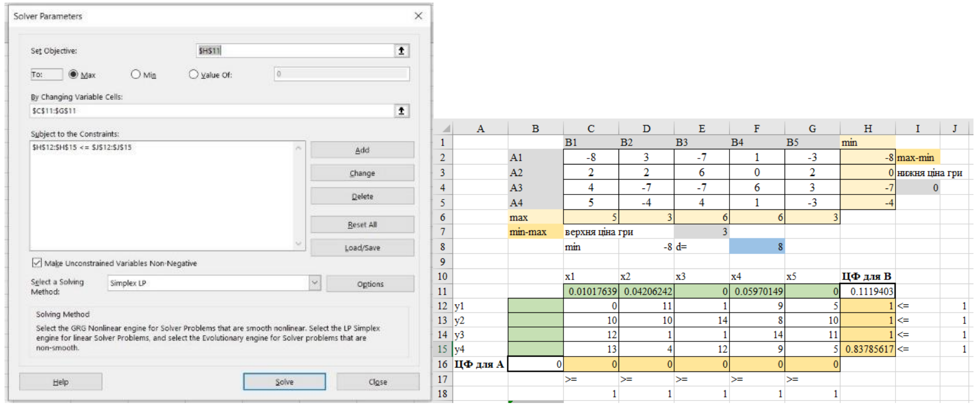


Рис. 9.2 – Реалізація розв’язку допоміжної задачі лінійного програмування для гравця А

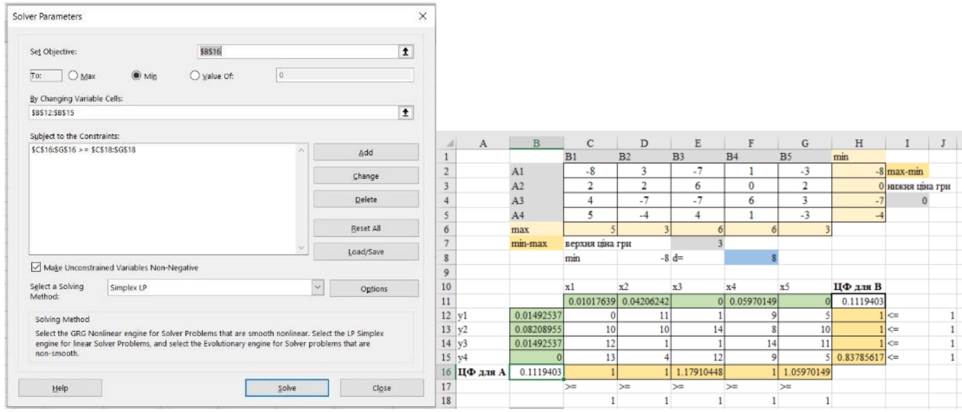


Рис. 9.2 – Реалізація розв’язку допоміжної задачі лінійного програмування для гравця В

	A	B	C	D	E	F	G	H
19	C'=	8.93333333						
20			X1	X2	X3	X4	X5	
21			0.09090909	0.37575758	0	0.53333333	0	**для B**
22	Y1	0.13333333						
23	Y2	0.73333333		Ціна гри: C=	0.93333333			
24	Y3	0.13333333						
25	Y4	0						
26		**для A**						

Рис. 9.4 – Розв’язок задачі матричних ігор з прикладу 9.1

Відповідь. Оптимальна мішана стратегія гравця А включає стратегії A_1, A_2, A_3, які застосовується гравцем А з ймовірностями Y_1 =0,13333, Y_2 =0,73333, Y_3 =0,13333, а мішана стратегія гравця В включає стратегії B_1, B_2, B_4 з ймовірностями X_1 =0,09091, X_2 =0,37576, X_4 =0,53333. При цьому ціна гри складатиме 0,93333 у.о. Це означає, що гравець А виграє 0,93333 у.о., а гравець В – програє 0,93333 у.о.

Розглянемо ***змістовний приклад***, у якому під *грою* розумітимемо сукупність стратегічних дій двох кандидатів А та В, що балотуються на посаду міського голови. До таких стратегій можуть належати, зокрема, участь у соціально значущих проєктах (будівництво супермаркета, підприємства, гідропарку тощо), розміщення агітаційних матеріалів у Telegram-каналах, на популярних вебсайтах, рекламних банерах або на телебаченні, розповсюдження друкованої продукції, участь у публічних дебатах та інші форми передвиборчої активності.

У цьому контексті елемент c_{ij} платіжної матриці інтерпретуватимемо як кількість десятків тисяч виборців, які підтримають кандидата А у разі застосування ним стратегії A_j та одночасного вибору кандидатом В стратегії B_i, якщо $c_{ij} > 0$. У випадку, коли $c_{ij} < 0$, значення елемента матриці відповідає кількості тисяч виборців, які перейдуть на бік кандидата В.

За такої інтерпретації результат, отриманий у розв’язанні наведеної вище задачі, зокрема значення цільової функції, означає перехід на бік кандидата А приблизно 93 333 виборців за умови вибору обома кандидатами відповідних стратегій із ймовірностями, визначеними у відповіді.

Питання для самоконтролю до теми 9 та лабораторної роботи №7

1. Сформулювати змістовну постановку задачі матричних ігор.
2. Що називають грою з нульовою сумою?
3. Яку гру називають грою в мішаних стратегіях?
4. Що закладено в поняття ціни гри?
5. Написати математичну модель задачі матричних ігор і описати покрокове її зведення до пари двоїстих задач лінійного програмування.
6. Охарактеризувати алгоритм розв’язання задачі матричних ігор.
7. Описати принципи розв’язання задачі матричних ігор з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;

Тема 10 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

10.1 Поняття теорії масового обслуговування та основні розрахункові формули

У системах масового обслуговування (СМО) розглядаються черги і вирішуються питання по обслуговуванню ряду (потоку) вимог від людей, приладів, подій.

Приклади СМО: черга у магазині (касир розглядається як «прилад», що обслуговує чергу); телефонна станція (розглядається як прилад, що обслуговує потік замовлень на телефонні розмови); оператори ЕОМ (вони розглядаються як прилад, що обслуговує потік інформації від приладів, підприємств та інших операторів); n робітників цеху, які можуть звернутися з вимогами інструмента до комірника («приладу обслуговування») і т.п.

Вимоги на виконання робіт поступають у випадкові моменти часу, обслуговуючі пристрої задовольняють вимоги (обробляють їх) за випадковий термін. ***Кількість вимог*** є статистично оціненою величиною.

Таким чином, СМО мають дві головні ознаки: обслуговуючий пристрій і чергу.

СМО розрізняються:

1) за конструкцією обслуговуючого пристрою: одноканальна і багатоканальна;

2) за дисципліною черги. Найбільше розповсюджено правило: перший прийшов – перший обслуговуєшся. Але у СМО розглядаються й інші варіанти обслуговування, наприклад:

- вимоги за пріоритетом;
- відсутність черги: якщо для обслуговування черги немає вільного каналу або якщо СМО зайнята, то вимога не задовольняється і зникає.

При аналізі СМО намагаються одержати такі **характеристики**:

- середню довжину черги;
- середній термін обслуговування;
- середній час, за який обслуговуючий пристрій не працює.

Для отримання математичної моделі СМО потрібно знати:

- конструкцію СМО;
- математичний опис потоку вимог, які поступають у СМО;
- опис дисципліни черги, способу обслуговування;
- математичний опис обробки вимог.

Позначення

- λ – інтенсивність потоку заявок;
- μ – інтенсивність потоку обслуговування;
- стани СМО (нумеруємо за числом заявок, що знаходяться в системі):
- $S_0, S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_n$, де S_k – стан системи, коли в ній знаходиться k заявок, тобто зайнято k каналів;
- p_k – ймовірність того, що k каналів зайнято ($k = 0, 1, \dots, n$) (зокрема, p_0 – ймовірність того, що усі канали вільні, а p_n – ймовірність того, що усі канали зайняті);

– p_{n+s} – ймовірність того, що всі канали зайняті, а s заявок очікують обслуговування;
– m –число заявок, що очікують обслуговування (тобто довжина черги).

Основні розрахункові формули:

1) *одноканальна* система ***з відмовами***:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \ \mu = \frac{1}{t_{cp}};$$

2) *багатоканальн*а система ***з відмовами***:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}, \ \alpha = \frac{\lambda}{\mu};$$

3) припущення в ***СМО з чергами***: заявки, що потрапили до СМО, будуть знаходитися в черзі доти, поки її не обслужать. Тоді

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad \nu = \frac{1}{t_{cp}},$$

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}}, \quad 0 \le k \le n, p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^{n+s}}{n!\,n^s}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}}, \quad s \ge 1,$$

$$m = \frac{\frac{n \cdot \alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)^2}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}}, \ p_ч = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k, \ \ p_h = \frac{\nu}{\lambda} \cdot m,$$

де $p_ч$ – ймовірність наявності черги,

p_h – ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною,

p_h трактується ще інакше, як відношення середнього числа заявок, що залишають чергу в одиницю часу, до середнього числа заявок, що находять у чергу в одиницю часу.

Відносна пропускна спроможність СМО: $q = 1 - p_{n+m}$;

4) припущення на СМО ***з обмеженою довжиною черги***: заявка, що застала усі канали зайнятими, стає в чергу тільки в тому випадку, якщо в ній знаходяться менше, ніж j заявок; якщо ж число заявок у черзі дорівнює j, то заявка, що надійшла, залишає систему не обслугованою:

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{r=1}^{j} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^r}, 0 \le k \le n,$$

$$p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{r=1}^{j} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^r}, 1 \le s \le j.$$

Ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною, дорівнює ймовірності p_{n+j}. Відносна пропускна спроможність $q = 1 - p_{n+m}$. Абсолютна пропускна спроможність характеризує число заявок, що обслуговуються в одиницю часу: $Q = \lambda q$. Ймовірність p_0 може також характеризувати відносний час незайнятості системи обслуговування.

Лабораторна робота № 8 Задачі теорії масового обслуговування

Мета роботи: Оволодіти основними методами розв’язання та аналізу задач масового обслуговування для задач про багатоканальну систему з відмовами, задачу про багатоканальну систему з чергами та з обмеженою довжиною черги.

10.2 Завдання до лабораторної роботи №8

Визначити ймовірнісні характеристики зайнятості обслуговуючого персоналу СМО з відмовами за даними, що наведено в табл. 10.1.

Таблиця 10.1 – Індивідуальні варіанти до лабораторної роботи №8

№ варіанту	Щільність вхідного потоку заявок λ, клієнтів/хв.	Середній час обслуговування одного клієнта t_{cp}, хв.	Кількість обслуговуючого персоналу n, осіб
1	0,03	15	1,2,3
2	0,04	12	1,2,3
3	0,8	1	3,4,5
4	0,03	12	1,2,3
5	0,04	15	1,3,4
6	0,02	10	1,2,3
7	0,02	12	2,3,4
8	0,01	10	2,3,4
9	0,05	5	1,2,3
10	0,06	10	1,2,3
11	0,03	10	3,4,5
12	0,04	11	3,4,5
13	0,01	15	1,2,3
14	0,02	5	1,2,3
15	0,03	12	1,2,3
16	0,1	2	1,2,3
17	0,02	10	1,2,3
18	0,01	10	2,3,4
19	0,05	12	1,2,3
20	0,03	11	2,3,4
21	0,04	10	1,2,3
22	0,02	7	2,3,4
23	0,2	4	1,2,3
24	0,07	11	2,3,4
25	0,08	12	1,2,3
26	0,09	9	1,2,3
27	0,3	3	1,2,3
28	0,4	2	1,2,3
29	0,09	10	2,3,4
30	0,1	7	1,2,3

10.3 Методичні рекомендації до виконання лабораторної роботи №8

Приклад 10.1 Розглянемо задачу про *багатоканальну* систему ***з відмовами***.

Фірма надає невідкладну допомогу з питань, пов’язаних з програмним забезпеченням комп’ютерної техніки. За рік у фірму звертається у середньому 2000 осіб за певним питанням. Фірма приймає клієнтів 6 год. на день протягом 255 днів на рік. Середній час обслуговування клієнта t_{cp}. Визначити ймовірність зайнятості обслуговуючого персоналу фірми, коли їх кількість $n = 1, 2, 3$.

Розв’язання. Обчислимо щільність вхідного потоку, тобто число клієнтів, що звертаються у фірму протягом хвилини:

$$\lambda = \frac{2000}{255 \cdot 6 \cdot 60} = 0{,}022 \text{ осіб/хв.}$$

Для подальших обчислень застосовуємо формули

$$\mu = \frac{1}{t_{cp}}, \ \alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \ p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha^i}{i!}}.$$

і проводимо розрахунки за допомогою таблиць Microsoft Excel (рис. 10.2 і 10.3).

	A	B	C	D	E	F
1		ДАНО				
2	λ	0,022				
3	tcp	12				
4						
5		Розрахунок				
6	μ	=1/B3				
7	α	=B2/B6				
8						
9		i	0	1	2	3
10		α^i	=$B$7^C9	=$B$7^D9	=$B$7^E9	=$B$7^F9
11		i!	=FACT(C9)	=FACT(D9)	=FACT(E9)	=FACT(F9)
12		(α^i)/i!	=C10/C11	=D10/D11	=E10/E11	=F10/F11
13						
14	n	знаменник	p0	p1	p2	p3
15	1	=SUM(C12:D12)	=C$12/$B15	=D$12/$B15		
16	2	=SUM(C12:E12)	=C$12/$B16	=D$12/$B16	=E$12/$B16	
17	3	=SUM(C12:F12)	=C$12/$B17	=D$12/$B17	=E$12/$B17	=F$12/$B17

Рис. 10.2 – Програмування комірок на аркуші MS Excel задачі про багатоканальну систему з відмовами

	A	B	C	D	E	F
1		ДАНО				
2	λ	0,022				
3	tср	12				
4						
5		Розрахунок				
6	μ	0,083333333				
7	α	0,264				
8						
9		i	0	1	2	3
10		α^i	1	0,264	0,069696	0,0184
11		i!	1	1	2	6
12		(α^i)/i!	1	0,264	0,034848	0,003067
13						
14	n	знаменник	p0	p1	p2	p3
15	1	1,264	0,791139	0,208861		
16	2	1,298848	0,769913	0,203257	0,02683	
17	3	1,301914624	0,7681	0,202778	0,026767	0,002355

Рис. 10.3 – Розрахунки для задачі про багатоканальну систему з відмовами

Як бачимо, збільшення числа працівників зменшує ймовірність відмови: для 1 працівника на фірмі ймовірність відмови дорівнює $p_1 = 0{,}20886$,
для 2 працівників ймовірність відмови – $p_2 = 0{,}02683$,
для 3 працівників – $p_3 = 0{,}00236$.

Для такого вхідного потоку навіть один працівник забезпечує високу ефективність роботи фірми.

Розглянемо, як змінюються ймовірнісні характеристики системи обслуговування при тій же продуктивності, але *при збільшенні вхідного потоку* в 10 разів, число звернень на рік тепер становить 20 000 осіб Тоді $\lambda = 0{,}22$ осіб/рік, а ймовірнісні характеристики обчислюємо за допомогою таблиць Microsoft Excel, змінивши в заготовленій раніше таблиці значення $\lambda = 0{,}022$ на $\lambda = 0{,}22$, отримаємо результат, продемонстрований на рис. 10.4.

	A	B	C	D	E	F
1		ДАНО				
2	λ	0,22				
3	tср	12				
4						
5		Розрахунок				
6	μ	0,083333333				
7	α	2,64				
8						
9		i	0	1	2	3
10		α^i	1	2,64	6,9696	18,39974
11		i!	1	1	2	6
12		(α^i)/i!	1	2,64	3,4848	3,066624
13						
14	n	знаменник	p0	p1	p2	p3
15	1	3,64	0,274725	0,725275		
16	2	7,1248	0,140355	0,370537	0,489108	
17	3	10,191424	0,098122	0,259041	0,341935	0,300902

Рис. 10.4 – Розрахунки для задачі про багатоканальну систему з відмовами при збільшенні вхідного потоку в 10 разів

Отже,
для 1 працівника на фірмі ймовірність відмови дорівнює $p_1 = 0{,}725275$,
для 2 працівників ймовірність відмови – $p_2 = 0{,}489108$,
для 3 працівників – $p_3 = 0{,}300902$.

Зі збільшенням на порядок щільності вхідного потоку ймовірність відмови з ростом числа каналів не змінюється так різко, як у попередньому випадку.

Задамо число відвідувань у рік 200 000 осіб Тоді $\lambda = 2{,}2$ осіб/рік, а ймовірнісні характеристики обчислюємо допомогою таблиць Microsoft Excel, що наведена на рис. 10.5.

	A	B	C	D	E	F
1		ДАНО				
2	λ	2,2				
3	tср	12				
4						
5		Розрахунок				
6	μ	0,083333333				
7	α	26,4				
8						
9		i	0	1	2	3
10		α^i	1	26,4	696,96	18399,74
11		i!	1	1	2	6
12		(α^i)/i!	1	26,4	348,48	3066,624
13						
14	n	знаменник	p0	p1	p2	p3
15	1	27,4	0,036496	0,963504		
16	2	375,88	0,00266	0,070235	0,927104	
17	3	3442,504	0,00029	0,007669	0,101229	0,890812

Рис. 10.5 – Розрахунки для задачі про багатоканальну систему з відмовами при збільшенні вхідного потоку в 100 разів

Для такого вхідного потоку і розглянутого числа каналів ймовірність відмови досить велика:

для 1 працівника на фірмі ймовірність відмови дорівнює $p_1 = 0{,}963504$,

для 2 працівників ймовірність відмови – $p_2 = 0{,}927104$,

для 3 працівників – $p_3 = 0{,}890812$.

Приклад 10.2 Розглянемо задачу про *багатоканальн*у систему ***з чергами*** за тих же умов, що й у попередньому прикладі.

Розв'язання. Для обчислень застосовуємо формули

$$p_k = \frac{\dfrac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}}, \quad 0 \le k \le n, m = \frac{\dfrac{n \cdot \alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)^2}}{\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\alpha^i}{i!} + \dfrac{\alpha^{n+1}}{n!\,(n-\alpha)}},$$

$$p_ч = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\,,\ p_h = \frac{\nu}{\lambda} \cdot m,\ \nu = \frac{1}{t_{cp}},$$

де $p_ч$ – ймовірність наявності черги.

Режим вважається установленим, якщо $\alpha < 1$. Для $N = 2000$ осіб/рік при будь-якому значенні n режим є установленим, а для $N = 20\ 000$ осіб/рік – тільки для $n \geq 3$. Відповідно до зазначених формул робимо розрахунки за допомогою таблиць Microsoft Excel $N = 2000$ осіб/рік (рис. 10.6 і 10.7).

	A	B	C	D	E	F	G
1		ДАНО					
2	λ	0,022					
3	tср	12					
4							
5		Розрахунок					
6	ν	=1/B3					
7	α	=B2/B6					
8							
9		i	0	1	2	3	
10		α^i	=$B$7^C9	=$B$7^D9	=$B$7^E9	=$B$7^F9	
11		i!	=FACT(C9)	=FACT(D9)	=FACT(E9)	=FACT(F9)	
12		(α^i)/i!	=C10/C11	=D10/D11	=E10/E11	=F10/F11	
13							
14	n	доданок	знаменник	p0	p1	p2	p3
15	1	=D12*$B$7/(A15-$B$7)	=SUM(C12:D12)+B15	=C$12/$C15	=D$12/$C15		
16	2	=E12*$B$7/(A16-$B$7)	=SUM(C12:E12)+B16	=C$12/$C16	=D$12/$C16	=E$12/$C16	
17	3	=F12*$B$7/(A17-$B$7)	=SUM(C12:F12)+B17	=C$12/$C17	=D$12/$C17	=E$12/$C17	=F$12/$C17
18							
19	n	чисельник	m	рч	ph		
20	1	=B15*A20/(A20-$B$7)	=B20/C15	=1-SUM(D15:E15)	=$B$6/$B$2*C20		
21	2	=B16*A21/(A21-$B$7)	=B21/C16	=1-SUM(D16:F16)	=$B$6/$B$2*C21		
22	3	=B17*A22/(A22-$B$7)	=B22/C17	=1-SUM(D17:G17)	=$B$6/$B$2*C22		

Рис. 10.6 – Програмування комірок на аркуші MS Excel задачі про багатоканальну систему з чергами

	A	B	C	D	E	F	G
1		ДАНО					
2	λ	0,022					
3	tср	12					
4							
5		Розрахунок					
6	ν	0,0833333					
7	α	0,264					
8							
9		i	0	1	2	3	
10		α^i	1	0,264	0,069696	0,0184	
11		i!	1	1	2	6	
12		(α^i)/i!	1	0,264	0,034848	0,003067	
13							
14	n	доданок	знаменни	p0	p1	p2	p3
15	1	0,0946957	1,358696	0,736	0,194304		
16	2	0,0052995	1,304147	0,766784	0,202431	0,026721	
17	3	0,0002959	1,302211	0,767925	0,202732	0,026761	0,002355
18							
19	n	чисельник	m	рч	ph		
20	1	0,1286626	0,094696	0,069696	0,358696		
21	2	0,0061054	0,004682	0,004064	0,017733		
22	3	0,0003245	0,000249	0,000227	0,000944		

Рис. 10.7 – Розрахунки для задачі про багатоканальну систему з чергами

Маємо: ймовірність наявності черги $p_ч$

при 1 працівникові на фірмі складатиме 0,0697,

при 2 працівниках – 0,00406,

при 3 – 0,00023,

ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною p_h

при 1 працівникові на фірмі складатиме 0,3587,

при 2 працівниках – 0,01773,

при 3 – 0,00094,

середня довжина черги m

при 1 працівникові на фірмі складатиме 0,0947 осіб,

при 2 працівниках – 0,00468,

при 3 – 0,00025.

Аналогічно можна отримати, що для $N = 20\ 000$ осіб/рік при $n = 3$ (рис. 10.8).

	A	B	C	D	E	F	G
1		ДАНО					
2	λ	0,22					
3	tср	12					
4							
5		Розрахунок					
6	ν	0,0833333					
7	α	2,64					
8							
9		i	0	1	2	3	
10		α^i	1	2,64	6,9696	18,39974	
11		i!	1	1	2	6	
12		(α^i)/i!	1	2,64	3,4848	3,066624	
13							
14	n	доданок	знаменни	p0	p1	p2	p3
15	3	22,488576	32,68	0,0306	0,080783	0,106634	0,093838
16							
17	n	чисельник	m	pч	ph		
18	3	187,4048	5,734541	0,688145	2,172175		

Рис. 10.8 – Розрахунки для задачі про багатоканальну систему з чергами при $N = 20\ 000$ осіб/рік

Маємо: ймовірність наявності черги $p_ч$=0,688; середня довжина черги m =5,735 осіб

Приклад 10.3 Розглянемо задачу СМО ***з обмеженою довжиною черги,*** що становить $j = 6$ осіб, за тих же умов, що й у попередніх прикладах, у припущенні, що число відвідувань у рік 20 000 осіб

Розв'язання. Ймовірнісні характеристики обчислюємо за формулами

$$p_k = \frac{\frac{\alpha^k}{k!}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^r}, \quad 0 \le k \le n, \ p_{n+s} = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^s}{\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!} + \frac{\alpha^n}{n!}\sum_{r=1}^{j}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^r}, \quad 1 \le s \le j.$$

за допомогою таблиць Microsoft Excel. Ті значення ймовірностей, що виділено на рис. 10.9 і 10.10 блакитним кольором, знайдено за другою з наведених формул.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	ДАНО													
2	0,22													
3	12													
4														
5	Розрахунок													
6	=1/B3													
7	=B2/B6													
8														
9	i	0	1	2	3	4	5	6						
10	α^i	=$B$7^C9	=$B$7^D9	=$B$7^E9	=$B$7^F9									
11	i!	=FACT(C9)	=FACT(D9)	=FACT(E9)	=FACT(F9)									
12	(α^i)/i!	=C10/C11	=D10/D11	=E10/E11	=F10/F11									
13		(α/n)^i							сума 2					
14		=($B$7/$A14)^C$9	=($B$7/$A14)^D$9	=($B$7/$A14)^E$9	=($B$7/$A14)^F$9	=($B$7/$A14)^G$9	=($B$7/$A14)^H$9	=($B$7/$A14)^I$9	=SUM(D14:I14)					
15		=($B$7/$A15)^C$9	=($B$7/$A15)^D$9	=($B$7/$A15)^E$9	=($B$7/$A15)^F$9	=($B$7/$A15)^G$9	=($B$7/$A15)^H$9	=($B$7/$A15)^I$9	=SUM(D15:I15)					
16		=($B$7/$A16)^C$9	=($B$7/$A16)^D$9	=($B$7/$A16)^E$9	=($B$7/$A16)^F$9	=($B$7/$A16)^G$9	=($B$7/$A16)^H$9	=($B$7/$A16)^I$9	=SUM(D16:I16)					
17														
18	Сума 1	знаменник	p0	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	q	Q
19	=SUM(C12:D12)	=B19+J14*D12	=C$12/$C19	=D$12/$C19	=$D$12*D$14/$C19	=$D$12*E$14/$C19	=$D$12*F$14/$C19	=$D$12*G$14/$C19	=$D$12*H$14/$C19	=$D$12*I$14/$C19			=1-K19	=N19*$B$2
20	=SUM(C12:E12)	=B20+J15*E12	=C$12/$C20	=D$12/$C20	=E$12/$C20	=$E$12*D$15/$C20	=$E$12*E$15/$C20	=$E$12*F$15/$C20	=$E$12*G$15/$C20	=$E$12*H$15/$C20	=$E$12*I$15/$C20		=1-L20	=N20*$B$2
21	=SUM(C12:F12)	=B21+J16*F12	=C$12/$C21	=D$12/$C21	=E$12/$C21	=F$12/$C21	=$F$12*D$16/$C21	=$F$12*E$16/$C21	=$F$12*F$16/$C21	=$F$12*G$16/$C21	=$F$12*H$16/$C21	=$F$12*I$16/$C21	=1-M21	=N21*$B$2

Рис. 10.9 – Програмування комірок на аркуші MS Excel для розрахунків задач СМО з обмеженою довжиною черги

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		ДАНО													
2	λ	0,22													
3	tср	12													
4															
5		Розрахунок													
6	ν	0,083333													
7	α	2,64													
8															
9		i	0	1	2	3	4	5	6						
10		α^i	1	2,64	6,9696	18,39974									
11		i!	1	1	2	6									
12		(α^i)/i!	1	2,64	3,4848	3,066624									
13	n		(α/n)^i							сума 2					
14	1		1	2,64	6,9696	18,39974	48,57532	128,2389	338,5506	543,3741					
15	2		1	1,32	1,7424	2,299968	3,035958	4,007464	5,289853	17,69564					
16	3		1	0,88	0,7744	0,681472	0,599695	0,527732	0,464404	3,927703					
17															
18	n	Сума 1	знаменник	p0	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	q	Q
19	1	3,64	1438,14763	0,000695	0,001836	0,004846	0,012794	0,033776	0,089169	0,235407	0,621476			0,378524	0,083275
20	2	7,1248	68,790576	0,014537	0,038377	0,050658	0,066869	0,088267	0,116512	0,153796	0,203011	0,267974		0,732026	0,161046
21	3	10,19142	22,2362134	0,044972	0,118725	0,156717	0,137911	0,121362	0,106798	0,093983	0,082705	0,07278	0,064047	0,935953	0,20591

Рис. 10.10 – Результати розрахунків задач СМО з обмеженою довжиною черги

Ймовірність того, що заявка залишить систему не обслуговуваною, дорівнює
при 1 працівникові на фірмі $p_h = p_{1+6} = p_7 = 0{,}62148$
при 2 працівниках $p_h = p_{2+6} = p_8 = 0{,}24797$
при 3 –$p_h = p_{3+6} = p_9 = 0{,}06405$.

Відносна пропускна спроможність в таблицях позначена $q = 1 - p_h$. Абсолютна пропускна спроможність $Q = \lambda q$, тобто число заявок, що обслуговуються за 1 хв. дорівнює
при 1 працівникові на фірмі $Q = 0{,}08328$осіб/хв.,
при 2 працівниках $Q = 0{,}16105$ осіб/хв.,
при 3 –$Q = 0{,}20591$ осіб/хв.

10.4 Застосування імітаційного моделювання для проєктування систем масового обслуговування

Спочатку відновимо основні поняття.

- *потік подій* – послідовність подій, що з'являються у випадкові моменти часу. Приклади: виклики до швидкої допомоги, прибуття клієнтів, відмови елементів;
- *властивості потоку подій:*
  - *стаціонарність* – ймовірність появи k подій за час t залежить тільки від k і t;
  - *ординарність* – за нескінченно малий проміжок часу можлива не більше ніж одна подія;
  - *відсутність післядії* – незалежність кількості подій у неперетинних інтервалах часу.

Потік, що має ці властивості, називається *найпростішим (пуассонівським).*

Пуасонівський потік

Інтенсивність потоку λ– середня кількість подій за одиницю часу.

Ймовірність появи *k* подій за час t визначається ***формулою Пуассона***:

$$P_t\,(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\ t > 0,\ \lambda > 0$$

Розглянемо систему масового обслуговування, що складається з *N* каналів **з** *<u>відмовами</u>* (заявка покидає таку систему, якщо всі канали виявляться зайнятими). На неї надходить найпростіший потік заявок.

Відома щільність розподілу інтервалу часу t між двома послідовними заявками:

$$f\,(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau},\ \tau > 0,\ \lambda > 0$$

Останнє – щільність показникового закону

Модель системи з відмовами

Кожна заявка надходить до першого каналу обслуговування.

- якщо він вільний, то він обслуговує заявку;
- інакше – заявка надходить на другий канал та обслуговується ним, якщо він вільний;
- інакше переходить до третього каналу і так далі;
- якщо всі канали виявляться зайнятими, заявка *отримує відмову.*

Здійснюється підрахунок

- кількості виконаних заявок,
- кількості відмов.

Нехай потрібно знайти математичне сподівання кількості виконаних заявок та кількості відмов за певний час *T*.

Для розв'язання цієї задачі виконують *n* випробувань, кожне тривалістю *T*. У кожному випробуванні визначається кількість виконаних заявок та кількість відмов.

Змінні моделі:

- t_s – тривалість обслуговування каналом заявки,
- t_{i} – момент звільнення і-го каналу,
- T_k – момент надходження k-ої заявки,
- τ_k – проміжок часу між надходженнями k-ої та k+1-ої заявок,
- $T_{k+1} = T_k + \tau_k$ – момент надходження k+1-ої заявки,
- n – кількість випробувань.

Нехай перша заявка надійшла у момент часу $T_1 = 0$, коли *<u>всі канали вільні.</u>* Вона надходить до першого каналу і обслуговується ним за час t_s.

Змоделюємо момент T_2 надходження другої заявки. Для цього виберемо випадкове число r_1 та розіграємо значення τ_1, враховуючи показниковий закон розподілу випадкової величини з щільністю $f(\text{t})$:

Отже, друга заявка надійде у момент часу

$$T_2 = T_1 + \tau_1 = 0 + \tau_1 = \tau_1\,.$$

- якщо виявиться, що $t_1 \le T_2$, тобто друга заявка надійшла після того, як звільнився перший канал, то перший канал задовольняє другу заявку і у лічильник виконаних заявок додається одиниця;

– якщо $t_1 > T_2$, то перший канал зайнятий і заявка надходить до другого каналу і виконується ним, оскільки розрахунок почався з припущенням, що всі канали вільні. У лічильник виконаних заявок додається одиниця.

Якщо у деякий момент часу всі канали виявилися зайнятими, то заявка отримує відмову і у лічильник відмов додається одиниця. (Зауважимо, що в зазначеному алгоритмі t_1 – час завершення виконання заявки першим каналом.)

Випробування закінчується, якщо чергова заявка надійде у момент часу, що перевищує момент закінчення випробування, тобто, якщо $T_{k+1} > T$.

У результаті і-го випробування у лічильниках виявиться

– $n_{1,i}$ виконаних заявок та
– $n_{2,i}$ відмов.

Оцінками математичних сподівань виконаних заявок та відмов є вибіркові середні:

$$\overline{n_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{1,i}}{n}, \qquad \overline{n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{2,i}}{n}.$$

Для знаходження найменшої кількості випробувань, яка з надійністю γ забезпечує задану верхню межу похибки δ, використовують формулу:

$$n = \frac{z^2 \sigma}{\delta^2}.$$

Тут значення параметра z визначається з рівності

$$\Phi(z) = \frac{\gamma}{2}, \sigma = \frac{1}{\lambda},$$

де $\Phi(\mathrm{z}) -$ функція Лапласа.

Питання для самоконтролю до теми 10 та лабораторної роботи №8

1. Що називають системою масового обслуговування (СМО)? Які основні елементи та ознаки СМО виділяють у теорії масового обслуговування?

2. Які типи систем масового обслуговування розрізняють залежно від конструкції обслуговуючого пристрою та дисципліни черги? Наведіть приклади одноканальних і багатоканальних СМО з відмовами та з чергами.

3. Які основні параметри використовуються для математичного опису СМО? Поясніть зміст інтенсивності вхідного потоку заявок λ, інтенсивності обслуговування μ та коефіцієнта завантаження α.

4. Які ймовірнісні характеристики СМО найчастіше визначають при аналізі системи? Що означають середня довжина черги, ймовірність відмови та пропускна спроможність системи?

5. За яких умов режим роботи СМО з чергою вважається установленим? Як змінюються ймовірність відмови та середня довжина черги зі зростанням інтенсивності вхідного потоку або кількості каналів обслуговування?

6. Поясніть принципи застосування імітаційного моделювання для проєктування систем масового обслуговування

Тема 11 ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

11.1 Основні поняття теорії управлення запасами

Задачі з оптимального регулювання запасами можна сформулювати в такий спосіб:

1) моменти часу, в які приймаються замовлення на поповнення запасів, фіксовані. Потрібно визначити обсяг замовлень;

2) необхідно визначити й обсяг, і час замовлень.

Завдання дослідження полягає у відшуканні оптимального рішення цих задач. Під *оптимальним* тут розуміється рішення, що мінімізує суму усіх витрат, пов'язаних із створенням запасів.

Витрати в задачах управління запасами (УЗ) бувають трьох типів:

1) витрати, викликані оформленням і одержанням замовлення при закупівлі чи виробництві. Це величина, що не залежить від розміру партії;

2) витрати на зберігання одиниці продукції на складі. Вони включають в себе витрати, пов'язані з організацією зберігання, старінням і псуванням, витрати на страхування і податки;

3) витрати (штрафи), що виникають при нестачі запасів, коли відбувається затримка в обслуговуванні чи попит взагалі неможливо задовольнити.

Усі витрати можуть залишатися постійними чи змінюватися як функції часу (наприклад, залежно від сезону може бути різним штраф за затримку в обслуговуванні).

У задачах УЗ враховуються також характеристика попиту і можливість поповнення запасів.

Попит може бути відомим, постійним чи залежним від часу. Величина, що характеризує попит, може бути дискретною (наприклад, кількість автомобілів), так і неперервною. Попит на запасені товари може виникати у визначені моменти часу (попит на морозиво на стадіоні) чи існувати постійно (попит на морозиво у великому аеропорті).

Замовлення на поповнення запасів у ряді випадків можуть виконуватись негайно (наприклад, при замовленні молока у невеликому магазині). В інших випадках виконання замовлення вимагає значного часу. Замовлення можна робити в будь-які чи тільки у визначені моменти часу.

Обсяг продукції, що надходить на склад, може вимірюватися дискретною чи неперервною величиною і може бути як постійним, так і змінним. І, нарешті, саме надходження може бути дискретним чи неперервним, і відбуватися рівномірно чи нерівномірно.

Перелічені вище випадки дають тисячі задач УЗ. У цій темі ми розглянемо лише декілька з них.

11.2 Типи задач управління запасами та методи їх розв’язання

11.2.1 Задачі УЗ за відсутності дефіциту запасів (модель 1)

Постановка задачі. Деякий підприємець повинен поставляти своїм клієнтам R виробів рівномірно протягом інтервалу часу T. Таким чином, попит фіксований і відомий. Нестача товару не допускається, тобто штраф при незадовільненому попиті нескінченно великий ($C_2=\infty$). Змінні витрати виробництва складаються з таких елементів:

C_1 – вартість зберігання одного виробу (за одиницю часу),

C_s – вартість запуску у виробництво однієї партії виробів.

Підприємство повинно вирішити, як часто йому варто організовувати випуск партії і яким повинен бути розмір кожної партії.

Розв’язання. На рис. 11.1 зазначена задача представлена графічно. Нехай

q – розмір партії,

t_s – інтервал часу між запусками у виробництво партій,

R – повний попит за весь час планування T.

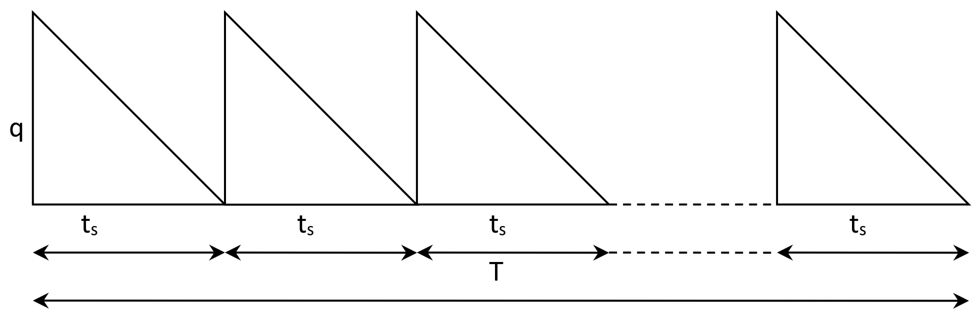


Рис. 11.1 – Графічне зображення моделі задачі УЗ за відсутності дефіциту запасів

Розв’язком задачі є:

– оптимальне значення розміру партії: $q^* = \sqrt{2\frac{RC_s}{TC_1}}$,

– оптимальний інтервал часу між запусками у виробництво партій: $t_s^* = \sqrt{2\frac{TC_s}{RC_1}}$,

– мінімально очікувані сумарні витрати: $Q^* = \sqrt{2RTC_1C_s}$.

Приклад 11.1 Нехай підприємцю необхідно постачати своєму замовнику 24000 одиниць продукції за рік. Оскільки одержувана продукція використовується безпосередньо у виробництві і замовник не має для неї спец. складів, постачальник повинен щодня відвантажувати денну норму. У випадку порушення постачання постачальник ризикує втратити замовлення. Тому нестача продукції неприпустима. Тобто штраф при нестачі вважати нескінченним. Зберігання одиниці продукції за місяць коштує 0,1 у.о. Вартість запуску у виробництво однієї партії продукції складає 350 у.о.

Потрібно визначити

– оптимальний розмір партії q^*;
– оптимальний період часу t_s^*;
– обчислити мінімум загальних річних витрат Q^*.

Розв'язання. У даному випадку $\text{Т} = 12$ місяців, $R = 24\,000$ одиниць, $\text{С}_1 = 0{,}1$ у.о./місяць, $\text{С}_s = 250$ у.о./партія. Підставляючи ці значення у зазначені вище формули, отримаємо

$q^* = \sqrt{2\frac{24000\cdot 350}{12\cdot 0{,}1}} = 3740$од.,

$t_s^* = \sqrt{2\frac{12\cdot 350}{24000\cdot 0{,}1}} = 1{,}87$місяця= 8,1 тижня,

$Q^* = \sqrt{2\cdot 24000\cdot 12\cdot 0{,}1\cdot 350} = 4490$у.о./рік.

11.2.2 Задачі УЗ за наявності дефіциту запасів (модель 2)

Розглянемо випадок, що відрізняється від попереднього тільки тим, що перевищення попиту над запасами вже допускається, тобто штраф за нестачу скінчений ($\text{С}_2<\infty$).

Розв'язання. На рис. 11.2 зазначена задача представлена графічно. Уведемо позначення:

S – рівень запасів,
q – розмір партії,
С_1 – вартість зберігання одного виробу (за одиницю часу),
С_2 – величина штрафу за нестачу однієї одиниці продукції (за одиницю часу),
С_s – вартість запуску у виробництво однієї партії виробів.
t_s – інтервал ча_су між запусками у виробництво партій,
t_1 – час на споживання запасу,
t_2 – час дефіциту запасу,
R – повний попит за весь час планування Т.

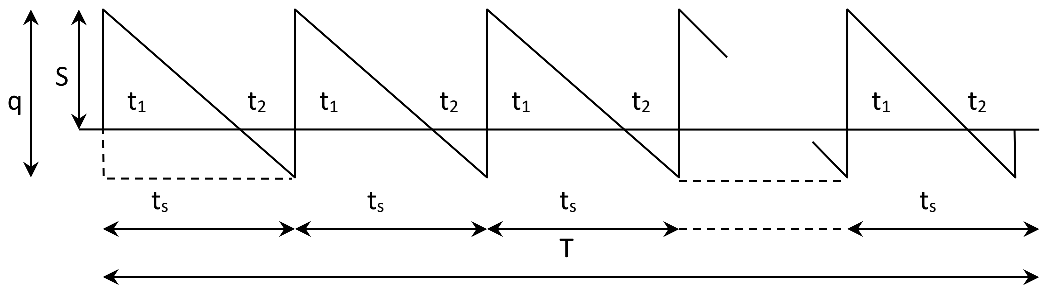


Рис. 11.2 – Графічне зображення моделі задачі УЗ за наявності дефіциту запасів

Розв'язком задачі є:

– оптимальний обсяг замовлення: $q^* = \sqrt{2\frac{RC_s}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$;

– оптимальний рівень запасів $S^* = \sqrt{2\frac{RC_s}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$;

– оптимальний інтервал часу між замовленнями: $t_s^* = \sqrt{2\frac{TC_s}{RC_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$;

– мінімально очікувані сумарні витрати: $Q^* = \sqrt{2RTC_1C_s} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$.

Перша задача є частковим випадком до другої. Зв'язок між розглянутими задачами:

1) якщо C_2 спрямувати до нескінченності, то ми отримаємо значення шуканих величин тими ж, що і у першій задачі;

2) якщо $C_2 < \infty$, то

$$\sqrt{2RTC_1C_s} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}} < \sqrt{2RTC_1C_s},$$

тому очікувані сумарні витрати в моделі 2 менші, ніж у моделі 1.

Приклад 11.2 Нехай зберігаються всі умови прикладу 1, але штраф C_2 за нестачу тепер дорівнює 0,2 у.о. за один виріб на місяць.

Розв'язання. У цьому випадку

$q^* = \sqrt{2\frac{24000\cdot350}{12\cdot0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}1+0{,}2}{0{,}2}} = 4578$од.,

$S^* = \sqrt{2\frac{24000\cdot350}{12\cdot0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}1+0{,}2}} = 3056$од.,

$t_s^* = \sqrt{2\frac{12\cdot350}{24000\cdot0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}1+0{,}2}{0{,}2}} = 2{,}29$місяця$= 9{,}9$ тижні,

$Q^* = \sqrt{2 \cdot 24000 \cdot 12 \cdot 0{,}1 \cdot 350} \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}1+0{,}2}} = 3667$у.о./рік.

При оптимальній стратегії очікуваний дефіцит до кінця кожного періоду складав би $4578 - 3056 = 1522$ виробів.

11.2.3 Задачі УЗ з дискретним розподілом попиту (модель 3)

При побудові цієї моделі штрафи, пов'язані з дефіцитом запасів, так само як і моделі 2 вважаються скінченними. Крім того, модель 3 має такі особливості.

1) попит і поповнення запасів оцінюються на основі емпіричних даних;

2) розглядається виробництво і споживання дискретного продукту;

3) розподіли за часом попиту і замовлень на поповнення дискретні і нерівномірні;

4) відомий і постійний час виконання замовлень.

Приклад 11.3 Компанія по виробництву електроенергії збирається придбати новий генератор для своєї електростанції. Одна з основних деталей генератора дуже складна і дорога, тому доцільно при замовленні генератора замовити і кілька штук цих деталей у запас. Однак, ця деталь підганяється індивідуально для кожного генератора і її вже не можна буде використовувати на іншому агрегаті.

Компанія бажає знати, скільки запасних частин їй варто замовляти для кожного генератора. При вирішенні цього питання компанія має таку інформацію. Вартість однієї деталі, якщо її замовляти разом з генератором, складає 500 у.о. Відсутність цієї деталі в запасі при поломці призводить до виходу генератора з ладу, і простій генератора та термінове замовлення деталі обходиться 10 000 у.о. Дані про частоту виходу цієї деталі з ладу (на 100 генераторів) наведені в табл. 11.1.

Таблиця 11.1 – Умова задачі управління запасами прикладу 11.1

Попит r (число деталей на машину)	0	1	2	3	4	5	6 і більше
Емпірична ймовірність P(r)	0,9	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0

Розв'язання. У даному прикладі збиток від невикористаних деталей дорівнює їх вартості, оскільки витрати на зберігання досить малі, тобто $C_1 = 500$ у.о., а нестача запасних деталей обходиться в $C_2 = 10\,000$ у.о. за 1 штуку.

Нехай

S – кількість деталей у запасі,

r – попит на деталь (кількість деталей, що вийшли з ладу).

Тоді витрати будуть складати:

$(S - r) \cdot C_1$, якщо $r \le S$ (запас надмірний),

$(r - S) \cdot C_2$, якщо $r \ge S$ (запасу не вистачило).

За умовою нам заздалегідь невідома кількість деталей, що вийдуть з ладу. Однак, відомою є ймовірність виходу з ладу r деталей $P(r)$. Щоб обчислити очікувані при даному рівні запасів витрати, ми повинні просумувати значення витрат для кожного r, помножені на відповідні ймовірності $P(r)$:

$$\boxed{Q(S) = C_1 \sum_{r=0}^{S} P(r)(S - r) + C_2 \sum_{r=S+1}^{\infty} P(r)(r - S)}$$

У даному випадку маємо:

$$Q(S = 5) = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot (5 - 0) + 0{,}05 \cdot (5 - 1) + 0{,}02 \cdot (5 - 2) + \\ +0{,}01 \cdot (5 - 3) + 0{,}01 \cdot (5 - 4) + 0{,}01 \cdot (5 - 5) \end{bmatrix} = 2395 у.о.$$

$$Q(S = 4) = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot (4 - 0) + 0{,}05 \cdot (4 - 1) + 0{,}02 \cdot (4 - 2) + \\ +0{,}01 \cdot (4 - 3) + 0{,}01 \cdot (4 - 4) \end{bmatrix} + \\ +10000 \cdot [0{,}01 \cdot (5 - 4)] = 2000 у.о.,$$

$$Q(S = 3) = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot (3 - 0) + 0{,}05 \cdot (3 - 1) + \\ +0{,}02 \cdot (3 - 2) + 0{,}01 \cdot (3 - 3) \end{bmatrix} + \\ +10000 \cdot [0{,}01 \cdot (4 - 3) + 0{,}01 \cdot (5 - 3)] = 1710 у.о.,$$

$$Q(S = 2) = 500 \cdot [0{,}9 \cdot (2 - 0) + 0{,}05 \cdot (2 - 1) + 0{,}02 \cdot (2 - 2)] + \\ +10000 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}01 \cdot (3 - 2) + 0{,}01 \cdot (4 - 2) + \\ +0{,}01 \cdot (5 - 2) \end{bmatrix} = 1525 у.о.,$$

$$Q(S = 1) = 500 \cdot [0{,}9 \cdot (1 - 0) + 0{,}05 \cdot (2 - 2)] + \\ +10000 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}02 \cdot (2 - 1) + 0{,}01 \cdot (3 - 1) + \\ +0{,}01 \cdot (4 - 1) + 0{,}01 \cdot (5 - 1) \end{bmatrix} = 1550 у.о.,$$

$$Q(S = 0) = 10000 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}05(1 - 0) + 0{,}02(2 - 0) + 0{,}01(3 - 0) + \\ +0{,}01(4 - 0) + 0{,}01(5 - 0) \end{bmatrix} = 2100 у.о.$$

Розрахунки показують, що оптимальний рівень запасів дорівнює 2, при цьому затрати будуть мінімальними и становитимуть 1525 у.о.

Дослідницьке завдання №1. Задачі управління запасами

Написати математичну модель задачі, визначити, до якого класу вона належить, обрати метод розв'язання, знайти її розв'язок і зробити висновок в термінах постановки задачі.

Задача 1

Постійна потреба в одному із видів лікарських препаратів в аптеці складає $400+10n$ од. на тиждень, середня вартість зберігання 100 од. на складі - $n/10$ у.о. за тиждень, розміщення замовлення на препарат у постачальника обходиться 12 у.о. Визначити оптимальний розмір замовлення препарату, період часу між замовленнями, які мінімізують загальні витрати на зберігання та замовлення.

Тут n – номер варіанта.

Задача 2

Виконати розрахунок оптимального запасу деталей за умови, що попит на деталь змінюється за законом розподілу, наведеному в таблиці, там же вказані значення витрат зберігання C_1 і нестачі в C_2 за 1 деталь.

№ варіанта	P(0)	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	$P(5)$	P(6)	P(> 6)	C_1	C_2
1	0,01	0,04	0,16	0,38	0,28	0,10	0,03	0	80	1120
2	0,02	0,05	0,15	0,36	0,29	0,08	0,05	0	120	1000
3	0,01	0,03	0,18	0,33	0,30	0,14	0,01	0	90	500
4	0,01	0,04	0,19	0,35	0,28	0,10	0,03	0	180	1520
5	0,02	0,05	0,25	0,26	0,29	0,08	0,05	0	130	1000
6	0,01	0,13	0,18	0,33	0,30	0,14	0,01	0	90	1500
7	0,01	0,04	0,16	0,48	0,18	0,10	0,03	0	105	1120
8	0,02	0,05	0,15	0,41	0,24	0,08	0,05	0	100	1000
9	0,01	0,03	0,16	0,35	0,30	0,14	0,01	0	70	500
10	0,01	0,04	0,12	0,38	0,32	0,10	0,03	0	80	1120
11	0,02	0,05	0,17	0,34	0,29	0,08	0,05	0	110	1000
12	0,01	0,03	0,18	0,36	0,27	0,14	0,01	0	60	500
13	0,01	0,08	0,16	0,34	0,28	0,10	0,03	0	0	820
14	0,02	0,05	0,19	0,36	0,25	0,08	0,05	0	220	1000
15	0,01	0,03	0,18	0,33	0,34	0,10	0,01	0	190	500
16	0,01	0,04	0,16	0,38	0,29	0,09	0,03	0	180	1120
17	0,02	0,05	0,13	0,38	0,29	0,08	0,05	0	140	1000
18	0,01	0,03	0,16	0,33	0,32	0,14	0,01	0	40	500
19	0,01	0,07	0,16	0,35	0,28	0,10	0,03	0	180	1120
20	0,02	0,05	0,20	0,31	0,29	0,08	0,05	0	320	1000
21	0,01	0,03	0,18	0,33	0,34	0,10	0,01	0	50	500
22	0,01	0,04	0,19	0,38	0,25	0,10	0,03	0	70	1120
23	0,02	0,05	0,16	0,36	0,28	0,08	0,05	0	150	1000
24	0,01	0,03	0,18	0,33	0,34	0,10	0,01	0	40	500
25	0,01	0,04	0,16	0,34	0,28	0,10	0,03	0	280	1120
26	0,02	0,08	0,17	0,34	0,29	0,08	0,05	0	230	1000

№ варіанта	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$	$P(5)$	$P(6)$	$P(>6)$	C_1	C_2
27	0,01	0,03	0,18	0,33	0,35	0,09	0,01	0	95	500
28	0,01	0,04	0,16	0,44	0,28	0,06	0,03	0	89	1120
29	0,02	0,05	0,17	0,36	0,29	0,08	0,03	0	36	800
30	0,01	0,03	0,18	0,35	0,28	0,14	0,01	0	100	500

Питання для самоконтролю до теми 11

1. У чому полягає суть задач управління запасами та який розв’язок вважається оптимальним?
2. Які основні види витрат враховуються при побудові моделей управління запасами?
3. Які припущення покладено в основу моделі управління запасами без дефіциту?
4. Які параметри використовуються в цій моделі та як визначаються оптимальний розмір партії й інтервал між замовленнями?
5. Чим модель управління запасами з допустимим дефіцитом відрізняється від моделі без дефіциту?
6. Яку роль відіграє штраф за нестачу запасів та як він впливає на оптимальні розв’язки?
7. За яких умов модель з дефіцитом переходить у модель без дефіциту?
8. Як при цьому змінюються оптимальні значення обсягу замовлення та сумарних витрат?
9. Які особливості має модель управління запасами з дискретним розподілом попиту (модель 3)?
10. Як обчислюються очікувані витрати при заданому рівні запасів і як визначається оптимальний запас?

Тема 12 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ. ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

12.1 Основні положення нелінійного програмування

Загальна постанова задачі нелінійного програмування

Знайти екстремум функції:

$$min\ (max\ )\ f(x), x \in R^n$$

за умов:

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m,$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p,$$

де $f(x)$ – нелінійна цільова функція;

$g_i(x)$ – функції, що визначають ліві частини нерівностей в системі обмежень;

$h_j(x)$ – *функції* лівих частин рівностей-обмежень.

Необхідні та достатні умови екстремуму

Без обмежень:

– необхідна умова:

$$\nabla f(x^*) = 0,$$

де $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ – градієнт функції f.

– достатня умова:
  - якщо матриця Гессе в точці x^* додатно визначена → мінімум;
  - від'ємно визначена → максимум.

Матриця Гессе – це матриця вигляду

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до критерію Сильвестра, вона додатно визначена, якщо всі її головні мінори додатні, від'ємно визначена – знакопечережні, починаючи з від'ємного.

З обмеженнями:

– використовуються умови Лагранжа та Куна-Таккера.

Класичні методи оптимізації нелінійних задач:

– аналітичні методи (похідні, умови екстремуму);
– чисельні методи [8]:
  - градієнтні;
  - метод Ньютона;

- метод покоординатного спуску;
- метод умовного градієнту.

Методи безумовної багатовимірної оптимізації

Метод покоординатного спуску:

- оптимізація здійснюється послідовно за кожною змінною;
- метод має повільну збіжність.

Градієнтні методи

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x_k):$$

- рух у напрямку найшвидшого спадання;
- потребує вибору кроку α_k.

Метод Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k):$$

- метод має швидку збіжність;
- метод потребує обчислення матриці Гессе.

Методи умовної багатовимірної оптимізації:

- метод Лагранжа;
- метод умовного градієнту (Франка-Вульфа);
- проєкційні методи;
- методи штрафів та бар'єрів.

Метод невизначених множників Лагранжа

Для задачі:

$$min\ f(x) \text{ за умови } h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p.$$

Функція Лагранжа (лагранжіан):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(x).$$

Умови:

$$\nabla_x L = 0\ \ , h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p.$$

Метод умовного градієнту (Франка-Вульфа):

- застосовується для опуклих задач;
- на кожному кроці розв'язується лінійна апроксимація задачі;
- не потребує проєкцій на допустиму множину.

Опукле програмування. Основні поняття

Опукла задача:

- цільова функція – опукла;
- допустима множина – опукла.

Властивість:

- будь-який локальний мінімум є глобальним.

Теорема Каруша-Куна-Таккера (ККТ) (узагальнення методу Лагранжа)

Для задачі:

$$mi\,n\,f(x)\,;$$
$$g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m,$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p,$$
з множиною допустимих розв'язків, що задовольняють умовам регулярності, *необхідні умови існування* розв'язку задачі ККТ:

1) стаціонарність:
$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) = 0;$$
2) допустимість:
$$g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m,$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p;$$
3) невід'ємність множників:
$$\lambda_i \ge 0, i = 1, \dots, m;$$
4) умова доповняльної нежорсткості:
$$\lambda_i g_i(x^*) = 0.$$

Квадратичне програмування

Задача:
$$F(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \to \min\,(max)$$
за лінійних обмежень, де Q – симетрична матриця $n \times n$:

– якщо Q додатно визначена → задача опукла.

Економіко-математичні моделі з квадратичною цільовою функцією

Приклади:

– оптимізація інвестиційного портфеля (модель Марковіца);
– мінімізація витрат із квадратичними штрафами;
– моделі регулювання виробництва з витратами на відхилення.

Застосування теореми Куна-Таккера

– аналіз оптимальності у квадратичному програмуванні;
– розв'язання задач з ресурсними обмеженнями;
– визначення «тіньових цін» (економічна інтерпретація множників).

12.2 Приклади розв'язання задач квадратичного програмування

Приклад 12.1 Для запропонованої математичної моделі задачі нелінійного програмування
$$f = -2{x_1}^2 - 2{x_2}^2 + x_1 x_2 + 10x_1 + 20x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 \le 2; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$
виконати наступні завдання:

1) скласти змістовну постановку деякої техніко-економічної оптимізаційної задачі, яка може бути описана за допомогою запропонованої математичної моделі;

2) розв'язати сформульоване завдання методом лінеаризації Франка-Вульфа;

3) зробити висновки про оптимальне управління в термінах постановки задачі.

Розв'язання.

Змістовна постановка задачі

На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць та песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовують два види комбікормів, які містять необхідні тваринам живильні речовини А, В та С. Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг комбікорму кожного виду відповідно дорівнює:

- речовина А – 1 і 0;
- речовина В – 0 і 1;
- речовина С – 1 і 1.

Щодня тварини повинні отримати до 2 одиниць поживної речовини А, до 3 одиниць речовини В і до 10 од. речовини С.

Харчова цінність 1 кг кожного комбікорму пропорційні його вазі з коефіцієнтами $10-2k_1$ і $20-2k_2$ відповідно, де k_1, k_2 – відповідно вага комбікорму 1-го та 2-го виду, а при одночасному використанні збільшується на $k_1 \cdot k_2$.

Знайти оптимальний денний раціон тварин за умови максимізації його харчової цінності.

Математична модель

Нехай x_1, x_2 у.о.ваги– вага комбікорму 1-го та 2-го видів відповідно, що включається до денного раціону тварин. Сумарна харчова цінність раціону визначається функцією:

$$f = (10-2x_1)\cdot x_1 + (20-2x_2)\cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 =$$
$$= -2{x_1}^2 - 2{x_2}^2 + x_1 x_2 + 10x_1 + 20x_2 \to max.$$

Обмеження моделі описують умови отримання тваринами необхідного рівня поживних речовин:

$$\begin{cases} x_1 \le 2; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

Таким чином, математична модель вихідної задачі може бути записана у вигляді, наданому в умові.

Застосування методу лініарізації Франка-Вульфа для розв'язання задачі

Крок 0. Вибираємо початкове наближення до оптимального розв'язання цієї задачі X_0, що належить системі обмежень. Нехай, наприклад, $X_0 = (1;\ 2)$. Тоді $\overline{f}(X_0) = 42$.

Замінюємо нелінійну функцію лінійною у точці початкового наближення за формулою:

$$F(X_k) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{X_0} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{X_0} \cdot x_2.$$

знаходимо частинні похідні цільової функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1 + x_2 + 10, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 4x_2 + 20.$$

Розв'язуємо ЗЛП з цільовою функцією

$$F_0(X) = (-4x_1 + x_2 + 10)|_{X_0} \cdot x_1 + (x_1 - 4x_2 + 20)|_{X_0} \cdot x_2 \to max.$$

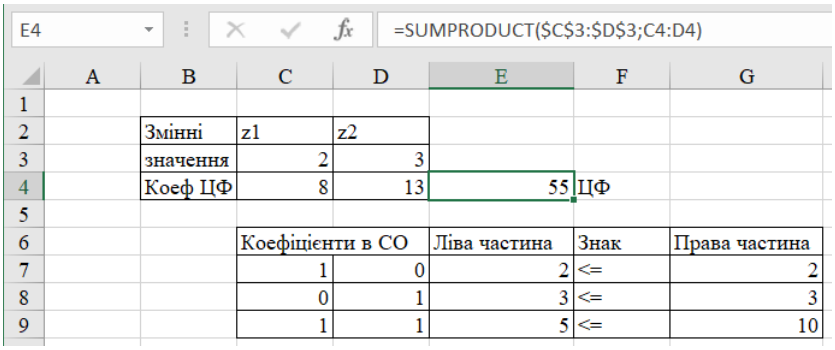
З урахуванням початкових обмежень приходимо до ЗЛП

$$F_0(X) = 8x_1 + 13x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 2; \\ x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$$

Розв'язавши цю лінійну задачу за допомогою процедури «Solver» (див рис. 12.1), знаходимо оптимальну точку

$$Z_0 = (2;\ 3).$$



E4 =SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C4:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	8	13	55	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.1 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 0)

Шукаємо перше наближення до оптимального розв'язку за такою формулою:

$$X_1 = X_0 + \rho(Z_0 - X_0),$$

тобто

$$x_1^1 = 1 + \rho(2 - 1) = 1 + \rho,$$
$$x_1^2 = 2 + \rho(3 - 2) = 2 + \rho.$$

За крок візьмемо

$$\rho = 0{,}5 \in [0; 1].$$

Підставивши його у X_1, отримаємо точку

$$X_1 = (1{,}5;\ 2{,}5).$$

Обчислюємо значення цільової функції у цій точці:

$$f(X_1) = 51{,}75.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму, обравши точність $\varepsilon = 0{,}5$:

$$|f(X_1) - f(X_0)| < 0{,}5,$$

У даному випадку

$$|51{,}75 - 42| = 9{,}75 \geq 0{,}5,$$

отже, критерій зупинки не виконується. Переходимо до першої ітерації.

Крок 1. Знаходимо цільову функцію:

$$F_1(X) = (-4x_1 + x_2 + 10)|X_1 \cdot x_1 + (x_1 - 4x_2 + 20)|X_1 \cdot x_2 =$$
$$= 6{,}5x_1 + 11{,}5x_2 \to max.$$

Розв'язуємо ЗЛП

$$F_1(X) = 6{,}5x_1 + 11{,}5x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 \le 2; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

За допомогою процедури «Solver» (рис. 12.2) отримаємо оптимальну точку

$$Z_1 = (2;\ 3).$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	6.5	11.5	47.5	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.2 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 1)

Знаходимо друге наближення:

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_2 + \rho(Z_2 - X_2),$$

тобто

$$x_2^1 = 1{,}5 + \rho(2 - 1{,}5)|_{\rho=0{,}5} = 1{,}75,$$

$$x_2^2 = 2{,}5 + \rho(3 - 2{,}5)|_{\rho=0{,}5} = 2{,}75.$$

Отже, маємо точку

$$\mathrm{X}_2 = (1{,}75;\ 2{,}75).$$

Обчислюємо значення цільової функції у цій точці:

$$f(X_2) = 56{,}0625.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_2) - f(X_1)| = |56{,}0625 - 51{,}75| \ge 0{,}5.$$

Критерій зупинки не виконується.

Крок 2. Знаходимо цільову функцію:

$$F_2(X) = (-4x_1 + x_2 + 10)|X_2 \cdot x_1 + (x_1 - 4x_2 + 20)|X_2 \cdot x_2 =$$

$$= 5{,}75x_1 + 10{,}75x_2 \to max.$$

Розв'язуючи ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» (рис. 12.3) отримаємо

$$Z_2 = (2;\ 3).$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	5.75	10.75	43.75	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.3 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 2)

Знаходимо третє наближення:

$$x_3^1 = 1{,}75 + \rho(2 - 1{,}75)|_{\rho=0,5} = 1{,}875,$$

$$x_3^2 = 2{,}75 + \rho(3 - 2{,}75)|_{\rho=0,5} = 2{,}875.$$

Звідки $X_3 = (1{,}875;\ 2{,}875)$.

Обчислюємо значення цільової функції у цій точці:

$$f(X_3) \approx 58{,}078.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_3) - f(X_2)| = |58{,}078 - 56{,}0625| \geq 0{,}5,$$

критерій не виконується.

<u>Крок 3.</u> Знаходимо цільову функцію:

$$F_3(X) = 5{,}375x_1 + 10{,}375x_2 \to max$$

Інструмент «Solver» (рис. 12.4) дає оптимальну точку $Z_3 = (2;\ 3)$.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	5.375	10.375	41.875	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.4 – Пошук оптимального розв’язку лініарізованої задачі (крок 3)

Знаходимо третє наближення $X_4 = (1{,}9375;\ 2{,}9375)$, значення ЦФ в якій

$$f(X_4) \approx 59{,}051.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_4) - f(X_3)| = |59{,}051 - 58{,}078| = 0{,}973 \geq 0{,}5.$$

Знову він не виконується.

<u>Крок 4.</u> Маємо цільову функцію $F_4(X) = 5{,}0975x_1 + 10{,}0975x_2 \to max$. Інструмент «Solver» (рис. 12.5) дає точку $Z_4 = (2;\ 3)$.

Чергове наближення $X_5 = (1{,}9675;\ 2{,}9675)$, для якого $f(X_5) \approx 59{,}509$. Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_4) - f(X_3)| = |59{,}509 - 59{,}051| = 0{,}458 < 0{,}5.$$

Він виконується.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	5.0975	10.0975	40.4875	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.5 – Пошук оптимального розв’язку лініарізованої задачі (крок 4)

Таким чином, з точністю $\varepsilon = 0{,}5$ приймаємо, що $X^* = (1{,}9675;\ 2{,}9675)$ є оптимальним розв'язком вихідної задачі. Максимальне значення цільової функції $f(X^*) \approx 59{,}509$.

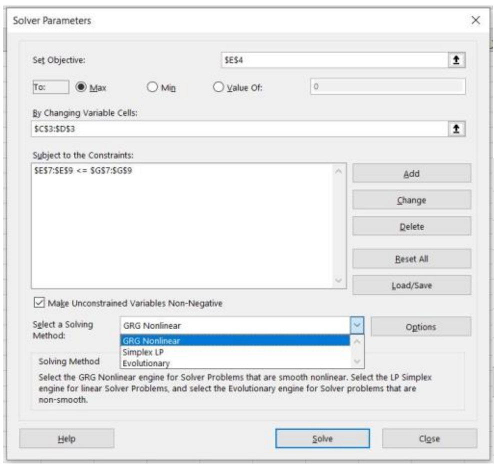
Відповідь. Згідно з оптимальним розв'язком вихідної задачі методом лінеаризації Франка-Вульфа денний раціон тварин повинен складатися з 1,966 у.о.ваги комбікорму 1-го виду та 2,966 у.о.ваги комбікорму 2-го виду. При цьому загальна поживна цінність денного раціону буде максимальною та становитиме 59,509 у.о.

Приклад 12.2 Розв'язати задачу з прикладу 12.1 за допомогою процедури «Solver» для Microsoft Excel.

Розв'язання. Послідовність розв'язання задачі в зазначений спосіб показана на рис. 12.6 а), б) і в). Звернемо увагу, що у вікні «Solver Parameters» за метод розв'язання потрібно обирати «GRG Nonlinear»:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	x1	x2			
3		значення					
4			Значення ЦФ		=-2*C3^2-2*D3^2+C3*D3+10*C3+20*D3		
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C7:D7)	<=	2
8			0	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C8:D8)	<=	3
9			1	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C9:D9)	<=	10

а)



б)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	x1	x2			
3		значення	2	3			
4			Значення ЦФ		60		
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва части	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

в)

Рис. 12.6 – Реалізація пошуку розв'язку задачі квадратичного програмування за допомогою MS Excel

Висновки. Оптимальний розв'язок задачі з використанням процедури «Solver» Microsoft Excel for Windows показує, що денний раціон тварин повинен складатися з 2 у.о.ваги комбікорму 1-го виду та 3 у.о.ваги комбікорму 2-го виду. При цьому загальна поживна цінність денного раціону буде максимальною та становитиме 60 у.о.

Отриманий результат має узгодженості з отриманим вище наближеним розв'язком методом Франка-Вульфа.

Приклад 12.3 Для запропонованої математичної моделі задачі нелінійного програмування

$$f = 12{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1 + 17x_2 \to min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

виконати наступні завдання.

1) скласти змістовну постановку деякої техніко-економічної оптимізаційної задачі, яка може бути описана за допомогою запропонованої математичної моделі;

2) розв'язати сформульовану задачу за допомогою методу Лагранжа;

3) зробити висновки про оптимальне управління в термінах постановки задачі.

Розв'язання.

Змістовна постановка задачі.

Нехай x_1, x_2 у.о.ваги – вага комбікорму 1-го та 2-го видів відповідно, що включається до денного раціону тварин. Витрати на отримання 1 кг комбікорму пропорційні його вазі з коефіцієнтами $12x_1 + 5$ *і* $x_2 + 17$. За такої умови, загальна вартість денного раціону буде відповідати заданій функції *f:*

$$f = x_1 \cdot (12x_1 + 5) + x_2 \cdot (x_2 + 17) = 12{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1 + 17x_2 \to min$$

Обмеження: загальний обсяг корму обох видів має становити 13 у.о.ваги. Це означатиме

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

В задачі потрібно знайти оптимальний обсяг комбікорму для мінімізації загальної вартості денного викорму.

Розв'язання *методом Лагранжа*. Утворимо функцію Лагранжа

$$L = 12{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1 + 17x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 13).$$

Знайдемо критичну точку функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 24x_1 + 5 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 17 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_1 + 5 + \lambda = 0; \\ 2x_2 + 17 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{521}{13}; \\ x_1^* = \dfrac{19}{13} \approx 1.461; \\ x_2^* = \dfrac{150}{13} \approx 11.538. \end{cases}$$

Для отримання висновків щодо пошуку мінімуму цільової функції, то тут можна діяти двома способами:

– перший – за допомогою матриці Гессе;
– другий – на основі теореми Вейєрштрасса, застосовуючи яку потрібно порівняти значення функції в критичній точці та на кінцях відрізка, що визначає задане обмеження.

Перший спосіб:
– знаходимо другі похідні в критичній точці для даної ЦФ:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (x_1)^2} = 24, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial (x_2)^2} = 2;$$

– утворюємо матрицю Гессе для ЦФ:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

та обчислюємо її головні мінори:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = det(H) = 48 > 0;$$

– матриця Гессе додатно визначена, тому додаткових умов не потрібно використовувати для висновку про наявність глобального мінімуму в критичній точці;
– значення в критичній точці відповідатиме мінімальному значенню ЦФ:

$$f(x_1^*, x_2^*) = 12(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + 5x_1^* + 17x_2^* = \frac{4709}{13} \approx 362.23 \text{ у.г.о.}$$

Другий спосіб
Обчислимо значення цільової функції
– в критичній точці $f(x_1^*, x_2^*) = \frac{4709}{13} \approx 362.231$;
– у першій кінцевій точці (0;13) відрізка $\begin{cases} x_1 + x_2 = 13; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$$f(0,13) = 12 \cdot 0^2 + 13^2 + 5 \cdot 0 + 17 \cdot 13 = 390;$$

– у другій кінцевій точці (13;0) зазначеного відрізка:

$$f(0,13) = 12 \cdot 13^2 + 0^2 + 5 \cdot 13 + 17 \cdot 0 = 403;$$

– знаходимо найменше серед отриманих значень:

$$min\left\{\frac{4709}{13}; 390; 403\right\} = \frac{4709}{13} \approx 362.231,$$

що відповідає значенню в критичній точці.

Отже, другий спосіб привів до того самого висновку, що і перший.

Відповідь. Згідно з оптимальним розв’язком задачі методом Лагранжа, денний раціон тварин повинен складатися з 1,461 у.о.ваги комбікорму 1-го виду та 11,538 у.о.ваги комбікорму 2-го виду. При цьому загальна вартість денного раціону буде мінімальною та становитиме 362,23 у.г.о.

12.3 Задачі дробово-лінійного програмування

12.3.1 Загальне формулювання задачі дробово-лінійного програмування

Задача дробово-лінійного програмування (ДЛП) – це задача оптимізації, у якій цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а обмеження – лінійні.

Загальний вигляд:

Знайти

$$\max_{x \in R^n} \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0}$$

за умов:

$$Ax \leq b,$$
$$d^T x + d^0 > 0,$$
$$x \geq 0,$$

де $c, d \in R^n$;
$c_0, d_0 \in R$;
A – матриця обмежень;
b – вектор правих частин.

12.3.2 Перетворення задачі дробово-лінійного програмування. Підстановка Чарнса-Купера

Задача ДЛП *зводиться до лінійного програмування* за допомогою *<u>підстановки Чарнса-Купера</u>*

$$t = \frac{1}{d^T x + d_0}, y = xt.$$

Тоді

$$x = \frac{y}{t}.$$

Після підстановки задача стає лінійною.

Приклад 12.4 Максимізувати показник ефективності:

$$Z = \frac{2x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ 2x_1 + x_2 \leq 6; \\ x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв’язання.

<u>Крок 1.</u> *Перевірка області допустимих розв’язків*

Допустима множина – опуклий багатокутник, знаменник завжди додатний:

$$x_1 + x_2 + 1 > 0$$

Крок 2. *Застосування підстановки Чарнса-Купера*

Нехай:

$$t = \frac{1}{x_1 + x_2 + 1}, \quad y_1 = x_1 t, \; y_2 = x_2 t.$$

Тоді цільова функція:

$$Z = 2y_1 + 2y_2.$$

Обмеження:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 6t; \\ 2y_1 + y_2 \leq 6t; \\ y_1 + y_2 \geq t. \end{cases}$$

Додаткова умова:

$$y_1 + \mathrm{y}_2 + \mathrm{t} = 1$$
$$\mathrm{y}_1 \geq 0, \mathrm{y}_2 \geq 0, \mathrm{t} \geq 0.$$

Крок 3. *Отримана задача лінійного програмування*

$$max \; Z = 2y_1 + 2y_2$$

за умов:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 6t; \\ 2y_1 + y_2 \leq 6t; \\ y_1 + y_2 \geq 1; \\ y_1 + y_2 + t = 1; \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Крок 4. *Знаходження оптимального розв'язку*

Розв'яжемо ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» для MS Excel з послідовністю дій, проілюстрованих на рис. 12.7.

Розв'язком допоміжної задачі є

$$y_1 = 0{,}4, y_2 = 0{,}4, t = 0{,}2;$$
$$Z = 1{,}6.$$

Крок 5. *Повернення до змінних x*

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{y}_1}{\mathrm{t}} = 2,$$
$$\mathrm{x}_2 = \frac{\mathrm{y}_2}{\mathrm{t}} = 2.$$

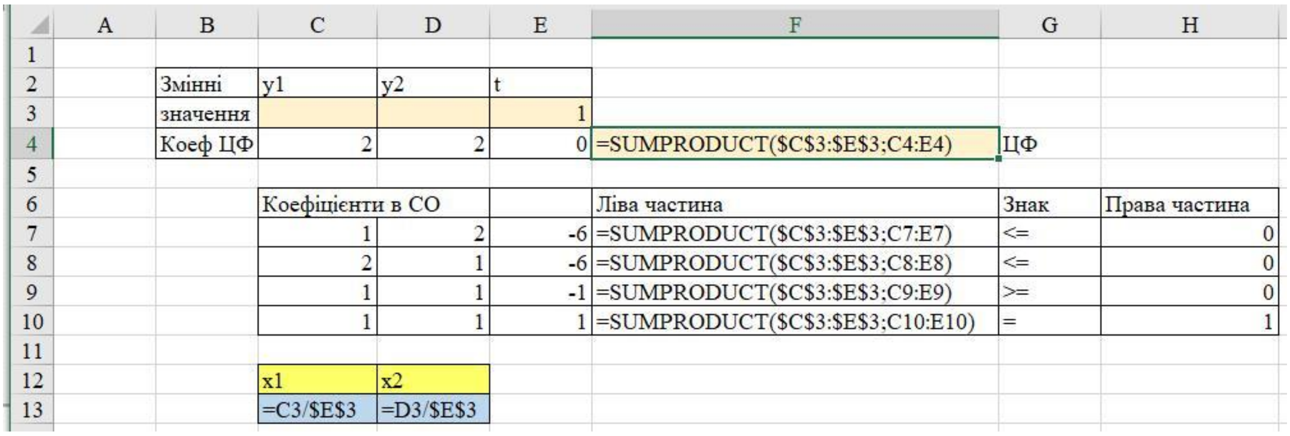
Значення цих змінних також розміщено в комірках C13:D13 на рис. 12.7.

Відповідь. Оптимальний розв'язок:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 2$$

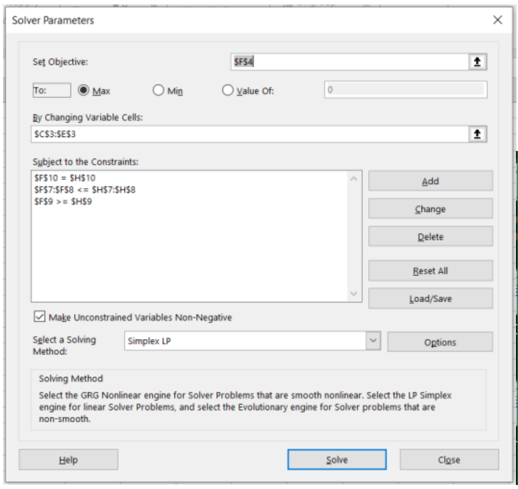
Максимальне значення цільової функції:

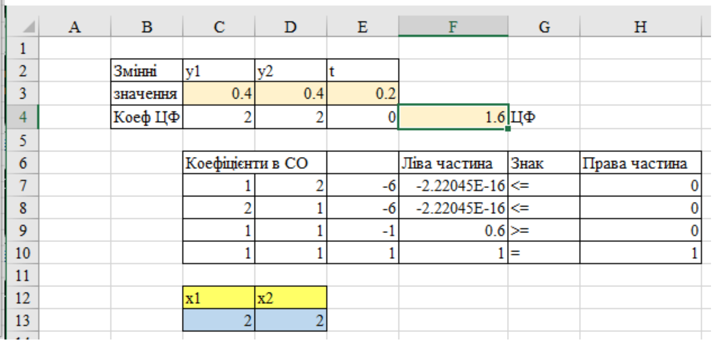
$$Z_{max} = 1{,}6.$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Змінні	y1	y2	t			
3		значення			1			
4		Коеф ЦФ	2	2	0	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C4:E4)	ЦФ	
5								
6			Коефіцієнти в СО			Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	2	-6	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C7:E7)	<=	0
8			2	1	-6	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C8:E8)	<=	0
9			1	1	-1	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C9:E9)	>=	0
10			1	1	1	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C10:E10)	=	1
11								
12			x1	x2				
13			=C3/$E$3	=D3/$E$3				

а)





	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Змінні	y1	y2	t			
3		значення	0.4	0.4	0.2			
4		Коеф ЦФ	2	2	0	1.6	ЦФ	
5								
6			Коефіцієнти в СО			Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	2	-6	-2.22045E-16	<=	0
8			2	1	-6	-2.22045E-16	<=	0
9			1	1	-1	0.6	>=	0
10			1	1	1	1	=	1
11								
12			x1	x2				
13			2	2				

б) в)

Рис. 12.7 – Використання MS Excel для отримання розв'язку допоміжної ЗЛП методом Чарнса-Купера

Приклад 12.5 Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування з прикладу 12.4 за допомогою інструмента «Solver». Відповідна послідовність дій продемонстрована на рис. 12.8 а), б), в).

Відповідь та сама, що і в прикладі 12.4: оптимальний розв'язок задачі дробово-лінійного програмування: значення змінних

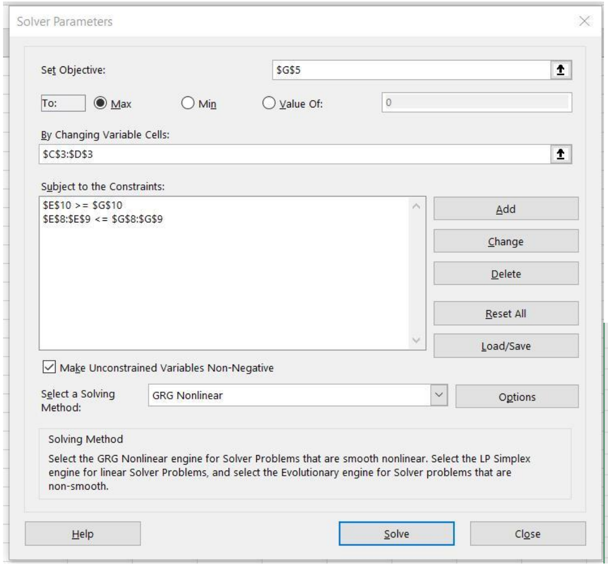
$$x_1^* = 2, x_2^* = 2,$$

цільової функції –

$$Z_{max} = 1{,}6.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Змінні	x1	x2				
3		значення						
4		Коеф чисельника	2	2	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C4:D4)		Дріб	
5		Коеф знаменника	1	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C5:D5)+1		=E4/E5	ЦФ
6								
7			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина	
8			1	2	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C8:D8)	<=	6	
9			2	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C9:D9)	<=	6	
10			1	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C10:D10)	>=	1	

а)



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Змінні	x1	x2				
3		значення	2	2				
4		Коеф чисельника	2	2	8		Дріб	
5		Коеф знаменника	1	1	5		1.6	ЦФ
6								
7			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина	
8			1	2	6	<=	6	
9			2	1	6	<=	6	
10			1	1	4	>=	1	

б) в)

Рис. 12.8 – Реалізація пошуку розв’язку задачі дробово-лінійного програмування з прикладу 12.3 за допомогою MS Excel

12.3.3 Економічні задачі, в яких цільова функція є дробово-лінійною

Дробово-лінійна цільова функція виникає тоді, коли показник ефективності має вигляд *відношення двох економічних величин,* кожна з яких є лінійною функцією змінних, тобто

$$F(x) = \frac{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0}{b_1x_1 + \cdots + b_nx_n + b_0}.$$

Розглянемо основні економічні задачі з дробово-лінійною цільовою функцією.

Задачі обчислення та максимізації рентабельності

Рентабельність зазвичай визначається як:

$$R = \frac{\text{прибуток}}{\text{витрати}}$$

або

$$R = \frac{\text{прибуток}}{\text{собівартість}}.$$

Нехай:

– прибуток:

$$P(x) = \sum p_i x_i - \sum c_i x_i\,;$$

– витрати (собівартість):

$$C(x) = \sum c_i x_i + C_0.$$

Тоді

$$R(x) = \frac{P(x)}{C(x)}.$$

Типова задача: обрати виробничу програму x, яка максимізує рентабельність.

Задачі мінімізації середньої собівартості продукції

Собівартість одиниці продукції:

$$S = \frac{\text{загальні витрати}}{\text{обсяг виробництва}}.$$

Якщо загальні витрати та обсяг виробництва визначаються функціями

$$Z(x) = \sum c_i x_i + C_0, \qquad Q(x) = \sum q_i x_i,$$

то:

$$S(x) = \frac{Z(x)}{Q(x)}.$$

Типова задача: мінімізувати середню собівартість одиниці продукції.

Задачі продуктивності та ефективності ресурсів

– *продуктивність праці:*

$$P = \frac{\text{випуск}}{\text{затрати праці}};$$

– *фондовіддача:*

$$F = \frac{\text{обсяг продукції}}{\text{вартість основних фондів}}.$$

Такі показники природно формулюються як дробово-лінійні функції.

Фінансові задачі

– *оборотність капіталу*

$$O = \frac{\text{дохід}}{\text{середній капітал}};$$

– *коефіцієнти ліквідності*

$$L = \frac{\text{поточні активи}}{\text{поточні зобов'язання}}.$$

Задачі «ефект–витрати»

Класичні задачі:

$$\max \frac{\text{економічний ефект}}{\text{витрати}}.$$

12.4 Багатокритеріальні задачі дослідження операцій

12.4.1 Суть багатокритеріальної оптимізації

Багатокритеріальна задача – це задача, у якій одночасно оптимізуються кілька, часто суперечливих, критеріїв.

Загальний вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x) \to \max, \\ f_2(x) \to \min, \\ \quad \ldots \\ f_k(x) \to opt, \end{cases} \qquad x \in X.$$

Типові економічні приклади:

– максимізація прибутку та мінімізація ризику;
– мінімізація витрат і максимізація якості;
– максимізація випуску та мінімізація забруднення.

Парето-оптимальність

Розв'язок x^* називається *Парето-оптимальним,* якщо не існує іншого допустимого розв'язку, який:

– покращує хоча б один критерій;
– не погіршує жодного іншого.

Сукупність таких розв'язків – *множина Парето*.

12.4.2 Основні підходи до розв'язання та особливості багатокритеріальних задач

Згортка критеріїв (скаляризація)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x),$$

де w_i – вагові коефіцієнти.

Цей метод найбільш поширений, проте його проблема полягає у суб'єктивності вибору вагових коефіцієнтів.

Метод головного критерію:

– один критерій – основний;
– інші задаються як обмеження.

Лексикографічний метод:

– критерії впорядковуються за важливістю;
– оптимізація виконується послідовно.

Метод послідовних поступок:

– для другорядних критеріїв задаються допустимі відхилення.

Цільове програмування:

– мінімізується відхилення від заданих цільових рівнів критеріїв.

Особливості багатокритеріальних задач

– не існує єдиного «найкращого» розв’язку;
– результат може бути суб’єктивним;
– важлива інтерпретація та діалог з експертом.

12.5 Задачі цілочислового програмування

12.5.1 Загальні положення цілочислового програмування

Поняття цілочислового програмування

Цілочислове програмування (ЦП) – це розділ математичного програмування, у якому <u>всі або частина змінних набувають лише цілочислових значень</u>.

Загальний вигляд задачі:

$$max\ (min\ )\ f(x) = c^T x$$

за умов:

$$Ax \leq b, x \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i \in J,$$

де J – множина індексів цілочислових змінних.

Основні типи задач цілочислового програмування

– чисто цілочислові – всі змінні цілочислові;
– змішані цілочислові – лише частина змінних цілочислова;
– бінарні (0–1) – змінні приймають значення 0 або 1.

ЗГАДАЙТЕ! Які задачі, розглянуті в курсі, можна віднести до бінарних?

Економічна мотивація цілочислових моделей

Цілочислові обмеження зумовлені дискретною природою об’єктів:

– кількість верстатів, працівників, проєктів;
– вибір «так / ні»;
– відкриття складів, маршрутів;
– виробництво партіями.

Основні методи розв’язання задач ЦП

– метод повного перебору (теоретичний);
– метод гілок і меж;
– метод відсічних площин;
– метод Гоморі;
– евристичні та метаевристичні методи.

12.5.2 Приклади розв’язання задач цілочислового програмування. Метод Гоморі

Суть методу Гоморі

Ідея методу

Метод Гоморі – це метод *відсічних півплощин*, який полягає у:

– розв’язанні задачі *лінійного програмування без вимоги цілочисловості*;
– перевірці, чи є отриманий розв’язок цілочисловим;
– якщо ні – побудові *відсічного обмеження*, яке:
  - відсікає дробовий розв’язок;
  - не відсікає жодного допустимого цілочислового розв’язку;
– додаванні цього обмеження і повторенні процесу.

Побудова відсічення Гоморі

Нехай з оптимальної симплекс-таблиці маємо:

$$x_B = b - \sum a_j x_j.$$

Якщо b – дробове, будується відсічення Гоморі:

$$\sum (\mathrm{a_j} - [\mathrm{a_j}])\mathrm{x_j} \geq \mathrm{b} - [\mathrm{b}].$$

Приклад 12.4 (Ігнорування цілочисловості → округлення)

$$\max \mathrm{Z} = 5\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2,$$

$$\begin{cases} 6\mathrm{x}_1 + 4\mathrm{x}_2 \leq 24, \\ \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \geq 0, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Розв’язання. Без цілочислових обмежень отримаємо:

$$x_1 = 4, x_2 = 0, Z = 20.$$

Розв’язок цілочисловий → оптимальний.

Приклад 12.6 Підприємство виробляє два види продукції A і B цілими партіями. Використання ресурсів на виготовлення 1 одиниці продукції, запаси ресурсів та прибуток від реалізації занесено в таблицю. Знайти, яку кількість виробів кожного виду потрібно виробляти для забезпечення максимального прибутку.

Ресурси	Витрати ресурсів на 1 виріб виду		Запас ресурсу
	A	B	
Сировина, кг	5	2	20
Машинний час, год	2	5	20
Трудовий ресурс, люд.-год	1	1	5
Прибуток, у.г.о.	5	5	

Розв’язання.

Математична модель задачі.

Змінні:

– x_1 виробів виду A;
– x_2 виробів виду B.

Цільова функція:

$$\max F = 5x_1 + 5x_2.$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

<u>Крок 1</u>. *Розв'язання задачі без цілочислової умови (ЛП)*

Розв'яжемо задачу лінійного програмування (ігноруючи вимогу цілочисловості) симплексним методом, попередньо зведемо її до канонічної форми запису:

$$F = 5x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad = 20, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 \qquad = 20, \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 5, \\ \qquad x_{1,2,3,4,5} \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 12.9 наведено послідовне заповнення симплексних таблиць відповідно до алгоритму, описаному в темі 2.

Перша симплекс-таблиця

			5	5	0	0	0	
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
x3	0	20	5	2	1	0	0	4
x4	0	20	2	5	0	1	0	10
x5	0	5	1	1	0	0	1	5
	Δj	0	-5	-5	0	0	0	

Друга симплекс-таблиця

			5	5	0	0	0	
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
x1	5	4	1	0.4	0.2	0	0	10
x4	0	12	0	4.2	-0.4	1	0	2.857143
x5	0	1	0	0.6	-0.2	0	1	1.666667
	Δj	20	0	-3	1	0	0	

Третя симплекс-таблиця

			5	5	0	0	0	
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
x1	5	3.333333	1	0	0.333333	0	-0.666667	
x4	0	5	0	0	1	1	-7	
x2	5	1.666667	0	1	-0.333333	0	1.666667	
	Δj	25	0	0	0	0	5	

Рис. 12.9 – Реалізація симплексного методу для задачі цілочислового програмування на кроці 1

З третьої симплекс-таблиці знаходимо оптимальний розв'язок ЛП: змінні –

$$x_1 = 3{,}333 = \frac{10}{3}, x_2 = 1{,}667 = \frac{5}{3}, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 5,$$

цільова функція – $F = 25$. Розв'язок *дробовий,* отже застосовуємо метод Гоморі.

<u>Крок 2.</u> *Побудова відсічення Гоморі*

Беремо будь-який базисний рядок із дробовим b_i, наприклад рядок x_1

$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5.$$

Виділяємо дробові частини:

$$\left\{\frac{10}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \left\{-\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Будуємо *відсічення Гоморі:*

$$\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{1}{3}.$$

Помножимо на 3:

$$2x_3 + 2x_5 \geq 1. \qquad (12.1)$$

Повернення до початкових змінних. З означень:

$$x_3 = 20 - 5x_1 - 2x_2,$$
$$x_5 = 5 - x_1 - x_2.$$

Підставляємо:

$$2(20 - 5x_1 - 2x_2) + 2(5 - x_1 - x_2) \geq 1;$$
$$50 - 12x_1 - 6x_2 \geq 1;$$
$$12x_1 + 6x_2 \leq 49.$$

Як можна бачити з рис. 12.10, саме це обмеження:

– *відсікає* точку $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$;

– *не відсікає жодного цілочислового допустимого розв'язку з області Ω*.

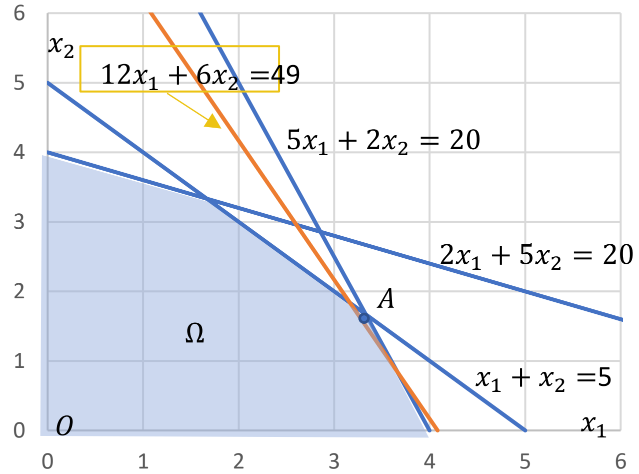


Рис. 12.10 – Графічне зображення відсікання точки А і невідсікання жодної цілочислової точки з області допустимих розв'язків Ω

<u>Крок 3.</u> *Додавання відсічення* (12.1) до останньої симплекс-таблиці.

Спочатку зведемо (12.1) до канонічної форми:

$$-2x_3 - 2x_5 \leq -1;$$
$$-2x_3 - 2x_5 + x_6 = -1.$$

Тепер доповнимо симплекс-таблицю з урахуванням отриманого рівняння, прийдемо до табл. 12.1.

Таблиця 12.1 – Доповнена симплекс-таблиця з урахуванням відсічення Гоморі

			5	5	0	0	0	0
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	5	3.333333	1	0	0.333333	0	-0.66667	0
x4	0	5	0	0	1	1	-7	0
x2	5	1.666667	0	1	-0.33333	0	1.666667	0
x6	0	-1	0	0	-2	0	-2	1
	Δj	25	0	0	0	0	5	0
	Θ_i		-	-	0	-	2.5	-

Перетворення цієї таблиці реалізується двоїстим симплексним методом. Розв'язувальний рядок визначається рядком з від'ємним значенням b_i. У даному випадку це рядок x_6. Розв'язувальний стовпець знаходимо з умови

$$\Theta_j = \min\left(-\frac{\Delta_j}{a_{i6}}:\ a_{i6} < 0\right).$$

Подальші перетворення над симплекс-таблицею стандартні. В результаті приходимо до табл. 12.2. Оскільки всі b_i додатні, то ця таблиця остаточна для кроку 3.

Таблиця 12.2 – Остаточна симплекс-таблиця кроку 3

			5	5	0	0	0	0
базис	cб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	5	3.166667	1	0	0	0	-1	0.166667
x4	0	4.5	0	0	0	1	-8	0.5
x2	5	1.833333	0	1	0	0	2	-0.16667
x3	0	0.5	0	0	1	0	1	-0.5
	Δj	25	0	0	0	0	5	0

На цьому кроці знову отримано дробовий розв'язок:

$$x_1 = 3{,}1667 = \frac{19}{6}, x_2 = 1{,}833 = \frac{11}{6}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{9}{2};\ \ F = 25.$$

Крок 4. *Побудова нового відсічення Гоморі*. Серед рядків в табл.12.2 з дробовим значенням b_i обираємо рядок x_4, звідки

$$x_4 = \frac{9}{2} + 8\,x_5 - \frac{1}{2}x_6.$$

Оскільки $\left\{\frac{9}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \{8\} = 0,\ \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то відсічення Гоморі набуває форми

$$\frac{1}{2}x_6 \geq \frac{1}{2},$$

або після домноження на 2 – форми

$$x_6 \geq 1. \qquad (12.2)$$

Запевнимося, що має місце відсікання точку В$\left(\frac{19}{6}.\frac{11}{6}\right)$, при цьому не відсікається жодна цілочислова точка з множини допустимих розв'язків. Для цього перейдемо до початкових змінних:

$$\mathrm{x}_6 = -1+2\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_5,$$
$$\mathrm{x}_3 = 20 - 5\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2,$$
$$\mathrm{x}_5 = 5 - \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2,$$

звідки

$$\mathrm{x}_6 = 49 - 12x_1 - 6x_2,$$

тоді нерівність (12.2) набуде вигляду

$$49 - 12x_1 - 6x_2, \geq 1;$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8.$$

Графічне подання відсікаючих півплощин разом з областю Ω і точкою В на рис. 12.11 підтверджує її відсікання без відсікання цілочислових точок.

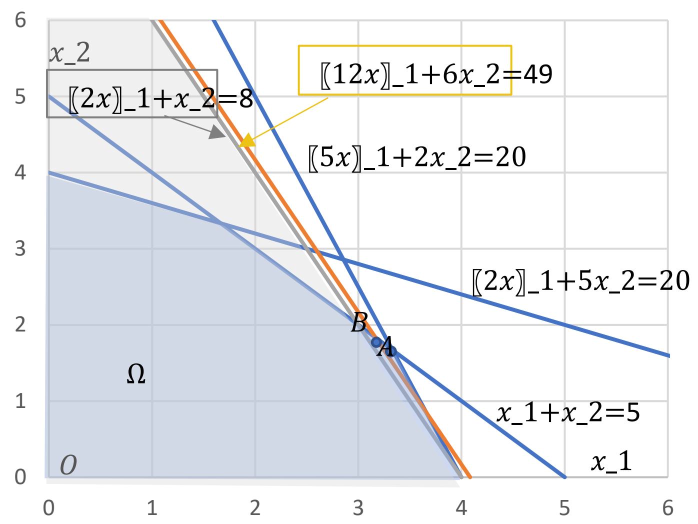


Рис. 12.11 – Графічне зображення відсікання точки B і невідсікання жодної цілочислової точки з області допустимих розв'язків Ω

Крок 5. *Додавання відсічення* (12.2) до симплекс-таблиці 12.2.

Зводимо (12.2) до канонічної форми

$$-x_6 + x_7 = -1.$$

Доповнюємо симплекс таблицю і робимо ті самі дії, що і на кроці 3. Результат надано на рис. 12.12.

			5	5	0	0	0	0	0
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	5	3.166667	1	0	0	0	-1	0.166667	0
x4	0	4.5	0	0	0	1	-8	0.5	0
x2	5	1.833333	0	1	0	0	2	-0.16667	0
x3	0	0.5	0	0	1	0	1	-0.5	0
x7	0	-1	0	0	0	0	0	-1	1
	Δj	25	0	0	0	0	5	0	0

			5	5	0	0	0	0	0
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	5	3	1	0	0	0	-1	0	0.166667
x4	0	4	0	0	0	1	-8	0	0.5
x2	5	2	0	1	0	0	2	0	-0.16667
x3	0	1	0	0	1	0	1	0	-0.5
x6	0	1	0	0	0	0	0	1	-1
	Δj	25	0	0	0	0	5	0	

Рис. 12.12 – Реалізація двоїстого симплексного методу для задачі цілочислового програмування на кроці 5

В результаті отримано цілочисловий розв'язок поставленої задачі:

$$x_1 = 3, x_2 = 2, F = 25.$$

Відповідь. Для отримання максимального прибутку, що становить 25 у.г.о, потрібно виготовляти 3 вироби виду А і 2 вироби виду В.

Приклад 12.7 Розв'язати задачу цілочислового програмування з прикладу 12.6 за допомогою інструмента «Solver» для MS Excel.

Розв'язання. Відповідна послідовність дій продемонстрована на рис. 12.13 а), б), в).

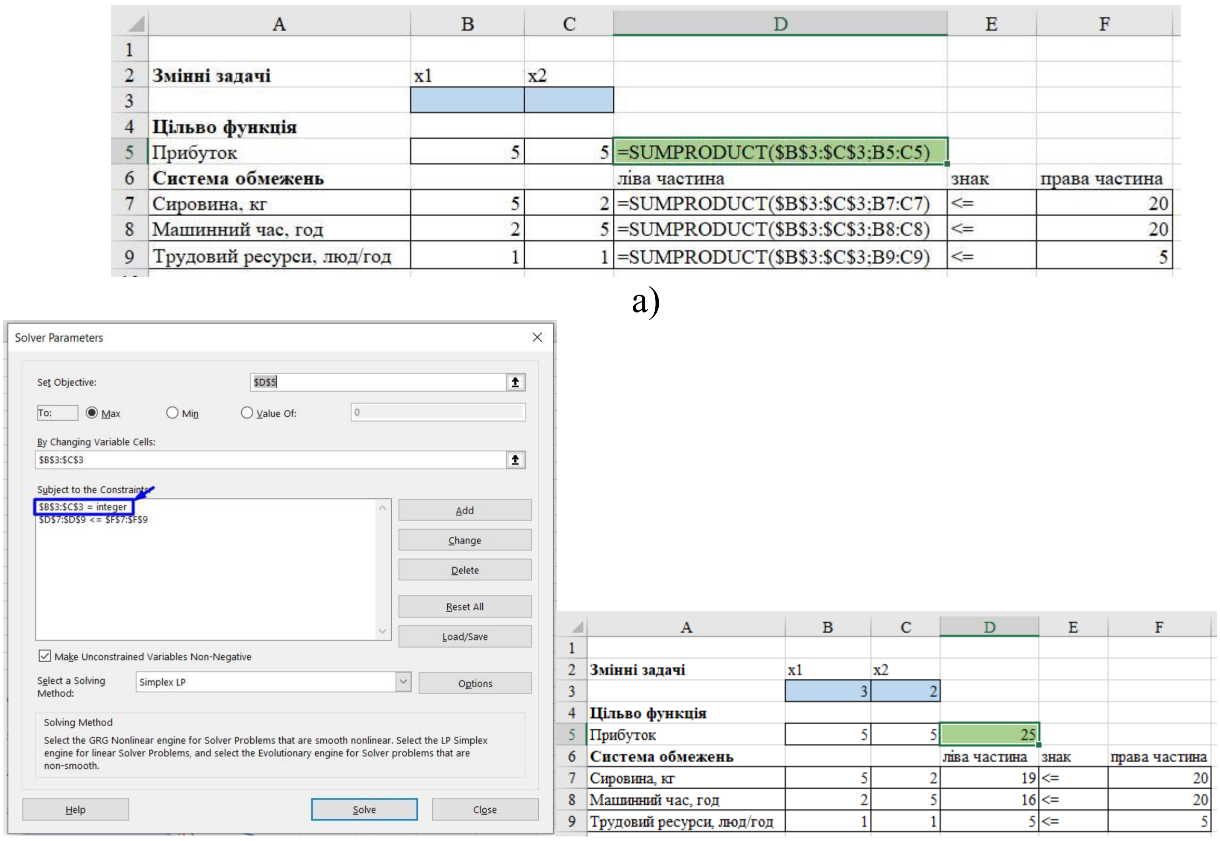


Рис. 12.13 – Реалізація пошуку розв’язку задачі цілочислового програмування з прикладу 12.5 за допомогою MS Excel

Дослідницьке завдання №2 Задачі нелінійного та цілочислового програмування

Обрати для моделювання відповідну модель. Визначити прийнятний метод розв’язання. Дати відповідь в термінах постановки задачі.

N – номер варіанта, s – номер групи.

Задача 1. Задачі дробово-лінійного програмування

Для варіантів 1-15

1. У цеху з виробництва консервованих фруктів виготовляють два види компотів із трьох видів фруктів (яблука, груші та сливи). Перед відправленням у торговельну мережу компоти розливають у банки: компот I виду – у 5-літрові, компот II виду – у 2-літрові. Усі дані, необхідні для розв’язання задачі, наведено в таблиці.

Фрукти	Запас, кг	Витрати фруктів для компоту, кг	
		I	II
Яблука Груші Сливи	Не більше 200N Не більше 70N Не менше 200N	s 0,3s 0,75s	0,5s 0,25 1s
Прибуток від реалізації однієї банки компоту, у.о.:		$1{,}3/N + 0{,}5$	$0{,}5/N + 0{,}2$

Потрібно скласти такий план виробництва двох видів компоту, за якого рентабельність буде максимальною, якщо відомо, що витрати на 5-літрову банку становлять 5 у.о., а на 2-літрову – 2 у.о.

Для варіантів 16-30

2. На промисловому комплексі з виробництва м’яса відгодовують свиней двох порід. Усі необхідні дані наведено в таблиці.

Види корму	Запаси корму, ц	Потреба для породи свиней, ц	
		I	II
Грубі корми	Не менше 1000N	2s	3s
Соковиті корми	Не більше 1200N	4s	2s
Комбікорми	Не менше 500N	s	s
Вартість відгодівлі, у.о.		$100+N$	$140+N$
Продуктивність, ц:		2	2,5

Потрібно знайти таку кількість свиней кожної породи, щоб собівартість 1 центнера м’яса була мінімальною.

Задача 2. Розв’язання задач квадратичного програмування

Для варіантів 1-7

1. Виготовлення деякої продукції виробничому об’єднанні можна здійснювати двома технологічними способами. Спосіб I виготовлення виробів потребує витрат, рівних $N+3+Nx_1+(N+1)x_1^2$ у.о., а спосіб II витрати – $N+2+Nx_2+(N+1)x_2^2$ у.о.
Скласти план виробництва продукції, згідно з яким має бути вироблено $200N$ виробів за найменших загальних витрат.

Для варіантів 8-15

2. Виготовлення деякої продукції на виробничому об’єднанні можна здійснювати трьома технологічними способами. Виготовлення x_i $(i=1{,}2{,}3)$ виробів за кожним із способів потребує витрат, рівних відповідно $10\,x_i^2$ у.о. $(i=1{,}2{,}3)$. Скласти план виробництва продукції, згідно з яким має бути вироблено $300Ns$ виробів за найменших загальних витрат.

Для варіантів 16-23

3. Виготовлення деякої продукції на виробничому об’єднанні можна здійснювати трьома технологічними способами. Виготовлення x_i $(i=1{,}2{,}3)$ виробів за кожним із способів вимагає витрат, рівних відповідно $x_1^2+10x_1$, $x_2^2-10x_2$, і $0{,}5x_3^2+20x_3$ у.о. Скласти план виробництва продукції, згідно з яким має бути вироблено $400Ns$ виробів за найменших загальних витрат.

Для варіантів 24-30

4. На виготовлення деталей виду А та Б витрачається метал у кількостях відповідно рівних $10N$ та $10N+2s$ кг. На складі є $10N(10N+s)$ кг цього металу, який необхідно використовувати в повному обсязі. Скласти план виробництва, який би мав мінімальні витрати, якщо відомо, що виготовлення деталей кожного виду вимагає витрат пропорційних квадрату кількості деталей з коефіцієнтом пропорційності s.

Задача 3. Завдання цілочислового лінійного програмування

Для варіантів 1-10

1. Трикотажна фабрика використовує для виготовлення светрів та кофтинок чисту вовну, силон та нітрон, запаси якого становлять відповідно $1000N, 440N, 330N$ кг. Кількість пряжі кожного виду (в кг), необхідної для виготовлення 10 виробів, а також прибуток, що отримується від їх реалізації, наведено в таблиці.

Вид сировини	Витрати пряжі на 10 виробів, кг	
	I	II
Вовна Силон Нітрон	7 1 2	2 2 1,3
Прибуток, у.о.	$(12s+1)\cdot 12$	$(3s-1)10$

Встановити план виробництва виробів, максимізуючий прибуток, за умови, що найбільший попит на светри та кофточки у цьому регіоні становить $2500N$.

Для варіантів 11-20

2. Виготовлення двох видів лісопродукції має пройти три операції. Витрати часу з кожної операції на один виріб наведено у таблиці. Скільки виробів кожного виду має виготовляти підприємством, щоб отримувати максимальний прибуток, причому кількість виробів А має бути щонайменше $5N$, а В – трохи більше $5(2N-1)$.

Виріб	Витрати на 1 виріб			Прибуток, у.о.
	I	II	III	
А	11	6	11	$15s-5$
В	6	8	9	$10s+5$
Фонд часу на кожну операцію	$80N$	$140N$	$200N$	

Для варіантів 21-30

3. На промисловому комплексі виробництва м'яса відгодовують свиней двох порід. Всі дані представлені в таблиці.

Види корму	Запаси корму, ц	Необхідна кількість корму (ц) для породи свиней	
		I	II
Грубі (сінне борошно, трав'яні) Соковиті (коренеплоди, картопля) Комбікорми	Не менше $1000N$ Не менше $1200N$ Не більше $500N$	$2s$ $4{,}5s$ $1{,}3s$	$5s$ $1{,}5s$ s
Вартість відгодівлі, у.г.о.		$100+N$	$140+N$

Потрібно знайти таке поголів'я свиней кожної породи, щоб вартість їхньої відгодівлі була мінімальною.

Питання для самоконтролю до розділу 12

1. У чому полягає загальна постановка задачі нелінійного програмування? Які типи обмежень можуть входити до такої задачі та чим нелінійне програмування відрізняється від лінійного?

2. Які необхідні та достатні умови існування екстремуму для задачі без обмежень?

3. У чому полягає суть методів умовної оптимізації? Опишіть метод множників Лагранжа та умови Каруша-Куна-Таккера (ККТ).

4. Які основні ідеї та етапи методу Франка-Вульфа розв’язання задачі нелінійного програмування?

5. Що таке задача дробово-лінійного програмування та як вона зводиться до задачі лінійного програмування? Поясніть підстановку Чарнса-Купера та її призначення.

6. У яких економічних задачах виникає дробово-лінійна цільова функція? Наведіть приклади показників ефективності, рентабельності або собівартості.

7. Що розуміють під багатокритеріальною оптимізацією? Які основні підходи до розв’язання багатокритеріальних задач розглянуто в темі?

8. Що таке цілочислове програмування та які його основні типи? Чим відрізняються чисто цілочислові, мішані та бінарні моделі?

9. Опишіть ідею та алгоритм методу Гоморі. Яким чином будується відсічення та чому воно не відсікає допустимі цілочислові розв’язки?

10. Викладіть алгоритм використання інструмента «Solver» для MS Excel для задач нелінійного, цілочислового програмування. У чому полягає специфіка саме для задач зазначених типів?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичне програмування. Методичні вказівки до виконання лабораторних і контрольних робіт для студентів ЗДІА напрямів підготовки 0501 «Економіка і підприємництво» і 0502 «Менеджмент» денної і заочної форм навчання/ Укл.: В. В. Глущевський, Н. М. Д'яченко. Запоріжжя : ЗДІА, 2007. 50 с.
2. Боровик О. В., Боровик Л. В. Дослідження операцій в економіці. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 424 с.
3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : Підручник . Сьоме видання, перероблене та доповнене. Київ : Видавн. Дім «Слово», 2006. 816 с. URL : http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Cheverd a/0009150.pdf (дата звернення : 10.07.2025).
4. Івченко І. Ю. Математичне програмування. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 232 с. URL : http://www.culonline.com.ua/index.php?newsid=407 (дата звернення : 10.07.2025).
5. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закладів реком. МОНУ. Київ :ВД "Професіонал", 2004. 350 с.
6. Охріменко М. Г., Дзюбан І. Ю. Дослідження операцій. Київ : Центр учбової літератури, 2006. 183 с.
7. Ржевський С. В. Дослідження операцій : підручник. Київ : Академвидав, 2006. 560 с.
8. Гребенюк С. М., Д'яченко Н. М. Методи обчислень : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Комп'ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 92 с.
9. Панасенко Є. В., Красікова І. В., Д'яченко Н. М. Математичний аналіз : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності Комп'ютерні науки освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2025. 93 с.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичне програмування. Методичні вказівки до виконання лабораторних і контрольних робіт для студентів ЗДІА напрямів підготовки 0501 «Економіка і підприємництво» і 0502 «Менеджмент» денної і заочної форм навчання/ Укл.: В. В. Глущевський, Н. М. Д'яченко. Запоріжжя : ЗДІА, 2007. 50 с.
2. Малярець Л. М., Лебедєва І. Л., Норік Л. О. Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум : у 2– х ч. Ч. 2. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. 161 с. URL : https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi78/0058572.pdf (дата звернення : 10.07.2025).
3. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник – 3– тє вид., стер. Львів : «Магнолія 2006», 2024. 350 с. URL : https://magnolia.lviv.ua/wp–content/uploads/2024/04/Doslidzhennia– operatsiy_zmist.pdf (дата звернення : 10.07.2025).
4. Кічмаренко О. Д., Стехун А. О., Яровий А. Т. Дослідження операцій : навч. посіб. Одеса : ОНУ ім. І. І. Мечникова, 2024. 172 с. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi84/0063828.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

5. Математичне програмування : навч. посіб. / уклад.: М. А.Руснак, М. П. Коцур. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. 200 с. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi82/0061871.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

6. Теорія ігор : курс лекцій : навч. посіб. / уклад. Л. В. Барановська. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 245 с. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi78/0058485.pdf (дата звернення : 10.07.2025).

7. Яровий А. А., Ваховська, Л. М. Математичні методи дослідження операцій. Лінійне програмування : навч. посіб. Ч. 1. Вінниця : ВНТУ, 2020. 86 с. URL : https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi78/0058573.pdf (дата звернення : 10.07.2025).

8. Applications of Operational Research and Mathematical Models in Management / M. Chalikias (ed.). Basel : MDPI, 2020. 182 p. URL : http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi66/0048562.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

9. Bombelli A., Atasoy B., Fazi S., Boschm D. From theORy to application : learning to optimize with Operations Research in an interactive way. TU Delft OPEN Publishing, 2024. 313 p. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062678.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

10. Development and Optimization of Mathematical Models for Operations Research / H. Rocha, A. M. Rocha (eds.). Basel : MDPI, 2023. 260 p. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi75/0055897.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

11. Bombelli A., Atasoy B., Fazi S., Boschm D. From theory to application : learning to optimize with operations research in an interactive way. TU Delft OPEN Publishing, 2024. 313 p. DOI : https://doi.org/10.59490/tb.94.

12. Mathematical Methods and Operation Research in Logistics, Project Planning, and Scheduling / edited by Z. T. Kosztyan, Z. Kovacs. Basel : MDPI, 2023. 288 p. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi71/0051928.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

13. Sharma J. K. Operations Research : Theory and Applications. New Delhi : Trinity Press, 2017. 943 p. URL : http://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi83/0062677.pdf. (дата звернення : 10.07.2025).

Інформаційні ресурси

1. Визначення та вирішення задач за допомогою надбудови «Пошук розв’язання». Офіційниу веб-сай MS Excel. URL : https://salo.li/Ec9E100 (дата звернення : 10.07.2025).

2. Hillier F. S., Lieberman G. J. Operations Research. Middlebury College, open access PDF. Available at : https://s23.middlebury.edu/MATH0318A/Hillier10th.pdf (дата звернення : 10.07.2025).

3. Operations Research (SLM MAT-603) Uttarakhand Open University, Open access PDF. Available at : https://uou.ac.in/sites/default/files/slm/MAT-603.pdf (дата звернення : 10.07.2025).

4. Free Open Access Books on Optimization and OR FreeComputerBooks. Available at : https://freecomputerbooks.com/specialOperationResearchBooks.html (дата звернення : 10.07.2025).

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Сергій Миколайович Гребенюк
Оксана Геннадіївна Спиця
Надія Вікторівна Матвіїшина
Наталія Миколаївна Д'яченко

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ
методичні рекомендації до лабораторних занять
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *Н.М. Д'яченко*