Тема 7 ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

7.1 Постановка задачі про призначення (задачі вибору)

Необхідно виконати n робіт ($i = 1, \ldots, n$). Для цього залучаються n виконавців ($j = 1,\ldots,n$), кожен з яких здатен виконати будь-яку з робіт. Відомі продуктивності праці/витрати c_{ij} на виконання i– ї роботи j– м виконавцем. Потрібно призначити кожного виконавця на одну роботу так, щоб загальна продуктивність/загальні витрати була/були максимальною/мінімальними.

Математична модель задачі

Змінні моделі: $x = \|x_{ij}\|_{n\times n}$ – матриця призначень, де

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо на } i\text{-у роботу призначено } j\text{-ого виконавця;} \\ 0, & \text{у супротивному випадку.} \end{cases}$$

Цільова функція:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to max/min. \qquad (7.1)$$

Система обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1, \ldots, n. \qquad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1, \ldots, n. \qquad (7.3)$$

$$x_{ij} \in [0; 1],\ i = 1, \ldots, n,\ \ j = 1, \ldots, n. \qquad (7.4)$$

7.2 Угорський метод розв'язання задачі про призначення

Основні положення, що лежать в основі угорського методу:

1) *розв'язок задачі не зміниться,* якщо до будь-якого стовпця або рядка додати (або відняти) певну сталу величину. Тобто, якщо план x^* – оптимальний план задачі (7.1)–(7.4), то він також буде оптимальним для цільової функції Z' з матрицею $C' = (c'_{ij})$, де $c'_{ij} = c\_ij \pm u_i \pm v_j$, $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ \ x \in \Omega;$

2) якщо всі $c'_{ij} \geq 0$, і знайдено план $x*$, такий що

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x^*_{ij} = 0,$$

то x^*– оптимальний план.

Сутність методу

Шляхом додавання певним чином знайдених чисел до окремих стовпців та віднімання з них інших чисел, формують так звану *систему незалежних нулів.* Набір нулів називається системою незалежних нулів, якщо жодні два (чи більше) нулі *не знаходяться в одному рядку або стовпці*. Якщо кількість незалежних нулів дорівнює n, то, присвоївши відповідним змінним $x_{\text{ij}} = 1$, а всім іншим – $x_{\text{ij}} = 0$, згідно з твердженням 2, отримаємо *оптимальний план призначення.*

Опис ідеї алгоритму угорського методу

Алгоритм складається з початкового кроку та *не більше ніж* $(n-2)$ послідовно повторюваних ітерацій:

- на *попередньому* етапі, якщо задача сформульована як задача *на максимум,* її перетворюють на еквівалентну задачу *на мінімум*. На цьому ж етапі виділяється система незалежних нулів;
- *кожна наступна ітерація* спрямована на збільшення (хоча б на 1) кількості незалежних нулів;
- як тільки кількість незалежних нулів k *дорівнює розмірності матриці* $(k = n)$, задача вважається розв'язаною;
- *оптимальний план призначення* визначається положенням незалежних нулів на останній ітерації.

Приклад 7.1 Нехай необхідно розв'язати задачу про призначення на максимум:

$$max\, Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} cx_{ij},$$

де

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 11 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Етап підготовки

Відшукуємо максимальний елемент у кожному стовпці матриці і обчислюємо кожний елемент матриці C з максимального елементу відповідного стовпця. В отриманій матриці C' відшукуємо мінімальний елемент в кожному рядку і вираховуємо їх з відповідних елементів c':

$$1)\ C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 6 & 11 & 7 & 5 \\ \hline 10 & 11 & 8 & 9 \end{pmatrix};\ 2) C' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 3 & 8 & 3 \\ 5 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right);\ 3)\ C_0 = \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0^* & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0^* & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Утворимо первісну систему незалежних нулів, відмічаючи їх зірочкою. Маємо матрицю C_0. Число незалежних нулів в ній $k = 3$. . Так як $k < n = 4,$, то переходимо до основного шагу.

Перша ітерація. В матриці 4) над стовпцями, які містять нулі з зірочками, ставимо знаки виділення (+). Знаходимо невиділений стовпець $j = 4$. Шукаємо в ньому нульовий елемент. Це $c_{14} = 0$. Помічаємо його штрихом $c_{14} = 0'$. Переглядаємо рядок $i = 1$. Він містить помічений нуль $c_{11} = 0^*$. Знімаємо виділення першого стовпця, ставлячи знак $\oplus$. Виділяємо перший рядок знаком «+». Отримуємо матрицю 5).

4) $$C_0=\begin{array}{c} \begin{matrix} + & + & + & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0^* & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0^* & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array};$$

5) $$C_0=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \oplus & + & + & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 4 & 2 & 0' \\ 4 & 1 & 0^* & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0^* & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}.$$

Якщо тепер в матриці 5) викреслити помічені стовпці $j = 2,3$ і помічений рядок, то отримаємо матрицю, в якій немає нулів.

Позначимо множину непомічених рядків через I_1. Вочевидь, $I_1 = \{2,3,4\}$, а множина непомічених стовпців через J_1, де $J_1 = \{1,4\}$. Знаходимо

$$min\{\, c_{ij}, i \in I_1, j \in J_1\} = 4.$$

Додаємо число 4 до помічених стовпців і віднімаємо його з непомічених рядків. Отримаємо матрицю 6).

6) $$C_0=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \oplus & + & + & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0 & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

У результаті такого перетворення отримаємо нові непомічені нулі $c_{21} = 0$, $c_{41} = 0$. Беремо будь-який з них і помічаємо штрихом. Наприклад, $c_{21} = 0'$. Зважаючи, що в рядку 2 маємо 0^*, то знімаємо помітку «+» зі стовпця $j = 3$, помічаючи його знаком $\oplus$. Рядок $i = 2$ помічаємо знаком «+». Отримуємо матрицю 7).

7) $$C_0=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \oplus & + & \oplus & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Серед непомічених рядків матриці є непомічений нуль. Це $c_{41} = 0'$. Штрихуємо цей нуль. В рядку $i = 4$ маємо 0^*, знімаємо помітку зі стовпця $j = 2$. Помічаємо рядок $i = 4$. Отримуємо матрицю 8).

8) $$C_0=\begin{array}{cc} \begin{matrix} \oplus & \oplus & \oplus & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0' & 2 \\ 0' & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} + \\ + \\ \\ + \end{matrix} \end{array}$$

Серед непомічених рядків знаходимо непомічений нуль $c_{33} = 0$. Помічаємо цей нуль: $c_{33} = 0'$в матриці 8). В рядку $i = 3$ немає нулів із зірочками. Тому треба будувати ланцюг.

Побудова ланцюга. Від останнього нуля зі штрихом $c_{33} = 0'$ по стовпцю переходимо до нуля з зірочкою $c_{23} = 0^*$. Від $c_{23} = 0^*$ по рядку *i*=2 переходимо до нуля зі штрихом $c_{21} = 0'$. Від $c_{21} = 0'$по стовпцю *j*=1 переходимо до нуля з зірочкою $c_{11} = 0^*$. Від $c_{11} = 0^*$ переходимо по рядка $i = 1$ до $c_{14} = 0'$. В стовпці $j = 4$ нема нулів з зірочкою. Відповідно, будування ланцюга завершене. Отримаємо побудований ланцюг в матриці 9).

9)

$$C_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \oplus & \oplus & \oplus & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0^* & 8 & 6 & 0' \\ 0' & 1 & 0^* & 1 \\ 1 & 5 & 0' & 2 \\ 0' & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ + \\ \\ + \end{array} \end{array}$$

На ланцюгу $c_{33} \to c_{23} \to c_{21} \to c_{11} \to c_{14}$ нулі зі штрихами міняємо на нулі з зірочками. Зірочки над нулями, які не знаходяться на ланцюгу, зберігаємо. Всі інші знищуємо. Переходимо до матриці 10), в якій кількість незалежних нулів збільшується на одиницю, на цьому перша ітерація закінчується.

$$10) \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 0^* \\ 0^* & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0^* & 2 \\ 0 & 0^* & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Друга ітерація. Підраховуємо кількість незалежних нулів: $k = 4$, Так як $n = 4$, то $k = n$. Задача розв'язана. Отримано оптимальний план задачі, поданий в матриці 11)

$$11)\ x^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо значення цільової функції за формуло. (7.1):

$$Z = 9 + 3 + 8 + 11 = 31 \text{ у.о./год.}$$

Відповідь. Потрібно призначити
для виконання роботи 1 працівника 4;
для виконання роботи 2 працівника 1;
для роботи 3 – працівника 3;
для роботи 4 – працівника 2.
Тоді продуктивність буде максимальною і становитиме 31 у.о./год.

Питання для самоконтролю до теми 7 та лабораторної роботи №5

1. Сформулювати змістовну постановку задачі про призначення .
2. Навести математичну модель задачі про призначення.
3. Сформулювати основні положення, на яких ґрунтується угорський метод розв’язування задачі про призначення.
4. Угорський метод застосовується для розв’язання задачі про призначення на мінімум цільової функції. Обґрунтувати процедуру переходу від задачі максимізації цільової функції до задачі мінімізації.
5. Сформулювати ознаку оптимальності плану задачі в угорському методі.
6. Скільки розв’язків може мати задача про призначення?
7. За яке число ітерацій угорського алгоритму може бути отримано розв’язок задачі? Яка максимальна кількість ітерацій алгоритму можлива при розв’язанні задачі заданої розмірності у Ваших варіантах?
8. Сформулювати алгоритм розв’язання задачі про призначення з використанням інструменті «Solver» в MS Excel.