# Тема 9 ІГРОВІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ІГОР

## 9.1 Основні поняття теорії ігор

*Теорія ігор* – розділ математики, що вивчає моделі прийняття рішень у конфліктних ситуаціях, коли результат залежить від дій кількох учасників (гравців).

**Основні поняття:**

- *гравець* – учасник гри;
- *стратегія* – правило вибору дій гравцем;
- *виграш (програш)* – числова оцінка результату гри;
- *платіжна функція* – залежність виграшу від стратегій гравців;
- *розв'язок гри* – оптимальні стратегії гравців.

**Класифікація ігор**

Ігри класифікують за такими ознаками:

- за кількістю гравців: двоосібні, багатоосібні;
- за характером інтересів: з нульовою сумою, з ненульовою сумою;
- за формою подання: матричні, позиційні;
- за часом: статичні, динамічні;
- за можливістю кооперації: кооперативні, некооперативні;
- за наявністю невизначеності: ігри з повною та неповною інформацією.

Звернемо увагу на важливий тип ігор. *Ігри з нульовою сумою* належать до класу ігор із фіксованою (постійною) сумою, у яких загальний обсяг виграшів і програшів залишається незмінним, тобто учасники не можуть ані збільшити, ані зменшити сумарний ресурс гри. Натомість в іграх з *ненульовою сумою* виграш одного учасника не обов'язково супроводжується втратою іншого. У таких іграх можливі ситуації, коли загальний результат взаємодії є як додатним, так і від'ємним.

Розглянемо *приклад гри з <u>нульовою сумою</u>*: розподіл фіксованого гранту між кількома IT-проєктами. Є три групи A, B і C, які подали заявки на один грант із фіксованим бюджетом (наприклад, 1 млн у.г.о.). За результатами конкурсу весь грант отримує лише одна група:

- якщо група A отримує грант, її виграш становить $+1$ (умовна одиниця), а групи B і C отримують по $-0.5$ кожна;
- аналогічно, якщо виграє B або C.

Сума виграшів у будь-якому результаті дорівнює нулю:

$$(+1) + (-0.5) + (-0.5) = 0.$$

*Приклад гри з <u>ненульовою сумою</u>*. Спільний IT– проєкт двох команд. Дві дослідницькі групи A і B мають вибір:

- співпрацювати (об'єднати зусилля, обмінятися даними);
- або працювати окремо.

Результати залежать від поєднання їхніх рішень, як наведено в табл. 9.1.

Таблиця 9.1 – Приклад розподілу виграшів за різних варіантів взаємної співпраці

| Рішення груп | Виграш групи A | Виграш групи B |
|---|---|---|
| Обидві співпрацюють | +5 | +5 |
| A співпрацює, B – ні | +1 | +3 |
| A не співпрацює, B – співпрацює | +3 | +1 |
| Обидві не співпрацюють | 0 | 0 |

Дамо деякі пояснення. *Співпрацювати* означає, що команда:

- ділиться напрацюваннями (даними, попередніми результатами);
- координує план досліджень;
- узгоджує спільну роботу.

*Не співпрацювати* означає, що команда:

- працює ізольовано;
- не надає своїх результатів іншій стороні;
- використовує лише власні ресурси.

*Конкретно по випадках*

1. *Обидві співпрацюють*

Обидві команди обмінюються даними й досвідом → швидші та якісніші результати.
Тому обидві отримують великий виграш (+5).

2. *A співпрацює, B – ні:*

- команда A відкриває свої напрацювання;
- команда B користується цими матеріалами, але свої результати не надає.

У підсумку:

- B має більше переваг (вищий виграш);
- A отримує користь, але меншу, бо працює «в односторонньому режимі».

3. *A не співпрацює, B – співпрацює*

Дзеркальна ситуація до попередньої.

4. *Обидві не співпрацюють*

Кожна команда працює лише самостійно → повільніше, дорожче, без синергії.
Тому виграші мінімальні або нульові.

*Чому це гра з ненульовою сумою?*

- сума виграшів не є сталою:
  - $5 + 5 = 10 > 0.$
  - $1+3 = 4 > 0,$
  - $0 + 0 = 0;$
- виграш одного гравця не обов'язково означає програш іншого;
- за співпраці обидва гравці отримують взаємну вигоду, більшу, ніж за індивідуальних дій.

Це типовий приклад:

- *кооперативної або некооперативної гри з ненульовою сумою*;
- ситуації, де можливий взаємовигідний результат;
- моделей прийняття рішень у економіці, управлінні, науці та IT-проєктах.

**Матричні ігри двох осіб з нульовою сумою**

У двоосібній грі з нульовою сумою виграш одного гравця дорівнює програшу іншого. Такі ігри описуються платіжною матрицею.

Матриця гри

$$A = (a_{ij})$$

містить виграші першого гравця за умови, що перший гравець обирає стратегію $i$, другий – стратегію $j$.

*Верхня та нижня ціна гри*

Нижня ціна гри:

$$v^* = \max_i \min_j a_{ij} -$$

гарантований виграш першого гравця.

Верхня ціна гри:

$$v_* = \min_i \max_j a_{ij} -$$

мінімальний програш другого гравця.

Якщо

$$v^* = v_*,$$

то *гра має сідлову точку* і розв'язується у *чистих стратегіях*.

*Мішані стратегії* – це ймовірнісний розподіл на множині чистих стратегій гравця. Вона застосовується, коли гра не має розв'язку в чистих стратегіях.

**Теорема фон Неймана (мінімаксу)**. Для будь-якої двоосібної гри з нульовою сумою та скінченною множиною стратегій існує число $v$ і такі мішані стратегії гравців, що перший гравець може забезпечити собі виграш не менше $v$ незалежно від вибору стратегії другим гравцем, а другий гравець, у свою чергу, може гарантувати, що виграш першого не перевищить $v$ (тобто його власний виграш становитиме $-v$.

Це означає, що оптимальна стратегія першого гравця забезпечує йому виграш $v$ за будь-яких дій суперника, тоді як другий гравець здатний гарантувати собі виграш $-v$. ***Мінімаксний*** алгоритм ґрунтується на принципі, за яким кожен гравець мінімізує максимально можливий виграш супротивника. У грі з нульовою сумою це еквівалентно максимізації власного мінімального гарантованого виграшу (принцип ***максиміну***).

**Позиційні ігри та ігри кількох осіб**

Позиційні ігри описуються послідовністю ходів і станів (позицій), часто подаються у вигляді дерева гри. Ігри кількох осіб враховують взаємодію більш ніж двох гравців і можуть мати складніші розв'язки.

**Кооперативні ігри** допускають утворення коаліцій. Основні методи розв'язання: ядро гри; вектор Шеплі; метод нуклеолуса.

**Паралельні та послідовні ігри**

У *паралельних іграх* вибір стратегій усіма гравцями відбувається одночасно, або ж гравці не мають інформації про рішення інших доти, доки кожен не зробить свій хід. Натомість у *послідовних іграх* ходи здійснюються у заздалегідь визначеній черзі, при цьому гравці отримують певну інформацію про дії опонентів. Така інформація може бути як повною, так і неповною: зокрема, гравець може знати, що суперник не обрав одну з можливих стратегій, не маючи відомостей щодо решти його виборів.

**Гра з повною або неповною інформацією**

У *іграх з повною інформацією* (наприклад, шахи) кожен гравець володіє відомостями про всі ходи, здійснені до поточного моменту, а також знає множину можливих стратегій суперника, що дає змогу частково прогнозувати подальший перебіг гри. Водночас переважна більшість ігор, які є об'єктом математичного аналізу, належать до *ігор з неповною інформацією*.

**Прийняття рішень в умовах невизначеності**

Рішення приймаються без інформації про ймовірності станів середовища. Основні критерії: критерій Вальда (максимін); критерій Лапласа; критерій Севіджа; критерій Гурвіца.

Окрім зазначених вище, існують ще інші типи ігор.

Теорія ігор надає формальний апарат для аналізу конфліктних ситуацій і широко застосовується в економіці, техніці, управлінні та інформаційних технологіях.

## 9.2 Постановка та алгоритм розв'язання задачі матричних ігор двох осіб з нульовою сумою на одному прикладі

**Приклад 9.1** Нехай у грі беруть участь дві сторони A і B. Умови гри задаються матрицею виграшів (платіжною матрицею (табл. 9.1).

Таблиця 9.1 – платіжна матриця для прикладу 9.1

| | | B | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ |
| A | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ |
| $A_1$ | $Y_1$ | – 8 | 3 | – 7 | 1 | – 3 |
| $A_2$ | $Y_2$ | 2 | 2 | 6 | 0 | 2 |
| $A_3$ | $Y_3$ | 4 | – 7 | – 7 | 6 | 3 |
| $A_4$ | $Y_4$ | 5 | – 4 | 4 | 1 | – 3 |

Якщо елемент матриці гри додатній, то його значення відповідає виграшу сторони A, якщо від'ємне, то його абсолютне значення дорівнює виграшу сторони B.

Якщо виграш сторони A дорівнює програшу сторони B, то така гра називається **грою з нульовою сумою**.

Стратегію, яку обирає сторона A, будемо позначати $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, а стратегію сторони B символами $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$. Ймовірність використання відповідної стратегії гравцем A позначимо $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ , а гравцем B – $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$. Мішаною стратегією гравця A, відповідно, гравця B, називаються вектори

$$\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4),\ \bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5),$$

для яких

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 1,\ \sum_{i=1}^{5} X_i = 1,\ Y_i \geq 0\ \left(i = \overline{1,4}\right),\quad X_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,5}\right). \qquad (9.1)$$

Цілі гравців: A намагається забезпечити собі максимальний виграш, а B намагається зробити свій програш мінімальним за рахунок обрання відповідної стратегії. Таким чином, цілі гравців А і В є протилежними. Розв’язання задачі полягає у тому, щоб знайти найкращі (оптимальні) стратегії сторін, а також очікуваний середній результат (виграш). Вважаємо, що гравці діють без зайвого ризику і використовують *мінімаксну та максимінну стратегії*. А саме: гравці ***обирають таку з альтернатив стратегій, песимістична оцінка якої найкраща***.

Гравець А використовує принцип ***максиміна***: для кожної стратегії обирається найгірший для А (мінімальний) виграш, і серед них вибирається гарантований максимальний виграш – **нижня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим максимальним виграшем, а гарантованим найбільшим виграшем серед мінімальних виграшів.

Гравець В використовує принцип ***мінмакса***: для кожної стратегії обирається найгірший для А (максимальний) програш, і серед них вибирається гарантований найменший програш – **верхня ціна гри**. Тобто гравець А керується у своїх діях не можливим мінімальним програшем, а гарантованим найменшим програшем серед максимальних програшів (табл. 9.2).

Таблиця 9.2 – пошук верхньої та нижньої ціни гри

| А | | В | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | Мінімум рядків |
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | |
| $A_1$ | $Y_1$ | – 8 | 3 | – 7 | 1 | – 3 | – 8 |
| $A_2$ | $Y_2$ | 2 | 2 | 6 | 0 | 2 | $0^*$ |
| $A_3$ | $Y_3$ | 4 | – 7 | – 7 | 6 | 3 | – 7 |
| $A_4$ | $Y_4$ | 5 | – 4 | 4 | 1 | – 3 | – 4 |
| Максимум стовпчиків | | 5 | $3^*$ | 6 | 6 | 3 | |

Нижня ціна гри у даному випадку дорівнює 0, а верхня – 3.

У тих випадках, коли верхня і нижня ціни гри співпадають, гра є грою з сідловидною точкою. У такому випадку стратегії, що відповідають цим цінам, є єдиним можливим способом дій двох гравців, що відповідають розв’язку задачі в чистих стратегіях.

У даному прикладі сідловидної точки не існує, тому для розв’язання задачі використовується *мішана стратегія*, яка пов’язана з випадковим обранням гравцями на кожному ході однієї стратегії серед кількох чистих стратегій.

У випадку гри з нульовою сумою середня величина виграшу (програшу) – математичне сподівання, є функцією від мішаних стратегій $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$:

$$S(\overline{Y}, \overline{X}) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} a_{ij} Y_i X_j.$$

Функція $S(\overline{Y}, \overline{X})$ називається **платіжною функцією гри з матрицею** $[a_{ij}]_{4\times 5}$. Стратегії $\overline{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ називаються оптимальними, якщо для довільних стратегій $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ і $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ виконуються умови

$$S(\overline{Y},\overline{X}^*) \le S(\overline{Y}^*,\overline{X}^*) \le S(\overline{Y}^*,\overline{X})$$

Це означає, що використання в грі оптимальних мішаних стратегій $\overline{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ забезпечує гравцеві А виграш не менший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$; другому гравцеві – програш не більший, ніж при використанні ним будь-якої іншої стратегії $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає **ціну гри *C***, тобто

$$S\left(\overline{Y}^*,\overline{X}^*\right) = C.$$

Застосуємо теореми теорії матричних ігор, отримаємо, що для того, щоб значення С було ціною гри, а $\overline{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, Y_4^*)$ і $\overline{X}^* = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ – оптимальними стратегіями, необхідно і достатньо, щоб виконувались нерівності

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} Y_i^* \ge C \ \ \left(j = \overline{1,5}\right), \qquad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j^* \le C \ \ \left(i = \overline{1,4}\right). \qquad (9.3)$$

Для подальшого розв’язування потрібно, щоб $C > 0$. Це завжди можна мати завдяки тому, що додавання до всіх елементів матриці виграшів одного і того ж постійного числа $d$ не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки збільшує ціну гри на d.

Тепер після зазначених припущень можна обидві частини (9.2) і (9.3) поділити на С і увести позначення

$$y_i = \frac{Y_i}{C}, x_j = \frac{X_j}{C},$$

змінивши відповідним чином рівності (9.1)

$$\sum_{i=1}^{4} y_i^* = \frac{1}{C}, \ \sum_{i=1}^{5} x_i^* = \frac{1}{C},$$

отримати пару двоїстих задач лінійного програмування, поданих в табл. 9.3.

Таблиця 9.3 – Пара двоїстих задач лінійного програмування, до яких зведено задачу матричних ігор

| | |
|---|---|
| $f = \sum_{i=1}^{4} y_i \to min$ | $F = \sum_{i=1}^{5} x_i \to max$ |
| $\sum_{i=1}^{4} a_{ij} y_i \ge 1 \ \left(j = \overline{1,5}\right),$ | $\sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_j \le 1 \ \left(i = \overline{1,4}\right),$ |
| $y_i \ge 0 \ (i = \overline{1,4})$ | $x_j \ge 0 \ (j = \overline{1,5})$ |

*Алгоритм розв’язання задачі теорії матричних ігор:*

1) знаходимо верхню та нижню ціни гри і робимо висновок про розв’язання задачі у чистих чи мішаних стратегіях (у даному випадку задача розв’язується у мішаних стратегіях);

2) якщо серед елементів матриці є від’ємні, то для того, щоб ціна гри була додатною, знаходимо модуль мінімального елементу матриці, позначивши його через $d$ (у даному випадку $d = 8$); додаємо його до всіх елементів матриці;

3) розв’язуємо пару двоїстих задач лінійного програмування;

4) знаходимо значення $C'$ за формулою

$$C' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} y_i^*} \text{ або } C' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{5} x_i^*};$$

5) визначаємо стратегії гравців:

гравця А: $Y_i^* = y_i^* \cdot C' \quad (i = \overline{1,4})$

гравця В: $X_j^* = x_j^* \cdot C' \quad (j = \overline{1,5})$,

6) робимо висновок з врахуванням пункту 2 алгоритму, що ціна гри дорівнює

$$C = C' - d.$$

**Питання для самоконтролю до теми 9 та лабораторної роботи №7**

1. Сформулювати змістовну постановку задачі матричних ігор.
2. Що називають грою з нульовою сумою?
3. Яку гру називають грою в мішаних стратегіях?
4. Що закладено в поняття ціни гри?
5. Написати математичну модель задачі матричних ігор і описати покрокове її зведення до пари двоїстих задач лінійного програмування.
6. Охарактеризувати алгоритм розв’язання задачі матричних ігор.
7. Описати принципи розв’язання задачі матричних ігор з використанням інструмента «Solver» для MS Excel;