Тема 12 ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНІ ЗАДАЧІ. ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

12.1 Основні положення нелінійного програмування

Загальна постанова задачі нелінійного програмування

Знайти екстремум функції:

$$min\ (max\ )\ f(x), x \in R^n$$

за умов:

$$g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m,$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p,$$

де $f(x)$ – нелінійна цільова функція;
$g_i(x)$ – функції, що визначають ліві частини нерівностей в системі обмежень;
$h_j(x)$ – *функції* лівих частин рівностей-обмежень.

Необхідні та достатні умови екстремуму

Без обмежень:

– необхідна умова:

$$\nabla f(x^*) = 0,$$

де $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ – градієнт функції f.

– достатня умова:
  - якщо матриця Гессе в точці x^* додатно визначена → мінімум;
  - від'ємно визначена → максимум.

Матриця Гессе – це матриця вигляду

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до критерію Сильвестра, вона додатно визначена, якщо всі її головні мінори додатні, від'ємно визначена – знакопечережні, починаючи з від'ємного.

З обмеженнями:

– використовуються умови Лагранжа та Куна-Таккера.

Класичні методи оптимізації нелінійних задач:

– аналітичні методи (похідні, умови екстремуму);
– чисельні методи [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:
  - градієнтні;
  - метод Ньютона;
  - метод покоординатного спуску;
  - метод умовного градієнту.

Методи безумовної багатовимірної оптимізації

Метод покоординатного спуску:

- оптимізація здійснюється послідовно за кожною змінною;
- метод має повільну збіжність.

Градієнтні методи

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k \nabla f(x_k):$$

- рух у напрямку найшвидшого спадання;
- потребує вибору кроку α_k.

Метод Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - H^{-1}(x^k)\nabla f(x^k):$$

- метод має швидку збіжність;
- метод потребує обчислення матриці Гессе.

Методи умовної багатовимірної оптимізації:

- метод Лагранжа;
- метод умовного градієнту (Франка-Вульфа);
- проєкційні методи;
- методи штрафів та бар'єрів.

Метод невизначених множників Лагранжа

Для задачі:

$$min\ \ f(x) \text{ за умови } h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p.$$

Функція Лагранжа (лагранжіан):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(x).$$

Умови:

$$\nabla_x L = 0\ \ , h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p.$$

Метод умовного градієнту (Франка-Вульфа):

- застосовується для опуклих задач;
- на кожному кроці розв'язується лінійна апроксимація задачі;
- не потребує проєкцій на допустиму множину.

Опукле програмування. Основні поняття

Опукла задача:

- цільова функція – опукла;
- допустима множина – опукла.

Властивість:

- будь-який локальний мінімум є глобальним.

Теорема Каруша-Куна-Таккера (ККТ) (узагальнення методу Лагранжа)

Для задачі:

$$mi\,n\, f(x)\,;$$
$$g_i(x) \le 0, i = 1, \dots, m,$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p,$$

з множиною допустимих розв'язків, що задовольняють умовам регулярності, *необхідні умови існування* розв'язку задачі ККТ:

1) стаціонарність:
$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) = 0;$$
2) допустимість:
$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m,$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, p;$$
3) невід'ємність множників:
$$\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m;$$
4) умова доповняльної нежорсткості:
$$\lambda_i g_i(x^*) = 0.$$

Квадратичне програмування

Задача:
$$F(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \to \min\ (max)$$
за лінійних обмежень, де Q – симетрична матриця $n \times n$:

– якщо Q додатно визначена → задача опукла.

Економіко-математичні моделі з квадратичною цільовою функцією

Приклади:

– оптимізація інвестиційного портфеля (модель Марковіца);
– мінімізація витрат із квадратичними штрафами;
– моделі регулювання виробництва з витратами на відхилення.

Застосування теореми Куна-Таккера

– аналіз оптимальності у квадратичному програмуванні;
– розв'язання задач з ресурсними обмеженнями;
– визначення «тіньових цін» (економічна інтерпретація множників).

12.2 Приклади розв'язання задач квадратичного програмування

Приклад 12.1 Для запропонованої математичної моделі задачі нелінійного програмування
$$f = -2{x_1}^2 - 2{x_2}^2 + x_1 x_2 + 10x_1 + 20x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 2; \\ x_2 \leq 3; \\ x_1 + x_2 \leq 10. \end{cases}$$
виконати наступні завдання:

1) скласти змістовну постановку деякої техніко-економічної оптимізаційної задачі, яка може бути описана за допомогою запропонованої математичної моделі;

2) розв'язати сформульоване завдання методом лінеаризації Франка-Вульфа;

3) зробити висновки про оптимальне управління в термінах постановки задачі.

Розв'язання.

Змістовна постановка задачі

На звірофермі можуть вирощувати чорно-бурих лисиць та песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовують два види комбікормів, які містять необхідні тваринам живильні речовини А, В та С. Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг комбікорму кожного виду відповідно дорівнює:

– речовина А – 1 і 0;
– речовина В – 0 і 1;
– речовина С – 1 і 1.

Щодня тварини повинні отримати до 2 одиниць поживної речовини А, до 3 одиниць речовини В і до 10 од. речовини С.

Харчова цінність 1 кг кожного комбікорму пропорційні його вазі з коефіцієнтами $10 - 2k_1$ і $20 - 2k_2$ відповідно, де k_1, k_2 – відповідно вага комбікорму 1-го та 2-го виду, а при одночасному використанні збільшується на $k_1 \cdot k_2$.

Знайти оптимальний денний раціон тварин за умови максимізації його харчової цінності.

Математична модель

Нехай x_1, x_2 у.о.ваги– вага комбікорму 1-го та 2-го видів відповідно, що включається до денного раціону тварин. Сумарна харчова цінність раціону визначається функцією:

$$f = (10 - 2x_1) \cdot x_1 + (20 - 2x_2) \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 =$$
$$= -2{x_1}^2 - 2{x_2}^2 + x_1 x_2 + 10x_1 + 20x_2 \to max.$$

Обмеження моделі описують умови отримання тваринами необхідного рівня поживних речовин:

$$\begin{cases} x_1 \le 2; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

Таким чином, математична модель вихідної задачі може бути записана у вигляді, наданому в умові.

Застосування методу лініарізації Франка-Вульфа для розв'язання задачі

Крок 0. Вибираємо початкове наближення до оптимального розв'язання цієї задачі *X₀*, що належить системі обмежень. Нехай, наприклад, $X_0 = (1;\ 2)$. Тоді $\overline{f}(X_0) = 42$.

Замінюємо нелінійну функцію лінійною у точці початкового наближення за формулою:

$$F(X_k) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{X_0} \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{X_0} \cdot x_2.$$

знаходимо частинні похідні цільової функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -4x_1 + x_2 + 10, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 - 4x_2 + 20.$$

Розв'язуємо ЗЛП з цільовою функцією

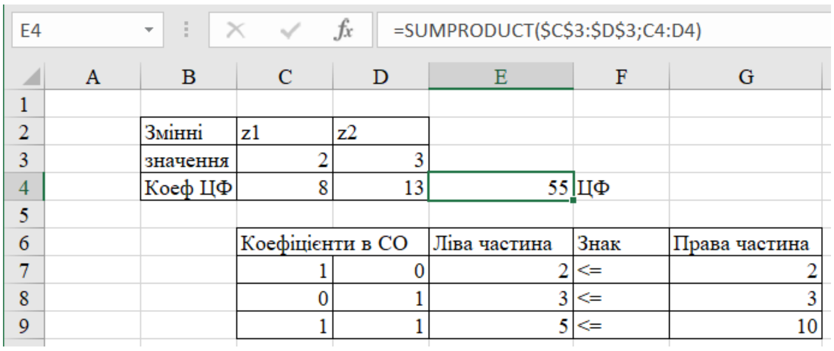
$$F_0(X) = (-4x_1 + x_2 + 10)|_{X_0} \cdot x_1 + (x_1 - 4x_2 + 20)|_{X_0} \cdot x_2 \to max.$$

З урахуванням початкових обмежень приходимо до ЗЛП

$$F_0(X) = 8x_1 + 13x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 \le 2; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

Розв'язавши цю лінійну задачу за допомогою процедури «Solver» (див рис. 12.1), знаходимо оптимальну точку

$$Z_0 = (2;\ 3).$$



E4 =SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C4:D4)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	8	13	55	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.1 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 0)

Шукаємо перше наближення до оптимального розв'язку за такою формулою:

$$\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_0 + \rho\,(Z_0 - X_0),$$

тобто

$$x_1^1 = 1 + \rho(2-1) = 1 + \rho,$$
$$x_1^2 = 2 + \rho(3-2) = 2 + \rho.$$

За крок візьмемо

$$\rho = 0{,}5 \in [0;1].$$

Підставивши його у X_1, отримаємо точку

$$\mathrm{X}_1 = (1{,}5;\ 2{,}5).$$

Обчислюємо значення цільової функції у цій точці:

$$f(X_1) = 51{,}75.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму, обравши точність $\varepsilon = 0{,}5$:

$$|f(X_1) - f(X_0)| < 0{,}5,$$

У даному випадку

$$|51{,}75 - 42| = 9{,}75 \ge 0{,}5,$$

отже, критерій зупинки не виконується. Переходимо до першої ітерації.

Крок 1. Знаходимо цільову функцію:

$$F_1(X) = (-4x_1 + x_2 + 10)|X_1 \cdot x_1 + (x_1 - 4x_2 + 20)|X_1 \cdot x_2 =$$
$$= 6{,}5x_1 + 11{,}5x_2 \to max.$$

Розв'язуємо ЗЛП

$$F_1(X) = 6{,}5x_1 + 11{,}5x_2 \to max;$$
$$\begin{cases} x_1 \le 2; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

За допомогою процедури «Solver» (рис. 12.2) отримаємо оптимальну точку

$$Z_1 = (2;\ 3).$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	6.5	11.5	47.5	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.2 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 1)

Знаходимо друге наближення:

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_2 + \rho\,(Z_2 \ - \ X_2),$$

тобто

$$x_2^1 = 1{,}5 + \rho(2 - 1{,}5)|_{\rho=0{,}5} = 1{,}75,$$
$$x_2^2 = 2{,}5 + \rho(3 - 2{,}5)|_{\rho=0{,}5} = 2{,}75.$$

Отже, маємо точку

$$\mathrm{X}_2 = (1{,}75;\ 2{,}75).$$

Обчислюємо значення цільової функції у цій точці:

$$f(X_2) = 56{,}0625.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_2) - f(X_1)| = |56{,}0625 - 51{,}75| \geq 0{,}5.$$

Критерій зупинки не виконується.

Крок 2. Знаходимо цільову функцію:

$$F_2(X) = (-4x_1 + x_2 + 10)|X_2 \cdot x_1 + (x_1 - 4x_2 + 20)|X_2 \cdot x_2 =$$
$$= 5{,}75x_1 + 10{,}75x_2 \to max.$$

Розв'язуючи ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» (рис. 12.3) отримаємо

$$Z_2 = (2;\ 3).$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	5.75	10.75	43.75	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.3 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 2)

Знаходимо третє наближення:

$$x_3^1 = 1{,}75 + \rho(2 - 1{,}75)|_{\rho=0{,}5} = 1{,}875,$$
$$x_3^2 = 2{,}75 + \rho(3 - 2{,}75)|_{\rho=0{,}5} = 2{,}875.$$

Звідки $\mathrm{X}_3 = (1{,}875;\ 2{,}875)$.

Обчислюємо значення цільової функції у цій точці:

$$f(X_3) \approx 58{,}078.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_3) - f(X_2)| = |58{,}078 - 56{,}0625| \geq 0{,}5,$$

критерій не виконується.

<u>Крок 3.</u> Знаходимо цільову функцію:

$$F_3(X) = 5{,}375x_1 + 10{,}375x_2 \rightarrow max$$

Інструмент «Solver» (рис. 12.4) дає оптимальну точку $Z_3 = (2;\ 3)$.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	5.375	10.375	41.875	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.4 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 3)

Знаходимо третє наближення $X_4 = (1{,}9375;\ 2{,}9375)$, значення ЦФ в якій

$$f(X_4) \approx 59{,}051.$$

Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_4) - f(X_3)| = |59{,}051 - 58{,}078| = 0{,}973 \geq 0{,}5.$$

Знову він не виконується.

<u>Крок 4.</u> Маємо цільову функцію $F_4(X) = 5{,}0975x_1 + 10{,}0975x_2 \rightarrow max$. Інструмент «Solver» (рис. 12.5) дає точку $Z_4 = (2;\ 3)$.

Чергове наближення $X_5 = (1{,}9675;\ 2{,}9675)$, для якого $f(X_5) \approx 59{,}509$. Перевіряємо критерій зупинки алгоритму:

$$|f(X_4) - f(X_3)| = |59{,}509 - 59{,}051| = 0{,}458 < 0{,}5.$$

Він виконується.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	z1	z2			
3		значення	2	3			
4		Коеф ЦФ	5.0975	10.0975	40.4875	ЦФ	
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

Рис. 12.5 – Пошук оптимального розв'язку лініарізованої задачі (крок 4)

Таким чином, з точністю $\varepsilon = 0{,}5$ приймаємо, що $X^* = (1{,}9675;\ 2{,}9675)$ є оптимальним розв'язком вихідної задачі. Максимальне значення цільової функції $f(X^*) \approx 59{,}509$.

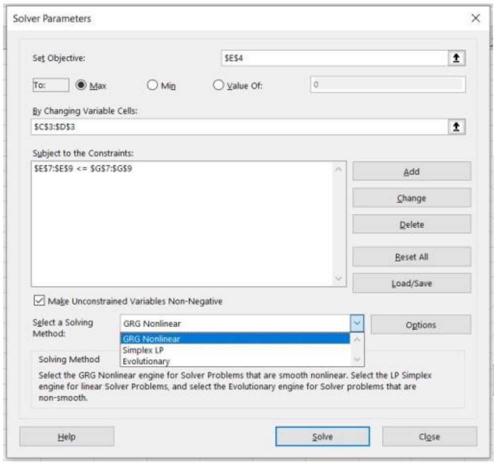
Відповідь. Згідно з оптимальним розв'язком вихідної задачі методом лінеаризації Франка-Вульфа денний раціон тварин повинен складатися з 1,966 у.о.ваги комбікорму 1-го виду та 2,966 у.о.ваги комбікорму 2-го виду. При цьому загальна поживна цінність денного раціону буде максимальною та становитиме 59,509 у.о.

Приклад 12.2 Розв’язати задачу з прикладу 12.1 за допомогою процедури «Solver» для Microsoft Excel.

Розв’язання. Послідовність розв’язання задачі в зазначений спосіб показана на рис. 12.6 а), б) і в). Звернемо увагу, що у вікні «Solver Parameters» за метод розв’язання потрібно обирати «GRG Nonlinear»:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	x1	x2			
3		значення					
4			Значення ЦФ		=-2*C3^2-2*D3^2+C3*D3+10*C3+20*D3		
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	0	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C7:D7)	<=	2
8			0	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C8:D8)	<=	3
9			1	1	=SUMPRODUCT($C$3:$D$3;C9:D9)	<=	10

а)



б)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Змінні	x1	x2			
3		значення	2	3			
4			Значення ЦФ		60		
5							
6			Коефіцієнти в СО		Ліва части	Знак	Права частина
7			1	0	2	<=	2
8			0	1	3	<=	3
9			1	1	5	<=	10

в)

Рис. 12.6 – Реалізація пошуку розв’язку задачі квадратичного програмування за допомогою MS Excel

Висновки. Оптимальний розв’язок задачі з використанням процедури «Solver» Microsoft Excel for Windows показує, що денний раціон тварин повинен складатися з 2 у.о.ваги комбікорму 1-го виду та 3 у.о.ваги комбікорму 2-го виду. При цьому загальна поживна цінність денного раціону буде максимальною та становитиме 60 у.о.

Отриманий результат має узгодженості з отриманим вище наближеним розв’язком методом Франка-Вульфа.

Приклад 12.3 Для запропонованої математичної моделі задачі нелінійного програмування

$$f = 12{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1 + 17x_2 \to min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

виконати наступні завдання.

1) скласти змістовну постановку деякої техніко-економічної оптимізаційної задачі, яка може бути описана за допомогою запропонованої математичної моделі;

2) розв'язати сформульовану задачу за допомогою методу Лагранжа;

3) зробити висновки про оптимальне управління в термінах постановки задачі.

Розв'язання.

Змістовна постановка задачі.

Нехай $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2$ у.о.ваги – вага комбікорму 1-го та 2-го видів відповідно, що включається до денного раціону тварин. Витрати на отримання 1 кг комбікорму пропорційні його вазі з коефіцієнтами $12x_1 + 5$ *і* $x_2 + 17$. За такої умови, загальна вартість денного раціону буде відповідати заданій функції *f:*

$$f = x_1 \cdot (12x_1 + 5) + x_2 \cdot (x_2 + 17) = 12{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1 + 17x_2 \to min$$

Обмеження: загальний обсяг корму обох видів має становити 13 у.о.ваги. Це означатиме

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 13; \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

В задачі потрібно знайти оптимальний обсяг комбікорму для мінімізації загальної вартості денного викорму.

Розв'язання *методом Лагранжа*. Утворимо функцію Лагранжа

$$L = 12{x_1}^2 + {x_2}^2 + 5x_1 + 17x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 13).$$

Знайдемо критичну точку функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 24x_1 + 5 + \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 17 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x_1 + 5 + \lambda = 0; \\ 2x_2 + 17 + \lambda = 0; \\ x_1 + x_2 = 13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{521}{13}; \\ x_1^* = \dfrac{19}{13} \approx 1.461; \\ x_2^* = \dfrac{150}{13} \approx 11.538. \end{cases}$$

Для отримання висновків щодо пошуку мінімуму цільової функції, то тут можна діяти двома способами:

- перший – за допомогою матриці Гессе;
- другий – на основі теореми Вейєрштрасса, застосовуючи яку потрібно порівняти значення функції в критичній точці та на кінцях відрізка, що визначає задане обмеження.

Перший спосіб:

- знаходимо другі похідні в критичній точці для даної ЦФ:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial (x_1)^2} = 24, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial (x_2)^2} = 2;$$

- утворюємо матрицю Гессе для ЦФ:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

та обчислюємо її головні мінори:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \ \Delta_2 = det(H) = 48 > 0;$$

- матриця Гессе додатно визначена, тому додаткових умов не потрібно використовувати для висновку про наявність глобального мінімуму в критичній точці;
- значення в критичній точці відповідатиме мінімальному значенню ЦФ:

$$f(x_1^*, x_2^*) = 12(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + 5x_1^* + 17x_2^* = \frac{4709}{13} \approx 362.23 \text{ у.г.о.}$$

Другий спосіб

Обчислимо значення цільової функції

- в критичній точці $f(x_1^*, x_2^*) = \frac{4709}{13} \approx 362.231$;
- у першій кінцевій точці (0;13) відрізка $\begin{cases} x_1 + x_2 = 13; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

$$f(0{,}13) = 12 \cdot 0^2 + 13^2 + 5 \cdot 0 + 17 \cdot 13 = 390;$$

- у другій кінцевій точці (13;0) зазначеного відрізка:

$$f(0{,}13) = 12 \cdot 13^2 + 0^2 + 5 \cdot 13 + 17 \cdot 0 = 403;$$

- знаходимо найменше серед отриманих значень:

$$min\left\{\frac{4709}{13}; 390; 403\right\} = \frac{4709}{13} \approx 362.231,$$

що відповідає значенню в критичній точці.

Отже, другий спосіб привів до того самого висновку, що і перший.

Відповідь. Згідно з оптимальним розв'язком задачі методом Лагранжа, денний раціон тварин повинен складатися з 1,461 у.о.ваги комбікорму 1-го виду та 11,538 у.о.ваги комбікорму 2-го виду. При цьому загальна вартість денного раціону буде мінімальною та становитиме 362,23 у.г.о.

12.3 Задачі дробово-лінійного програмування

12.3.1 Загальне формулювання задачі дробово-лінійного програмування

Задача дробово-лінійного програмування (ДЛП) – це задача оптимізації, у якій цільова функція є відношенням двох лінійних функцій, а обмеження – лінійні.

Загальний вигляд:

Знайти

$$\max_{x \in R^n} \frac{c^T x + c_0}{d^T x + d_0}$$

за умов:

$$Ax \le b,$$
$$d^T x + d^0 > 0,$$
$$x \ge 0,$$

де $c, d \in R^n$;

$c_0, d_0 \in R$;

A – матриця обмежень;

b – вектор правих частин.

12.3.2 Перетворення задачі дробово-лінійного програмування. Підстановка Чарнса-Купера

Задача ДЛП *зводиться до лінійного програмування* за допомогою *підстановки Чарнса-Купера*

$$t = \frac{1}{d^T x + d_0}, y = xt.$$

Тоді

$$x = \frac{y}{t}.$$

Після підстановки задача стає лінійною.

Приклад 12.4 Максимізувати показник ефективності:

$$Z = \frac{2x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1}$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6; \\ 2x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Крок 1. *Перевірка області допустимих розв'язків*

Допустима множина – опуклий багатокутник, знаменник завжди додатній:

$$x_1 + x_2 + 1 > 0$$

Крок 2. *Застосування підстановки Чарнса-Купера*

Нехай:

$$t = \frac{1}{x_1 + x_2 + 1}, \quad y_1 = x_1 t, \quad y_2 = x_2 t.$$

Тоді цільова функція:

$$Z = 2y_1 + 2y_2.$$

Обмеження:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 6t; \\ 2y_1 + y_2 \le 6t; \\ y_1 + y_2 \ge t. \end{cases}$$

Додаткова умова:

$$y_1 + \mathrm{y}_2 + \mathrm{t} = 1$$
$$\mathrm{y}_1 \ge 0, \mathrm{y}_2 \ge 0, \mathrm{t} \ge 0.$$

Крок 3. *Отримана задача лінійного програмування*

$$max\ Z = 2y_1 + 2y_2$$

за умов:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 6t; \\ 2y_1 + y_2 \le 6t; \\ y_1 + y_2 \ge 1; \\ y_1 + y_2 + t = 1; \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, t \ge 0. \end{cases}$$

Крок 4. *Знаходження оптимального розв'язку*

Розв'яжемо ЗЛП за допомогою інструмента «Solver» для MS Excel з послідовністю дій, проілюстрованих на рис. 12.7.

Розв'язком допоміжної задачі є

$$y_1 = 0{,}4, y_2 = 0{,}4, t = 0{,}2;$$
$$Z = 1{,}6.$$

Крок 5. *Повернення до змінних x*

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{y}_1}{\mathrm{t}} = 2,$$
$$\mathrm{x}_2 = \frac{\mathrm{y}_2}{\mathrm{t}} = 2.$$

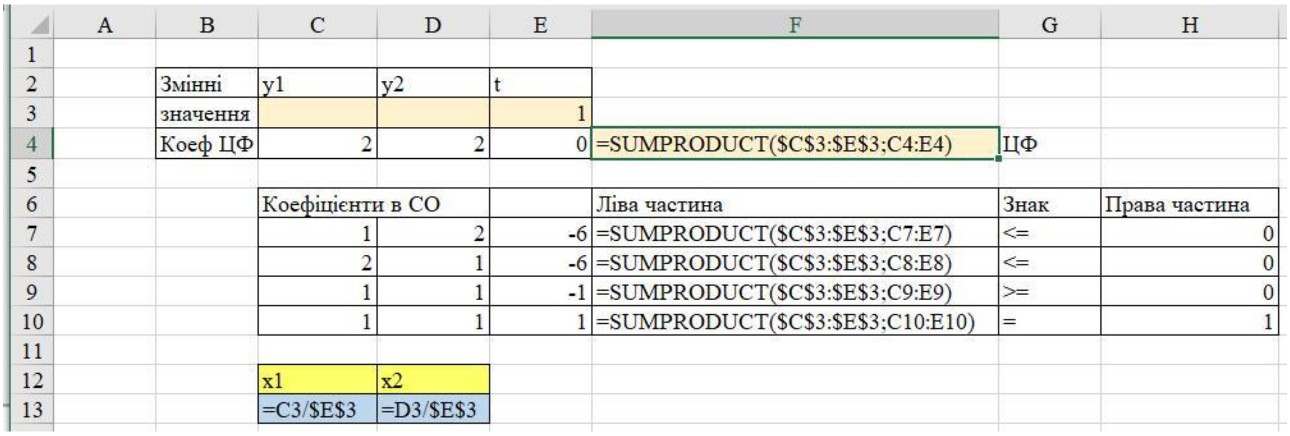
Значення цих змінних також розміщено в комірках C13:D13 на рис. 12.7.

Відповідь. Оптимальний розв'язок:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 2$$

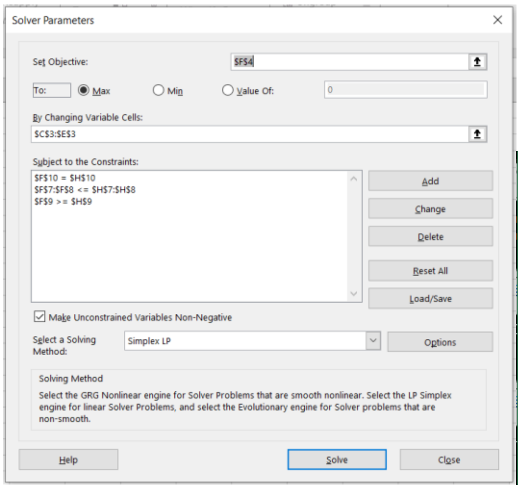
Максимальне значення цільової функції:

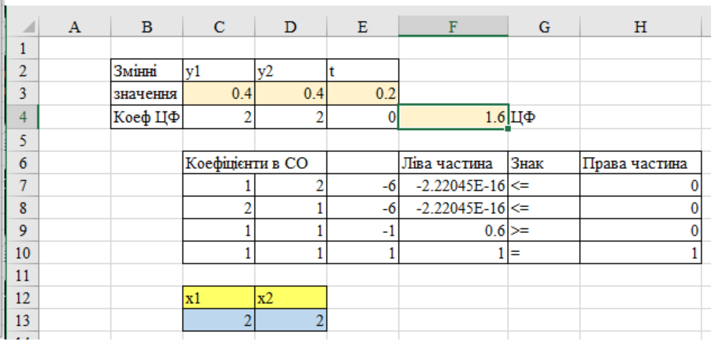
$$Z_{max} = 1{,}6.$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Змінні	y1	y2	t			
3		значення			1			
4		Коеф ЦФ	2	2	0	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C4:E4)	ЦФ	
5								
6			Коефіцієнти в СО			Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	2	-6	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C7:E7)	<=	0
8			2	1	-6	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C8:E8)	<=	0
9			1	1	-1	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C9:E9)	>=	0
10			1	1	1	=SUMPRODUCT($C$3:$E$3;C10:E10)	=	1
11								
12			x1	x2				
13			=C3/$E$3	=D3/$E$3				

а)





	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Змінні	y1	y2	t			
3		значення	0.4	0.4	0.2			
4		Коеф ЦФ	2	2	0	1.6	ЦФ	
5								
6			Коефіцієнти в СО			Ліва частина	Знак	Права частина
7			1	2	-6	-2.22045E-16	<=	0
8			2	1	-6	-2.22045E-16	<=	0
9			1	1	-1	0.6	>=	0
10			1	1	1	1	=	1
11								
12			x1	x2				
13			2	2				

б) в)

Рис. 12.7 – Використання MS Excel для отримання розв’язку допоміжної ЗЛП методом Чарнса-Купера

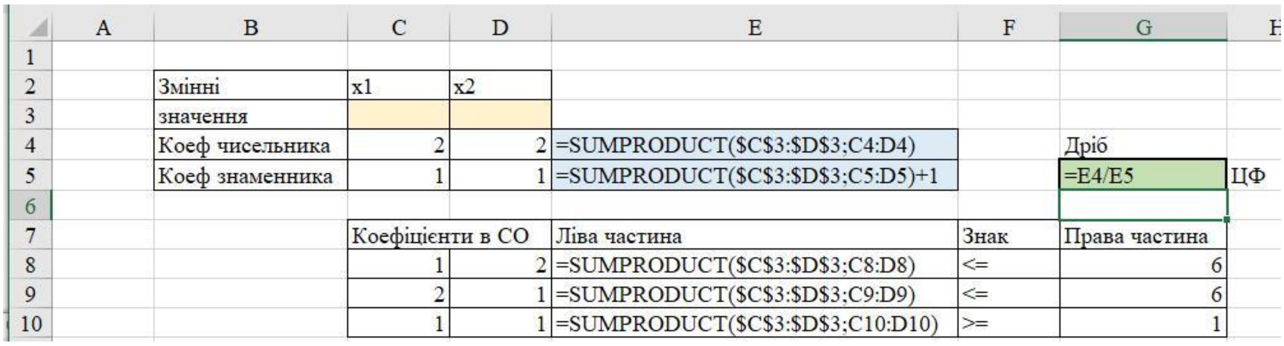
Приклад 12.5 Розв’язати задачу дробово-лінійного програмування з прикладу 12.4 за допомогою інструмента «Solver». Відповідна послідовність дій продемонстрована на рис. 12.8 а), б), в).

Відповідь та сама, що і в прикладі 12.4: оптимальний розв’язок задачі дробово-лінійного програмування: значення змінних

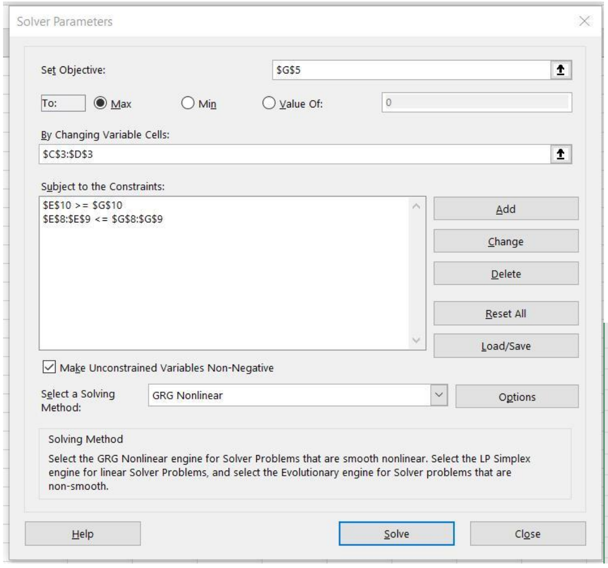
$$x_1^* = 2, x_2^* = 2,$$

цільової функції –

$$Z_{max} = 1{,}6.$$



а)



б) в)

Рис. 12.8 – Реалізація пошуку розв’язку задачі дробово-лінійного програмування з прикладу 12.3 за допомогою MS Excel

12.3.3 Економічні задачі, в яких цільова функція є дробово-лінійною

Дробово-лінійна цільова функція виникає тоді, коли показник ефективності має вигляд *відношення двох економічних величин,* кожна з яких є лінійною функцією змінних, тобто

$$F(x) = \frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + a_0}{b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n + b_0}.$$

Розглянемо основні економічні задачі з дробово-лінійною цільовою функцією.

Задачі обчислення та максимізації рентабельності

Рентабельність зазвичай визначається як:

$$R = \frac{\text{прибуток}}{\text{витрати}}$$

або

$$R = \frac{\text{прибуток}}{\text{собівартість}}.$$

Нехай:

– прибуток:

$$P(x) = \sum p_i x_i - \sum c_i x_i\,;$$

– витрати (собівартість):

$$C(x) = \sum c_i x_i + C_0.$$

Тоді

$$R(x) = \frac{P(x)}{C(x)}.$$

Типова задача: обрати виробничу програму x, яка максимізує рентабельність.

Задачі мінімізації середньої собівартості продукції

Собівартість одиниці продукції:

$$S = \frac{\text{загальні витрати}}{\text{обсяг виробництва}}.$$

Якщо загальні витрати та обсяг виробництва визначаються функціями

$$Z(x) = \sum c_i x_i + C_0, \qquad Q(x) = \sum q_i x_i,$$

то:

$$S(x) = \frac{Z(x)}{Q(x)}.$$

Типова задача: мінімізувати середню собівартість одиниці продукції.

Задачі продуктивності та ефективності ресурсів

– *продуктивність праці:*

$$P = \frac{\text{випуск}}{\text{затрати праці}};$$

– *фондовіддача:*

$$F = \frac{\text{обсяг продукції}}{\text{вартість основних фондів}}.$$

Такі показники природно формулюються як дробово-лінійні функції.

Фінансові задачі

– *оборотність капіталу*

$$O = \frac{\text{дохід}}{\text{середній капітал}};$$

– *коефіцієнти ліквідності*

$$L = \frac{\text{поточні активи}}{\text{поточні зобов'язання}}.$$

Задачі «ефект–витрати»

Класичні задачі:

$$\max \frac{\text{економічний ефект}}{\text{витрати}}.$$

12.4 Багатокритеріальні задачі дослідження операцій

12.4.1 Суть багатокритеріальної оптимізації

Багатокритеріальна задача – це задача, у якій одночасно оптимізуються кілька, часто суперечливих, критеріїв.

Загальний вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x) \to \max, \\ f_2(x) \to \min, \\ \quad\quad \dots \\ \quad f_k(x) \to opt, \end{cases} \quad x \in X.$$

Типові економічні приклади:

– максимізація прибутку та мінімізація ризику;
– мінімізація витрат і максимізація якості;
– максимізація випуску та мінімізація забруднення.

Парето-оптимальність

Розв'язок x^* називається *Парето-оптимальним,* якщо не існує іншого допустимого розв'язку, який:

– покращує хоча б один критерій;
– не погіршує жодного іншого.

Сукупність таких розв'язків – *множина Парето*.

12.4.2 Основні підходи до розв'язання та особливості багатокритеріальних задач

Згортка критеріїв (скаляризація)

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x),$$

де w_i – вагові коефіцієнти.

Цей метод найбільш поширений, проте його проблема полягає у суб'єктивності вибору вагових коефіцієнтів.

Метод головного критерію:

– один критерій – основний;
– інші задаються як обмеження.

Лексикографічний метод:

– критерії впорядковуються за важливістю;
– оптимізація виконується послідовно.

Метод послідовних поступок:

– для другорядних критеріїв задаються допустимі відхилення.

Цільове програмування:

– мінімізується відхилення від заданих цільових рівнів критеріїв.

Особливості багатокритеріальних задач

– не існує єдиного «найкращого» розв'язку;
– результат може бути суб'єктивним;
– важлива інтерпретація та діалог з експертом.

12.5 Задачі цілочислового програмування

12.5.1 Загальні положення цілочислового програмування

Поняття цілочислового програмування

Цілочислове програмування (ЦП) – це розділ математичного програмування, у якому всі або частина змінних набувають лише цілочислових значень.

Загальний вигляд задачі:

$$max\ (min\ )\ f(x) = c^T x$$

за умов:

$$Ax \leq b, x \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, i \in J,$$

де J – множина індексів цілочислових змінних.

Основні типи задач цілочислового програмування

- чисто цілочислові – всі змінні цілочислові;
- змішані цілочислові – лише частина змінних цілочислова;
- бінарні (0–1) – змінні приймають значення 0 або 1.

ЗГАДАЙТЕ! Які задачі, розглянуті в курсі, можна віднести до бінарних?

Економічна мотивація цілочислових моделей

Цілочислові обмеження зумовлені дискретною природою об'єктів:

- кількість верстатів, працівників, проєктів;
- вибір «так / ні»;
- відкриття складів, маршрутів;
- виробництво партіями.

Основні методи розв'язання задач ЦП

- метод повного перебору (теоретичний);
- метод гілок і меж;
- метод відсічних площин;
- метод Гоморі;
- евристичні та метаевристичні методи.

12.5.2 Приклади розв'язання задач цілочислового програмування. Метод Гоморі

Суть методу Гоморі

Ідея методу

Метод Гоморі – це метод *відсічних півплощин*, який полягає у:

- розв'язанні задачі *лінійного програмування без вимоги цілочисловості*;
- перевірці, чи є отриманий розв'язок цілочисловим;
- якщо ні – побудові *відсічного обмеження*, яке:
  - відсікає дробовий розв'язок;
  - не відсікає жодного допустимого цілочислового розв'язку;
- додаванні цього обмеження і повторенні процесу.

Побудова відсічення Гоморі

Нехай з оптимальної симплекс-таблиці маємо:

$$x_B = b - \sum a_j x_j.$$

Якщо b – дробове, будується відсічення Гоморі:

$$\sum (a_j - [a_j]) x_j \geq b - [b].$$

Приклад 12.4 (Ігнорування цілочисловості → округлення)

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Розв'язання. Без цілочислових обмежень отримаємо:

$$x_1 = 4, x_2 = 0, Z = 20.$$

Розв'язок цілочисловий → оптимальний.

Приклад 12.6 Підприємство виробляє два види продукції A і B цілими партіями. Використання ресурсів на виготовлення 1 одиниці продукції, запаси ресурсів та прибуток від реалізації занесено в таблицю. Знайти, яку кількість виробів кожного виду потрібно виробляти для забезпечення максимального прибутку.

Ресурси	Витрати ресурсів на 1 виріб виду		Запас ресурсу
	A	B	
Сировина, кг	5	2	20
Машинний час, год	2	5	20
Трудовий ресурс, люд.-год	1	1	5
Прибуток, у.г.о.	5	5	

Розв'язання.

Математична модель задачі.

Змінні:

- x_1 виробів виду A;
- x_2 виробів виду B.

Цільова функція:

$$\max F = 5x_1 + 5x_2.$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Крок 1. *Розв'язання задачі без цілочислової умови (ЛП)*

Розв'яжемо задачу лінійного програмування (ігноруючи вимогу цілочисловості) симплексним методом, попередньо зведемо її до канонічної форми запису:

$$F = 5x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 20, \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad + x_4 \qquad = 20, \\ \ x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad + x_5 = 5, \\ \qquad\qquad x_{1,2,3,4,5} \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 12.9 наведено послідовне заповнення симплексних таблиць відповідно до алгоритму, описаному в темі 2.

Перша симплекс-таблиця

			5	5	0	0	0	
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
x3	0	20	5	2	1	0	0	4
x4	0	20	2	5	0	1	0	10
x5	0	5	1	1	0	0	1	5
	Δj	0	-5	-5	0	0	0	

Друга симплекс-таблиця

			5	5	0	0	0	
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
x1	5	4	1	0.4	0.2	0	0	10
x4	0	12	0	4.2	-0.4	1	0	2.857143
x5	0	1	0	0.6	-0.2	0	1	1.666667
	Δj	20	0	-3	1	0	0	

Третя симплекс-таблиця

			5	5	0	0	0	
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	bi/aik
x1	5	3.333333	1	0	0.333333	0	-0.666667	
x4	0	5	0	0	1	1	-7	
x2	5	1.666667	0	1	-0.333333	0	1.666667	
	Δj	25	0	0	0	0	5	

Рис. 12.9 – Реалізація симплексного методу для задачі цілочислового програмування на кроці 1

З третьої симплекс-таблиці знаходимо оптимальний розв'язок ЛП: змінні –

$$x_1 = 3{,}333 = \frac{10}{3}, x_2 = 1{,}667 = \frac{5}{3}, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 5,$$

цільова функція – $F = 25$. Розв'язок *дробовий,* отже застосовуємо метод Гоморі.

<u>Крок 2.</u> *Побудова відсічення Гоморі*

Беремо будь-який базисний рядок із дробовим b_i, наприклад рядок x_1

$$x_1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5.$$

Виділяємо дробові частини:

$$\left\{\frac{10}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \left\{-\frac{1}{3}\right\} = \frac{2}{3}, \left\{\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

Будуємо *відсічення Гоморі:*

$$\frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{1}{3}.$$

Помножимо на 3:

$$2x_3 + 2x_5 \geq 1. \qquad (12.1)$$

Повернення до початкових змінних. З означень:

$$x_3 = 20 - 5x_1 - 2x_2,$$
$$x_5 = 5 - x_1 - x_2.$$

Підставляємо:

$$2(20 - 5x_1 - 2x_2) + 2(5 - x_1 - x_2) \geq 1;$$
$$50 - 12x_1 - 6x_2 \geq 1;$$

$$12x_1 + 6x_2 \le 49.$$

Як можна бачити з рис. 12.10, саме це обмеження:

– *відсікає* точку $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$;

– *не відсікає жодного цілочислового допустимого розв'язку з області Ω.*

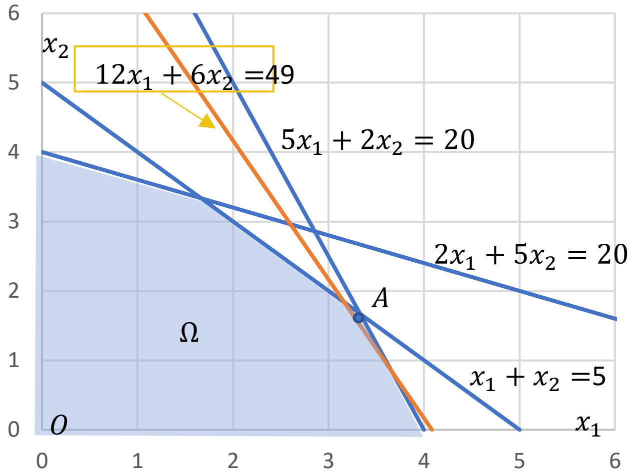


Рис. 12.10 – Графічне зображення відсікання точки А і невідсікання жодної цілочислової точки з області допустимих розв'язків Ω

<u>Крок 3.</u> *Додавання відсічення* (12.1) до останньої симплекс-таблиці.

Спочатку зведемо (12.1) до канонічної форми:

$$-2x_3 - 2x_5 \le -1;$$

$$-2x_3 - 2x_5 + x_6 = -1.$$

Тепер доповнимо симплекс-таблицю з урахуванням отриманого рівняння, прийдемо до табл. 12.1.

Таблиця 12.1 – Доповнена симплекс-таблиця з урахуванням відсічення Гоморі

			5	5	0	0	0	0
базис	cб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	5	3.333333	1	0	0.333333	0	-0.66667	0
x4	0	5	0	0	1	1	-7	0
x2	5	1.666667	0	1	-0.33333	0	1.666667	0
x6	0	-1	0	0	-2	0	-2	1
	Δj	25	0	0	0	0	5	0
	Θ_i		-	-	0	-	2.5	-

Перетворення цієї таблиці реалізується <u>двоїстим симплексним методом</u>. Розв'язувальний рядок визначається рядком з від'ємним значенням b_i. У даному випадку це рядок x_6. Розв'язувальний стовпець знаходимо з умови

$$\Theta_j = \min\left(-\frac{\Delta_j}{a_{i6}}:\ a_{i6} < 0\right).$$

Подальші перетворення над симплекс-таблицею стандартні. В результаті приходимо до табл. 12.2. Оскільки всі b_i додатні, то ця таблиця остаточна для кроку 3.

Таблиця 12.2 – Остаточна симплекс-таблиця кроку 3

			5	5	0	0	0	0
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	5	3.166667	1	0	0	0	-1	0.166667
x4	0	4.5	0	0	0	1	-8	0.5
x2	5	1.833333	0	1	0	0	2	-0.16667
x3	0	0.5	0	0	1	0	1	-0.5
	Δj	25	0	0	0	0	5	0

На цьому кроці знову отримано дробовий розв'язок:

$$x_1 = 3{,}1667 = \frac{19}{6}, x_2 = 1{,}833 = \frac{11}{6}, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = \frac{9}{2}; \;\; F = 25.$$

<u>Крок 4.</u> *Побудова нового відсічення Гоморі*. Серед рядків в табл.12.2 з дробовим значенням b_i обираємо рядок x_4, звідки

$$x_4 = \frac{9}{2} + 8\,x_5 - \frac{1}{2}x_6.$$

Оскільки $\left\{\frac{9}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \{8\} = 0, \; \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то відсічення Гоморі набуває форми

$$\frac{1}{2}x_6 \geq \frac{1}{2},$$

або після домноження на 2 – форми

$$x_6 \geq 1. \qquad (12.2)$$

Запевнимося, що має місце відсікання точку B$\left(\frac{19}{6}.\frac{11}{6}\right)$, при цьому не відсікається жодна цілочислова точка з множини допустимих розв'язків. Для цього перейдемо до початкових змінних:

$$\mathrm{x}_6 = -1 + 2\mathrm{x}_3 + 2\mathrm{x}_5,$$
$$\mathrm{x}_3 = 20 - 5\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2,$$
$$\mathrm{x}_5 = 5 - \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2,$$

звідки

$$\mathrm{x}_6 = 49 - 12x_1 - 6x_2,$$

тоді нерівність (12.2) набуде вигляду

$$49 - 12x_1 - 6x_2, \geq 1;$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8.$$

Графічне подання відсікаючих півплощин разом з областю Ω і точкою B на рис. 12.11 підтверджує її відсікання без відсікання цілочислових точок.

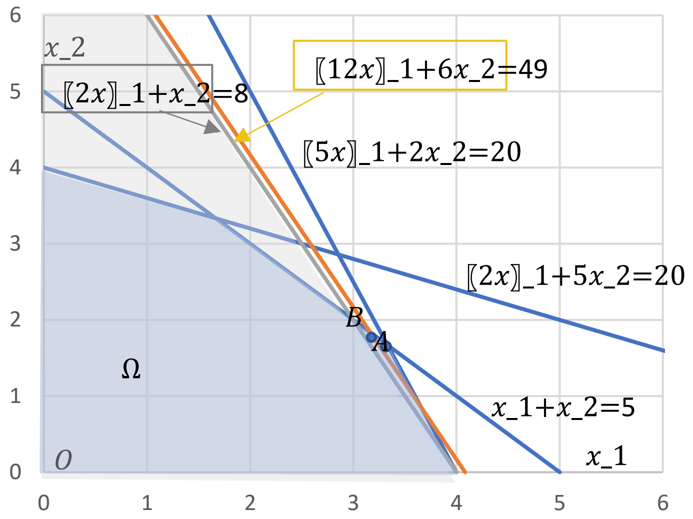


Рис. 12.11 – Графічне зображення відсікання точки B і невідсікання жодної цілочислової точки з області допустимих розв'язків Ω

Крок 5. *Додавання відсічення* (12.2) до симплекс-таблиці 12.2.

Зводимо (12.2) до канонічної форми

$$-x_6 + x_7 = -1.$$

Доповнюємо симплекс таблицю і робимо ті самі дії, що і на кроці 3. Результат надано на рис. 12.12.

			5	5	0	0	0	0	0
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	5	3.166667	1	0	0	0	-1	0.166667	0
x4	0	4.5	0	0	0	1	-8	0.5	0
x2	5	1.833333	0	1	0	0	2	-0.16667	0
x3	0	0.5	0	0	1	0	1	-0.5	0
x7	0	-1	0	0	0	0	0	-1	1
	Δj	25	0	0	0	0	5	0	0

			5	5	0	0	0	0	0
базис	сб	bi	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
x1	5	3	1	0	0	0	-1	0	0.166667
x4	0	4	0	0	0	1	-8	0	0.5
x2	5	2	0	1	0	0	2	0	-0.16667
x3	0	1	0	0	1	0	1	0	-0.5
x6	0	1	0	0	0	0	0	1	-1
	Δj	25	0	0	0	0	5	0	

Рис. 12.12 – Реалізація двоїстого симплексного методу для задачі цілочислового програмування на кроці 5

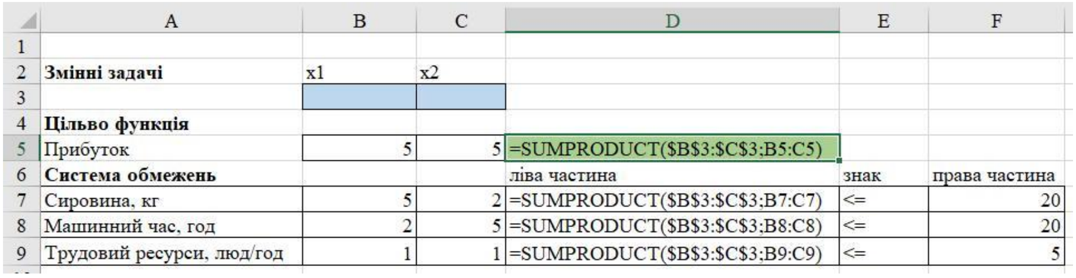
В результаті отримано цілочисловий розв'язок поставленої задачі:

$$x_1 = 3, x_2 = 2, F = 25.$$

Відповідь. Для отримання максимального прибутку, що становить 25 у.г.о, потрібно виготовляти 3 вироби виду А і 2 вироби виду В.

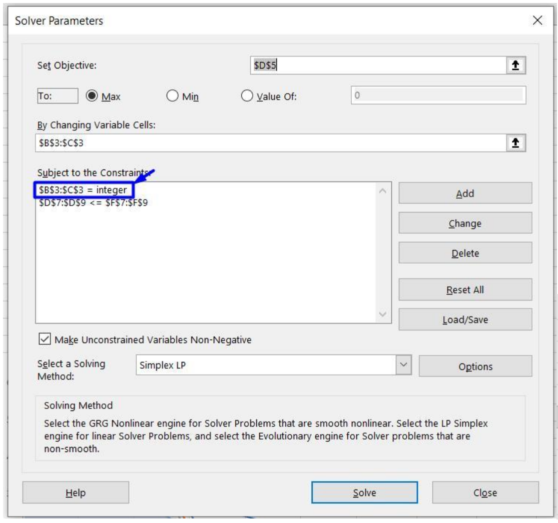
Приклад 12.7 Розв'язати задачу цілочислового програмування з прикладу 12.6 за допомогою інструмента «Solver» для MS Excel.

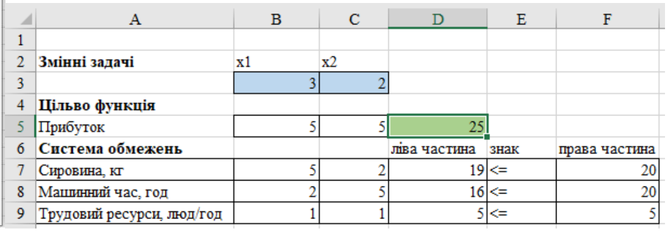
Розв'язання. Відповідна послідовність дій продемонстрована на рис. 12.13 а), б), в).



	A	B	C	D	E	F
1						
2	**Змінні задачі**	x1	x2			
3						
4	**Цільво функція**					
5	Прибуток	5	5	=SUMPRODUCT($B$3:$C$3;B5:C5)		
6	**Система обмежень**			ліва частина	знак	права частина
7	Сировина, кг	5	2	=SUMPRODUCT($B$3:$C$3;B7:C7)	<=	20
8	Машинний час, год	2	5	=SUMPRODUCT($B$3:$C$3;B8:C8)	<=	20
9	Трудовий ресурси, люд/год	1	1	=SUMPRODUCT($B$3:$C$3;B9:C9)	<=	5

а)





	A	B	C	D	E	F
1						
2	**Змінні задачі**	x1	x2			
3		3	2			
4	**Цільво функція**					
5	Прибуток	5	5	25		
6	**Система обмежень**			ліва частина	знак	права частина
7	Сировина, кг	5	2	19	<=	20
8	Машинний час, год	2	5	16	<=	20
9	Трудовий ресурси, люд/год	1	1	5	<=	5

Рис. 12.13 – Реалізація пошуку розв’язку задачі цілочислового програмування з прикладу 12.5 за допомогою MS Excel

Питання для самоконтролю до розділу 12

1. У чому полягає загальна постановка задачі нелінійного програмування? Які типи обмежень можуть входити до такої задачі та чим нелінійне програмування відрізняється від лінійного?
2. Які необхідні та достатні умови існування екстремуму для задачі без обмежень?
3. У чому полягає суть методів умовної оптимізації? Опишіть метод множників Лагранжа та умови Каруша-Куна-Таккера (ККТ).
4. Які основні ідеї та етапи методу Франка-Вульфа розв’язання задачі нелінійного програмування?
5. Що таке задача дробово-лінійного програмування та як вона зводиться до задачі лінійного програмування? Поясніть підстановку Чарнса-Купера та її призначення.
6. У яких економічних задачах виникає дробово-лінійна цільова функція? Наведіть приклади показників ефективності, рентабельності або собівартості.
7. Що розуміють під багатокритеріальною оптимізацією? Які основні підходи до розв’язання багатокритеріальних задач розглянуто в темі?
8. Що таке цілочислове програмування та які його основні типи? Чим відрізняються чисто цілочислові, мішані та бінарні моделі?
9. Опишіть ідею та алгоритм методу Гоморі. Яким чином будується відсічення та чому воно не відсікає допустимі цілочислові розв’язки?

10. Викладіть алгоритм використання інструмента «Solver» для MS Excel для задач нелінійного, цілочислового програмування. У чому полягає специфіка саме для задач зазначених типів?