Тема 5 ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА. ПОСТАНОВКА, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТА АНАЛІЗУ

5.1 Економічна та математична постановки транспортної задачі

Транспортна задача полягає у визначенні оптимального плану перевезення однорідного вантажу від пунктів постачання до пунктів споживання з мінімальними сукупними витратами.

Економічна постановка транспортної задачі передбачає наявність кількох постачальників із заданими обсягами пропозиції та кількох споживачів із відомими обсягами попиту. Для кожної пари «постачальник-споживач» відомі витрати перевезення одиниці вантажу. Потрібно скласти план перевезень, який повністю задовольняє попит споживачів і використовує наявні ресурси постачальників таким чином, щоб сумарні витрати транспортування були мінімальними.

Математична постановка транспортної задачі полягає у формуванні задачі лінійного програмування, де змінними є обсяги перевезень між кожною парою пунктів постачання і споживання. Цільова функція мінімізує сумарні витрати перевезень, а система лінійних обмежень забезпечує виконання балансу постачання і попиту, а також невід'ємність змінних. Таким чином, транспортна задача є окремим випадком задачі лінійного програмування зі спеціальною структурою обмежень.

Наведемо *найпростіше формулювання транспортної задачі*. Нехай існує m пунктів виробництва однорідної продукції з обсягами виробництва $a_i (i = 1,2, \dots, m)$ та n пунктів споживання з обсягами споживання $b_j (j = 1,2, \dots, n)$, причому передбачається, що

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \tag{5.1}$$

Позначимо через x_{ij} кількість вантажу, що перевозиться з i-го пункту виробництва до j-го пункту споживання, а через c_{ij} – вартість транспортування одного виробу (одиниці вантажу) з пункту виробництва i до пункту споживання j.

Задача полягає в тому, щоб знайти такий план перевезень x_{ij}, який мінімізує сумарні витрати на перевезення:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min \,. \tag{5.2}$$

Змінні x_{ij} повинні задовольняти обмеження за запасами та потребами, а також умови невід'ємності.

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i; \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j; \end{gathered} \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n. \tag{5.4}$$

Умови (5.3) та (5.4) утворюють систему обмежень: перша група обмежень (5.3) вказує, що сумарний обсяг перевезень з кожного пункту виробництва дорівнює обсягу виготовленої продукції; друга група обмежень (5.3) вимагає, щоб сумарні перевезення до кожного пункту споживання повністю задовольняли попит на цю продукцію. Умови балансу (5.1) означають, що сумарний обсяг виробництва дорівнює сумарному попиту.

Модель транспортної задачі називається ***закритою***, якщо виконується умова (5.1), і ***відкритою*** – у протилежному випадку.

Теорема 5.1. Для розв'язності транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб її модель була закритою.

У реальних задачах ця умова виконується не завжди. Проте транспортну задачу завжди можна збалансувати, ввівши фіктивний пункт виробництва або фіктивний пункт споживання (склад):

– якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$то вводиться фіктивний $(n+1)$-й пункт призначення (споживання) з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{i\,n+1} \; = \; 0 \; (i = 1, \ldots, m)$;
– якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводиться фіктивний $(m+1)$-й пункт відправлення (виробництва) із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, і $c_{m+1\,j} \; = \; 0 \; (j = 1, \ldots, n)$.

За допомогою цих перетворень відкрита транспортна задача зводиться до закритої.

Будь-який план перевезень x_{ij}, що задовольняє систему обмежень (5.3) та (5.4), називається **допустимим**.

Опорний невироджений план транспортної задачі повинен мати рівно $n + m - 1$ ненульових змінних.

Отже, транспортну задачу можна сформулювати таким чином: задано систему обмежень (5.3), (5.4) та цільову функцію (5.2). Потрібно серед множини розв'язків системи (5.3), (5.4) знайти такий план перевезень, який мінімізує цільову функцію.

5.2 Постановка конкретної транспортної задачі та зведення її до збалансованої

Приклад 5.1 У трьох пунктах виробництва **A_1, A_2, A_3** зосереджений однорідний вантаж у кількостях відповідно рівних **a_1, a_2, a_3** тон. Даний вантаж споживається в чотирьох пунктах **B_1, B_2, B_3, B_4,** а потреби в ньому в цих пунктах складають **b_1, b_2, b_3, b_4,** тон відповідно. Відома матриця тарифів по перевезенню 1 тони вантажу з $i^{\underline{го}}$ пункту виробництва до $j^{\underline{го}}$ пункту споживання:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} c_{13} c_{14} \\ c_{21} c_{22} c_{23} c_{24} \\ c_{31} c_{32} c_{33} c_{34} \end{bmatrix}.$$

Скласти план перевезень:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \\ x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \\ x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \end{bmatrix},$$

при якому сумарні транспортні витрати будуть мінімальними.

Розглянемо поставлену задачу для таких вихідних даних:

$$a_1 = 30\text{т},\ a_2 = 20\text{т},\ a_3 = 40\text{т},$$

$$b_1 = 20\text{т},\ b_2 = 30\text{т},\ b_3 = 20\text{т},\ b_4 = 30\text{т},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Занесемо дані до таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Умова задачі

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
Потреби	20	30	20	30	90 / 100

До нижнього правого куту цієї таблиці занесемо значення сумарних потреб і сумарних витрат:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 \text{ т}, \sum_{j=1}^{4} b_j = 100 \text{ т}.$$

У даному випадку $\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$, тому модель транспортної задачі є *відкритою*. Відповідно до теореми, для існування в транспортної задачі допустимого плану необхідно і достатньо, щоб її модель була *закритою*, тобто, щоб $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Збалансуємо дану задачу, уводячи фіктивний пункт виробництва A_4 з запасом вантажу $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i$=100– 90=10(т). При цьому вартість перевезень із цього пункту в кожний із пунктів споживання дорівнює 0 (див. табл. 5.2).

Таблиця 5.2 – Збалансована транспортна задача

Пункти виробництва	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	4	2	30
A_2	1	4	3	3	20
A_3	2	2	4	4	40
A_4	0	0	0	0	10
Потреби	20	30	20	30	100 / 100

Складемо ***математичну модель*** даної задачі:

1) *змінні задачі*: x_{ij}– планований обсяг перевезення (у тоннах) з $i^{\text{го}}$ пункту виробництва в $j^{\text{й}}$ пункт споживання ($i = \overline{1,4}$,$j = \overline{1,4}$). Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$ утворить матрицю

$$X = \begin{bmatrix} x_{11}x_{12}x_{13}x_{14} \\ x_{21}x_{22}x_{23}x_{24} \\ x_{31}x_{32}x_{33}x_{34} \end{bmatrix};$$

2) *цільова функція задачі* виражає транспортні витрати, які необхідно мінімізувати:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 3x_{11} + 1x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} +$$
$$+ 1\,x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 3x_{24} +$$
$$+ 2x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 4x_{34} \quad \rightarrow \ min\ ;$$

3) обмеження задачі: на вивіз вантажу

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20,$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40,$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 10, \tag{5.5}$$

на задоволення потреб у вантажі

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 20$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 30$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 20$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 30, \tag{5.6}$$

невід'ємність змінних:

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,4}\ ,j = \overline{1,4}\ ). \tag{5.7}$$

Сукупність змінних $\{x_{ij}\}$, що задовольняють обмеженням (5.5)–(5.7), утворюють допустимий опорний план. Матриця системи (5.5)–(5.6) має ранг на 1 менший кількості рядків цієї системи, тобто на 1 менший від суми кількостей пунктів виробництва і пунктів споживання, у даному випадку це – 7. Це означає, що *кількість базисних змінних повинна дорівнювати 7.*

5.2 Метод потенціалів розв'язання транспортної задачі

Нульова ітерація транспортної задачі. Підготуємо таблицю (табл. 5.3). Другий рядок і другий стовпець зарезервуємо для значень потенціалів. В останній стовпець внесемо відповідні значення запасів, а в останній рядок – потреб. У праві верхні кути комірок A_iB_j ($i = \overline{1,4}$,$j = \overline{1,4}$) внесемо матрицю транспортних витрат.

Таблиця 5.3 – Нульова ітерація транспортної задачі

		B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси

		$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	
A_1	$u_1 = 0$	3 –2	1 **30**	4 –3	2 –1	30|0
A_2	$u_2 = 0$	1 **20**	4 –3	3 –2	3 –2	20|0
A_3	$u_3 = 3$	2 ⊕ 2	2 2	4 **20**	4 ϴ **20**	40|20|0
A_4	$u_4 = -1$	0 ϴ **0**	0 **0**	0 0	0 ⊕ **10**	10|0
Потреби		~~20~~ 0	~~30~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ ~~20~~ 0	

<u>Крок 1.</u> Побудову вихідного опорного плану здійснюємо *методом найменшої вартості*. Завантажуючи комірки, відповідні значення обсягів перевезення x_{ij} будемо заносити в нижні ліві кути комірок A_iB_j ($i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4}$):

1) вибираємо комірку з найменшою вартістю (транспортним тарифом). Найменша вартість дорівнює 0, а комірок, що відповідають цій вартості – чотири: A_4B_1, A_4B_2, A_4B_3, A_4B_4. Завантажимо, наприклад, комірку A_4B_4 так, щоб $x_{44} = min\{a_4; b_4\} = min\{10; 30\}$. Перерахуємо запаси, що залишилися, $a_4' = a_3 - x_{44} = 10 - 10 = 0$, і потреби, що залишилися, $b_4' = b_4 - x_{44}$=30 – 10=20, а отримані значення запишемо у відповідних комірках таблиці через риску;

2) оскільки запаси четвертого пункту виробництва вичерпані, то завантажувати комірки рядка A_4 поки не будемо. Серед комірок, що залишилися, виберемо комірку з найменшою вартістю. Маємо дві комірки з вартістю 1. Завантажимо спочатку, наприклад, комірку A_1B_2: $x_{12} = min\{a_1; b_2\} = min\{30; 30\} = 30$. Перерахуємо запаси, що $a_1' = a_1 - x_{12} = 30 - 30 = 0$ залишилися, і потреби, що залишилися, $b_2' = b_2 - x_{12} = 30 - 30 = 0$. Потім завантажимо комірку A_2B_1: $x_{12} = min\{a_2; b_1\} = min\{20; 20\} = 20$, $a_2' = a_2 - x_{21} = 20 - 20 = 0$, $b_1' = b_1 - x_{12} = 20 - 20 = 0$;

3) на даний момент вичерпані запаси пунктів виробництва A_1, A_2 і A_4, а також задоволені потреби споживачів B_1 і B_2. У нашому розпорядженні залишилися дві комірки з однаковими вартостями: A_3B_3 і A_3B_4. Завантажимо, наприклад, комірку A_3B_3: $x_{33} = min\{a_3; b_3\} == \min\{40;20\} = 20$, $a_3' = a_3 - x_{33} = 40 - 20 = 20$, $b_3' = b_3 - x_{33} = 20 - 20 = 0$. Тепер завантажимо комірку A_3B_4: $x_{34} = min\{a_3'; b_4'\} = min\{20; 20\} = 20$, $a_3'' = a_3' - x_{34} = 20 - 20 = 0$, $b_4'' = b_4' - x_{34}$=20 − $20 = 0$;

4) завантажені комірки відповідають базисним змінним транспортної задачі, їхня кількість на даний момент дорівнює 5, однак, як було відзначено вище, повинна дорівнювати 7. Два відсутні елементи поповнюємо, завантажуючи нульовим обсягом перевезення дві вільні комірки з найменшими тарифами. Причому необхідно подбати про те, щоб жодна з цих комірок не *утворювала циклу*

з наявними завантаженими комірками. Під *циклом* розуміють замкнуту ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. За такі комірки оберемо A_4B_1 і A_4B_2;

5) опорний план нульової ітерації утворить матрицю

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Його елементи задовольняють системі обмежень (5.5)– (5.7). Значення цільової функції на цьому плані дорівнює

$F(X_0) = 30 \cdot 1 + 20 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 210$ (у.о.).

Чи є цей план оптимальним? Відповідь на це питання дає метод потенціалів.

Крок 2. *Перевірка оптимальності опорного плану:*

1) *побудова системи потенціалів* $\{u_i, v_j\}$ $(i = \overline{1,4}\ \ , j = \overline{1,4}\ \ )$. Кожному постачальнику A_i поставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачу B_j – потенціал v_j. При цьому для кожної базисної змінної відповідні їй потенціали u_i і v_j повинні задовольняти рівності

$$u_i + v_j = c_{ij}\ (i = \overline{1,4}\ , j = \overline{1,4}\ ). \tag{5.8}$$

Оскільки базисних змінних 7, то сукупність рівностей (5.8) утворить систему з 8 рівнянь із 7 невідомими. Ця система має нескінченну множину розв'язків, знайдемо одне з них:

- для зручності візьмемо $u_1 = 0$;
- у рядку A_1 знаходиться базисна змінна x_{12}, тому згідно з (5.8) $v_2 = c_{12} - u_1 = 1 - 0 = 1$;
- у стовпці B_2 знаходиться ще одна (крім x_{12}) базисна змінна x_{42}, тому $u_4 = c_{42} - v_2 = 0 - 1 = -1$;
- за базисною змінною x_{41} знайдемо $v_1 = c_{41} - u_4 = 0 - (-1) = 1$,
- за базисною змінною x_{44} – $v_4 = c_{44} - u_4 = 0 - (-1) = 1$;
- за базисною змінною x_{34} – $u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 1 = 3$;
- за базисною змінною x_{33} – $v_3 = c_{33} - u_3 = 4 - 3 = 1$;
- за базисною змінною x_{21} – $u_2 = c_{21} - v_1 = 1 - 1 = 0$;

2) знайдемо *оцінки оптимальності* Δ_{ij} *для небазисних змінних*. Значення Δ_{ij} будемо обчислювати за формулою

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}\ (i = \overline{1,4}; j = \overline{1,4}),$$

а результат заносити в нижні ліві кути комірок A_iB_j $(i = \overline{1,4}, j = \overline{1,4})$., відокремлюючи їх у рамку:

$$\Delta_{11} = u_1 + v_1 - c_{11} = 0 + 1 - 3 = -2;$$
$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 4 = -3;$$
$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 1 - 2 = -1;$$
$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 0 + 1 - 4 = -3;$$
$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 0 + 1 - 3 = -2;$$
$$\Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 0 + 1 - 3 = -2;$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 1 - 2 = 2;$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 1 - 2 = 2;$$
$$\Delta_{43} = u_4 + v_3 - c_{43} = -1 + 1 - 0 = 0;$$

3) *перевірка оптимальності опорного плану*:

- якщо всі оцінки оптимальності небазисних змінних недодатні, тобто $\Delta_{ij} \leq 0$, то опорний план є оптимальним, і обчислення більше не проводяться;
- якщо серед оцінок оптимальності є додатні, то опорний план не оптимальний, і його необхідно поліпшувати.
- оскільки для розглянутого плану деякі з оцінок оптимальності є додатними, то вихідний опорний план не є оптимальним.

Крок 3. Виконаємо наступні дії:

1) визначимо *змінну, що вводиться до базису*. Серед знайдених оцінок оптимальності виберемо найбільше додатне значення. Таким є 2, що відповідає $\Delta_{31} = \Delta_{32} = 2$. У базис необхідно вводити ту з змінних x_{31} чи x_{32}, якій відповідає менший тариф. У даному випадку $c_{31} = c_{32} = 2$. Тому введемо до базису будь-яку із цих змінних, наприклад, x_{31};

2) визначимо *змінну, що виводиться з базису*. Для цього побудуємо цикл, що проходить через деякі з завантажених комірок і комірку A_3B_1 (що відповідає змінній x_{31}, яка вводиться з базису). Нагадаємо, що під *циклом* розуміють замкнену ламану з прямими кутами переломлення у вершинах. Відомо, що цикл у транспортній задачі можна побудувати єдиним чином. У даному випадку цикл виглядає так, як це показано в табл. 5.3. Вершину циклу в комірці A_3B_1 відзначаємо знаком «+», а далі інші вершини позначаємо знаками, що чергуються: «– » або «+», послідовно пересуваючись циклом у будь-якому напрямку. Серед комірок, у які потрапив знак «– », вибираємо комірку з найменшим значенням базисної змінної. У даному випадку це значення дорівнює нулю, воно обведене ромбом, а відповідає воно базисній змінній x_{41}, котру будемо виводити з базису;

3) *побудова нового базису*.

Підготуємо нову таблицю ***першої ітерації*** (див. табл. 5.4).

- заносимо в неї дані в умові значення транспортних тарифів, запасів і потреб;
- без зміни необхідно перенести в таблицю значення базисних змінних, не задіяних циклом;
- оскільки виведена з базису змінна дорівнює 0, то змінна, що вводиться з базису, також дорівнюватиме нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться. Комірка змінної, що виведена з базису, стане в результаті вільною;

4) побудований опорний план першої ітерації утворить ту ж матрицю, що і для вихідного опорного плану, тому значення цільової функції на цьому плані не зміниться:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_1) = 210 \text{ (у.о).}$$

Таблиця 5.4 – Перша ітерація транспортної задачі

	$v_1 = -1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 1$	
$u_1 = 0$	3 – 4	1 **30**	4 – 3	2 – 1	30
$u_2 = 2$	1 **20**	4 – 1	3 0	3 0	20
$u_3 = 3$	2 **0**	2 ⊕ 2	4 **20**	4 ϴ **20**	40
$u_4 = -1$	0 – 2	0 ϴ **0**	0 0	0 ⊕ **10**	10
	20	30	20	30	

Чи є новий опорний план оптимальним? Для відповіді на це питання повертаємося до кроку 2 і кроку 3, виконуючи послідовно аналогічні дії. Результати цих дій занесені в табл. 5.4.

– будуємо систему потенціалів;
– обчислюємо оцінки оптимальності небазисних змінних;
– перевіряємо план на оптимальність: серед оцінок оптимальності є додатна Δ_{32}; тому *план першої ітерації не оптимальний*, і вводиться до базису змінна – x_{32};
– будуємо цикл, за допомогою якого визначаємо змінну, що виводиться з базису; такою є x_{42};
– будуємо нову таблицю ***другої ітерації*** (табл. 5.5), зберігаючи дані умови і значення базисних змінних, не задіяних циклом. Оскільки $x_{42} = 0$, то змінна, що вводиться до базису, також буде дорівнювати нулю, а значення базисних змінних, що знаходяться у вершинах циклу, у даному випадку не зміняться.

Для опорного плану другої ітерації одержимо

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(X_2) = 210 \text{ (у.о.).}$$

Повертаємося до кроку 2 і кроку 3, результати виконаних дій занесені в табл.

Таблиця 5.5 – Друга ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 3$	
	3	1 ϴ	4	2 ⊕	30

$u_1=0$	−2	**30**	−1	1	
$u_2=0$	1 **20**	4 −3	3 0	3 0	20
$u_3=1$	2 **0**	2 ⊕ **0**	4 **20**	4 ⊖ **20**	40
$u_4=-3$	0 −2	0 −2	0 0	0 **10**	10
	20	30	20	30	

Опорний план другої ітерації не оптимальний. У цьому випадку змінна, що вводиться до базису, – x_{14}, а та, яка виводиться з базису, – $x_{34}=20$. Зауважимо, що при побудові таблиці ***третьої ітерації*** (табл.5.6) значення змінних, задіяним циклом, перераховуємо, додаючи до тих із них, що відмічені знаком «+» значення змінної, що виводиться з базису (тобто «20»), а від змінних, відмічених знаком «–», віднімаємо це значення. Змінна, що вводиться до базису, приймає значення 20. Комірка A_3B_4 виявиться вільною.

Для опорного плану третьої ітерації одержимо

$$X_3=\begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 20 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$F(X_3)=10\cdot 1+20\cdot 2+20\cdot 1+0\cdot 2+20\cdot 2+20\cdot 4+10\cdot 0=190 \text{ (у.о.)}.$$

Таблиця 5.6 – Третя ітерація транспортної задачі

	$v_1=1$	$v_2=1$	$v_3=3$	$v_4=2$	
$u_1=0$	3 −4	1 ⊖ **10**	4 −1	2 ⊕ **20**	30
$u_2=0$	1 **20**	4 −3	3 0	3 −1	20
$u_3=1$	2 **0**	2 ⊕ **20**	4 ⊖ **20**	4 −1	40
$u_4=-2$	0 −1	0 −1	0 ⊕ 1	0 ⊖ **10**	10
	20	30	20	30	

Із табл. 5.6 бачимо, що *опорний план третьої ітерації не оптимальний.* Змінна в цьому випадку, що вводиться до базису, – x_{43}, а змінна, що виводиться з базису, – $x_{12}=10$. Проводимо перерахування базисних змінних. Результати обчислень у четвертій ітерації занесені в табл. 5.7. Для опорного плану цієї ітерації виконана умова оптимальності: всі оцінки оптимальності недодатні.

У результаті маємо

$$X^* = X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_{min}(X) = F(X^*) =$$

$$= 30 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 180 \text{ (у.о.)}.$$

Таблиця 5.7 – Четверта ітерація транспортної задачі

	$v_1 = 0$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	3; $\boxed{-3}$	1; $\boxed{-1}$	4; $\boxed{-2}$	2; **30**	30
$u_2 = 1$	1; **20**	4; $\boxed{-3}$	3; $\boxed{0}$	3; $\boxed{0}$	20
$u_3 = 2$	2; **0**	2; **30**	4; **10**	4; $\boxed{0}$	40
$u_4 = -2$	0; $\boxed{-2}$	0; $\boxed{-2}$	0; **10**	0; **0**	10
	20	30	20	30	

Зауважимо, що серед оцінок оптимальності останньої ітерації є такі, значення яких дорівнює нулю, тому побудований ***опорний план не єдиний***, для якого цільова функція приймає мінімальне значення 180 у.о.

Відповідь. Найменші сумарні транспортні витрати, що складають 180 у.о., будуть відповідати такому плану перевезень:

- з пункту виробництва A_1 необхідно перевозити 30 т вантажу до пункту споживання B_4;
- з пункту виробництва A_2 – 20 т вантажу до пункту споживання B_1;
- з пункту виробництва A_3 – 30 т вантажу до пункту споживання B_2 і 10 т – в B_3.

Оскільки пункт A_4 є фіктивним, то споживачB_3 залишиться невдоволений на 10 т вантажу.

Результат обчислень можна оформити також у вигляді схеми, показуючи, з якого пункту виробництва в який пункт споживання перевозиться вантаж:

$$A_1 \overset{30т}{\rightarrow} B_4, \quad A_2 \overset{20т}{\rightarrow} B_1, \quad \begin{array}{l} A_3 \overset{30т}{\rightarrow} B_2 \\ \ \downarrow \overset{10т}{\rightarrow} B_3. \end{array}$$

Питання для самоконтролю до теми 5 та лабораторної роботи №3

1. Сформулювати змістовну постановку задачі.
2. Виписати математичну модель транспортної задачі у загальному вигляді.

3. Охарактеризувати способи зведення транспортної задачі до збалансованого виду.

4. Викласти ідею розв’язання транспортної задачі методом потенціалів.

5. Викласти алгоритм розв’язання транспортної задачі за допомогою інструмента «Solver» в MS Excel.