Тема 11 ЗАДАЧІ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ

11.1 Основні поняття теорії управління запасами

Задачі з оптимального регулювання запасами можна сформулювати в такий спосіб:

1) моменти часу, в які приймаються замовлення на поповнення запасів, фіксовані. Потрібно визначити обсяг замовлень;
2) необхідно визначити й обсяг, і час замовлень.

Завдання дослідження полягає у відшуканні оптимального рішення цих задач. Під *оптимальним* тут розуміється рішення, що мінімізує суму усіх витрат, пов'язаних із створенням запасів.

Витрати в задачах управління запасами (УЗ) бувають трьох типів:

1) витрати, викликані оформленням і одержанням замовлення при закупівлі чи виробництві. Це величина, що не залежить від розміру партії;
2) витрати на зберігання одиниці продукції на складі. Вони включають в себе витрати, пов'язані з організацією зберігання, старінням і псуванням, витрати на страхування і податки;
3) витрати (штрафи), що виникають при нестачі запасів, коли відбувається затримка в обслуговуванні чи попит взагалі неможливо задовольнити.

Усі витрати можуть залишатися постійними чи змінюватися як функції часу (наприклад, залежно від сезону може бути різним штраф за затримку в обслуговуванні).

У задачах УЗ враховуються також характеристика попиту і можливість поповнення запасів.

Попит може бути відомим, постійним чи залежним від часу. Величина, що характеризує попит, може бути дискретною (наприклад, кількість автомобілів), так і неперервною. Попит на запасені товари може виникати у визначені моменти часу (попит на морозиво на стадіоні) чи існувати постійно (попит на морозиво у великому аеропорті).

Замовлення на поповнення запасів у ряді випадків можуть виконуватись негайно (наприклад, при замовленні молока у невеликому магазині). В інших випадках виконання замовлення вимагає значного часу. Замовлення можна робити в будь-які чи тільки у визначені моменти часу.

Обсяг продукції, що надходить на склад, може вимірюватися дискретною чи неперервною величиною і може бути як постійним, так і змінним. І, нарешті, саме надходження може бути дискретним чи неперервним, і відбуватися рівномірно чи нерівномірно.

Перелічені вище випадки дають тисячі задач УЗ. У цій темі ми розглянемо лише декілька з них.

11.2 Типи задач управління запасами та методи їх розв'язання

11.2.1 Задачі УЗ за відсутності дефіциту запасів (модель 1)

Постановка задачі. Деякий підприємець повинен поставляти своїм клієнтам R виробів рівномірно протягом інтервалу часу T. Таким чином, попит фіксований і відомий. Нестача товару не допускається, тобто штраф при незадовільненому попиті нескінченно великий ($C_2=\infty$). Змінні витрати виробництва складаються з таких елементів:

C_1 – вартість зберігання одного виробу (за одиницю часу),

C_s – вартість запуску у виробництво однієї партії виробів.

Підприємство повинно вирішити, як часто йому варто організовувати випуск партії і яким повинен бути розмір кожної партії.

Розв'язання. На рис. 11.1 зазначена задача представлена графічно. Нехай

q – розмір партії,

t_s – інтервал часу між запусками у виробництво партій,

R – повний попит за весь час планування T.

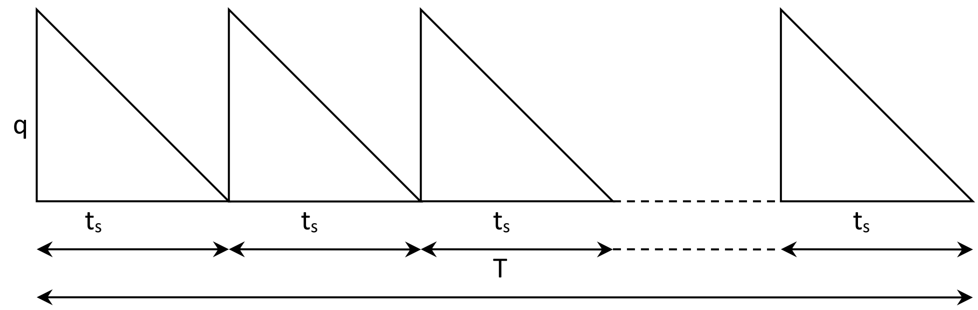

Рис. 11.1 – Графічне зображення моделі задачі УЗ за відсутності дефіциту запасів

Розв'язком задачі є:

- оптимальне значення розміру партії: $q^* = \sqrt{2\frac{RC_s}{TC_1}}$,
- оптимальний інтервал часу між запусками у виробництво партій: $t_s^* = \sqrt{2\frac{TC_s}{RC_1}}$,
- мінімально очікувані сумарні витрати: $Q^* = \sqrt{2RTC_1C_s}$.

Приклад 11.1 Нехай підприємцю необхідно постачати своєму замовнику 24000 одиниць продукції за рік. Оскільки одержувана продукція використовується безпосередньо у виробництві і замовник не має для неї спец. складів, постачальник повинен щодня відвантажувати денну норму. У випадку порушення постачання постачальник ризикує втратити замовлення. Тому нестача продукції неприпустима. Тобто штраф при нестачі вважати нескінченним. Зберігання одиниці продукції за місяць коштує 0,1 у.о. Вартість запуску у виробництво однієї партії продукції складає 350 у.о.

Потрібно визначити

– оптимальний розмір партії q^*;

– оптимальний період часу t_s^*;

– обчислити мінімум загальних річних витрат Q^*.

Розв'язання. У даному випадку $\text{Т} = 12$ місяців, $R = 24\,000$ одиниць, $\text{C}_1 = 0{,}1$ у.о./місяць, $\text{C}_s = 250$ у.о./партія. Підставляючи ці значення у зазначені вище формули, отримаємо

$q^* = \sqrt{2\frac{24000\cdot 350}{12\cdot 0{,}1}} = 3740$од.,

$t_s^* = \sqrt{2\frac{12\cdot 350}{24000\cdot 0{,}1}} = 1{,}87$місяця= 8,1 тижня,

$Q^* = \sqrt{2\cdot 24000\cdot 12\cdot 0{,}1\cdot 350} = 4490$у.о./рік.

11.2.2 Задачі УЗ за наявності дефіциту запасів (модель 2)

Розглянемо випадок, що відрізняється від попереднього тільки тим, що перевищення попиту над запасами вже допускається, тобто штраф за нестачу скінчений ($\text{C}_2<\infty$).

Розв'язання. На рис. 11.2 зазначена задача представлена графічно. Уведемо позначення:

S – рівень запасів,
q – розмір партії,
C_1 – вартість зберігання одного виробу (за одиницю часу),
C_2 – величина штрафу за нестачу однієї одиниці продукції (за одиницю часу),
C_s – вартість запуску у виробництво однієї партії виробів.
t_s – інтервал ча_су між запусками у виробництво партій,
t_1 – час на споживання запасу,
t_2 – час дефіциту запасу,
R – повний попит за весь час планування Т.

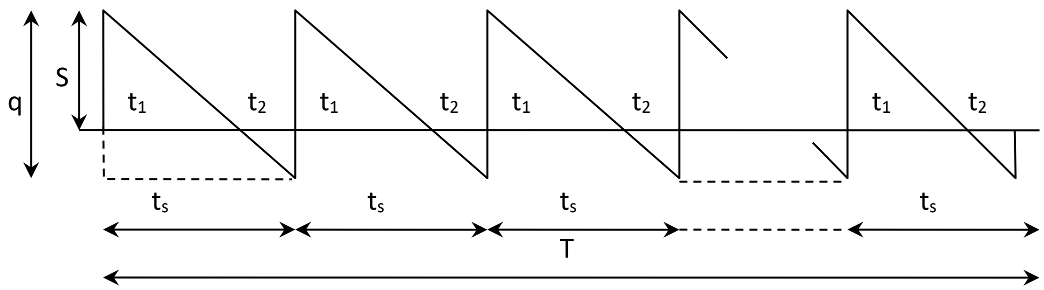

Рис. 11.2 – Графічне зображення моделі задачі УЗ за наявності дефіциту запасів

Розв'язком задачі є:

– оптимальний обсяг замовлення: $q^* = \sqrt{2\frac{RC_s}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$;

– оптимальний рівень запасів $S^* = \sqrt{2\frac{RC_s}{TC_1}}\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$;

– оптимальний інтервал часу між замовленнями: $t_s^* = \sqrt{2\frac{TC_s}{RC_1}}\sqrt{\frac{C_1+C_2}{C_2}}$;

– мінімально очікувані сумарні витрати: $Q^* = \sqrt{2RTC_1C_s}\cdot\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$.

Перша задача є частковим випадком до другої. Зв'язок між розглянутими задачами:

1) якщо C_2 спрямувати до нескінченності, то ми отримаємо значення шуканих величин тими ж, що і у першій задачі;

2) якщо $C_2 < \infty$, то

$$\sqrt{2RTC_1C_s} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}} < \sqrt{2RTC_1C_s},$$

тому очікувані сумарні витрати в моделі 2 менші, ніж у моделі 1.

Приклад 11.2 Нехай зберігаються всі умови прикладу 1, але штраф C_2 за нестачу тепер дорівнює 0,2 у.о. за один виріб на місяць.

Розв'язання. У цьому випадку

$q^* = \sqrt{2\frac{24000 \cdot 350}{12 \cdot 0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}1+0{,}2}{0{,}2}} = 4578$од.,

$S^* = \sqrt{2\frac{24000 \cdot 350}{12 \cdot 0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}1+0{,}2}} = 3056$од.,

$t_s^* = \sqrt{2\frac{12 \cdot 350}{24000 \cdot 0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}1+0{,}2}{0{,}2}} = 2{,}29$місяця$= 9{,}9$ тижні,

$Q^* = \sqrt{2 \cdot 24000 \cdot 12 \cdot 0{,}1 \cdot 350} \cdot \sqrt{\frac{0{,}2}{0{,}1+0{,}2}} = 3667$у.о./рік.

При оптимальній стратегії очікуваний дефіцит до кінця кожного періоду складав би $4578 - 3056 = 1522$ виробів.

11.2.3 Задачі УЗ з дискретним розподілом попиту (модель 3)

При побудові цієї моделі штрафи, пов'язані з дефіцитом запасів, так само як і моделі 2 вважаються скінченними. Крім того, модель 3 має такі особливості.

1) попит і поповнення запасів оцінюються на основі емпіричних даних;

2) розглядається виробництво і споживання дискретного продукту;

3) розподіли за часом попиту і замовлень на поповнення дискретні і нерівномірні;

4) відомий і постійний час виконання замовлень.

Приклад 11.3 Компанія по виробництву електроенергії збирається придбати новий генератор для своєї електростанції. Одна з основних деталей генератора дуже складна і дорога, тому доцільно при замовленні генератора замовити і кілька штук цих деталей у запас. Однак, ця деталь підганяється індивідуально для кожного генератора і її вже не можна буде використовувати на іншому агрегаті.

Компанія бажає знати, скільки запасних частин їй варто замовляти для кожного генератора. При вирішенні цього питання компанія має таку інформацію. Вартість однієї деталі, якщо її замовляти разом з генератором, складає 500 у.о. Відсутність цієї деталі в запасі при поломці призводить до виходу генератора з ладу, і простій генератора та термінове замовлення деталі обходиться 10 000 у.о. Дані про частоту виходу цієї деталі з ладу (на 100 генераторів) наведені в табл. 11.1.

Таблиця 11.1 – Умова задачі управлення запасами прикладу 11.1

Попит r (число деталей на машину)	0	1	2	3	4	5	6 і більше
Емпірична ймовірність P(r)	0,9	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0

Розв'язання. У даному прикладі збиток від невикористаних деталей дорівнює їх вартості, оскільки витрати на зберігання досить малі, тобто $C_1 = 500$ у.о., а нестача запасних деталей обходиться в $C_2 = 10\ 000$ у.о. за 1 штуку.

Нехай

S – кількість деталей у запасі,

r – попит на деталь (кількість деталей, що вийшли з ладу).

Тоді витрати будуть складати:

$(S - r) \cdot C_1$, якщо $r \leq S$ (запас надмірний),

$(r - S) \cdot C_2$, якщо $r \geq S$ (запасу не вистачило).

За умовою нам заздалегідь невідома кількість деталей, що вийдуть з ладу. Однак, відомою є ймовірність виходу з ладу r деталей $P(r)$. Щоб обчислити очікувані при даному рівні запасів витрати, ми повинні просумувати значення витрат для кожного r, помножені на відповідні ймовірності $P(r)$:

$$\boxed{Q(S) = C_1 \sum_{r=0}^{S} P(r)(S - r) + C_2 \sum_{r=S+1}^{\infty} P(r)(r - S)}$$

У даному випадку маємо:

$$Q(S=5) = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot (5-0) + 0{,}05 \cdot (5-1) + 0{,}02 \cdot (5-2) + \\ +0{,}01 \cdot (5-3) + 0{,}01 \cdot (5-4) + 0{,}01 \cdot (5-5) \end{bmatrix} = 2395 у.о.$$

$$Q(S=4) = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot (4-0) + 0{,}05 \cdot (4-1) + 0{,}02 \cdot (4-2) + \\ +0{,}01 \cdot (4-3) + 0{,}01 \cdot (4-4) \end{bmatrix} + \\ +10000 \cdot [0{,}01 \cdot (5-4)] = 2000 у.о.,$$

$$Q(S=3) = 500 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}9 \cdot (3-0) + 0{,}05 \cdot (3-1) + \\ +0{,}02 \cdot (3-2) + 0{,}01 \cdot (3-3) \end{bmatrix} + \\ +10000 \cdot [0{,}01 \cdot (4-3) + 0{,}01 \cdot (5-3)] = 1710 у.о.,$$

$$Q(S=2) = 500 \cdot [0{,}9 \cdot (2-0) + 0{,}05 \cdot (2-1) + 0{,}02 \cdot (2-2)] + \\ +10000 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}01 \cdot (3-2) + 0{,}01 \cdot (4-2) + \\ +0{,}01 \cdot (5-2) \end{bmatrix} = 1525 у.о.,$$

$$Q(S=1) = 500 \cdot [0{,}9 \cdot (1-0) + 0{,}05 \cdot (2-2)] + \\ +10000 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}02 \cdot (2-1) + 0{,}01 \cdot (3-1) + \\ +0{,}01 \cdot (4-1) + 0{,}01 \cdot (5-1) \end{bmatrix} = 1550 у.о.,$$

$$Q(S=0) = 10000 \cdot \begin{bmatrix} 0{,}05(1-0) + 0{,}02(2-0) + 0{,}01(3-0) + \\ +0{,}01(4-0) + 0{,}01(5-0) \end{bmatrix} = 2100 у.о.$$

Розрахунки показують, що оптимальний рівень запасів дорівнює 2, при цьому затрати будуть мінімальними и становитимуть 1525 у.о.

Питання для самоконтролю до теми 11

1. У чому полягає суть задач управління запасами та який розв'язок вважається оптимальним?
2. Які основні види витрат враховуються при побудові моделей управління запасами?
3. Які припущення покладено в основу моделі управління запасами без дефіциту?

4. Які параметри використовуються в цій моделі та як визначаються оптимальний розмір партії й інтервал між замовленнями?
5. Чим модель управління запасами з допустимим дефіцитом відрізняється від моделі без дефіциту?
6. Яку роль відіграє штраф за нестачу запасів та як він впливає на оптимальні розв’язки?
7. За яких умов модель з дефіцитом переходить у модель без дефіциту?
8. Як при цьому змінюються оптимальні значення обсягу замовлення та сумарних витрат?
9. Які особливості має модель управління запасами з дискретним розподілом попиту (модель 3)?
10. Як обчислюються очікувані витрати при заданому рівні запасів і як визначається оптимальний запас?