МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О. О. Головань
О. М. Олійник
Д. Т. Бікулов
С. В. Маркова
К. В. Сухарева
Є. В. Маказан

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ МЕНЕДЖМЕНТУ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності D3 «Менеджмент»
галузі знань «Бізнес, адміністрування та право»

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №___ від ____

Запоріжжя
2026

УДК 005:51(075.8)
М34

Головань О. О., Олійник О. М., Бікулов Д. Т., Маркова С. В., Сухарева К. В., Маказан Є. В. Математичні основи менеджменту : навчальний посібник для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності D3 «Менеджмент» галузі знань «Бізнес, адміністрування та право». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2026. 102 с.

Навчальний посібник розроблено відповідно до силабуса дисципліни «Математичні основи менеджменту». У ньому систематизовано теоретичний матеріал із ключових тем курсу. Увагу акцентовано на базових модулях із лінійної алгебри, диференційного та інтегрального числення функцій, теорії ймовірностей та випадкових величин, а також прикладних аспектах їх застосування в задачах управління та оптимізації. До кожної теми подано перелік базових понять і термінів, запропоновано питання для самоперевірки знань, тести для діагностики рівня засвоєння знань, а також практичні завдання для набуття вмінь і навичок щодо застосування математичного апарату, моделей і методів для прийняття управлінських рішень.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Менеджмент» галузі знань «Бізнес, адміністрування та право».

Рецензент
О. С. Верітова, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри бізнес-адміністрування і менеджменту зовнішньоекономічної діяльності

Відповідальний за випуск
Д. Т. Бікулов, доктор наук з державного управління, завідувач кафедри бізнес-адміністрування і менеджменту зовнішньоекономічної діяльності

ЗМІСТ

ВСТУП

У сучасних умовах глобалізації, високої конкуренції та стрімкого розвитку цифрових технологій роль інтуїції у прийнятті управлінських рішень поступово відходить на другий план. Сьогодні успіх організації залежить від здатності менеджера оперувати великими масивами даних та використовувати об’єктивні методи аналізу. Вивчення математичних основ менеджменту формує у майбутнього фахівця системне стратегічне мислення, оскільки це є потужним інструментарієм, який перетворює турбулентні ринкові процеси у чітку, керовану структуру.

Дисципліна «Математичні основи менеджменту» слугує фундаментальним містком між теоретичною підготовкою та професійною майстерністю, перетворюючи абстрактні математичні концепції на дієвий інструментарій керівника. Вивчення цієї дисципліни формує не просто набір обчислювальних навичок, а особливий тип аналітичного інтелекту, що дозволяє майбутньому керівнику не лише ефективно використовувати існуючі бізнес-моделі, але і проєктувати нові, адаптивні та високоефективні системи управління в умовах глобальної конкуренції.

Дисципліна «Математичні основи менеджменту» є обов’язковим освітнім компонентом циклу професійної підготовки бакалавра спеціальності «Менеджмент».

Метою викладання навчальної дисципліни «Математичні основи менеджменту» є формування у здобувачів вищої освіти теоретичних знань і практичних навичок застосування математичного апарату, сучасних методів і моделей для аналізу та оптимізації управлінських рішень.

Курс включає модулі з лінійної алгебри, диференційного та інтегрального числення функцій, теорії ймовірностей та випадкових величин, а також прикладні аспекти їх застосування в задачах управління та оптимізації.

Дисципліна «Математичні основи менеджменту» як компонент освітньо-професійної програми підготовки спрямована на набуття таких компетентностей:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу, синтезу;

– знання та розуміння предметної області та розуміння професійної діяльності;

– вміння визначати функціональні області організації та зв’язки між ними;

– здатність аналізувати й структурувати проблеми організації, формувати обґрунтовані рішення.

Дисципліна «Математичні основи менеджменту» як компонент освітньо-професійної програми підготовки забезпечує досягнення таких програмних результатів навчання:

– демонструвати навички виявлення проблем та обґрунтування управлінських рішень;

– описувати зміст функціональних сфер діяльності організації;

– виявляти навички пошуку, збирання та аналізу інформації, розрахунку показників для обґрунтування управлінських рішень;

– застосовувати методи менеджменту для забезпечення ефективності діяльності організації.

Навчальний посібник із дисципліни «Математичні основи менеджменту» розроблений для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Менеджмент» галузі знань «Бізнес, адміністрування та право» і відповідає змісту силабуса навчальної дисципліни.

У посібнику систематизовано теоретичний матеріал із ключових тем курсу. Структура видання передбачає наявність основних понять і питань до кожної теми, питань для самоперевірки знань, тестів, розрахункових завдань для самостійного виконання. Видання містить приклади розрахункового та прикладного характеру щодо використання математичного апарату в задачах оптимізації та прийняття управлінських рішень.

Видання буде корисним у процесі підготовки до практичних занять та самостійної роботи здобувачів освіти з метою систематизації та поглиблення теоретичних знань, набуття та розвитку компетенцій і навичок застосування математичного апарату, моделей і методів для прийняття ефективних управлінських рішень.

ТЕМА 1
МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Основні поняття: матриця, розмірність матриці, види матриць, додавання матриць, добуток матриць, транспонування матриці

План

1. Визначення матриці. Види матриць.
2. Операції над матрицями.
3. Застосування матриць у прикладних задачах з управління.

<u>Питання №1</u>
<u>Визначення матриці. Види матриць</u>

Сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців, називається *матрицею* розмірності $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{(m \times n)}. \qquad (1.1)$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, причому i – номер рядка, а j – номер стовпця, на перетинанні яких стоїть елемент a_{ij}.

Матриця розмірності $m \times n$ називається *прямокутною матрицею*.

Якщо у матриці кількість рядків дорівнює кількості стовпців ($m = n$), то така матриця називається *квадратною*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{(n \times n)}. \qquad (1.2)$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 1 \\ 10 & 0 & 2 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розмірності 4×5.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 1 \\ 3 & -41 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця розмірності 4×4.

Елементи матриці B $b_{12} = 2$, $b_{24} = 0$, $b_{43} = 12$.

Якщо $m = 1$, $n > 1$, матриця має назву *матриця-рядок*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Якщо $m > 1$, $n = 1$, матриця має назву *матриця-стовпець*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix}$ – матриця-рядок розмірності 1×5

$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець розмірності 4×1.

Матриці позначаються латинськими літерами *A*, *B*, *C*, …

Дві матриці *A* і *B* називаються *рівними*, якщо вони мають однакову розмірність та їх відповідні елементи є рівними.

Квадратна матриця, в якій на головній діагоналі стоять 1, а всі інші елементи дорівнюють 0, називається *одиничною матрицею*

Приклад:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця розмірності 4×4;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця розмірності 3×3;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця розмірності 2×2.

Питання №2
Операції над матрицями

1. *Додавання матриць*.

Матриці однакової розмірності можна додавати.

Сумою двох матриць $A_{(m,n)}$ і $B_{(m,n)}$ називається матриця $C_{(m,n)}$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць $A_{(m,n)}$ і $B_{(m,n)}$.

$$A_{(m,n)} + B_{(m,n)} = C_{(m,n)}, \quad (1.5)$$

причому для кожного елемента матриці $C_{(m,n)}$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Приклад 1. Знайти суму матриць $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 7 & -4 \\ 4 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Додавання матриць є комутативним і асоціативним, тобто

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

2. *Віднімання матриць*.

Різницею двох матриць однакової розмірності $A_{(m,\,n)}$ і $B_{(m,\,n)}$ називається матриця $C_{(m,\,n)}$, елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць $A_{(m,\,n)}$ і $B_{(m,\,n)}$.

$$A_{(m,\,n)}-B_{(m,\,n)}=C_{(m,\,n)}, \tag{1.6}$$

причому для кожного елемента матриці $C_{(m,\,n)}$: $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Приклад 2. Знайти різницю матриць $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

$$C=A-B=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. *Добуток матриці на число*.

Добутком λA матриці A на число λ є матриця, елементи якої дорівнюють добутку числа λ на відповідні елементи матриці A, тобто

$$\lambda A=(\lambda a_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}, \tag{1.7}$$

Приклад 3. Знати добуток числа $\lambda=-2$ на матрицю $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda A=-2\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 0 & -20 & 4 \\ -8 & 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. *Добуток матриць*.

Добуток матриць A та B існує тільки в тому випадку, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тобто

$$A_{(m,\underline{\boldsymbol{n}})}\cdot B_{(\underline{\boldsymbol{n}},k)}=C_{(m,k)}, \tag{1.8}$$

причому розмірність матриці C дорівнює кількості рядків матриці A та кількості стовпців матриці B.

Елемент матриці-добутку c_{ij}, який знаходиться на перетинанні i – рядка та j – стовпця, дорівнює сумі попарних добутків елементів i – рядка першої матриці та елементів j – стовпця другої матриці.

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} \cdot b_{lj}. \tag{1.9}$$

Приклад 4. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, то такі матриці можна перемножити. Результатом добутку є матриця розмірності (2×4): $A_{(2,\underline{2})} \cdot B_{(\mathbf{2},4)} = C_{(2,4)}$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) & 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-6) & 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & -12 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Необхідно зазначити, що добуток двох матриць не є комутативним, тобто
$$A \cdot B \neq B \cdot A,$$
але є асоціативним
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Приклад 5. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Матриця A має розмірність (1×4), а матриця B – розмірність (4×2). Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, то такі матриці можна перемножити

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 16 & 13 \end{pmatrix}_{1 \times 2}.$$

Добуток матриць $B \cdot A$ є неможливим, оскільки кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A (2≠1), тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$.

При множенні будь-якої квадратної матриці A на одиничну матрицю E знов одержуємо матрицю A.

$$A \cdot E = E \cdot A = A \tag{1.10}$$

4. *Транспонування матриці*.

Якщо в матриці (1.1) замінити місцями рядки і стовпці, то одержимо *транспоновану матрицю* розмірності $n \times m$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{(n \times m)}. \tag{1.11}$$

Приклад 6. Записати матрицю, транспоновану до матриці $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & -2 \\ 12 & 1 & -7 & 8 \end{pmatrix}_{3\times 4}$.

Транспонована матриця матиме вигляд

$$A^T = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 12 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -7 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 3}.$$

<u>Питання №3</u>
<u>Застосування матриць у прикладних задачах з управління</u>

Матриці є надзвичайно потужним інструментом в управлінні та прикладних задачах, оскільки вони дозволяють структурувати великі обсяги даних і виконувати систематичні обчислення. Вони використовуються для моделювання складних систем, оптимізації рішень та аналізу взаємозв'язків:

1) моделювання та аналіз операцій

Моделювання виробничих процесів (проєктне управління): матриця суміжності або матриця інцидентності використовуються для представлення мережевих графіків, які допомагають визначити залежності між завданнями, планувати ресурси та контролювати терміни. Рядки можуть представляти завдання, а стовпці – необхідні ресурси. Значення в матриці відображає кількість необхідного ресурсу.

Управління запасами: матриці можуть використовуватися для відстеження запасів на різних складах, постачальників, графіків поповнення та попиту. Це допомагає оптимізувати обсяги замовлень і знизити витрати;

2) оптимізація ресурсів (лінійне програмування)

Транспортна задача: матриці використовуються для представлення витрат на перевезення одиниці продукції від постачальників (ряди) до споживачів (стовпці). Мета – знайти такий план перевезень (матрицю перевезень), щоб мінімізувати загальні витрати.

Задача про призначення (розподіл персоналу/завдань): матриця витрат/ефективності, де рядок – працівник, а стовпець – завдання. Елементи матриці – це витрати або час, необхідний для виконання завдання. Мета – знайти оптимальне присвоєння (один працівник – одне завдання), щоб максимізувати ефективність або мінімізувати витрати;

3) аналіз рішень та ризиків

Матриця рішень: використовується для порівняння кількох альтернатив (рядки) за різними критеріями (стовпці). Кожному критерію присвоюється вага, і за допомогою матричних операцій розраховується загальний бал для кожної альтернативи.

Матриця ризиків: допомагає оцінити ризики, де один вимір – ймовірність настання події, а інший – вплив (наслідки). Це дає змогу візуально проранжувати ризики (наприклад, висока ймовірність + високий вплив = критичний ризик) і розробити стратегії реагування.

Отже, у сфері управління матриці є не просто математичним інструментом, а мовою для систематизації, аналізу та оптимізації управлінських рішень. Вони дають змогу перетворити складні, багатовимірні проблеми на структуровані математичні задачі, що значно підвищує обґрунтованість та ефективність управління.

Приклад. Підприємство випускає продукцію двох видів, використовуючи при цьому сировину трьох видів. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею $S=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, де s_{ij} – це кількість сировини i-го типу, що використовується на виготовлення одиниці продукції j-го виду. План щоденного випуску продукції передбачає 80 од. продукції першого виду і 100 од. продукції другого виду. Вартість одиниці кожного типу сировини відповідно дорівнює 80, 50 і 100 гр. од. Визначити загальні витрати сировини V, необхідні для щоденного випуску продукції, а також загальну вартість C цієї сировини.

Представимо в матричній формі вихідні дані:

1) витрати кожного типу сировини на виробництво продукції $S=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

2) план щоденного випуску продукції $P=\begin{pmatrix} 80 & 100 \end{pmatrix}$,

3) вартість одиниці сировини кожного типу $A=\begin{pmatrix} 80 & 50 & 100 \end{pmatrix}$.

Матрицю загальних витрат сировини V знайдемо як добуток матриць S і P^T

$$V = S \cdot P^T=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 80 + 4 \cdot 100 \\ 3 \cdot 80 + 1 \cdot 100 \\ 2 \cdot 80 + 3 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 340 \\ 460 \end{pmatrix}$$

Отже, щоденні витрати кожного виду сировини для виробництва продукції складатимуть відповідно 800, 340 і 460 од.

Загальна вартість цієї сировини може бути знайдена як добуток матриць A і V

$$C = A \cdot V = (80 \quad 50 \quad 100) \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 340 \\ 460 \end{pmatrix} = (80 \cdot 800 + 50 \cdot 340 + 100 \cdot 460) =$$
$= 127000$ гр. од.

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення матриці.
2. Як визначається розмірність матриці?
3. Яка матриця називається квадратною?
4. У якому випадку матриці можна додавати?
5. За якої умови існує добуток матриць?
6. Сформулюйте правило множення матриць.
7. Чи є добуток матриць комутативним?
8. Яка матриця називається одиничною і яка її властивість?
9. Яка матриця називається транспонованою по відношенню до початкової матриці?
10. Назвіть сфери управління, де може використовуватися матричний аналіз.

Тести

1. Матриця розмірності $m \cdot n$ – це:

а. Сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді таблиці, яка складається з n рядків і m стовпців.

б. Сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців.

в. Число, яке є добутком чисел $m \cdot n$.

г. Число, яке визначається за певним правилом.

2. Додавання матриць можливе:

а. У будь-якому випадку.

б. Якщо матриці мають однакову розмірність.

в. Якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

г. Якщо кількість рядків першої матриці дорівнює кількості стовпців другої матриці.

3. Множення матриць можливе:

а. У будь-якому випадку.

б. Якщо матриці мають однакову розмірність.

в. Якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

г. Якщо кількість рядків першої матриці дорівнює кількості стовпців другої матриці.

4. На відміну від додавання матриць, множення матриць:

а. Є асоціативним.

б. Є комутативним.

в. Не є комутативним.

г. Не є асоціативним.

5. В яких сферах управління може використовуватися матричний аналіз?

а. Моделювання та аналіз операцій.
б. Оптимізація ресурсів.
в. Аналіз рішень та ризиків.
г. Усі відповіді правильні.

Завдання для самостійного виконання

1) Знайти добуток матриць AB та BA

1.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

1.4 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

2) Для заданих матриць $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ обчислити $2B - 3C$, $A(B + C)$, $BC^T + A^2$.

3) Підприємство випускає продукцію трьох видів, використовуючи два типи сировини. Витрати сировини на виробництво продукції задаються матрицею $S = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$, де s_{ij} – кількість одиниць сировини i-го типу, що йде на виготовлення одиниці продукції j-го виду. План тижневого випуску продукції передбачає 300 одиниць продукції 1-го виду, 150 од. – 2-го виду і 200 од. – 3-го виду. Вартість одиниці кожного з двох типів сировини дорівнює 2 та 4 гр. од. відповідно. Визначити загальні витрати кожного типу сировини (матриця V) для тижневого випуску продукції, а також загальну вартість C цієї сировини.

Рекомендована література: основна 1, 2, 3; додаткова 7, 8, 9.

ТЕМА 2
ВИЗНАЧНИКИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Основні поняття: визначник, мінор, алгебраїчне доповнення, вироджена матриця, обернена матриця.

План

1. Поняття визначника. Правила обчислення визначників 2-го та 3-го порядків. Властивості визначників.

2. Мінор та алгебраїчне доповнення. Правило обчислення визначників вищих порядків.

3. Обернена матриця. Алгоритм визначення оберненої матриці.

4. Прикладні аспекти застосування оберненої матриці.

Питання №1
Поняття визначника. Правила обчислення визначників 2-го та 3-го порядків

Визначником n-го порядку, який відповідає квадратній матриці A, називається число

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

Визначником 2-го порядку називається число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \qquad (2.2)$$

яке дорівнює різниці між добутком елементів, які знаходяться на головній діагоналі, та добутком елементів, що стоять на побічній діагоналі.

Приклад 1. Обчислити визначник 2-го порядку $\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 3 - (-2) \cdot 1 = -12 - (-2) = -12 + 2 = -10$$

Визначником 3-го порядку називається число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (2.3)$$

Щоб запам'ятати, які добутки треба брати зі знаком «+», а які зі знаком «–», використовують такі правила:

1) *правило трикутника*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad (2.4)$$

2) *метод Саррюса*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2.5)$$

Приклад 2. Обчислити визначник 3-го порядку $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 5\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot 1 -$$
$$-4\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 5\cdot(-2) =$$
$$= 6 - 20 + 2 - 12 - 1 + 20 = -5$$

Властивості визначника:

1. Визначник не змінюється при транспонуванні $|A| = |A^T|$.

2. Якщо всі елементи якого-небудь рядка/стовпця визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Якщо два рядки/стовпці визначника однакові, то визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Якщо всі елементи одного рядка/стовпця визначника пропорційні відповідним елементам іншого рядка/стовпця, то визначник дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

Елементи першого та другого рядків визначника є пропорційними.

5. Якщо визначник має «трикутний» («діагональний вигляд»), то він дорівнює добутку елементів на діагоналі

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Питання №2
Мінор та алгебраїчне доповнення. Правило обчислення визначників вищих порядків

Мінором M_{ij} елемента визначника a_{ij} називається визначник, який одержаний з початкового визначника $|A|$ шляхом викреслювання i – го рядка та j – го стовпця, на перетинанні яких стоїть елемент a_{ij}.

Приклад 1. $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = -4 + 4 = 0$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 1 = -11$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента визначника a_{ij} називається мінор M_{ij}, який узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad (2.6)$$

Приклад 2. $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(-4 + 4) = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-10 - 1) = 11$$

Правило обчислення визначників вищих порядків: визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка/стовпця на їх алгебраїчні доповнення.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \qquad (2.7)$$

Приклад 3. Обчислити визначник $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами 3-го рядка.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{32} + (-1) \cdot A_{33} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-5 - 3) - 2 \cdot (-10 - 1) - (-6 + 1) = -32 + 22 + 5 = -5$$

За допомогою формули (2.7) можна обчислювати визначники більш високих порядків.

Приклад 4. Обчислити визначник 4-го порядку $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Обчислимо визначник, розкладаючи його по елементах 4-го рядка та 3-ого стовпця, де більше всього нульових елементів.

1) 4-ий рядок

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{41} + 3 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 5 \cdot A_{44} =$$

$$= 3 \cdot A_{42} + 5 \cdot A_{44} = 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-20) = -88$$

$$A_{42} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 8 + 0 - 0 - 0 - (-2) = 4$$

$$A_{44} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 12 + 4 - 0 - 0 - 12 = -20$$

1) 3-ий стовпець

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} = 2 \cdot 25 + 3 \cdot (-46) = -88$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 0 + 12 - 0 - 0 - (-3) = 25$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\big(20 + 0 + 0 - 0 - (-20) - (-6)\big) = -46$$

Отже, бачимо, що значення визначника не залежить від вибору рядка або стовпця.

Питання №3
Обернена матриця. Алгоритм визначення оберненої матриці

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо її визначник не дорівнює нулю $|A| \neq 0$. Інакше матриця називається *виродженою*.

Квадратна матриця A^{-1} називається *оберненою* для квадратної матриці A, якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \tag{2.8}$$

Будь-яка невироджена матриця має обернену матрицю.

Алгоритм визначення оберненої матриці:

1) Для матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ обчислюємо визначник $|A|$, і якщо $|A| \neq 0$, то обернена матриця існує.

2) Для всіх елементів a_{ij}матриці A обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij} і формуємо союзну матрицю A^*, в рядках якої розміщені алгебраїчні доповнення елементів відповідних стовпців матриці A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

3) Обчислюємо обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1} = {A^*}/_{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \frac{A_{3n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

4) Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

Приклад. Обчислити обернену матрицю A^{-1} для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - 8 - 2 - 0 = -12 \neq 0,$ тобто обернена матриця A^{-1} існує.

2) Для всіх елементів a_{ij}матриці A обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij}

Для елементів 1-ого рядка

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 8 = -8$$

Для елементів 2-ого рядка

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 1) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 2) = -4$$

Для елементів 3-ого рядка

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8$$

3) Формуємо союзну матрицю A^*

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

4) Записуємо обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

5) Здійснюємо перевірку

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -8 & -4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2+0-10 & 1+4-5 & -1+1+0 \\ 4+0-4 & -2-8-2 & 2-2+0 \\ -16+0+16 & 8-16+8 & -8-4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Питання №4
Прикладні аспекти застосування оберненої матриці

Матриця повних матеріальних витрат – це ключовий елемент економіко-математичних моделей, зокрема міжгалузевого балансу, який показує, скільки всього сировини чи продукції (включаючи непрямі витрати) i-ої галузі потрібно для виробництва одиниці кінцевої продукції j-ої галузі. Матриця обчислюється як $(E - A)^{-1}$, де A – матриця прямих витрат, а E – одинична матриця.

Матриця повних матеріальних витрат використовується для визначення загального обсягу виробництва, необхідного для задоволення кінцевого попиту, а також для аналізу взаємозв’язків між галузями економіки. Вона включає не лише прямі матеріальні витрати на одиницю продукції, але й опосередковані – ті, що виникають у суміжних галузях для забезпечення первинного виробника всім необхідним.

Матриця прямих витрат A показує, скільки одиниць продукції i-ої галузі потрібно для виробництва одиниці продукції j-ої галузі (внутрішнє споживання).

Матриця коефіцієнтів повних витрат $B = (E - A)^{-1}$, де $E - A$ – матриця сукупних матеріальних витрат. Якщо треба зрозуміти, як замовлення на 1000 одиниць продукту *X* вплине на потребу в ресурсах у всіх ланках економіки, а не лише у безпосереднього виробника *X*, то треба використовувати цю матрицю.

Приклад. Для тригалузевої економічної системи задані матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити коефіцієнти повних матеріальних витрат.

Обчислимо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат:

а) знаходимо матрицю $(E - A)$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,2 & 0,5 & 0 \\ -0,3 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

б) обчислимо визначник цієї матриці

$|E - A| = 0,196$

в) знайдемо алгебраїчні доповнення для елементів матриці $(E - A)$:

Для елементів 1-ого рядка

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0,5 & 0 \\ -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,4$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,16$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,2 & 0,5 \\ -0,3 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,17$$

Для елементів 2-ого рядка

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,12$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,3 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,44$$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,3 & -0,1 \end{vmatrix} = 0,1$$

Для елементів 3-ого рядка

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -0,1 & -0,4 \\ 0,5 & 0 \end{vmatrix} = 0,2$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,4 \\ -0,2 & 0 \end{vmatrix} = 0,08$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & 0,5 \end{vmatrix} = 0,33$$

3) Формуємо союзну матрицю

$$(E-A)^* = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,12 & 0,2 \\ 0,16 & 0,44 & 0,08 \\ 0,17 & 0,1 & 0,33 \end{pmatrix}$$

4) Записуємо обернену матрицю $(E-A)^{-1}$

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{0,196}\begin{pmatrix} 0,4 & 0,12 & 0,2 \\ 0,16 & 0,44 & 0,08 \\ 0,17 & 0,1 & 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,041 & 0,612 & 1,020 \\ 0,816 & 2,245 & 0,408 \\ 0,867 & 0,510 & 1,684 \end{pmatrix}$$

– матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат

Питання для самоперевірки знань

1. Поясніть, для яких матриць можна обчислювати визначник.
2. Сформулюйте правило обчислення визначника 2-го порядку.
3. Які правила обчислення визначників 3-го порядку вам відомі?
4. Сформулюйте властивості визначників.
5. Як обчислюється визначник, який має «трикутний» («діагональний вигляд»)?
6. Дайте визначення мінору та алгебраїчному доповненню елементів визначника.
7. Сформулюйте правило обчислення визначників вищих порядків.
8. Яка матриця називається невиродженою?
9. Дайте визначення оберненої матриці.
10. Назвіть основні етапи визначення оберненої матриці.

Тести

1. Визначник – це:

а. Сукупність $n \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді таблиці, яка складається з n рядків і n стовпців.

б. Сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців.

в. Число, яке є добутком чисел $m \cdot n$.

г. Число, яке визначається за певним правилом.

2. Для обчислення визначника 3-го порядку можна використовувати правила:

а. Трикутника.

б. Саррюса.

в. Розкладу визначника за рядками/стовпцями.

г. Усі відповіді правильні.

3. Множення матриць можливе:

а. У будь-якому випадку.

б. Якщо матриці мають однакову розмірність.

в. Якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

г. Якщо кількість рядків першої матриці дорівнює кількості стовпців другої матриці.

4. Визначник дорівнює нулю, якщо:

а. Усі елементи якого-небудь рядка/стовпця визначника дорівнюють нулю.

б. Якщо два рядки/стовпці визначника однакові.

в. Якщо всі елементи одного рядка/стовпця визначника пропорційні відповідним елементам іншого рядка/стовпця.

г. Усі відповіді правильні.

5. Матриця називається невиродженою, якщо:

а. Її визначник дорівнює нулю.

б. Її визначник не дорівнює нулю.

в. Вона є квадратною та її визначник не дорівнює нулю.

г. Вона є квадратною та її визначник дорівнює нулю.

Завдання для самостійного виконання

1) Обчислити визначники:

1.1 $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

1.2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

2) Для заданої матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}.

2.1 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.2 $A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3) Визначити матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат для

матриці прямих матеріальних витрат $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$

Рекомендована література: основна 1, 2, 3; додаткова 7, 8, 9, 12, 13.

ТЕМА 3
МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Основні поняття: система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), розширена матриця СЛАР, ранг матриці, теорема Кронекера-Капеллі, метод Крамера розв'язання СЛАР, матричний метод розв'язання СЛАР, метод Гауса розв'язання СЛАР.

План

1. Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).
2. Метод Крамера розв'язання СЛАР.
3. Матричний метод розв'язання СЛАР.
4. Ранг матриці.
5. Розв'язання СЛАР методом Гауса.
6. Застосування СЛАР в задачах з обмеженими ресурсами.

Питання №1
Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Лінійним алгебраїчним рівнянням відносно невідомих $x_1, x_2, \ldots x_n$ називається рівняння у вигляді

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad (3.1)$$

де $a_1, a_2, \ldots a_n$ – дійсні числа.

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Числа a_{ij} називаються *коефіцієнтами системи* (3.2), а числа $b_1, b_2, \ldots b_m$ – *вільними членами*.

Система (3.2) характеризується матрицями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{– матриця системи} \qquad (3.3)$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{– розширена матриця системи} \qquad (3.4)$$

Розв'язком системи (3.2) називається будь-яка впорядкована сукупність чисел $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, яка перетворює всі рівнянні системи на тотожності.

Система, яка має хоча б один розв'язок, називається *сумісною*.

Система, яка не має розв'язків, називається *несумісною*.

Якщо система має тільки один розв'язок, вона називається *визначеною*.

Якщо система має більше одного розв'язку, вона називається *невизначеною.*

Питання №2
Метод Крамера розв'язання СЛАР

Розглянемо систему (3.2), в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих $m = n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3.5)$$

Матриця системи (3.5) є квадратною.

Правило Крамера: якщо визначник системи (3.5) не дорівнює нулю $\Delta \neq 0$, то система сумісна і має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \qquad (3.6)$$

де $\Delta -$ визначник системи (3.5);

Δ_i – допоміжний визначник, який одержаний з визначника Δ заміною i-го стовпця на стовпець вільних членів.

Якщо в системі (3.5) $\Delta = 0$, але хоча б один з визначників Δ_i не дорівнює нулю, то система не має розв'язків, тобто є несумісною.

Якщо в системі (3.5) $\Delta = 0$ і усі допоміжні визначники Δ_i дорівнюють нулю ($\Delta_i = 0$), то система сумісна і має нескінчену кількість розв'язків.

Приклад. Знайти розв'язок СЛАР за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 1 + 1 - 3 - 5 - 2 = 22 \neq 0$$

Тобто система має тільки один розв'язок. Використовуємо формули Крамера (3.6):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 5 - 7 + 21 - 25 - 2 = 22$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 50 + 2 - 7 - 5 - 10 + 14 = 44$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -42 + 5 + 2 - 6 - 10 + 7 = -44$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{22}{22} = 1 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-44}{22} = -2$$

Питання №3
Матричний метод розв'язання СЛАР

Якщо ввести позначення у вигляді матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то згідно з правилом множення матриць систему (3.5) можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B, \tag{3.7}$$

де A – матриця коефіцієнтів при невідомих; X – матриця невідомих; B – матриця правої частини системи.

Якщо матриця системи A є невиродженою ($\Delta \neq 0$), то, помножуючи обидві частини рівняння (3.7) на матрицю A^{-1} і враховуючи, що $A^{-1} \cdot A = E$, $EX = X$, одержуємо шуканий розв'язок:

$$X = A^{-1}B. \tag{3.8}$$

Приклад. Знайти розв'язок СЛАР матричним методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$$

1) $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix} = 30+1+1-3-5-2=22\neq 0$

2) Для всіх елементів a_{ij}матриці A обчислюємо алгебраїчні доповнення A_{ij}

Для елементів 1-ого рядка

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=15-1=14$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-(5-1)=-4$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2$$

Для елементів 2-ого рядка

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-(5-1)=-4$$

$$A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10-1=9$$

$$A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(2-1)=-1$$

Для елементів 3-ого рядка

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-3=-2$$

$$A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(2-1)=-1$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5$$

3) Формуємо союзну матрицю A^*

$$A^*=\begin{pmatrix}14 & -4 & -2\\ -4 & 9 & -1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

4) Записуємо обернену матрицю A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}14 & -4 & -2\\ -4 & 9 & -1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

5) Знаходимо розв'язок СЛАР

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{22}\begin{pmatrix}14 & -4 & -2\\ -4 & 9 & -1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 5\\ -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

Питання №4
Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розмірності $m\times n$.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Позначимо її рядки відповідно $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

Під елементарними перетвореннями рядків матриці будемо розуміти такі перетворення:

1) заміну місцями двох рядків матриці;

2) додавання до якого-небудь рядка матриці іншого рядка, помноженого на число.

Рядок A_i матриці називається *лінійною комбінацією* інших рядків, якщо кожний його елемент одержаний як сума добутків відповідних елементів інших рядків на будь-яке число

$$A_i = c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_{i-1}A_{i-1} + c_{i+1}A_{i+1} + \cdots + c_mA_m \qquad (3.9)$$

Рядки матриці називаються *лінійно залежними*, якщо який-небудь рядок представляю собою лінійну комбінацію інших рядків. В іншому випадку рядки називаються *лінійно незалежними*.

Рангом матриці А називається максимальна кількість її лінійно незалежних рядків.

Ранг матриці позначається $rang\ A$.

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

Рядки 1 і 2 – лінійно незалежні; рядок 3 є сумою рядків 1 і 2, тобто є їх лінійною комбінацією. Отже, $rang\ A = 2$.

Ранг матриці можна визначити за допомогою методу елементарних перетворень рядків матриці, який оснований на твердженні, що при здійсненні елементарних перетворень над рядками матриці її ранг не змінюється.

Щоб визначити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень рядків, матрицю приводять до «східчастого» (діагонального) вигляду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & b_{rr} & b_{rn} \end{pmatrix}, \qquad (3.10)$$

де діагональні елементи b_{11}, b_{22}, …, b_{rr} не дорівнюють нулю, а елементи, які розміщені нижче діагональних, дорівнюють нулю.

Рангом вихідної матриці A буде кількість ненульових рядків діагональної матриці $\tilde{A}$ (3.10).

Приклад 2. Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \underset{(\mathrm{III}-\mathrm{I})}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{(\mathrm{III}-\mathrm{II})}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг вихідної матриці $rang\ A = 2$.

Питання №5
Розв'язання СЛАР методом Гауса

За допомогою поняття ранга можна сформулювати умову сумісності СЛАР. Розглянемо СЛАР у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.11}$$

Для системи (3.11) записуємо дві матриці

матрицю системи $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

розширену матрицю системи $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Теорема Кронекера-Капеллі: система рівнянь (3.11) має розв'язок тоді і тільки тоді, якщо ранг матриці системи A дорівнює рангу розширеної матриці $\tilde{A}$:

$$rang\ A = rang\ \tilde{A}. \tag{3.12}$$

Причому, якщо $rang\ A = rang\ \tilde{A} = n$ (n – кількість невідомих), то система має тільки один розв'язок. Якщо $rang\ A = rang\ \tilde{A} < n$, то система має нескінчену множину розв'язків.

Метод Жордана-Гауса розв'язання СЛАР:

I. «Прямий хід» метода Гауса.

1. Записуємо розширену матрицю заданої СЛАР.
2. Приводимо розширену матрицю до діагонального вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків матриці

$$A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \dots & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ 0 & 1 & \bar{a}_{23} & \dots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \bar{b}_n \end{array}\right),$$

3. За допомогою теореми Кронекера-Капеллі досліджуємо систему на сумісність.

II. «Зворотній хід» метода Гауса.

1. Записуємо СЛАР, яка відповідає діагональній матриці

$$\begin{cases} x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ x_3 + \ldots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \ldots, \\ x_n = \bar{b}_n. \end{cases} \tag{3.13}$$

2. Починаючи з останнього рівняння системи (3.13), послідовно знизу вверх визначаємо значення всіх невідомих змінних x_i (з останнього рівняння відомо, що $x_n = \bar{b}_n$, його підставляємо в передостаннє рівняння і знаходимо $x_{n-1} = \bar{b}_{n-1} - \bar{a}_n x_n$ і т.д.).

Методом Жордана-Гауса можна розв'язувати системи будь-яких розмірів, тобто немає вимоги, щоб число рядків дорівнювало числу стовпців, як у методі Крамера й матричному методі.

Приклад. Розв'язати СЛАР методом Гауса $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$

1) Розширена матиця системи матиме вигляд $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 5 & | & -7 \end{pmatrix}$.

2) Приведемо розширену матрицю до діагонального вигляду

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 5 & | & -7 \end{pmatrix} \underset{(\mathrm{III}-\mathrm{I})}{\sim \mathrm{II}*2-\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 1 & | & 8 \\ 0 & -2 & 4 & | & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{(\mathrm{III}*5+\mathrm{II}*2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 1 & | & 8 \\ 0 & 0 & 22 & | & -44 \end{pmatrix}$$

3) Визначаємо ранги матриці та розширеної матриці системи

$$rang\ A = rang\ \tilde{A} = 3.$$

Отже, за теоремою Кронекера-Капеллі, система має розв'язок.

Оскільки ранги співпадають і дорівнюють кількості невідомих системи, то система має тільки один розв'язок.

$$rang\ A = rang\ \tilde{A} = 3 = n.$$

4) Виписуємо систему, яка відповідає діагональній матриці

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_2 + x_3 = 8 \\ 22x_3 = -44 \end{cases}.$$

З останнього рівняння визначаємо $x_3 = -\frac{44}{22} = -2$.

Далі з другого рівняння знаходимо $x_2 = \frac{8-x_3}{5} = \frac{8-(-2)}{5} = \frac{10}{5} = 2.$

Із першого рівняння знаходимо змінну $x_1 = \frac{2-x_3-x_2}{2} = \frac{2-(-2)-2}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

Отже, розв'язок системи $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -2.$

Питання №6
Застосування СЛАР в задачах з обмеженими ресурсами

СЛАР використовуються для моделювання взаємозв'язку між ресурсами, обмеженнями та цільовими показниками.

Кожна змінна (невідома) у системі може представляти кількість певного ресурсу, який потрібно використати (наприклад, години роботи обладнання, обсяг виробництва продукту, кількість інвестованих коштів), а кожне рівняння або нерівність представляє певне обмеження ресурсів.

Ключовими напрямками прикладного застосування СЛАР є:

1. Управління виробництвом та логістика:

– задача про суміш (Blending Problem): визначення оптимального складу продукту (наприклад, корму для тварин, бензину) з декількох сировинних компонентів, кожен з яких має обмежену кількість і різну вартість;

– обмеження: мінімум/максимум вмісту певних елементів (протеїну, октанового числа), доступність сировини;

– планування виробництва: визначення кількості кожного виду продукту, який потрібно виготовити, щоб максимізувати прибуток, враховуючи обмеження на сировину, машино-години, робочий час тощо.

2. Економіка і фінанси:

– управління портфелем інвестицій (Portfolio Optimization): розподіл обмеженого бюджету між різними активами, щоб максимізувати очікуваний дохід при мінімізації ризику;

– обмеження: максимальна частка інвестицій у певний актив, мінімальний рівень ліквідності.

3. Енергетика та мережі: оптимальний розподіл потоків енергії, визначення того, як найкраще розподілити електроенергію від різних джерел (з обмеженою потужністю) до споживачів, мінімізуючи втрати.

Приклад. Добовий раціон годування тварин складається з трьох видів кормів. Один кілограм корму I-го типу коштує 5 гр. од. і містить 1 од. жирів, 2 од. білків та 3 од. вуглеводів. Вартість одного кілограму II-го типу – 3 гр. од., він містить 2 од. жирів, 3 од. білків та 1 од. вуглеводів. Один кілограм корму III-го типу коштує 6 гр. од. і містить 3 од. жирів, 4 од. білків та 3 од. вуглеводів. Скільки кг корму кожного типу необхідно купувати щоденно, щоб тварини одержували 17 од. жирів, 26 од. білків і 19 од. вуглеводів. Знайти вартість щоденного годування тварин.

Оскільки необхідно визначити кількість кг корму кожного типу, то введемо позначення: x_1 – кількість корму I-го типу (кг), x_2 – кількість корму II-го типу (кг) і x_3 – кількість корму III-го типу (кг). За умовою задачі в усіх кормах повинно бути 17 од. жирів. Отже, враховуючи кількість жирів в 1 кг корму кожного типу, можна записати рівняння: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17$. Аналогічно одержуємо відповідні рівняння для вмісту білків та вуглеводів: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 26$ і $3x_1 + x_2 + 3x_3 = 19$. Вартість корму буде складати $5x_1 + 3x_2 + 6x_3$ (гр. од.). Таким чином, одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 26 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 19 \end{cases}$$

Виписуємо розширену матрицю системи і приводимо її до діагонального вигляду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 2 & 3 & 4 & 26 \\ 3 & 1 & 3 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times(-2)\ \times(-3) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -5 & -6 & -32 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 5 & 6 & 32 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times(-5) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

З останнього рядка випливає, що $4x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 2$. Підставляючи $x_3 = 2$ у передостаннє рівняння $x_2 + 2x_3 = 8$, маємо $x_2 + 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow x_2 = 4$. Нарешті x_3 та x_2 підставляємо у перше рівняння: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 17$. Маємо $x_1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 17 \Rightarrow x_1 = 17 - 14 = 3$.

Отже, для годування тварин щоденно потрібно корму I-го типу – 3 кг, II-го типу – 4 кг і III-го типу – 2 кг. При цьому вартість годування складатиме $5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 39$ грн.

Питання для самоперевірки знань

1. Яка СЛАР називається сумісною?
2. Назвіть основні методи розв'язання СЛАР.
3. Сформулюйте правило Крамера розв'язання СЛАР.
4. За якої умови можна використовувати метод Крамера для розв'язання СЛАР?
5. Як утворюються допоміжні визначники у формулах Крамера?
6. У якому випадку СЛАР можна розв'язувати матричним методом?
7. Дайте визначення рангу матриці.
8. Які елементарні перетворення рядків матриці не змінюють її ранг?
9. Яким способом визначають ранг матриці?
10. Сформулюйте умову сумісності системи на основі теореми Кронекера-Капеллі.
11. Назвіть основні етапи розв'язання СЛАР методом Гауса.

Тести

1. Система, яка має тільки один розв'язок, називається:

а. Несумісною.

б. Невизначеною.

в. Визначеною.

г. Сумісною і визначеною.

2. Для розв'язання СЛАР використовують методи:

а. Крамера.

б. Матричний.

в. Гауса.

г. Усі відповіді правильні.

3. Якщо в системі кількість рівнянь не співпадає з кількістю невідомих, застосовують метод:

а. Крамера.

б. Матричний.

в. Гауса.

г. Крамера і матричний.

4. До елементарних перетворень над рядками матриці відносять:

а. Заміну місцями двох рядків матриці.

б. Додавання до якого-небудь рядка матриці іншого рядка, помноженого на число.

в. Попарне множення відповідних елементів рядків.

г. Правильні відповіді а), б).

5. Згідно з теоремою Кронекера-Капеллі система має нескінчену множину розв'язків, якщо:

а. Її визначник дорівнює нулю.

б. Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

в. Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих.

г. Ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці, проте менше кількості невідомих.

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1) Розв'язати СЛАР методом Крамера:

1.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_3 = -3 \end{cases}$

2) Розв'язати СЛАР матричним методом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

3) Визначити ранг матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

4) Розв’язати СЛАР методом Гауса:

4.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$

4.2 $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$

5) Підприємство виробляє декілька видів цукерок *A*, *B* і *C*. Відомо, що реалізація 10 кілограм цукерок *A* дає прибуток 9 гр. од., *B* – 10 гр. од. і *C* – 16 гр. од. Норми витрати сировини на виробництво 10 кг цукерок кожного виду наведено в таблиці 3.1

Таблиця 3.1

Сировина	Норми витрат сировини			Запас сировини
	A	*B*	*C*	
Какао	18	15	12	360
Цукор	6	4	8	192
Наповнювач	5	3	3	88
Прибуток	9	10	16	

Запаси сировини обмежені. Необхідно визначити, скільки десятків кілограм цукерок необхідно зробити і знайти прибуток від їхньої реалізації.

Рекомендована література: основна 1, 2, 3, 4; додаткова 7, 8, 9, 12, 13.

ТЕМА 4
ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ФУНКЦІЇ

Основні поняття: числова послідовність, границя послідовності, границя функції, властивості границі функції, перша особлива границя функції, друга особлива границя функції.

План

1. Границя числової послідовності.
2. Границя функції.
3. Перша особлива границя.
4. Друга особлива границя.

Питання №1
Границя числової послідовності

Числовою послідовністю називається функція $a_n = f(n)$, яка визначена на множині натуральних чисел 1, 2, …, n, … .

Значення послідовності $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, …, $a_n = f(n)$ називаються *членами послідовності*.

Послідовність $a_n = f(n)$ позначають $\{a_n\}$, де a_n називають *загальним членом послідовності*.

Знаючи загальний член послідовності, завжди можна визначити будь-який член послідовності a_k, подставивши у a_n замість n число k.

Наприклад:

1) $\{\frac{1}{n}\}$: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; …
2) $\{\frac{n+1}{2n}\}$: 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; …
3) $\{(-1)^n \frac{1}{2n}\}$: - $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; - $\frac{1}{6}$; …

Послідовність $\{a_n\}$ називається *зростаючою*, якщо для будь-якого номера n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$. Якщо $a_n > a_{n+1}$, то послідовність $\{a_n\}$ є *спадаючою*.

Число a називається *границею числової послідовності* $\{a_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, який залежить від ε, що для усіх $n > N$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Позначається границя послідовності $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ або $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

Інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називається ε - околом точки a.

Геометричний зміст границі послідовності є у наступному: число a є границею послідовності $\{a_n\}$, якщо для будь-якого обраного ε – околу точки a знайдеться такий номер члена послідовності N, що усі послідуючі члени послідовності (з номерами $n > N$) знаходяться в ε – околі точки a.

Приклад. Визначити границю послідовності $\{\frac{3n+7}{n}\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+7}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (3 + \frac{7}{n})}{n} = \lim_{n\to\infty} (3 + \frac{7}{n}) = 3$$

Питання №2
Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0, окрім, можливо, самої точки x_0.

Число A називається *границею функції* $f(x)$ при наближенні x до x_0 ($x \to x_0$), якщо для будь-якого малого значення $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для усіх x, які задовольняють умові $|x - x_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначається границя функції таким чином

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Функція $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Якщо позначити нескінченно малу функцію як [0], а нескінченно велику – як [∞], то властивості цих функцій можна записати таким чином:

$$[0 \pm 0] = [0], \qquad [C \cdot 0] = [0], \qquad [0 \cdot 0] = [0],$$
$$[\infty + \infty] = [\infty], \qquad [C \cdot \infty] = [\infty], \qquad [\infty \cdot \infty] = [\infty],$$
$$\frac{1}{[\infty]} = [0], \qquad \frac{1}{[0]} = [\infty].$$

Основні властивості границь функції:

1) Якщо функція $f(x)$ має границю при $x \to x_0$, то ця границя тільки одна.

2) Границя постійної величини дорівнює самій постійній

$$\lim_{x\to x_0} C = C.$$

3) Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають границі при $x \to x_0$, то при $x \to x_0$ мають границі також їх сума, добуток та відношення (за умови $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) \neq 0$), тобто

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x), \tag{4.1}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x), \tag{4.2}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)} \tag{4.3}$$

4) Постійний множник можна виносити за знак границі

$$\lim_{x\to x_0}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Якщо під час підстановки замість змінної x значення x_0 отримуємо так звані «невизначеності» у вигляді $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (1^∞) та інші, то для обчислення границі функції необхідно здійснити перетворення функції або позбавитися невизначеності.

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-12x+35}{x^2-25}$.

У чисельник і знаменник підставляємо $x = 5$. Одержуємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Розкладаємо чисельник та знаменник на множники, для чого знаходимо корені, прирівняв вирази до нуля:

1) $x^2 - 12x + 35 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 7$;

2) $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -5$.

Чисельник та знаменник вихідної функції розкладаємо на множники, скорочуємо спільні множники і підставляємо $x = 5$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-12x+35}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\cdot(x-7)}{(x-5)\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-7)}{(x+5)}=\frac{5-7}{5+5}=-\frac{2}{10}$$

Приклад 2. Обчислити $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

Підставивши замість змінної x число 3, одержуємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Помножимо як чисельник, так і знаменник виразу на вираз, спряжений до чисельника, тобто на $\sqrt{x+1}+2$. Маємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}^2\right)-2^2}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x-3)\cdot\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{3+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Границя відношення поліномів $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_nx^n}{B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_mx^m}$ (невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$)визначається за правилом:

а) якщо найвищий ступінь x у чисельнику дорівнює найвищому ступеню x знаменника (n=m), то границя дорівнює *відношенню коефіцієнтів при найвищих ступенях,* тобто $\frac{A_n}{B_m}$;

б) якщо найвищий ступінь x у чисельнику менше найвищого ступеня x знаменника ($n < m$), то границя дорівнює нулю;

в) якщо найвищий ступінь x у чисельнику більше найвищого ступеня x знаменника ($n > m$), то границя дорівнює нескінченості.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-4x+6x^2-5x^3}{1+7x^2+8x^3}$.

Оскільки найвищі ступені x чисельника та знаменника однакові і дорівнюють 3, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-4x+6x^2-5x^3}{1+7x^2+8x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{-5}{8}.$$

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-8}{2x^6+4x^2+3}$.

Оскільки найвищий ступінь x у чисельнику менше найбільшого ступеня x у знаменнику (3<6), то маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+6x-8}{2x^6+4x^2+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0$

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sqrt[4]{9x^3+4x^4}}{\sqrt{x+8}-\sqrt[5]{2x^4+3x^2}}$.

Оскільки найвищий ступінь x у чисельнику більше найбільшого ступеня x у знаменнику (2>4/5), то маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sqrt[4]{9x^3+4x^4}}{\sqrt{x+8}-\sqrt[5]{2x^4+3x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\infty$.

Питання №3
Перша особлива границя

Перша особлива границя має вигляд

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1. \tag{4.4}$$

Наслідки першої особливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1, \tag{4.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsinx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1, \tag{4.6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1. \tag{4.7}$$

Приклад 1. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot sin3x}{3\cdot 7x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}\right)\cdot\frac{3}{7}=1\cdot\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$$

Приклад 2. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\,6x}{arcsin\,4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6\cdot arctg\,6x}{6x}}{\frac{4\cdot arcsin\,4x}{4x}}=\frac{6}{4}\cdot\frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,6x}{6x}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,4x}{4x}\right)}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

У випадку невизначеності (0·∞) необхідно зробити перетворення таким чином, щоб отримати невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Якщо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі функції одного порядку і $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то вони називаються *еквівалентними нескінченно малими функціями* при $x\to x_0$.

Це записується таким чином $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Враховуючи відношення (4.4)-(4.7), можна вважати еквівалентними нескінченно малими при $x\to 0$ такі функції:

$$\begin{gathered}sin\,x\sim x\\ arcsin\,x\sim x\\ tg\,x\sim x\\ arctg\,x\sim x\end{gathered} \tag{4.8}$$

Границя відношення нескінченно малих функцій не змінюється при заміні їх еквівалентними нескінченно малими функціями, тобто якщо

$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ при $x\to x_0$

$\beta(x)\sim\beta_1(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \tag{4.9}$$

Використання формули (4.9) у багатьох випадках дозволяє значно спростити пошук границі функцій.

Приклад 3. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,8x}{7x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{7x}=\frac{8}{7}$$

Приклад 4. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x + 2\,arctg\,3x}{arcsin\,2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{9x + 2\cdot 3x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{15x}{2x} = \frac{15}{2}$$

Приклад 5. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{(arcsin\,2x)^2}{5x^2 + (tg\,4x)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{5x^2 + (4x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{21x^2} = \frac{4}{21}$$

Питання №4
Друга особлива границя

Друга особлива границя має вигляд

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \approx 2{,}71828 \qquad (4.10)$$

$$\lim_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = e \qquad (4.11)$$

Приклад 1. Знайти значення границі $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{3x-4}$.

Оскільки $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{1+x^2}\right)^{3x-4}$ = (1^∞), то виділимо цілу частину (одиницю), для чого у чисельнику додаємо і віднімаємо одиницю: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2+1-1}{1+x^2}\right)^{3x-4} =$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{1+x^2}\right)^{3x-4} \underset{\substack{\textit{показник ступеня}\\ \textit{помножимо та поділимо}\\ \textit{на знаменник дробу}}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{1+x^2}\right)^{\frac{(3x-4)(1+x^2)}{1+x^2}} \underset{\substack{\textit{виділимо}\\ \textit{другу особливу}\\ \textit{границю}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{-3}{1+x^2}\right)^{1+x^2}\right]}_{\Downarrow\; e^{-3}}^{\frac{3x-4}{1+x^2}} = [e^{-3}]^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{1+x^2}} = (e^{-3})^0 = 1.$$

Приклад №2. Знайти $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-4}{3x+1}\right)^{2x+4}$.

Знайдемо границю дробу у дужках $\lim_{x\to\infty}\frac{5x-4}{3x+1} = \frac{5}{3}$. Отже маємо $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-4}{3x+1}\right)^{2x+4} = \left(\frac{5}{3}\right)^\infty = \infty$. Оскільки 5/3 є величиною більше за одиницю, то у нескінченному ступені це не є невизначеністю.

Приклад №3. Знайти $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{8x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{8x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\left(\frac{x}{4}\right)\cdot 4\cdot 8} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\left(\frac{x}{4}\right)}\right)^{32} = e^{32}$$

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення числової послідовності.
2. Яка числова послідовність є зростаючою?

3. Поясніть геометричний зміст границі послідовності.

4. Дайте визначення границі функції.

5. Сформулюйте основні властивості границь функції.

6. Невизначеності якого типу можуть виникати при визначенні границі функції?

7. Назвіть відомі вам способи позбавлення невизначеності.

8. Які особливі границі функції вам відомі?

9. Які нескінченно малі функції називаються еквівалентними?

10. Сформулюйте правило визначення границі відношення нескінченно малих функцій.

<u>**Тести**</u>

1. Числовою послідовністю називається функція, яка визначена на множині:

а. Цілих чисел.

б. Натуральних чисел.

в. Ірраціональних чисел.

г. Дійсних чисел.

2. Значення послідовності мають назву:

а. Аргументи послідовності.

б. Елементи послідовності.

в. Члени послідовності.

г. Усі відповіді правильні.

3. Границя послідовності позначається:

а. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

б. $\lim\limits_{x\to b} a_x = a$.

в. $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

г. Правильні відповіді а), в).

4. До «невизначеностей», які можуть виникати при визначенні границі функції, відносять:

а. $\left(\frac{0}{0}\right)$.

б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

в. $(0 \cdot \infty)$.

г. Усі відповіді правильні.

5. Який з наведених нижче виразів не є невизначеністю при обчисленні границі функції?

а. $(\infty - \infty)$.

б. $\left(\frac{0}{0}\right)$.

в. $\left(\frac{1}{\infty}\right)$.

г. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Завдання для самостійного виконання

1) Знайти границю послідовності:

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n(n+3)}{7n^2+1}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-7}{3n^2+4}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+10}$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-5)^2-5n^2}{2n^2+5n+1}$

2) Знайти границю функції:

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^4-5x^3+4x}{3x^4+2x}$

2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+7}{4x+5}$

2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+10}}{\sqrt{x^3-8}}$

2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^4+3x+6}}{5x^2+2}$

2.5 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-2x-15}{x^2-25}$

2.6 $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+8}-4}{x-8}$

2.7 $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

3) Знайти границю функцій, використовуючи першу та другу особливі границі:

3.1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg4x}{\sin 3x}$

3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$

3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{3x^2}$

3.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{acrsin^2 2x+4x^2}{6x^2}$

3.5 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{acrsin^2 2x+arctg\, 2x^2}{4x^2}$

3.6 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 6x}$

3.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{7x+3}$

3.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{4x+3}\right)^{2x+1}$

3.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+2}$

3.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{2x+9}\right)^{\frac{2x}{x+4}}$

Рекомендована література: основна 1, 2, 3; додаткова 7, 8, 9, 12, 13.

ТЕМА 5
ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Основні поняття: числова послідовність, границя послідовності, границя функції, властивості границі функції, перша особлива границя функції, друга особлива границя функції.

План

1 Правила диференціювання функції. Похідні елементарних функцій. Похідна складної функції.

2. Похідні функції вищих порядків.

3. Правило Лопіталя розкриття невизначеності границі функції.

4. Прикладні аспекти застосування похідної функції однієї змінної в задачах управління.

Питання №1
Правила диференціювання функції. Похідні елементарних функцій. Похідна складної функції

Якщо існує границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приросту функції Δy до приросту аргумента Δx, коли Δx наближається до нуля, то ця границя називається *похідною функції* $y = f(x)$ у точці x і позначається y' або $f'(x)$

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (5.1)$$

Процес визначення похідної функції називається її *диференціюванням*, а функцію, яка має похідну у точці x, називають *диференційованою у цій точці*.

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовані у точці x, то мають місце такі правила диференціювання:

1) похідна суми функцій

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (5.2)$$

2) похідна добутку функцій

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \qquad (5.3)$$

3) винесення постійного множника за знак похідної

$$(C \cdot u)' = C \cdot u' \qquad (5.4)$$

4) похідна відношення функцій

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad (5.5)$$

5) похідна складної функції $y = f\big(\varphi(x)\big)$

$$y' = f'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \qquad (5.6)$$

Таблиця похідних елементарних функцій, $u = u(x)$

Функція	Похідна функції
$C=const$	$C^{'} = 0$
u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u^{'}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u^{'}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u^{'}$
e^u	$e^u \cdot u^{'}$
a^u	$a^u \cdot ln\, a \cdot u^{'}$
$ln\, u$	$\frac{1}{u} \cdot u^{'}$
$log_a u$	$\frac{1}{u \cdot lna} \cdot u^{'}$
$sin\, u$	$cos\, u \cdot u^{'}$
$cos\, u$	$-sin\, u \cdot u^{'}$
$tg\, u$	$\frac{1}{cos^2 u} \cdot u^{'}$
$ctg\, u$	$-\frac{1}{sin^2 u} \cdot u^{'}$
$arcsin\, u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u^{'}$
$arc\cos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u^{'}$
$arctg\, u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u^{'}$
$arcctg\, u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u^{'}$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y(x) = 2x^4 + 4\sin x - \frac{5}{x^7} + ctgx - 6.$

$$y^{'}(x) = (2x^4)^{'} + (4\sin x)^{'} - \left(\frac{5}{x^7}\right)^{'} + (ctgx)^{'} - (6)^{'} =$$

$$= 2 \cdot 4x^3 + 4 \cdot cosx - 5 \cdot (-7) \cdot x^{-8} - \frac{1}{sin^2 u} - 0 =$$

$$= 8x^3 + 4 \cdot cosx + \frac{35}{x^8} - \frac{1}{sin^2 u}$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y(x) = (3e^x + 6lnx) \cdot arctgx.$

$$y'(x) = (3e^x + 6lnx)' \cdot arctgx + (3e^x + 6lnx) \cdot (arctgx)' =$$
$$= \left(3e^x + \frac{6}{x}\right) \cdot arctgx + (3e^x + 6lnx) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y(x) = \frac{7^x-10}{\sqrt{x}+5x^3}$.

$$y'(x) = \frac{(7^x-10)' \cdot \left(\sqrt{x}+5x^3\right) - (7^x-10) \cdot \left(\sqrt{x}+5x^3\right)'}{\left(\sqrt{x}+5x^3\right)^2} =$$
$$= \frac{7^x ln7 \cdot \left(\sqrt{x}+5x^3\right) - (7^x-10) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 15x^2\right)}{\left(\sqrt{x}+5x^3\right)^2}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y(x) = \ln\left(\cos\sqrt{(3x-8x^4)}\right)$.

$$y'(x) = \left(\ln\left(\cos\sqrt{(3x-8x^4)}\right)\right)' \cdot \left(\cos\sqrt{(3x-8x^4)}\right)' \times$$
$$\times \left(\sqrt{(3x-8x^4)}\right)' \cdot (3x-8x^4)' =$$
$$= \frac{1}{\cos\sqrt{(3x-8x^4)}} \cdot \left(\sin\sqrt{(3x-8x^4)}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{(3x-8x^4)}} \times$$
$$\times (3-32x^3)$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y(x) = e^{e^{\sin 5x^8}}$.

$$y'(x) = \left(e^{e^{\sin 5x^8}}\right)' \cdot \left(e^{\sin 5x^8}\right)' \cdot (\sin 5x^8)' \cdot (5x^8)' =$$
$$= \left(e^{e^{\sin 5x^8}}\right) \cdot \left(e^{\sin 5x^8}\right) \cdot (\cos 5x^8) \cdot 40x^7$$

Питання №2
Похідні функції вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ у точці x, яка являє собою деяку нову функцію.

Похідна від похідної першого порядку називається *похідною другого порядку* або *другою похідною* і позначається $y'' = (y')'$ або $f''(x)$.

Похідна від похідної другого порядку називається *похідною третього порядку* або *третьою похідною*: $y''' = (y'')'$ або $f'''(x)$.

Похідною *n* порядку називається похідна від похідної (*n-1*)-го порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{5.7}$$

Приклад 1. Знайти похідну 3-ого порядку для функції $y(x) = e^{x^2+4}$.

$$y'(x) = \left(e^{x^2+4}\right)' = e^{x^2+4} \cdot 2x$$
$$y''(x) = \left(e^{x^2+4} \cdot 2x\right)' = e^{x^2+4} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2+4} \cdot 2 = e^{x^2+4} \cdot (4x^2+2)$$
$$y'''(x) = \left(e^{x^2+4} \cdot (4x^2+2)\right)' = e^{x^2+4} \cdot 2x \cdot (4x^2+2) + e^{x^2+4} \cdot 8x =$$
$$= e^{x^2+4} \cdot (8x^3+12x)$$

За допомогою другої похідної можна досліджувати функцію на екстремум. Достатньою умовою існування екстремуму є теорема.

Теорема: Нехай функція $f(x)$ має у точці x_0 та її околі неперервні першу та другу похідні, причому $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тоді функція $f(x)$ має у точці x_0 мінімум (максимум), якщо $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Ця теорема дозволяє визначати екстремум функції.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1) Знаходимо першу похідну функції

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

2) Використовуємо необхідну умову існування екстремуму

$$f'(x) = 0.$$

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3) Знаходимо другу похідну функції

$$f''(x) = 6x$$

4) Визначаємо знак другої похідної в точках x_1, x_2.

$$f''(-1) = -6 < 0$$
$$f''(1) = 6 > 0$$

Отже, $x_1 = -1$ – точка максимуму, $x_2 = 1$ – точка мінімуму.

Приклад 3. Функція загальних логістичних витрат, яка включає витрати на виконання замовлення і витрати на зберігання запасу на складі протягом певного періоду часу, залежно від розміру замовлення має вигляд

$$C_{\Sigma} = C_{Замовл} + C_{Збер} = \frac{C_0 S}{q} + C_u i \frac{q}{2} \to min,$$

де C_o – витрати на виконання одного замовлення (гр. од.);

S – потреба у замовленні продукту протягом даного періоду (шт., т);

C_u – ціна одиниці продукції, що зберігається на складі (гр. од.);

i – частка від ціни, що припадає на витрати по зберіганню (%);

q – шукана величина замовлення (шт., т).

Визначити розмір замовлення q_{opt}, при якому загальні логістичні витрати будуть мінімальними.

1) Знаходимо першу похідну функції витрат

$$C'(q) = -\frac{C_0 S}{q^2} + \frac{C_u i}{2}$$

2) Використовуємо необхідну умову існування екстремуму

$$C'(q) = 0.$$

$$C'(q) = -\frac{C_0 S}{q^2} + \frac{C_u i}{2} = 0$$

$$\frac{C_u i}{2} = \frac{C_0 S}{q^2}$$

$$q^2 = \frac{2 C_0 S}{C_u i}$$

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0S}{C_u i}}$$

3) Знаходимо другу похідну функції логістичних витрат

$$C''(q) = \frac{2C_0S}{q^3}$$

Можна бачити, що $C''(q) > 0$, а отже q_{opt} є точкою мінімуму.

Таким чином, при розмірі замовлення $q_{opt} = \sqrt{\frac{2C_0S}{C_u i}}$ логістичні витрати будуть мінімальними.

Питання №3
Правило Лопіталя розкриття невизначеності границі функції

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і диференційовані у деякому околі точки $x = a$. Розглянемо відношення цих функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$, приймаючи, що обидві функції є одночасно нескінченно малими або нескінченно великими.

Правило Лопіталя: Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{або} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (5.8)$$

Приклад 1. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x}{sinx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x)'}{(sinx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x ln2}{cosx} = ln2$$

Приклад 2. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2sinx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(e^x - e^{-x})'}{(2sinx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{2cosx} = \frac{2}{2} = 1$$

Приклад 3. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to \infty}\frac{lnx}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to \infty}\frac{(lnx)'}{(x)'} = \lim_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to \infty}\frac{1}{x} = 0$$

Розкриття невизначеності $(0 \cdot \infty)$ можна привести до невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, перетворивши початкову функцію на дріб.

Приклад 4. Знайти значення границі

$$\lim_{x\to 0+}(x\cdot lnx) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x\to 0+} x = 0$$

Питання №4
Прикладні аспекти застосування похідної функції однієї змінної в задачах управління

Похідна функції описує, як швидко змінюється одна величина, коли інша змінюється незначно.

У задачах управління такими величинами можуть бути:

– граничні витрати – наскільки зміняться витрати, якщо відбудеться незначне збільшення виробництва продукції;

– граничний дохід – наскільки зміниться виручка, якщо відбудеться незначне збільшення обсягів продажу;

– граничний прибуток – наскільки зміниться прибуток при незначній зміні обсягу продажу.

Якщо функція $y = C(x)$ виражає залежність витрат виробництва y від кількості випущеної продукції x, то $C'(x)$ – *граничні (маргінальні) витрати виробництва*, що характеризують додаткові витрати на виготовлення одиниці випущеної продукції. Аналогічно означають граничний дохід і граничний прибуток, якщо функція $y = f(x)$ виражає відповідну залежність доходу чи прибутку від кількості випущеної продукції.

Приклад 1. Нехай функція доходу підприємства від продажу продукції має вигляд $R(q) = 50q - 0{,}2q^2$, де $R(q)$– дохід (тис. грн), q– обсяг продажу (тис. одиниць). Знайти граничний дохід $MR(q)$ та його значення при $q = 50$.

Граничний дохід – це похідна функції доходу за обсягом:

$$MR(q) = R'(q).$$

Обчислимо:

$$R'(q) = 50 - 0{,}4q.$$

Тепер підставимо $q = 50$:

$$MR(50) = 50 - 0{,}4\cdot 50 = 50 - 20 = 30.$$

Тобто, при обсязі продажу 50 тис. од. збільшення продажу на ще 1 тис. од. дає додатковий дохід приблизно 30 тис. грн.

Приклад 2. Сукупні витрати фірми описані функцією $C(q) = 1000 + 10q + 0{,}05q^2$, де $C(q)$ – витрати, q – кількість продукції.

Знайти граничні витрати $MC(q)$ та їх значення при $q = 40$.

Граничні витрати – це похідна витрат за обсягом випуску:

$$MC(q) = C'(q).$$
$$C'(q) = 10 + 0{,}1q.$$

При $q = 40$ $MC(40) = 10 + 0{,}1 \cdot 40 = 10 + 4 = 14$.

Тобто, при випуску 40 одиниць додаткове виробництво ще однієї одиниці збільшує витрати приблизно на 14 грошових одиниць.

Приклад 3. Підприємство має функцію доходу

$$R(q) = 80q - 0{,}5q^2$$

та функцію витрат

$$C(q) = 400 + 20q.$$

Знайти обсяг q, при якому прибуток максимальний.

1) Записуємо прибуток:

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = (80q - 0{,}5q^2) - (400 + 20q) =$$
$$= 80q - 0{,}5q^2 - 400 - 20q = -0{,}5q^2 + 60q - 400.$$

2) Знаходимо похідну прибутку:

$$\Pi'(q) = -q + 60.$$

3) Необхідна умова максимуму: $\Pi'(q) = 0$:

$$-q + 60 = 0 \Rightarrow q = 60.$$

4) Перевірка екстремуму:

$\Pi''(q) = -1 < 0$, тобто в точці $q = 60$ – максимум.

Отже, оптимальний обсяг виробництва – 60 одиниць.

У випадках, коли треба обчислювати відсоток приросту (відносний приріст) залежної змінної, що відповідає відсотку приросту незалежної змінної, використовують поняття еластичності функції (відносної похідної).

Еластичність функції $y = f(x)$ відносно аргументу x обчислюється за формулою:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x). \tag{5.9}$$

Еластичність $E_x(y)$ дорівнює приблизному відсотковому приросту функції (підвищення або зниження), що відповідає приросту незалежної змінної на 1%.

Приклад 4. Обчислити еластичність функції $y=3x–6$ та визначити її економічний зміст.

За формулою (5.9) маємо: $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot f'(x) = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{x}{x-2}$. Якщо, наприклад, $x=10$, то еластичність функції дорівнює числу $\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$. Це означає, якщо x зросте на 1%, функція y також зросте на 1,25%.

У випадках, якщо треба визначити не величину попиту, а зміну попиту, яка викликана певною зміною ціни, визначають *еластичність попиту відносно ціни*.

Припустимо, що попит q залежить від ціни, тобто $q = f(p)$. Тоді еластичність попиту відносно ціни має вигляд:

$$E_c = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}. \tag{5.10}$$

Еластичність попиту відносно ціни визначає, як зміниться попит на даний товар, якщо його ціна зросте на 1%.

Зауваження. У більшості випадків функція попиту є спадаючою, тобто з підвищенням ціни на товар попит на нього знижується. У таких випадках $\frac{dq}{dp} < 0$, і щоб уникнути від'ємних чисел на практиці використовують таку формулу:

$$E_c = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}. \qquad (5.11)$$

Якщо $E_c > 1$, тобто підвищення ціни на 1% відповідає зниженню попиту більше, ніж на 1%, то говорять, що попит *еластичний*.

Якщо $E_c = 1$, тобто підвищенню ціни на 1% відповідає зниженню попиту на 1%, то говорять, що попит *нейтральний*.

Якщо $E_c < 1$, то попит *нееластичний*.

Приклад 5. Обчислити еластичність попиту, якщо залежність попиту від ціни виражається формулою $q=10-p$.

Маємо $E_c = -\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = -\frac{p}{10-p} \cdot (-1) = \frac{p}{10-p}$. Якщо, наприклад, $p=2$, то $E_c = \frac{2}{10-2} = \frac{1}{4}$. Це означає, що при ціні дві одиниці підвищення ціни на 1% призведе до зниження попиту на 0,25%, тобто попит є нееластичним.

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення похідної функції.
2. Сформулюйте правила диференціювання функції.
3. Сформулюйте правила визначення похідних вищих порядків.
4. Як за допомогою другої похідної можна досліджувати функцію на екстремум?
5. Невизначеності якого типу можна розкривати за допомогою правила Лопіталя?
6. Сформулюйте правило Лопіталя розкриття невизначеностей.
7. Назвіть відомі вам напрямки застосування похідної функції в задачах управління.
8. Що характеризує еластичність попиту відносно ціни?
9. Які види попиту виділяють залежно від значення коефіцієнту еластичності попиту?
10. Поясніть, що означає «попит еластичний».

Тести

1. Похідна добутку функцій визначається за формулою:

а. $(u \cdot v)' = u' \cdot v'$.

б. $(u \cdot v)'' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

в. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

г. $(u \cdot v)' = u' \cdot v - u \cdot v'$.

2. Похідна функції $y(x) = e^{\cos 2x}$ має вигляд:

а. $e^{\cos 2x}$.

б. $2 \cdot e^{\cos 2x}$.

в. $-e^{\cos 2x} \cdot \sin 2x$.

г. $-2 \cdot e^{\cos 2x} \cdot \sin 2x$.

3. Похідна другого порядку від функції $y(x) = 3x^3$ має вигляд:

а. $9x^2$.

б. $18x$.

в. 18.

г. $18x^2$.

4. За допомогою правила Лопіталя можна розкривати «невизначеності» у вигляді:

а. $\left(\frac{0}{0}\right)$.

б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

в. $(\infty - \infty)$.

г. Правильні відповіді а), б).

5. Якщо коефіцієнт еластичності за ціною Ес > 1, то попит має назву:

а. Еластичний.

б. Нееластичний.

в. Нейтральний.

г. Зростаючий.

Завдання для самостійного виконання

1) Знайти похідну функції:

1.1 $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

1.2 $y = e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$

1.3 $y = ln\left(4x^2 + \sqrt{9x^4 + 2x}\right)$

1.4 $y = \text{arctg}\sqrt{x} + arcsin^3 x$

1.5 $\text{y} = sin^5 x^7 + \cos\,(x^2 - 4x)$

1.6 $\text{y} = ln(\sqrt{\ln\,(x^2 - 6x + 4)})$

1.7 $y = (3x - 10x^4) \cdot 2^{(-8x+1)}$

1.8 $y = (cos3x) \cdot tg(3 - 4x)$

1.9 $y = \frac{(3x - 10x^4)}{sin2x^2}$

1.10 $y = \frac{\arcsin(7-3x)}{ln\frac{1}{x}}$

1.11 $y = ln\sqrt{\frac{e^x}{e^{2x}+1}}$

1.12 $y = \sqrt{\frac{ln3x}{4x+3}}$

2) Знайти похідну функції другого порядку:

2.1 $y = (4x - 7) \cdot e^{2x}$

2.2 $y = lnx^3$

2.3 $y = 5^{x+3} - 6x + 1$

3) Знайти границю функцій, використовуючи правило Лопіталя:

3.1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$

3.2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 5x}{\sin 3x}$

3.3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

3.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

3.5 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+6}$

3.6 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-16}$

3.7 $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+11}-4}{x-5}$

3.8 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-\sqrt{x+7}}{x-2}$

4) Визначити чисельність персоналу, при якій випуск Q досягає максимального значення, якщо в короткостроковому плані виробнича функція залежить тільки від чисельності персоналу фірми, тобто $Q = 3\cdot N\cdot L^2 - 0{,}5\cdot L^3 + 10\cdot N^2$, де Q – випуск продукції, а L – число працюючих (N – номер студента за списком).

5) Обчислити еластичність попиту $q=\frac{p-2p^3}{3+Np}$ відносно ціни при p=1 (N – номер студента за списком).

Рекомендована література: основна 1, 2; додаткова 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13.

ТЕМА 6
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ

Основні поняття: частинні похідні функції двох змінних, частинні похідні вищих порядків функції двох змінних, екстремум функції двох змінних, необхідна умова існування екстремуму функції двох змінних, достатня умова існування екстремуму функції двох змінних.

План

1. Поняття частинної похідної функції двох змінних.
2. Частинні похідні вищих порядків функції двох змінних.
3. Поняття екстремуму функції двох змінних. Необхідна та достатня умови існування екстремуму функції двох змінних.
4. Прикладні аспекти диференціального числення функції двох змінних в теорії управління.

Питання №1
Поняття частинної похідної функції двох змінних

Функція $z = f(x,y)$ називається *функцією двох змінних* x та y, якщо кожній парі чисел (x,y) з деякої області *Д* за визначеним правилом або законом ставиться у відповідність певне значення z.

Областю визначення функції двох змінних називається сукупність пар чисел (x,y), при яких функція z існує.

Частинною похідною функції двох змінних $z = f(x,y)$ по будь-якій змінній у точці називається похідна по цій змінній у припущенні, що інша змінна є фіксованою (сталою).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (6.1)$$

Використовують також інші позначення частинних похідних $z_x{}', z_y{}', f'_x(x,y), f'_y(x,y)$

Приклад 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$z(x,y) = e^{2x-4y} + 4\sin(7y - 3x^2) - \frac{5x}{y^2} + cos\sqrt{y} + \ln(x+3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x-4y} + 4\cos(7y - 3x^2)\cdot(-6x) - \frac{5}{y^2} + \frac{1}{x+3} =$$

$$= 2e^{2x-4y} - 24\,x\cdot\cos(7y - 3x^2) - \frac{5}{y^2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4e^{2x-4y} + 4\cdot 7\cdot\cos(7y - 3x^2) - \frac{5\cdot(-2)\cdot x}{y^3} - \sin\sqrt{y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} =$$

$$= -4e^{2x-4y} + 28\cdot\cos(7y - 3x^2) + \frac{10x}{y^3} - \frac{\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$z(x,y) = x^y + tg(2x - 7y) - \sqrt{\frac{x}{y}} + (3x+8y)^{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \frac{1}{cos^2(2x-7y)}\cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 10(3x+8y)^9\cdot 3 =$$

$$= yx^{y-1} + \frac{2}{cos^2(2x-7y)} - \frac{1}{2\sqrt{xy}} + 30(3x+8y)^9$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y\cdot lnx + \frac{1}{cos^2(2x-7y)}\cdot(-7) - \sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{y^3}}\right) + 10(3x+8y)^9\cdot 8 =$$

$$= x^y \cdot lnx - \frac{7}{cos^2(2x-7y)} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^3}} + 80(3x+8y)^9$$

Питання №2
Частинні похідні вищих порядків функції двох змінних

Частинні похідні функції двох змінних самі є функціями цих змінних і можуть мати частинні похідні.

Частинні похідні по змінним *x* та *y* від функцій $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, якщо вони існують, називають *частинними похідними другого порядку* функції $z=f(x,y)$ і позначають так

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$
$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Частинні похідні f''_{xy} та f''_{yx}, які відрізняються порядком диференціювання, називаються *змішаними частинними похідними другого порядку*.

Має місце така *теорема*: змішані частинні похідні другого порядку є рівними, якщо вони неперервні, тобто $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Приклад 1. Знайти усі частинні похідні другого порядку та перевірити, чи виконується рівність $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функції $z(x,y) = 5x^4 + 7x^2y^5$.

$$z_x' = 20x^3 + 14xy^5$$
$$z_y' = 35x^2y^4$$
$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 60x^2 + 14y^5$$
$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 140x^2y^3$$
$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 70xy^4$$
$$z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 70xy^4$$

Бачимо, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Частинні похідні вищих порядків знаходяться послідовним диференціюванням частинних похідних нижчого порядку.

Приклад 2. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ для функції $z(x,y) = \cos(3x + 8y) + e^{2x-4y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3\sin(3x + 8y) + 2e^{2x-4y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9\cos(3x + 8y) + 4e^{2x-4y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 72\sin(3x + 8y) - 16e^{2x-4y}$$

Питання №3
Поняття екстремуму функції двох змінних. Необхідна та достатня умови існування екстремуму функції двох змінних

Функція $z=f(x,y)$ має у точці $M_0\ (x_0,y_0)$ *максимум (мінімум)*, якщо існує такий окіл точки M_0, що для усіх точок $M\ (x,y)$ з цього околу, які відрізняються від точки M_0, виконується нерівність

$$f(x_0,y_0) > f(x,y) \qquad (f(x_0,y_0) < f(x,y)) \tag{6.2}$$

Необхідна умова існування екстремуму функції $z=f(x,y)$: якщо функція $z=f(x,y)$ має у точці $M_0\ (x_0,y_0)$ екстремум і у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}. \tag{6.3}$$

Достатня умова існування екстремуму функції $z=f(x,y)$: нехай функція $z=f(x,y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними першого та другого порядків у деякому околі точки $M_0\ (x_0,y_0)$ і задовольняє умові $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Позначимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0) = A, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = B, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0) = C, \tag{6.4}$$

$$\Delta = AC - B^2. \tag{6.5}$$

Тоді у точці $M_0\ (x_0,y_0)$ функція $z=f(x,y)$:

1) має мінімум, якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$;

2) має максимум, якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$;

3) не має екстремуму, якщо $\Delta < 0$;

4) може мати, а може й не мати екстремум, якщо $\Delta = 0$. У даному випадку потрібні додаткові дослідження.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $z = x^3 - 3x^2y - y^3 - 3x + 3y + 1$.

1) Використовуючи необхідну умову існування екстремуму (6.3), знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 - 3y^2 + 3 = 0 \end{cases},$$

Розв'язуємо систему, додаємо рівняння. Отже, маємо:

$$-6xy - 3y^2 = 0 \Rightarrow 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow y(2x + y) = 0.$$

Тоді рівняння розпадається на два: $y = 0$, $y = -2x$. Знайдені y підставляємо у систему і одержуємо:

а) $y = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Отже отримали дві критичні точки $M_1(1; 0)$ і $M_2(-1; 0)$.

б) $y = -2x$

Одержуємо $x^2 + 4x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm(1/\sqrt{5})$, а $y = \mp(2/\sqrt{5})$, тобто маємо ще дві критичні точки $M_3(1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5})$ і $M_4(-1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$.

2) Обчислюємо величину Δ, для чого виписуємо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$$

Для точки $M_1(1; 0)$ $\Delta = -36 < 0$ – екстремуму немає.

Для точки $M_2(-1; 0)$: $\Delta = -36 < 0$ – екстремуму немає.

Для точки $M_3(1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5})$: $\Delta = 36 > 0$, причому $A > 0$. Отже в т. $M_3(1/\sqrt{5}; -2/\sqrt{5})$ є мінімум.

Для точки $M_4(-1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$: $\Delta = 36 > 0$, причому $A < 0$. Отже в т. $M_4(-1/\sqrt{5}; 2/\sqrt{5})$ є максимум.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

1) Використовуючи необхідну умову існування екстремуму (6.3), знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

Маємо дві критичні точки $M_1(0; 0)$ і $M_2(1; 1)$.

2) Обчислюємо величину Δ, для чого знаходимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -3$$

Для точки $M_1(0; 0)$ $\Delta = -9 < 0$ – екстремуму немає.

Для точки $M_2(1; 1)$ $\Delta = 27 > 0$, причому $A > 0$. Отже в т. $M_2(1; 1)$ є мінімум.

Питання №4
Прикладні аспекти диференціального числення функції двох змінних в теорії управління

В економічній теорії та теорії управління функції дуже часто залежать від декількох факторів. Наприклад, випуск продукції залежить від капіталу та праці, а попит – від ціни товару та доходів споживачів.

Прикладними аспектами диференціального числення функцій двох змінних у теорії управління є оптимізація та пошук екстремумів (максимізація прибутку або мінімізація витрат за певних умов); аналіз чутливості системи (дослідження того, як малі зміни вхідних параметрів впливають на вихідний результат); розрахунок швидкості поповнення запасів для мінімізації ризику дефіциту при обмеженій місткості складу тощо. Розглянемо деякі з них.

Як і у випадку функції однієї змінної існує поняття *еластичності виробничої функції* $z = f(x,y)$ щодо чинників виробництва x і y

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} \tag{6.6}$$

Еластичність виробничої функції (6.6) визначає приблизний відсотковий приріст виробничої функції (підвищення, зниження), що відповідає приросту чинника x на 1% за умови, що чинник y не змінюється.

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} \tag{6.7}$$

Еластичність виробничої функції (6.7) визначає приблизний відсотковий приріст виробничої функції, що відповідає приросту чинника y на 1% за умови, що чинник x не змінюється.

Приклад 1. Для випуску товару визначена виробнича функція $f(x, y) = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$, де x, y – чинники виробництва. Визначити еластичність функції за кожним чинником і коефіцієнт еластичності при значеннях чинників $x = 1$, $y = 1$.

Визначаємо еластичність функції за кожним з чинників:

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}(20 + 8x + 3y),$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}(10 - 4y + 3x),$$

де $z = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$.

Обчислимо коефіцієнти еластичності при x=1, y=1. Враховуючи, що $z(1,1) = 35$, маємо:

$$E_x(z) = \frac{20+8+3}{35} = \frac{31}{35} \approx 0{,}89,$$

$$E_y(z) = \frac{10-4+3}{35} = \frac{9}{35} \approx 0{,}26.$$

Таким чином, зі збільшенням чинника x на 1% відбудеться відносне збільшення заданої виробничої функції приблизно на 0,89% (за умови стабільності чинника y). При збільшенні чинника y на 1% і незмінності чинника x виробнича функція збільшиться приблизно на 0,26%. Виходить, найбільший вплив на виробничу функцію $z = f(x, y)$ здійснює чинник x.

Зауваження. Від'ємне значення коефіцієнта еластичності говорить про зменшення виробничої функції при збільшенні відповідного чинника. Наприклад, якщо $E_x(z) = -0{,}08$ ($z = f(x, y)$ – функція випуску продукції), то збільшення чинника x на 1% приводить до зменшення випуску продукції на 0,08%.

Приклад 2. Фірма виробляє два види товарів G_1 і G_2 і продає їх за ціною 1000 гр. од. і 800 гр. од. відповідно. Q_1 і Q_2 – об'єми виробництва товарів. Функція витрат має вигляд $C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2$. Потрібно знайти такі обсяги виробництва Q_1 і Q_2, при яких прибуток, який одержує фірма, буде максимальний.

Сумарний доход від продажу товарів G_1 і G_2: $R = 1000Q_1 + 800Q_2$. Прибуток Π є різницею між доходом R і витратами C

$$\Pi = R - C = (1000Q_1 + 800Q_2) - (2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2),$$

$$\Pi(Q_1, Q_2) = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$$

Знайдемо максимум функції прибутку. Для знаходження стаціонарних точок, визначаємо частинні похідні першого порядку від функції $\Pi(Q_1, Q_2)$ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0, \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $Q_1 = 100$, $Q_2 = 300$. Таким чином, стаціонарна точка $M_0(100; 300)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$A = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2}\right|_{M_0} = -4, B = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right|_{M_0} = -2, C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2}\right|_{M_0} = -2.$$

Оскільки $A < 0$, $\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$, то точка $M_0(100; 300)$ є точкою максимуму.

Максимальний прибуток досягається при обсягах виробництва $Q_1 = 100$, $Q_2 = 300$, а величина прибутку $\Pi(100; 300) = 170\,000$ гр. од.

Приклад 3. Розглянемо модель управління запасами різних товарів, які зберігаються на одному складі, площа якого обмежена. Загальні витрати, пов'язані з виконанням замовлення та зберіганням цих товарів на складі, матимуть вигляд:

$$C_{\text{загальні}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{C_{0i} \cdot S_i}{q_i} + \alpha a_i q_i \right) \to min, \tag{6.8}$$

де C_{0i} – витрати на виконання одного замовлення для товару i;

S_i – потреба у замовленні i-продукту;

q_i – розмір замовлення i-продукту;

α – витрати на зберігання продукції з урахуванням займаної площі складу;

a_i – величина, яка враховує просторові габарити одиниці i-продукції;

n – кількість різних найменувань продукції, що зберігаються на складі.

Обмеження, пов'язані з площею складу, записуються у вигляді формули (6.9):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i q_i \leq G, \tag{6.9}$$

де G – площа складу (м^2).

Загальний розв'язок задачі (6.8)-(6.9) можна знайти за допомогою методу множників Лагранжа. У випадку, коли обмеження (6.9) не виконується, необхідно визначити оптимальні значення розмірів замовлень q_i, використовуючи функцію Лагранжа у вигляді:

$$C_{\text{загальні}} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{C_{0i} \cdot S_i}{q_i} + \alpha a_i q_i \right) + z\left(G - \sum_{i=1}^{n} a_i q_i\right) \to min, \tag{6.10}$$

де z – невизначений множник Лагранжа ($z \leq 0$).

Оптимальні значення партій поставок q_i для кожного з n видів продукції визначаються шляхом розв'язання системи (n+1) рівнянь (6.11):

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{\text{загальні}}}{\partial q_i} = 0, \\ \frac{\partial C_{\text{загальні}}}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

Підставивши частинні похідні функції (6.10) у рівняння системи (6.11), одержуємо

$$\begin{cases} \frac{-C_{0i} \cdot S_i}{q_i^2} + \alpha a_i - z a_i = 0, \\ G - \sum_{i=1}^{n} a_i q_i = 0 \end{cases} \tag{6.12}$$

Із першого рівняння системи (6.12) визначаємо q_i:

$$q_i = \sqrt{\frac{C_{0i} \cdot S_i}{a_i(\alpha - z^*)}}, \tag{6.13}$$

де z^* – множник Лагранжа, при якому виконується рівність (6.9).

Підставивши значення (6.13) у друге рівняння системи (6.12), маємо:

$$G = \sum_{i=1}^{n} a_i q_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sqrt{\frac{C_{0i} \cdot S_i}{a_i(\alpha - z^*)}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i{}^2 C_{0i} \cdot S_i}{a_i(\alpha - z^*)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i C_{0i} \cdot S_i}{(\alpha - z^*)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i C_{0i} \cdot S_i}}{\sqrt{\alpha - z^*}}. \tag{6.14}$$

Позначивши як $V = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i C_{0i} \cdot S_i}$ у виразі (6.14), маємо $G = \frac{V}{\sqrt{\alpha - z^*}}$.

Отже, множник Лагранжа z^* визначається за формулою:

$$z^* = \alpha - \frac{V^2}{G^2} = \alpha - \left(\frac{V}{G}\right)^2. \tag{6.15}$$

Таким чином, оптимальні розміри замовлення продукції, які відповідають обмеженням площі складу, розраховуються за формулами (6.13) та (6.15).

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення функції двох змінних.
2. Дайте визначення частинних похідних функції двох змінних.
3. Як визначаються частинні похідні вищих порядків?
4. У якому випадку змішані частинні похідні другого порядку є рівними?
5. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму функції двох змінних.
6. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму функції двох змінних.
7. Які прикладні аспекти диференціального числення функцій двох змінних у теорії управління вам відомі?

Тести

1. Частинна похідна по змінній x для функції $z(x,y) = 2x^{100}y^7 + e^{xy^2}$ *має вигляд:*

а. $200x^{99}y^7 + e^{xy^2}$.

б. $200x^{99} + y^2e^{xy^2}$.

в. $200x^{99}y^7 + y^2e^{xy^2}$

г. $100x^{99} + e^{xy^2}$.

2. Частинна похідна по змінній y для функції $z(x,y) = 2x^{100}y^7 + e^{xy^2}$ *має вигляд:*

а. $14x^{100}y^6 + xe^{xy^2}$.

б. $14x^{100}y^6 + 2xye^{xy^2}$.

в. $7x^{100}y^6 + 2ye^{xy^2}$.

г. $14x^{100}y^6 + e^{xy^2}$.

3. Похідна другого порядку z''_{xx} *для функції* $y(x,y) = 3x^2y^4 + e^{5x-2y}$ *має вигляд:*

а. $6xy^4 + 5e^{5x-2y}$.

б. $6y^4 + 5e^{5x-2y}$.

в. $6xy^4 + 25e^{5x-2y}$.

г. $6y^4 + 25e^{5x-2y}$.

4. Змішана похідна другого порядку z''_{xy} *для функції* $y(x,y) = 3x^2y^4 +$ $+e^{5x-2y}$ *має вигляд:*

а. $12xy^3 - 2e^{5x-2y}$.

б. $24xy^3 + e^{5x-2y}$.

в. $24xy^3 - 10e^{5x-2y}$.

г. $24xy^3 + 10e^{5x-2y}$.

5. Якщо $\Delta = 0$ *функція двох змінних:*

а. Може мати мінімум.

б. Може мати максимум.

в. Може не мати екстремум.

г. Усі відповіді правильні.

Завдання для самостійного виконання

1) Знайти перші частинні похідні функції:

1.1 $z = 3^{xy} + (x - 7y)^4 - 4x$

1.2 $z = \frac{x^2}{y^2} + e^{9y-2x}$

1.3 $z = ln\left(4y^2 + \sqrt{3 - 2x}\right)$

1.4 $z = \cos\sqrt{6y - 7x} + sin(2x^3 - 3y^5)$

1.5 $z = (x^7 + 5x^4y^2 + y^7)^{10}$

1.6 $z = ln\sqrt{ln\sqrt{xy}}$

1.7 $z = (2y - 7x) \cdot 5^{(-2x+y)}$
1.8 $z = (cosx - 8) \cdot ctg(6y)$
1.9 $z = \frac{(x+2y^4)}{e^{x+y}}$
1.10 $z = \frac{\sin(y-2x)}{lnx}$
2) Знайти усі частинні похідні другого порядку для функції:
2.1 $z = (4x^3 + 7) \cdot e^{-5y}$
2.2 $z = 3x^3y^3$
2.3 $z = \sin(x^2 + y^2)$
3) Знайти екстремум функції:
3.1 $z = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4$
3.2 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$
3.3 $z = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4$
3.4 $z = 2x + 4y - 2xy$

4) Фірма виробляє два види товарів G_1 і G_2 в кількостях Q_1 і Q_2 відповідно. Функція витрат має вигляд $C = 2NQ_1 + Q_1Q_2 + 2NQ_2$, а попит для кожного товару має залежність $P_1 = 500 - 3NQ_1 + Q_2$, $P_2 = 300 + Q_1 - 3NQ_2$, де P_1, P_2 – ціна одиниці товару видів G_1 і G_2 відповідно. Знайти максимальний прибуток, який може бути досягнутий на даному підприємстві. (N – номер студента за списком).

5) Дана виробнича функція$z = \sqrt{x}y^3 + (x+N)y + \frac{(-N)x^2}{x+3y}$, де x – витрати живої праці; y – витрати уречевленої праці. Знайти коефіцієнти еластичності $E_x(z)$ та $E_y(z)$ в точці (1;1) та пояснити їх економічний зміст (N – номер студента за списком).

Рекомендована література: основна 1, 2, 3, 5; додаткова 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

ТЕМА 7
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Основні поняття: первісна функції, невизначений інтеграл, визначений інтеграл, невласний інтеграл, збіжність невласного інтегралу.

План

1. Невизначений інтеграл та його властивості. Невизначені інтеграли елементарних функцій.
2. Основні методи інтегрування.
3. Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла.
4. Невласні інтеграли. Поняття збіжності невласних інтегралів.
5. Прикладні аспекти застосування визначеного інтеграла в менеджменті.

Питання №1
Невизначений інтеграл та його властивості. Невизначені інтеграли елементарних функцій

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на певному інтервалі, якщо у кожній точці цього інтервалу виконується рівність

$$F'(x) = f(x). \qquad (7.1)$$

Приклад. Для функції $f(x) = \cos x$ первісними будуть такі функції, які відрізняються сталими

$$F(x) = \sin x + \frac{\pi}{4}$$
$$F(x) = \sin x + 3$$

Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – дві первісні для функції $f(x)$ на деякому інтервалі, то різниця між ними на цьому інтервалі дорівнює деякій сталій. З цього витікає, що якщо відома яка-небудь первісна $F(x)$ для заданої функції $f(x)$, то вся множина первісних для функції $f(x)$ вичерпується функціями $F(x) + C$, де $C = const$.

Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається сімейство усіх її первісних і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (7.2)$$

де $f(x)$ – підінтегральна функція;
$f(x)dx$ – підінтегральний вираз;
x – змінна інтегрування;
dx – диференціал змінної інтегрування.

Процес визначення первісної або невизначеного інтеграла називається *інтегруванням функції*.

Властивості невизначеного інтеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3) $\int F'(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$
4) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
5) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
6) $\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$

Таблиця невизначених інтегралів

Функція	Невизначений інтеграл
$\int dx$	$x + c$
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$	$2\sqrt{x} + C$

$\int \frac{1}{x^2} dx$	$-\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$ln\|x\| + C$
$\int e^x dx$	$e^x + C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \cos x\, dx$	$sin\, x + C$
$\int sin\, x\, dx$	$-cos\, x + C$
$\int \frac{1}{cos^2 x} dx$	$tg\, x$+C
$\int \frac{1}{sin^2 x} dx$	$-ctg\, x$+C
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$	$arcsin \frac{x}{a} + C$ $-arccos \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$ $-\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$	$ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$	$\frac{1}{2a} ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$

Питання №2
Основні методи інтегрування

З основних методів інтегрування виділимо такі методи:

1. *Метод безпосереднього інтегрування.*

Цей метод пов’язаний з приведенням підінтегрального виразу до табличного вигляду шляхом перетворень і застосування властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^4 + 2x^2 \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \left(x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int x^4 dx + 2\int x dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{1}{x} + C$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int\left(\frac{e^{2x}\cdot x-e^{x}\cdot x^{3}}{e^{x}\cdot x}\right)dx=\int\left(\frac{e^{2x}\cdot x}{e^{x}\cdot x}-\frac{e^{x}\cdot x^{3}}{e^{x}\cdot x}\right)dx=$$

$$=\int e^{x}dx-\int x^{2}dx=e^{x}-\frac{x^{3}}{3}+C$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int\left(\frac{6cos^{2}x-1}{cos^{2}x}\right)dx=\int\left(\frac{6cos^{2}x}{cos^{2}x}-\frac{1}{cos^{2}x}\right)dx=$$

$$=\int 6dx-\int\frac{1}{cos^{2}x}dx=6x-tgx+C$$

2. *Заміна змінної інтегрування.*

Цей спосіб використовується, коли інтеграл $\int f(x)dx$ не може бути безпосередньо перетворений на вигляд табличного.

Вводять заміну $x=\varphi(t)$

Тоді $f(x)=f\big(\varphi(t)\big)$, $dx=\varphi'(t)dt$

$$\int f(x)dx=\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \tag{7.3}$$

Формула (7.3) є *формулою заміни змінної* у невизначеному інтегралі.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int x\cdot e^{x^{2}}dx$

Заміна змінної $t=x^{2}$. Тоді $dt=2xdx$.

$$\int x\cdot e^{x^{2}}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^{2}}2xdx=\frac{1}{2}\int e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{t}+C=\frac{1}{2}e^{x^{2}}+C$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int\frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx$

Заміна змінної $t=\ln x$. Тоді $dt=\frac{1}{x}dx$.

$$\int\frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{lnx}}\cdot\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{\ln x}+C$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int(x^{3}-4)^{11}x^{2}dx$

Заміна змінної $t=x^{3}-4$. Тоді $dt=3x^{2}dx$.

$$\int(x^{3}-4)^{11}x^{2}dx=\frac{1}{3}\int(x^{3}-4)^{11}\cdot 3x^{2}dx=\frac{1}{3}\int t^{11}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{12}}{12}+C=$$

$$=\frac{1}{36}\cdot t^{12}+C=\frac{(x^{3}-4)^{12}}{36}+C$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\frac{cosx}{\sin x}dx$

Заміна змінної $t=sinx$. Тоді $dt=cosxdx$.

$$\int\frac{cosx}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\sin x}\cdot cosxdx=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln|sinx|+C$$

3. *Метод інтегрування частинами*.

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервно диференційовані функції. Формула інтегрування частинами має вигляд:

$$\int udv=uv-\int vdu \tag{7.4}$$

Виділимо класи інтегралів, для яких може застосовуватися формула (7.4):

I клас – підінтегральна функція має вигляд:

$$x^n\cdot\begin{cases}\sin x\\ \cos x\\ \frac{1}{\sin^2 x}\\ \frac{1}{\cos^2 x}\\ a^x\\ e^x\end{cases}. \text{ В цьому випадку приймаємо } u = x^n, \text{ а } dv = \begin{cases}\sin x\,dx\\ \cos x\,dx\\ \frac{dx}{\sin^2 x}\\ \frac{dx}{\cos^2 x}\\ a^x dx\\ e^x dx\end{cases}. \tag{7.5}$$

II клас – підінтегральна функція має вигляд:

$$x^n\cdot\begin{cases}\arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}x\\ \mathrm{arcctg}x\\ \ln x\end{cases}, \text{ тоді } u = \begin{cases}\arcsin x\\ \arccos x\\ \mathrm{arctg}x\\ \mathrm{arcctg}x\\ \ln x\end{cases}, \text{ а } dv = x^n dx. \tag{7.6}$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int xe^{2x}dx$

Цей інтеграл відноситься до *I класу.*

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x}dx \qquad v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

Застосовуємо формулу (7.4)

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{4} + \mathrm{C}$$

Приклад 9. Обчислити інтеграл $\int lnxdx$

Цей інтеграл відноситься до *II класу.*

$u = lnx \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \qquad v = \int dx = x$

$$\int lnxdx = lnx\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = lnx\cdot x - \int dx = lnx\cdot x - x + C$$

Приклад 10. Обчислити інтеграл $\int arcsinxdx$

Цей інтеграл відноситься до *II класу.*

$u = arcsinx \qquad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$dv = dx \qquad v = \int dx = x$

$$\int arcsinxdx = arcsinx\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Інтеграл $\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ обчислимо за допомогою введення нової змінної $t = 1 - x^2$. Тоді $dt = -2xdx$.

$$\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-2xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int arcsinxdx = arcsinx\cdot x - (-\sqrt{1-x^2}) + C = arcsinx\cdot x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Питання №3
Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на цьому відрізку, то визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{7.7}$$

Властивості визначеного інтеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$
2) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$
3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$
5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де $a < c < b$

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_1^2 e^{4x+1}dx = \frac{e^{4x+1}}{4}\bigg|_1^2 = \frac{1}{4}(e^{4\cdot 2+1} - e^{4\cdot 1+1}) = \frac{1}{4}(e^9 - e^5)$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 (3x+2)^9 dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+2)^{10}}{10}\bigg|_0^1 = \frac{1}{30}(5^{10} - 2^{10})$$

Формула заміни змінної у визначеному інтегралі

$$x = \varphi(t) \qquad dx = \varphi'(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt \tag{7.8}$$

де $a = \varphi(\alpha)$; $\quad b = \varphi(\beta)$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_4^9 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

Заміна $t = \sqrt{x} \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt$

$t_1 = \sqrt{4} = 2 \qquad t_2 = \sqrt{9} = 3$

$$\int_4^9 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_2^3 \frac{2tdt}{(1+t^2)t} = 2\int_2^3 \frac{dt}{(1+t^2)} = 2arctgt|_2^3 =$$
$$= 2(arctg3 - arctg2)$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x\, dx$

Заміна $t = \cos x \rightarrow dt = -\sin x\, dx$

$t_1 = \cos 0 = 1 \qquad t_2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,(-\sin x)\, dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2\, dt =$$

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)$$

Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (7.9)$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^\pi x\cos x\,dx$

Цей інтеграл відноситься до *І класу.*

$u = x$ $\qquad du = dx$

$dv = \cos x\,dx$ $\qquad v = \int \cos x\,dx = sin\,x$

Застосовуємо формулу (7.9)

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = x\cdot\sin x|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = x\cdot\sin x|_0^\pi + cos\,x|_0^\pi =$$
$$= \pi\cdot\sin\pi - 0 + cos\,\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

Питання №4
Невласні інтеграли. Поняття збіжності невласних інтегралів

Для визначеного інтеграла має виконуватися умова обмеженості підінтегральної функції і скінченності границь інтегрування. Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, інтеграл називається *невласним*.

Розглянемо види невласних інтегралів.

1. *Інтеграл з нескінченними границями*.

Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \le x < +\infty$, тобто для $x \ge a$. Тоді за визначенням вважаємо

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx. \qquad (7.10)$$

Якщо границя існує, то кажуть, що інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *збігається*, в іншому випадку інтеграл називають *розбіжним*.

На невласний інтеграл (7.10) розповсюджуються багато властивостей визначених інтегралів, зокрема формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\big(F(A) - F(a)\big) \qquad (7.11)$$

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx$

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-5x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-5x}}{-5}\Bigg|_0^A = \lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-5A}}{-5} + \frac{e^0}{5} =$$
$$= \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{5e^{5A}}\right) + \frac{e^0}{5} = \frac{1}{5}$$

Отже, інтеграл збігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{A\to+\infty}2\sqrt{x}\Big|_2^A = \lim_{A\to+\infty}2\sqrt{A} - 2\sqrt{2} = +\infty$$

Отже, інтеграл розбігається.

Теорема порівняння: Якщо на інтервалі $a \leq x < +\infty$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і задовольняють умові $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ витікає збіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ витікає розбіжність інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2. *Інтеграл від необмеженої функції*.

Нехай функція $f(x)$ неперервна при $a \leq x < b$ і наближується до ∞, коли $x \to b$. Тобто на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ є необмеженою. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (7.12)$$

Якщо границя існує, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається, в іншому випадку він є розбіжний.

Аналогічно

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \qquad (7.13)$$

якщо $f(x)$ є необмеженою при $x \to a$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x-1|\,|_{1+\varepsilon}^3 = \ln 2 - \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|\varepsilon| = \infty$$

Отже, інтеграл розбігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^2 = 2\sqrt{2} - \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}$$

Отже, інтеграл збігається.

Питання №5
Прикладні аспекти застосування визначеного інтеграла в менеджменті

Визначений інтеграл є потужним інструмент для аналізу безперервних процесів у менеджменті. Якщо диференціювання допомагає знайти темп змін (миттєву швидкість), то інтегрування дозволяє підбити підсумок цих змін за певний період.

Основні прикладні аспекти застосування визначеного інтеграла в управлінській діяльності:

1. Розрахунок загального доходу та витрат.

У реальному бізнесі грошові потоки часто надходять не дискретно, а безперервно (наприклад, у ритейлі або онлайн-сервісах).

Якщо функція $f(t)$ описує інтенсивність надходження доходу в момент часу t, то загальний дохід за період від t_1 до t_2 обчислюється як:

$$Income = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt, \tag{7.14}$$

Приклад 1. Функція маргінальних витрат виробництва x од. продукції за певний час має вигляд $f(x) = 50 – 0,02\,x$. Як зміняться витрати виробництва (у гр. од.) при збільшенні випуску продукції від 100 до 120 од.

Функція маргінальних витрат є похідною від функції витрат.

$$MC(q) = C'(q).$$

Функція витрат матиме вигляд:

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx,$$ де x_1=100, а x_2=120.

$$\int_{100}^{120} C'(x)dx = \int_{100}^{120} (50 - 0{,}02x)dx = (50x - 0{,}01x^2)|_{100}^{120} = 56$$

Отже, при збільшенні випуску продукції від 100 до 120 од. відбудеться зростання витрат виробництва на 56 гр. од.

2. Управління запасами.

Менеджерам важливо знати середній рівень запасів на складі для мінімізації витрат на зберігання. Якщо *S(t)* – кількість товару на складі в момент t, то інтеграл дозволяє знайти загальні витрати на зберігання за період.

3. Визначення загального обсягу виробництва.

Якщо функція $z = f(t)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва з часом, то обсяг продукції F, виготовленої за проміжок часу $[0,T]$, обчислюється за формулою:

$$F = \int_0^T f(t)dt, \tag{7.15}$$

а обсяг продукції, що випускається, за проміжок часу $[t_1, t_2]$ обчислюється за формулою

$$F = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \tag{7.16}$$

Приклад 2. Визначити обсяг продукції, виготовленої за проміжок часу [1, 2], якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3$.

Обсяг продукції визначається за формулою (7.16).

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{2}{3t+4} + 3\right)dt = \left(\frac{2}{3} ln\,|\,3t+4| + 3t\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3} ln\,1\,0 - \frac{2}{3} ln\,7 + 6 - 3 =$$

$$= \frac{2}{3} ln\frac{10}{7} + 3 \approx 3 \text{ од.}$$

Отже, обсяг виробленої продукції дорівнює приблизно 3 од.

4. Дисконтування грошових потоків.

Чисті інвестиції як похідна від капіталу за часом t обчислюються за формулою $I(t) = \frac{d}{dt} K(t)$, де $K(t)$ – капітал, залежний від часу, $I(t)$ – чисті інвестиції. Якщо потрібно визначити приріст капіталу за період часу з моменту часу t_1 до t_2, тобто величину $\Delta K = K(t_2) – K(t_1)$, то можна написати:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt. \tag{7.17}$$

Приклад 3. Чисті інвестиції задані функцією $I(t) = 7000\sqrt{t}$. Визначити:

а) приріст капіталу за три роки;

б) через скільки років приріст капіталу становитиме 50 000 гр. од.

а) Використовуємо формулу (7.17), поклавши $t_1 = 0$, $t_2 = 3$:

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 7000\sqrt{t}dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} =$$
$$= 24248{,}71 \text{ грош. од.}$$

б) Позначивши шуканий відрізок часу через T отримаємо

$\Delta K = \int_0^T I(t)dt$, де $\Delta K = 50000$ і $I(t) = 7000\sqrt{t}$.

Тоді $50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t} \cdot dt \Rightarrow$

$\int_0^T 7000 t^{\frac{1}{2}} dt = = 7000 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^T = 7000 \cdot \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 50000 = 7000 \cdot \frac{2}{3} T^{\frac{3}{2}}$;

$T^{\frac{3}{2}} = \frac{50 \cdot 3}{14} = 10{,}71$; $T = 10{,}71^{\frac{2}{3}} \approx 5$ (років).

Отже а) за три роки приріст капіталу становитиме 24248,71 гр. од.;

б) через п’ять років приріст капіталу становитиме 50 000 гр. од.

Якщо функція $f(t)$ – функція грошового потоку, а r% – номінальна облікова щорічна ставка, то поточна вартість майбутніх доходів за період між $t = 0$ та $t = t_p$ становить:

$$PV = \int_0^{t_p} f(t) e^{-\frac{rt}{100}} dt. \tag{7.18}$$

Приклад 4. Визначити прибуток компанії, яка вкладе 4 млн гр. од. у нове обладнання і щороку отримуватиме 2 млн гр. од. прибутку протягом 5 років, а номінальна облікова щорічна ставка становитиме 10%.

За формулою (7.18) реальне значення загального прибутку становитиме:

$$P = \int_0^5 2e^{-0{,}1t} dt - 4 = (-20e^{0{,}1t})|_0^5 - 4 = 20(1 - e^{-0{,}5}) - 4 = 3{,}87$$

Отже прибуток компанії становить 3,87 млн гр. од.

Приклад 5. Нехай функція попиту (обернена, $p(q)$) має вигляд

$$p(q) = 120 - 2q,$$

де p – ціна (гр. од. за од.),

q – кількість одиниць продукції.

Якщо компанія продає q_0 одиниць за ціною, яка падає із зростанням обсягу, то сукупний дохід дорівнює площі під кривою $p(q)$ від 0 до q_0:

$$TR(q_0) = \int_0^{q_0} p(q)\, dq. \tag{7.19}$$

Знайдемо сукупний дохід при продажу $q_0 = 30$ одиниць.

$$TR(30) = \int_0^{30} (120 - 2q)\, dq = (120q - q^2)\ |_0^{30} = (120 \cdot 30 - 30^2) - 0 =$$

$$= 3600 - 900 = 2700.$$

Отже, при реалізації 30 одиниць продукції за змінною ціною за законом $p(q) = 120 - 2q$ сукупний дохід становитиме 2700 гр. од.

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення первісної та невизначеного інтеграла.
2. У чому полягає метод заміни змінної у невизначеному інтегралі?
3. Для яких класів інтегралів використовується формула інтегрування частинами?
4. Які властивості невизначених інтегралів ви знаєте?
5. Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
6. Чим відрізняються методи заміни змінної в визначеному та невизначеному інтегралах.
7. Які інтеграли називаються невласними?
8. Які невласні інтеграли називаються розбіжними?
9. Наведіть приклади застосування визначеного інтеграла в управлінській діяльності.

Тести

1. Формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла має вигляд:

а. $\int udv = (u + v) - \int vdu$

б. $\int udv = uv + \int vdu$

в. $\int udv = uv - \int vdu$

г. $\int udu = uv - \int vdv$

2. Невизначений інтеграл для функції $\int e^{1-4x}dx$ *має вигляд:*

а. $\frac{1}{4}e^{1-4x}$.

б. $-\frac{1}{4}e^{1-4x}$.

в. $\frac{1}{4}e^{1-4x} + C$.

г. $-\frac{1}{4}e^{1-4x} + C$.

3. Невизначений інтеграл для функції $\int (8x - 3)^4 dx$ *має вигляд:*

а. $\frac{(8x-3)^5}{5}$.

б. $\frac{(8x-3)^5}{40} + C$.

в. $\frac{(8x-3)^5}{40}$.

г. $\frac{(8x-3)^5}{5} + C$.

4. Який з наведених інтегралів є невласний?

а. $\int_2^4 \frac{dx}{x+1}$.

б. $\int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

в. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

г. $\int \frac{dx}{x+1}$.

5.Формула Ньютона-Лейбніца має вигляд:

а. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + C$

б. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

в. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$.

г. $\int_a^b f(x)dx = F(a) + F(b)$.

Завдання для самостійного виконання

1) Знайти невизначені інтеграли:

1.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

1.2 $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx$

1.3 $\int \frac{dx}{16x^2-9}$

1.4 $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$

1.5 $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

1.6 $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$

1.7 $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$

1.8 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

1.9 $\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}$

1.10 $\int e^{x^2}xdx$

1.11 $\int \frac{\text{arctg}x}{1+x^2}dx$

1.12 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$

1.13 $\int \frac{ln^2 x}{x}dx$

1.14 $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$

1.15 $\int \sin^4 x \cos x dx$

2) Обчислити інтеграл, використовуючи формулу інтегрування частинами:

2.1 $\int x\cos 3x dx$

2.2 $\int 2xe^{-7x}\,dx$

2.3 $\int x\,lnx\,dx$

2.4 $\int arctgxdx$

2.5 $\int x4^x\,dx$

3) Знайти визначений інтеграл:

3.1 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$

3.2 $\int_{0}^{\pi/4} \mathrm{tg}x dx$

3.3 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

3.4 $\int_{4}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

3.5 $\int_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

3.6 $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+ln\, x}}$

3.7 $\int_{1}^{2} x\, ln\, x\, dx$

3.8 $\int_{0}^{\pi/2} x\, cos\, x\, dx$

3.9 $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$

3.10 $\int_{0}^{ln\, 2} xe^{-x} dx$

4) Нехай функція попиту має вигляд $p(q) = 100 - q$. Знайти формулу сукупного доходу $TR(q_0) = \int_0^{q_0} p(q)\, dq$ та обчислити $TR(20)$.

Рекомендована література: основна 1, 2, 3, 5; додаткова 7, 8, 9, 12, 13.

ТЕМА 8
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Основні поняття: випадкова подія, правило комбінаторики, перестановка, розміщення, комбінація, ймовірність події, ймовірність сумісних подій, ймовірність несумісних подій, ймовірність незалежних подій, ймовірність залежних подій, формула повної ймовірності. формула Байєса.

План

1. Алгебра подій.
2. Елементи комбінаторики.
3. Класичне визначення ймовірності.
4. Ймовірності несумісних та сумісних, залежних та незалежних подій.
5. Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Прикладні аспекти застосування формул повної ймовірності та Байєса в теорії управління.

Питання №1
Алгебра подій

Випадкова подія – це будь-який результат експерименту (випробування), який за одних і тих самих умов може відбутися, а може й ні.

Події позначаються великими літерами *A*, *B*, *C*,…

Події класифікують залежно від того, наскільки гарантована їхня поява:

1) *достовірна (вірогідна) подія* – це подія, яка обов'язково відбудеться в умовах експерименту (випробування);

2) *неможлива подія* – подія, яка ніколи не відбудеться в умовах експерименту (випробування).

Події називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно, поява однієї з них виключає можливість появи інших.

Події називаються *сумісними*, якщо вони можуть відбутися одночасно.

Подія, яка відбувається у тому випадку, коли не відбувається подія A, називається *протилежною подією* і позначається $\bar{A}$.

Повна група подій – це така сукупність випадкових подій, що в результаті кожного випробування обов'язково відбудеться хоча б одна з них. Тобто це перелік усіх можливих варіантів розвитку подій, які тільки можуть статися в конкретній ситуації. Поза цією групою нічого іншого відбутися не може.

Окремим випадком повної групи є протилежні події A та $\bar{A}$. Вони завжди утворюють повну групу несумісних подій.

Сумою (об'єднанням) декількох випадкових подій називається подія, яка полягає у здійсненні хоча б однієї з даних подій, тобто або A, або B, або A і B разом:

$$A + B = C.$$

Якщо події A і B несумісні, то сума вказує на те, що відбудеться тільки одна з них.

Добутком подій (перетином) A і B – називається подія C, яка полягає в тому, що обидві події обов'язково відбудуться:

$$A \times B = C.$$

Приклад. Деяка фірма-постачальник реалізує товар трьом різним фірмам-покупцям. Події A_1, A_2, A_3 – відповідна фірма-покупець одержує товар у встановлений термін. Записати події:

1) товар в установлений термін одержить хоча б одна фірма

$$A_1 + A_2 + A_3 = C \text{ (оскільки події сумісні);}$$

2) товар в установлений термін одержать усі фірми

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = C;$$

3) товар в установлений термін одержить тільки третя фірма

$$\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times A_3 = C;$$

4) тільки одна фірма одержить товар в установлений термін

$$A_1 \times \overline{A_2} \times \overline{A_3} + \overline{A_1} \times A_2 \times \overline{A_3} + \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times A_3 = C.$$

<u>Питання №2</u>
<u>Елементи комбінаторики</u>

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає способи підрахунку кількості варіантів вибору або розміщення елементів множини.

Нехай потрібно виконати послідовно дві дії. Якщо перша дія виконана m різними способами, а друга – n різними способами, то обидві дії можна виконати

$m \times n$ різними способами. Якщо ж потрібно послідовно виконати три дії, причому перша дія може бути виконано m способами, друга – n способами і третя – k способами, тоді три дії можна виконати $m \times n \times k$ способами.

Загальне правило комбінаторики (правило множення): нехай потрібно послідовно виконати n дій, причому перша дія може бути виконана m_1 способами, друга – m_2 способами тощо, нарешті n-а дія – m_n способами. Тоді число всіх способів, якими можна виконати ці n дій

$$S_n = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n. \quad (8.1)$$

У комбінаториці виділяють три основні типи сполук: *перестановки*, *розміщення* та *комбінації*.

Перестановкою з *n елементів* називається кількість способів розстановки цих елементів у певному порядку між собою.

Число всіх різних перестановок з n елементів дорівнює n факторіал, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Число всіх перестановок з n елементів позначають P_n:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \quad (8.2)$$

Приклад 1. Керівник відділу маркетингу запланував провести 6 індивідуальних зустрічей (one-to-one) зі своїми підлеглими. Він вирішив провести всі зустрічі одну за одною без перерв. Скількома різними способами менеджер може скласти графік цих зустрічей (тобто визначити черговість підлеглих)?

У нас n=6 об’єктів (співробітників). Ми використовуємо всіх співробітників. Порядок важливий, оскільки графік «Олександр Миколайович перший, Ольга Олексіївна друга» відрізняється від графіка «Ольга Олексіївна перша, Олександр Миколайович другий». Оскільки ми переставляємо всі елементи множини, використовуємо формулу перестановки (8.2):

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Отже, менеджер може скласти 720 різних варіантів графіка зустрічей зі співробітниками.

Розміщення (або варіації) – це сполуки, які складаються з k елементів, обраних із множини n елементів, де порядок цих елементів є важливим (або кількість способів розставити n елементів на k місць).

Головна відмінність розміщень від комбінацій полягає в тому, що якщо ми просто поміняємо обрані об’єкти місцями, то отримаємо вже нову сполуку.

Число всіх розміщень із n елементів по k обчислюється за формулою

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ співмножників}}. \quad (8.3)$$

або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (8.4)$$

Приклад 2. У відділі працює 10 співробітників. Потрібно обрати керівника проєкту та його асистента. Визначити кількість варіантів такого призначення.

Оскільки треба обрати 2 співробітників з 10, причому порядок є важливим, то використовуємо розміщення

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8!} = 9 \cdot 10 = 90.$$

Отже, існує 90 способів такого призначення.

Комбінації – це сполуки, які складаються з k елементів, обраних із множини n елементів, якщо порядок вибору не має значення.

Це ключова відмінність від розміщень. У комбінаціях важливо лише те, які саме елементи потрапили до групи, а не те, у якій послідовності їх обирали.

Число всіх комбінацій з n елементів по k обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \qquad (8.5)$$

Приклад 3. У відділі маркетингу працює 8 фахівців. Для участі у виставці потрібно обрати команду з 3 осіб. Скількома способами це можна зробити?

Використовуємо комбінацію, оскільки в цьому випадку важливо лише перебування в команді

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{5!\,6 \cdot 7 \cdot 8}{5!\,1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 8 = 56$$

Питання №3
Класичне визначення ймовірності

Число, яке є мірою об’єктивної можливості того, що подія відбудеться, називається її *ймовірністю*.

Ймовірність події позначають $P(A)$.

Відношення числа сприятливих випадків настання події A до числа усіх можливих випадків називається *ймовірністю* події A

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (8.6)$$

де m – число випробувань, в яких подія A наступила;

n – загальне число випробувань.

Формула (8.6) називається *формулою класичної ймовірності*.

Ймовірність будь-якої події не може бути від’ємною або більше одиниці, отже $0 \le P(A) \le 1$, причому $P(A) = 0$, якщо подія A – неможлива, а $P(A) = 1$ якщо A – вірогідна подія.

Ймовірність протилежної події до події A *визначається за формулою:*

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A). \qquad (8.7)$$

Приклад 1. Менеджер з якості не може перевірити кожну одиницю товару в партії з 1000 штук, тому він використовує вибірку. У партії з 100 деталей є 5 бракованих. Менеджер навмання обирає одну деталь. Яка ймовірність того, що обрана деталь буде якісною?

Розрахунок: Загальна кількість деталей у партії n=100. Кількість якісних деталей m=100-5=95.

Отже $P(A) = \frac{95}{100} = 0{,}95$ (або 95%).

Приклад 2. У кадровому резерві є 10 кандидатів: 6 чоловіків і 4 жінки. Потрібно сформувати групу з 3 осіб для аудиту. Яка ймовірність того, що до групи потраплять лише жінки? Яка ймовірність того, що у групі буде хоча б один чоловік?

Загальна кількість способів обрати 3 особи з 10:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{7!\,8\cdot 9\cdot 10}{7!\,1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Кількість способів обрати 3 жінки з 4-х наявних:

$$C_{4}^{3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{3!\cdot 4}{3!} = 4$$

Ймовірність того, що у групі будуть усі жінки

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033 \text{ (приблизно 3,3\%)}$$

Подія, що у групі буде хоча б один чоловік, є протилежною до події, коли в групі будуть усі жінки.

Отже, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}033 = 0{,}967$ (приблизно 96,7%).

Приклад 3. Компанія випустила 10 000 йогуртів, під кришечками яких розміщені призи: 100 призів по 500 грн і 1000 призів по 20 грн. Яка ймовірність для клієнта виграти хоча б якийсь приз?

Загальна кількість подій n = 10000. Сприятливі події (будь-який приз): m=100+1000 =1100.

$$P(A) = \frac{1100}{10000} = 0{,}11 \text{ (11\%)}$$

Приклад 4. Постачальник зазвичай привозить товар у один із робочих днів тижня (з понеділка по п’ятницю) з однаковою ймовірністю. Яка ймовірність того, що товар прибуде саме в понеділок або вівторок?

Загалом робочих днів n = 5. Сприятливих днів m=2.

$$P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4 \text{ (40\%)}$$

Питання №4
Ймовірності несумісних та сумісних, залежних та незалежних подій

Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає можливість появи іншої в одному і тому ж випробуванні. Вони не можуть статися одночасно.

Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій (A_1, A_2, …, A_n) дорівнює сумі їхніх ймовірностей.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).. \quad (8.8)$$

Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

$$P(A + B + C + \ldots + M) = 1. \tag{8.9}$$

Приклад 1. Компанія бере участь у тендері на державне замовлення. Подія А: компанія виграє тендер. Подія В: компанія програє тендер. Ці події несумісні, бо ви не можна одночасно і виграти, і програти той самий тендер. Якщо ймовірність виграшу $P(A)$=0,3, а програшу $P(B)$ = 0,7, то сума завжди дорівнює 1 (або 100%), бо інших варіантів немає:

$$P(A + B) = P(A)+ P(B) =0{,}3+0{,}7=1.$$

Приклад 2. Компанія вирішує, яким транспортом доставити товар. Варіант A: доставка морем (ймовірність обрання – 0,5); варіант B: доставка залізницею (ймовірність – 0,3); варіант C: доставка автомобільним транспортом (ймовірність – 0,15), варіант D : доставка авіаційним транспортом (ймовірність – 0,05). Визначити ймовірність того, що доставка товару відбудеться наземним транспортом.

Події A, B, C, D є несумісними. Подія, що товар буде відправлено наземним транспортом, об'єднує дві події: доставка залізницею або доставка авто. Ймовірність цієї події визначається за формулою (8.8):

$$P(B+C) = P(B)+ P(C) =0{,}3+0{,}15=0{,}45$$

Події називаються *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої. Тобто вони можуть відбутися одночасно.

Оскільки події можуть перетинатися, то для визначення ймовірності суми (об'єднання) цих подій треба відняти ймовірність їх спільної появи, щоб не порахувати її двічі.

Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх добутку, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A \times B). \tag{8.10}$$

Приклад 3. Компанія запускаєте нову лінійку товарів і хоче оцінити охоплення аудиторії. Подія A: клієнт дізнався про товар із реклами в Instagram ($P(A)$=0,6). Подія B: клієнт дізнався про товар через «сарафанне радіо» ($P(B)$=0,4). Ймовірність того, що клієнт бачив рекламу в Instagram і чув про товар від друга $P(A{\times}B)$=0,2. Визначити ймовірність того, що клієнт бачив рекламу.

Події є сумісними. Згідно з формулою (8.10) маємо

$$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(A{\times}B)=0{,}6+0{,}4-0{,}2=0{,}8.$$

Тобто 80% цільової аудиторії компанії охоплено хоча б одним каналом комунікації.

Події A та B називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірність появи іншої.

Ймовірність добутку двох і більше незалежних подій дорівнює добутку їхніх ймовірностей

$$P(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n). \tag{8.11}$$

Приклад 4. Компанія має два заводи в різних країнах: один у Польщі, інший у В'єтнамі. Подія *A*: страйк працівників у Польщі (*P(A)* = 0,05). Подія *B*: тайфун у В'єтнамі (*P(B)* = 0,1). Визначити ймовірність того, що обидва заводи зупиняться одночасно.

Події *A* і *B* є незалежними. Ймовірність того, що обидва заводи зупиняться одночасно, дорівнює добутку ймовірностей подій *A* і *B:*

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) = 0{,}05 \times 0{,}1 = 0{,}005 \ (0{,}5\%).$$

Приклад 5. Менеджер відділу закупівель працює з трьома незалежними постачальниками. Ймовірність того, що перший постачальник привезе товар вчасно, становить 0,9, другий – 0,8, третій – 0,7. Визначити ймовірність того, що хоча б один постачальник привезе товар вчасно.

Використовуємо ймовірність протилежної події. Якщо подія *A*: «Хоча б один постачальник доставив товар вчасно», то протилежна подія $\bar{A}$: «Ніхто з постачальників не привіз товар вчасно» (всі запізнилися).

Ймовірність запізнення для кожного з постачальників:

P({запізнення 1-го}) = 1-0,9 = 0,1

P({запізнення 2-го}) = 1 - 0,8 = 0,2

P({запізнення 3-го}) = 1 - 0,7 = 0,3.

Знайдемо ймовірність того, що всі постачальники запізняться одночасно. Використовуємо формулу (8.11)

P({запізнення 1-го},({запізнення 2-го},{запізнення 3-го})=0,1×0,2×0,3=0,006

Знаходимо ймовірність події

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Отже, ймовірність того, що хоча б одна поставка буде вчасною – 99,4%.

Події називаються *залежними*, якщо поява однієї з них змінює ймовірність появи іншої. Тут з'являється поняття *умовної ймовірності*.

Ймовірність події *A* знайдена в припущенні, що подія *B* наступила, називається *умовною ймовірністю* події *A* щодо події *B* і позначається $P_B(A)$.

Ймовірність добутку двох залежних подій (або ймовірність сумісної появи двох залежних подій) *A* та *B* дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої

$$P(A \times B) = P(A) \times P_A(B), \tag{8.12}$$

або

$$P(A \times B) = P(B) \times P_B(A). \tag{8.13}$$

Приклад 6. Ймовірність того, що партія товару має дефект, становить *P(B)*=0,1 (10%). Якщо партія має дефект, ймовірність того, що клієнт поверне товар і залишить негативний відгук (подія *A*), становить $P_B(A)$=0,8 (80%). Якщо партія не має дефектів, ймовірність того, що клієнт все одно залишить негативний відгук (наприклад, через довгу доставку), складає 0,05 (5%). Яка ймовірність того, що відбудуться обидві події одночасно: партія буде дефектною і компанія отримаєте негативний відгук?

$$P(A \times B) = P(B) \times P_B(A)=0,1\times0,8=0,08\ (\%)$$

Отже, ймовірність того, що компанія випустить браковану партію і отримаєте за це публічну скаргу, становить 8%.

Приклад 7. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити оргкомітет із трьох чоловік. Яка ймовірність того, що всі троє, які увійдуть в оргкомітет, є бухгалтери.

Позначимо події

A_1 – перший бухгалтер, який увійде в оргкомітет;

A_2 – другий бухгалтер, який увійде в оргкомітет;

A_3 – третій бухгалтер, який увійде в оргкомітет.

$B = A_1 \times A_2 \times A_3$ – три бухгалтери, які увійдуть в оргкомітет.

$$P(B) = P(A_1 \times A_2 \times A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \times A_2}(A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56},$$

або $$P(B) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}.$$

Питання №5

Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Прикладні аспекти застосування формул повної ймовірності і Байєса в теорії управління

Формула повної ймовірності використовується у менеджменті для прогнозування та оцінки загальних шансів на успіх, а формула Байєса – для аналізу причин того, що вже сталося, та коригування планів.

Знайдемо ймовірність деякої події A, що може відбутися разом з однією з подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу подій. Будемо називати ці події *гіпотезами*.

Ймовірність події A обчислюється як сума добутків ймовірності кожної гіпотези на умовну ймовірність події A за цієї гіпотези, тобто

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \qquad (8.14)$$

де $P(H_i)$ – апріорна ймовірність того, що справдиться H_i гіпотеза;

$P_{H_i}(A)$ – ймовірність події A за умови, що гіпотеза H_i відбулася.

Формула повної ймовірності застосовується у таких сферах управління:

– *управління ланцюгами поставок*: визначення ймовірності затримки товару через процедури на митниці, на складі або через погодні умови;

– *HR-менеджмент*: визначення ймовірності того, що новий працівник пройде випробувальний термін, враховуючи різні рівні його початкової підготовки;

– *маркетинг*: розрахунок конверсії сайту, де відвідувачі приходять із різних джерел (соцмережі, пошук, реклама), кожне з яких має свою специфічну ймовірність покупки.

Приклад 1. Компанія планує випустити новий смартфон. Успіх продажу (подія A) залежить від економічної ситуації в країні:

1) Відомі гіпотези (стани ринку):

H_1 – економічне зростання, $P(H_1) = 0,3$;

H_2 – стабільність, $P(H_2) = 0{,}5$;

H_3 – рецесія, $P(H_3) = 0{,}2$.

Гіпотези H_1, H_2, H_3, утворюють повну групу подій, оскільки

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1$$

2) Відома оцінка ймовірності успіху за кожної умови:

– при зростанні успіх майже гарантований $P_{H_1}(A) = 0{,}9$;

– при стабільності шанси непогані $P_{H_2}(A) = 0{,}6$;

– при рецесії шанси низькі $P_{H_3}(A) = 0{,}2$.

Розрахувати ймовірність успіху на ринку нового смартфону.

Використовуємо формулу повної ймовірності (8.14)

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}61$$

Отже, загальна ймовірність успіху проєкту становить 0,61 (61%). Цей показник допомагає вирішити, чи варто інвестувати ресурси, порівнюючи його з ризиками.

Логічним продовженням формули повної ймовірності є формула Байєса. Якщо повна ймовірність допомагає «прогнозувати майбутнє», то формула Байєса дозволяє «аналізувати минуле» або переоцінювати шанси, коли вже отримано новий результат.

Формула Байєса дозволяє визначити ймовірність того, що спрацювала саме конкретна гіпотеза H_i, за умови, що подія *A* вже відбулася.

Ймовірність гіпотези за умови, що подія *A* відбулася, дорівнює відношенню добутку ймовірності даної гіпотези на умовну ймовірність появи події *A* при даній гіпотезі до повної ймовірності появи події *A*, тобто

$$P_A(H_i) = P\left({H_i}/{A}\right) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \quad (8.15)$$

Приклад 2. Використовуючи дані *прикладу 1*, визначити яка ймовірність того, що компанія досягла успіху у запуску смартфона (запуск смартфона виявився успішним, тобто подія *A* відбулася) саме завдяки економічному зростанню (гіпотеза H_1).

Визначаємо ймовірність того, що відбулася гіпотеза H_1 за умови успіху *A*, використовуючи формулу Байєса (8.15)

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}9}{0{,}61} = \frac{0{,}27}{0{,}61} = 0{,}443 \ (44{,}3\%)$$

Аналогічно можна розрахувати інші гіпотези $P_A(H_2)$ та $P_A(H_3)$ табл. 8.1

Таблиця 8.1 – Ймовірності гіпотез

Стан ринку	Початкова ймовірність	Ймовірність після успіху
Зростання H_1	30%	44,3% (зросла)
Стабільність H_2	50%	49,2% (майже не змінилась)
Рецесія H_3	20%	6,5% (різко впала)

Аналіз даних табл. 8.1 дозволяє зробити такі висновки:

1) ймовірність того, що компанія працювала в умовах рецесії, впала з 20% до 6,5%, що є логічним, оскільки під час рецесії навряд чи можна було б досягли успіху;

2) ймовірність того, що економіка зростала, збільшилася з 30% до 44,3%.

3) успіх підтверджує позитивний стан ринку, що є сигналом для менеджера, оскільки тепер ці нові дані можна використовувати для планування наступних кроків або інвестицій.

Приклад 3. Фірма має три джерела постачання комплектуючих: A, B, C. На фірму A припадає 50% загального обсягу постачань, на B – 30% і на C – 20%. Із практики відомо, що 10% деталей, які поставляються фірмою A, браковані, фірмою B – 5%, фірмою C – 6%. Визначити ймовірність того, що взята навмання бракована деталь була отримана від фірми A.

Введемо такі позначення:

1) Гіпотези (джерела постачання):

A – постачальник фірма A, $P(A) = 0{,}5$;

B – постачальник фірма B, $P(B) = 0{,}3$;

C – постачальник фірма C, $P(C) = 0{,}2$.

Гіпотези A, B, C утворюють повну групу подій, оскільки

$$P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$$

2) Відома оцінка ймовірності бракованих виробів для кожного постачальника:

– $P_A(брак) = 0{,}1$;

– $P_B(брак) = 0{,}05$;

– $P_C(брак) = 0{,}06$.

Ймовірність того, що взята навмання бракована деталь була отримана від фірми A визначається за формулою Байєса (8.15)

$$P_{брак}(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(брак)}{P(A) \cdot P_A(брак) + P(B) \cdot P_B(брак) + P(C) \cdot P_C(брак)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}1}{0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}06} = \frac{0{,}05}{0{,}077} = 0{,}65$$

Таким чином імовірність того, що обрана деталь була отримана від фірми A за умови, коли вона виявилася бракованою, змінилася з 0,5 до 0,65.

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення випадкової події.
2. У чому полягає основне правило комбінаторики?
3. Як визначається кількість перестановок з *n* елементів?
4. У чому полягає головна відмінність розміщень від комбінацій у комбінаториці?
5. Дайте визначення класичної ймовірності події.
6. Які події називаються несумісними?
7. Як визначається ймовірність суми декількох несумісних подій?

8. Які події називаються незалежними?

9. Як обчислюється ймовірність одночасної появи декількох незалежних подій?

10. Назвіть можливі сфери управління, де застосовується формула повної ймовірності.

11. Поясніть різницю використання на практиці формули повної ймовірності і формули Байєса.

Тести

1. Події називаються сумісними, якщо:

а. Вони можуть відбутися одночасно.

б. Вони не можуть відбутися одночасно.

в. Поява однієї з них не виключає появи іншої.

г. Правильні відповіді а), в).

2. Ймовірність події А приймає значення:

а. $-\infty < P(A) < +\infty$.

б. $-1 \le P(A) \le 1$.

в. $0 \le P(A) \le 1$.

г. $P(A) > 0$.

3. Сполуки, які складаються з k елементів, вибраних із множини n елементів, якщо порядок вибору не має значення, мають назву:

а. Розміщення.

б. Комбінації.

в. Варіації.

г. Перестановки.

4. Ймовірність вірогідної події А дорівнює:

а. $-1 \le P(A) \le 1$.

б. $0 \le P(A) \le 1$.

в. $P(A) = 0$.

г. $P(A) = 1$.

5. Сукупність випадкових подій, таких що в результаті кожного випробування обов'язково відбудеться хоча б одна з них, має назву:

а. Повна група подій.

б. Незалежні події.

в. Несумісні події.

г. Гіпотези.

Завдання для самостійного виконання

1) У місті налічується сім заводів. Скількома способами організація може розмістити на них три різні виробничі замовлення? (Замовлення не можна дробити, тобто розподіляти його на декілька заводів).

2) На річних зборах акціонерів 25 учасників претендують на пости голови, секретаря і чотири інших поста в правлінні. Скільки існує способів призначення

на пости голови і секретаря? Скільки способів заміщення чотирьох вакансій після обрання голови і секретаря?

3) У транспортній компанії працює 12 водіїв. Кожний другий день необхідно направити двох водіїв на кожен з п'яти заводів. Скількома способами можна направити водіїв на ці заводи?

4) Фірма-склад реалізує товари 20 найменувань. Скількома способами їх можна розподілити по трьох магазинах, якщо відомо, що в перший магазин повинно бути доставлено вісім, у другий – сім, а в третій – п'ять найменувань товарів?

5) У відділі продажів компанії є вісім замовлень на відправлення товарів: п'ять замовлень у межах країни і три на експорт. Яка ймовірність того, що два взяті навмання замовлення: 1) внутрішні; 2) одне замовлення у межах країни і одне на експорт; 3) на експорт?

6) Із партії, що складається з 30 виробів, серед яких п'ять нестандартних, для контролю вибирається 10 виробів. Знайти імовірність того, що всі 10 виробів будуть стандартними.

7) Магазин отримує товар партіями по 100 штук. Якщо п'ять, взятих навмання зразків відповідають стандартам, партія товару надходить на реалізацію. У черговій партії 8 одиниць товару з дефектом. Яка ймовірність того, що товар надійде в реалізацію?

8) У таблиці наведена характеристика співробітників компанії

Підрозділи	Жінки	Чоловіки
Виробничий відділ	6	20
Бухгалтерія	3	2
Відділ закупок	5	5
Маркетинговий відділ	2	8
Відділ реалізації	5	10

Навмання відібраний один співробітник. Знайти ймовірність того, що це а) жінка; б) співробітник маркетингового відділу; в) чоловік, який працює у виробничому відділі або відділі закупок; г) жінка, що працює у бухгалтерії або відділі реалізації; д) співробітник виробничого відділу або відділу маркетингу.

9) Покупець придбав у магазині побутової техніки мікрохвильову піч та електричний чайник. Ймовірність того, що протягом гарантійного терміну мікрохвильова піч не вийде з ладу – 0,85; а електричний чайник – 0,92. Знайти ймовірність того, що хоча б один із цих приладів витримає гарантійний термін.

10) Імовірність банкрутства для однієї фірми становить 0,4, а для іншої – на 25% менше. Визначити ймовірність того, що збанкрутує хоча б одна з них.

11) На складі зберігаються 800 виробів заводу №1 і 1200 виробів заводу №2. Серед виробів заводу №1 в середньому 95% вищої якості, а серед виробів заводу №2 – 80%. Чому рівна ймовірність того, що перший принесений зі складу виріб виявиться низької якості.

12) У продаж надходять навушники трьох виробників. Продукція першого виробника містить 10% із прихованим дефектом, другого – 5% і третього – 2%. Яка імовірність придбати якісні навушники, якщо в магазин надійшло 30% виробів від першого виробника, 20% – від другого і 50% – від третього?

13) Відомо, що 80% продукції є стандартною. Спрощений контроль визнає як якісну стандартну продукцію з ймовірністю 0,9 і нестандартну з ймовірністю 0,3. Знайти імовірність того, що визнаний якісним виріб є стандартний.

Рекомендована література: основна 1, 2, 3, 4, 5; додаткова 7, 8, 9, 12, 13.

ТЕМА 9
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Основні поняття: випадкова величина, дискретна випадкова величина, неперервна випадкова величина, закон розподілу випадкової величини, ряд розподілу дискретної випадкової величини, функція розподілу випадкової величини, щільність розподілу неперервної випадкової величини, математичне очікування випадкової величини, дисперсія випадкової величини.

План

1. Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини.
2. Закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин.
3. Основні числові характеристики випадкових величин.
4. Прикладні аспекти застосування випадкових величин в теорії управління.

Питання №1
Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини

Випадковою величиною називається величина, яка залежно від результату випробування випадково приймає одне значення з множини можливих значень.

На відміну від випадкової події, яка є якісною характеристикою випадкового результату, випадкова величина характеризує результат випробування кількісно.

Приклад випадкових величин: кількість клієнтів у черзі, число бракованих деталей у партії; час обслуговування одного клієнта, обсяг річного виторгу тощо.

Виділяють *дискретні* та *неперервні випадкові величини*.

Дискретною називається така випадкова величина, яка приймає скінченну або нескінченну зчислену множину значень.

Неперервною називається така випадкова величина, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.

Випадкові величини позначають великими літерами X, Y, …, а їх можливі значення – маленькими літерами x, y тощо.

Щоб задати випадкову величину недостатньо перерахувати всі її можливі значення. Необхідно також знати, як часто можуть з'являтися її значення в результаті випробувань за однакових умов, тобто необхідно знати ймовірності їх появи.

Сукупність усіх можливих значень випадкової величини і відповідних їм ймовірностей складають *розподіл випадкової величини*.

Питання №2
Закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило (таблиця, функція), яке дозволяє знаходити ймовірності можливих подій, пов'язаних із випадковою величиною (наприклад, ймовірність того, що вона прийме яке-небудь значення або попаде в який-небудь інтервал).

Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у вигляді таблиці, у вигляді функції розподілу, у вигляді щільності розподілу.

1) Табличне значення закону розподілу може використовуватися тільки для дискретної випадкової величини.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини X називається таблиця, яка містить усі можливі значення випадкової величини у порядку їх зростання і відповідні цим значенням ймовірності.

Таблиця 9.1 – Ряд розподілу дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2		p_n	

Приклад 1. Компанія проводить заходи стимулювання споживачів із застосуванням грошових виграшів. В акції присутній 1 виграш у 10 000 грн, 10 виграшів по 1000 грн і 100 виграшів по 500 грн при загальній кількості учасників 10 000. Визначити закон розподілу випадкового виграшу *X* для одного учасника.

Можливими значеннями випадкової величини *X* (розмір грошового виграшу) є:

X	$x_1=0$	$x_2=500$	$x_3=1000$	$x_4=10\,000$

Відповідні цим значенням ймовірності будуть дорівнювати

$$p_2 = \frac{100}{10000} = 0{,}01$$
$$p_3 = \frac{10}{10000} = 0{,}001$$
$$p_4 = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$$
$$p_1 = 1 - (p_2 + p_3 + p_4) = 1 - (0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001) =$$
$$= 1 - 0{,}0111 = 0{,}9889$$

Таблиця 9.2 – Ряд розподілу дискретної випадкової величини (розмір виграшу)

X	0	500	1000	10 000
P	0,9889	0,01	0,001	0,0001

2) Найбільш загальною формою задання закону розподілу випадкової величини є функція розподілу, яка може використовуватися як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що вона прийме значення менше, ніж задане x

$$F(x) = P\{X < x\}. \tag{9.1}$$

Властивості функції розподілу:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ (як ймовірність)

2) Функція розподілу випадкової величини є неспадаючою функцією, тобто при $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3) Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[a, b)$ дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a). \tag{9.2}$$

4) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$

Для дискретної випадкової величини X, яка приймає значення $x_1, x_2, \dots, x_n$, функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i). \tag{9.3}$$

Це означає, що функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини є розривною східчастою функцією, стрибки якої відбуваються у точках, які відповідають можливим значенням випадкової величини, і дорівнюють ймовірностям цих значень.

Приклад 2. Кількість проданих холодильників у магазині протягом дня (випадкова величина X) підпорядковується закону розподілу, який заданий у вигляді ряду:

Таблиця 9.3 – Ряд розподілу дискретної випадкової величини (кількість проданих холодильників)

X	0	1	2	3	4
P	0,35	0,3	0,2	0,1	0,05

Знайти функцію розподілу випадкової величини.

1) Нехай $x \leq 0$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = 0.$

2) Нехай $0 < x \leq 1$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = P\{x = 0\} = 0{,}35.$

3) Нехай $1 < x \leq 2$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} =$
$= 0{,}35 + 0{,}3 = 0{,}65.$

4) Нехай $2 < x \leq 3$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} +$
$+P\{x = 2\} = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}85.$

5) Нехай $3 < x \leq 4$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} +$

$$+P\{x = 2\} + P\{x = 3\} = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}95.$$

6) Нехай $x > 4$ $\quad F(x) = P\{X < x\} = P\{x = 0\} + P\{x = 1\} +$

$$+P\{x = 2\} + P\{x = 3\} + P\{x = 4\} = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 = 1{,}0$$

Отже, функція розподілу випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 0{,}35 & 0 < x \le 1 \\ 0{,}65 & 1 < x \le 2 \\ 0{,}85 & 2 < x \le 3 \\ 0{,}95 & 3 < x \le 4 \\ 1{,}0 & x > 4 \end{cases}$$

Неперервна випадкова величина має неперервну функцію розподілу.

3) Як закон розподілу, який має сенс тільки для неперервних випадкових величин, використовується *щільність розподілу* або *щільність ймовірності*.

Щільністю розподілу неперервної випадкової величини X у точці *x* називається похідна від її функції розподілу у цій точці

$$f(x) = F'(x). \tag{9.4}$$

Сутність щільності розподілу $f(x)$ полягає у тому, що вона показує, як часто з'являється випадкова величина *X* у деякому околі точки *x* при повторенні випробувань.

Графік щільності розподілу $f(x)$ називається *кривою розподілу*.

Властивості щільності розподілу $f(x)$:

1) $f(x)$ є невід'ємною функцією (як похідна неспадаючої функції)

$$f(x) \ge 0$$

2) Ймовірність попадання неперервної випадкової величини *X* в інтервал $(a; b)$ дорівнює інтегралу від щільності розподілу, узятому по цьому інтервалу

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x)dx. \tag{9.5}$$

3) Функція розподілу неперервної випадкової величини дорівнює інтегралу від щільності розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{9.6}$$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Приклад 3. Визначити щільність розподілу випадкової величини, якщо задана функція розподілу $F(x)$, а також ймовірність попадання неперервної випадкової величини *X* в інтервал (0,25; 0,5).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

1) За визначенням $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

2) $P\{0{,}25 < X < 0{,}5\} = \int_{0{,}25}^{0{,}5} 2xdx = x^2|_{0{,}25}^{0{,}5} = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875$

Приклад 4. Випадкова величина *X* задана щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}sinx & 0\le x\le \pi.\\ 0 & x>\pi\end{cases}$$

Визначити функцію розподілу випадкової величини X і ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в інтервал $(0;\frac{\pi}{2})$.

1. Використовуємо формулу (9.6)

1) $x<0$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$$

2) $0\le x\le \pi$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}sinxdx=-\frac{1}{2}cosx\Big|_{0}^{x}=$$

$$=-\frac{1}{2}cosx+\frac{1}{2}cos0=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cosx$$

3) $x>\pi$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}sinxdx+\int_{\pi}^{x}0dx=$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}sinxdx=-\frac{1}{2}cosx\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{2}cos\pi+\frac{1}{2}cos0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Отже, функція розподілу випадкової величини має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}cosx & 0\le x\le \pi\\ 1 & x>\pi\end{cases}$$

2. $P\left\{0<X<\frac{\pi}{2}\right\}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}sinxdx=-\frac{1}{2}cosx\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}cos0=0{,}5$

Питання №3
Основні числові характеристики випадкових величин

Кожний закон розподілу повністю характеризує випадкову величину з ймовірнісної точки зору. Однак при розв'язанні деяких практичних задач немає необхідності знати усі можливі значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності. Часто достатньо визначити окремі числові параметри, які характеризують суттєві риси розподілу. Ці числа, які характеризують у стислій формі найбільш суттєві риси розподілу, називаються *числовими характеристиками випадкової величини*.

1) Математичне очікування випадкової величини.

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх її можливих значень на ймовірності цих значень.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i. \quad (9.7)$$

Математичним очікуванням неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу $f(x)$ називається число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (9.8)$$

Математичне очікування часто називають *середнім значенням випадкової величини*.

Математичне очікування неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать інтервалу $(a; b)$, обчислюють за формулою:

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx. \quad (9.9)$$

Властивості математичного очікування:

1) $M(C) = C$, де $C = const$
2) $M(CX) = CM(X)$, де $C = const$
3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X та Y незалежні випадкові величини
5) $M(X - M(X)) = 0$

Приклад 1. Менеджер компанії вирішує, чи варто інвестувати в масштабну рекламну кампанію. Є прогноз аналітиків щодо можливого прибутку залежно від реакції ринку.

Таблиця 9.4 – Прогноз можливого прибутку

Реакція ринку	Прибуток (x_i)	Ймовірність (p_i)
Високий попит	+100 000 дол.	0,3 (30%)
Середній попит	+40 000 дол.	0,5 (50%)
Низький попит	-20 000 (збиток) дол.	0,2 (20%)

Визначити математичне очікування прибутку.

Використовуємо формулу (9.7)

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, p_i = 100000 \cdot 0{,}3 + 40000 \cdot 0{,}5 + (-20000 \cdot 0{,}2) = 46000$$

Необхідно зазначити, що не є гарантією, що фірма отримає саме 46 000 дол. Це середнє значення прибутку, який ви вона отримала, якби реалізовувала подібні проєкти багато разів у однакових умовах.

2) Дисперсія випадкової величини.

За допомогою дисперсії і середньоквадратичного відхилення можна судити про розсіювання випадкової величини відносно її математичного очікування.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування

$$D(X) = M\,[(X - M(X))^2] \quad (9.10)$$

Для дискретної випадкової величини дисперсія розраховується за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i. \quad (9.11)$$

Для неперервної випадкової величини, закон розподілу якої заданий щільністю розподілу $f(x)$, дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx. \quad (9.12)$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що є не завжди зручно. Тому на практиці як характеристику розсіювання більш зручно використовувати число, розмірність якого співпадає з розмірністю випадкової величини, – *середньоквадратичне відхилення*

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \quad (9.13)$$

Властивості дисперсії:

1) $D(C) = 0$, де $C = const$

2) $D(CX) = C^2 D(X)$, де $C = const$

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

4) $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$

5) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

Приклад 2. Використовуючи дані, що наведені у *прикладі 1*, обчислити дисперсію та середньоквадратичне відхилення прибутку.

Використовуємо формулу для визначення дисперсії (9.11)

$$D(X) = \sum_{i=1}^{3}\big(x_i - M(X)\big)^2 \cdot p_i = (100000 - 46000)^2 \cdot 0{,}3 +$$
$$+(40000 - 46000)^2 \cdot 0{,}5 + (-20000 - 46000)^2 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 874\,800\,000 + 18\,000\,000 + 871\,200\,000 = 1\,764\,000\,000 \text{ дол.}$$

Середньоквадратичне відхилення знаходимо за формулою (9.13)

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1\,764\,000\,000} \approx 42\,000 \text{ дол.}$$

Отже, очікуваний прибуток від рекламної кампанії 46 000 дол., а ризик (середньоквадратичне відхилення) – 42 000 дол. Можна зробити висновок, що це дуже ризикований проєкт, оскільки відхилення майже дорівнює самому очікуваному прибутку.

Знаючи математичне очікування і середньоквадратичне відхилення випадкової величини X, можна уявити приблизний діапазон її можливих значень: значення випадкової величини дуже рідко виходять за межі інтервалу $M \pm 3\sigma_x$. Це правило носить назву «Правило 3 σ».

Питання №4
Прикладні аспекти застосування випадкових величин в теорії управління

Застосування випадкових величин у менеджменті та теорії управління перетворює «інтуїтивне передчуття» на математично обґрунтовану стратегію. На практиці менеджер майже ніколи не має 100% впевненості, тому майбутні події розглядаються як випадкові величини:

1. *Управління запасами (моделі складського обліку).*

В теорії управління важливо знайти баланс: не витрачати зайві гроші на зберігання товарів, але й не допустити дефіциту.

Попит на товар протягом дня може прийматися як дискретна випадкова величина. Використовуючи закон розподілу (часто розподіл Пуассона), менеджер розраховує «точку замовлення».

Наприклад, якщо магазин знає, що середній попит на продукцію складає 10 одиниць на день, але з імовірністю 5% він може зрости до 20, менеджер створює «страховий запас». Це мінімізує ризик втраченого прибутку.

2. *Теорія масового обслуговування.*

Це управління чергами та потоками клієнтів (у банках, кол-центрах, на СТО або в IT-системах). Час появи клієнта та час його обслуговування – це неперервні випадкові величини.

Наприклад, менеджер банку має вирішити, скільки кас відкрити в суботу. Розрахувавши математичне очікування довжини черги, він може знайти оптимальну кількість персоналу, щоб час очікування не перевищував, наприклад, 10 хвилин.

3. *Маркетинг.*

У маркетингу основною випадковою величиною є кількість відгуків (лідів) або обсяг продажів після рекламної акції. Поведінка кожного клієнта розглядається як випробування Бернуллі (придбає товар або не придбає товар). При великій кількості відвідувачів використовується біноміальний розподіл.

Біноміальний розподіл є одним з найбільш важливих дискретних розподілів у менеджменті та маркетингу. Він описує кількість «успіхів» у серії незалежних випробувань, в яких може бути лише два варіанти результату: так або ні (купив/не купив, брак/не брак, клікнув/не клікнув).

Ймовірність того, що серед n випробувань буде рівно k успіхів, розраховується за формулою:

$$P\{X = k\} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \tag{9.14}$$

У біноміальному розподілі числові характеристики розраховуються за формулами:

$$M(X) = n \cdot p$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Приклад. Компанія запускає рекламу в Instagram. Відомо, що середній CTR (клікабельність) становить 2% (p=0,02). Планується охопити 10 000 потенційних клієнтів (n).

Математичне очікування кількості кліків:

$$M(X) = n \cdot p = 10000 \cdot 0{,}02 = 200$$

Дисперсія буде дорівнювати:

$$D(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = 10000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 196$$

Середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{196} = 14$$

Отже, в середньому компанія очікує отримати 200 кліків. Якщо компанія отримає 190 кліків, то через відхилення 14 це є прийнятним випадковим коливання. Якщо ж компанія отримає лише 150 кліків, то це означає, що реклама працює значно гірше, ніж очікувалося, і її треба вимикати або змінювати.

4. *Виробництво (час на виконання операції)*.

Як випадкова величина може прийматися час, який робітник витрачає на збірку вузла.

Наприклад, на підприємстві встановлюється нова конвеєрна лінія. Очікуваний час збірки – 5 хвилин, але через людський фактор (втома, затримка деталей) час варіюється. Використовуючи статистику, менеджер може розрахувати такий темп конвеєра, щоб він не зупинявся (наприклад, встановлює темп не 5 хвилин, а 5,5 хвилин, враховуючи стандартне відхилення).

Питання для самоперевірки знань

1. Дайте визначення випадкової величини.
2. Чим відрізняються поняття випадкової події та випадкової величини?
3. Які виділяють випадкові величини?
4. Як може задаватися закон розподілу дискретної випадкової величини?
5. Як може задаватися закон розподілу неперервної випадкової величини?
6. Сформулюйте основні властивості функції розподілу випадкової величини.
7. Назвіть основні властивості щільності розподілу випадкової величини.
8. Які числові характеристики випадкових величин ви знаєте?
9. Що характеризує математичне очікування випадкової величини?
10. Що характеризують дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкової величини?

Тести

1. Випадкова величина, яка приймає скінченну або нескінченну зчислену множину значень, має назву:

а. Неперервна.

б. Дискретна.

в. Комбінована.

г. Інтервальна.

2. Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у вигляді:

а. Ряду розподілу.

б. Функції розподілу.

в. Щільності розподілу.

г. Усі відповіді правильні.

3. Для неперервної випадкової величини закон розподілу може бути заданий у вигляді:

а. Ряду розподілу.

б. Функції розподілу.

в. Щільності розподілу.

г. Правильні відповіді б), в).

4. До основних числових характеристик випадкових величин відносять:

а. Математичне очікування.

б. Дисперсію.

в. Середньоквадратичне відхилення.
г. Усі відповіді правильні.

5. Значення випадкової величини дуже рідко виходять за межі інтервалу:

а. $M \pm \sigma_x$.
б. $M \pm 2\sigma_x$.
в. $M \pm 3\sigma_x$.
г. $M \pm 4\sigma_x$.

<u>Завдання для самостійного виконання</u>

1) Менеджер компанії вирішує, чи варто вкладати гроші в масштабну рекламну кампанію. Прогноз аналітиків щодо можливого прибутку залежно від реакції ринку наведено в таблиці.

Реакція ринку	Прибуток (x_i)	Ймовірність (p_i)
Високий попит	+150 000 дол	0,28 (28%)
Середній попит	+60 000 дол	0,5 (50%)
Низький попит	-23 000 (збиток) дол	0,22 (22%)

Визначити математичне очікування прибутку.

2) Є два постачальники деталей. Кількість бракованих деталей у кожній партії для них описується випадковими величинами *X* та *Y*. Обидва постачальники мають однакове середнє значення браку – 5 одиниць на партію. Проте дисперсія для першого постачальника *D(X)* = 0,4, а для другого D*(Y)* = 2,5. Поясніть із точки зору менеджменту, який постачальник є більш надійним. Що означає висока дисперсія в контексті стабільності виробничого процесу?

3) Час *T* (у хвилинах), який витрачає менеджер на одного відвідувача, є неперервною випадковою величиною з функцією розподілу *F(t)*

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \dfrac{t^2}{400} & 0 < t \le 20 \\ 1 & t > 20 \end{cases}$$

1. Знайти ймовірність того, що клієнт буде обслуговуватися менше ніж 10 хвилин. 2. Знайти ймовірність того, що обслуговування триватиме від 5 до 15 хвилин.

4) Магазин замовив 3 одиниці дорогого товару. Кількість проданих одиниць *X* за тиждень має такий закон розподілу

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Обчислити математичне очікування *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ_x. Якщо кожна продана одиниця приносить 1000 грн прибутку, а кожна непродана (залишок) коштує 200 грн збитку (за зберігання), обчислити очікуваний фінансовий результат.

5) Відділ маркетингу запускає рекламу нового продукту. Очікується, що з ймовірністю 0,3 вона принесе додатковий дохід у 200 000 грн, з ймовірністю 0,5 – 50 000 грн, а з ймовірністю 0,2 витрати на рекламу не окупляться і компанія отримає збиток у 30 000 грн.

Обчислити очікуваний середній дохід від цієї рекламної кампанії.

6) Час X (у місяцях), протягом якого специфічний товар зберігає свої властивості на складі, описується щільністю розподілу $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}2e^{-0{,}2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ та обчислити ймовірність того, що товар зіпсується протягом перших 5 місяців зберігання.

Рекомендована література: основна 1, 2, 3, 4, 5; додаткова 7, 8, 9, 12, 13.

ПИТАННЯ ДЛЯ ЗАКРІПЛЕННЯ ТА АКТУАЛІЗАЦІЇ ЗНАНЬ

1. Визначення матриці.
2. Види матриць.
3. Операції над матрицями.
4. Застосування матриць у прикладних задачах з управління.
5. Поняття визначника.
6. Правила обчислення визначників 2-го та 3-го порядків.
7. Властивості визначників.
8. Мінор та алгебраїчне доповнення.
9. Правило обчислення визначників вищих порядків.
10. Обернена матриця.
11. Алгоритм визначення оберненої матриці.
12. Поняття системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).
13. Метод Крамера розв'язання СЛАР.
14. Матричний метод розв'язання СЛАР.
15. Ранг матриці.
16. Розв'язання СЛАР методом Гауса.
17. Границя числової послідовності.
18. Границя функції.
19. Перша особлива границя.
20. Друга особлива границя.
21. Правила диференціювання функції.
22. Похідна складної функції.
23. Похідні функції вищих порядків.
24. Правило Лопіталя розкриття невизначеності границі функції.
25. Прикладні аспекти застосування похідної функції однієї змінної в задачах управління.
26. Поняття частинної похідної функції двох змінних.
27. Частинні похідні вищих порядків функції двох змінних.
28. Поняття екстремуму функції двох змінних.
29. Необхідна та достатня умови існування екстремуму функції двох змінних.
30. Невизначений інтеграл та його властивості.
31. Основні методи інтегрування.
32. Визначений інтеграл.
33. Властивості визначеного інтеграла.
34. Невласні інтеграли.
35. Поняття збіжності невласних інтегралів.
36. Алгебра подій.
37. Елементи комбінаторики.
38. Класичне визначення ймовірності.
39. Ймовірності несумісних та сумісних подій.
40. Ймовірності залежних та незалежних подій.

41. Формула повної ймовірності.
42. Формула Байєса.
43. Поняття випадкової величини.
44. Дискретні та неперервні випадкові величини.
45. Ряд розподілу дискретної випадкової величини.
46. Функція розподілу випадкових величин.
47. Щільність розподілу неперервної випадкової величини.
48. Основні числові характеристики випадкових величин.
49. Математичне очікування випадкової величини.
50. Дисперсія та середньоквадратичне відхилення випадкової величини.

ГЛОСАРІЙ

Алгебраїчне доповнення $\boldsymbol{A_{ij}}$ елемента визначника a_{ij} – це мінор M_{ij}, який узятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

Визначена система – система, яка має тільки один розв'язок.

Визначник n-го порядку, який відповідає квадратній матриці A, – це число, яке знаходиться за певним правилом.

Випадкова величина – це величина, яка залежно від результату випробування випадково приймає одне значення з множини можливих значень.

Випадкова подія – це будь-який результат експерименту (випробування), який за одних і тих самих умов може відбутися, а може й ні.

Дискретна випадкова величина – це випадкова величина, яка приймає скінченну або нескінченну зчислену множину значень.

Диференціювання – процес визначення похідної функції.

Достовірна (вірогідна) подія – це подія, яка обов'язково відбудеться в умовах експерименту (випробування).

Залежні **події** – такі події, що поява однієї з них змінює ймовірність появи іншої.

Інтегрування функції – процес визначення первісної або невизначеного інтеграла.

Ймовірністю **події** ***А*** – це відношення числа сприятливих випадків настання події *А* до числа усіх можливих випадків.

Квадратна матриця – матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців.

Комбінації – це сполуки, які складаються з k елементів, вибраних із множини *n* елементів, якщо порядок вибору не має значення.

Матриця розмірності $m \times n$ – це сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді таблиці, яка складається з m рядків і n стовпців.

Мінор $\boldsymbol{M_{ij}}$ елемента визначника a_{ij} – це визначник, який одержаний з початкового визначника шляхом викреслювання i – го рядка та j – го стовпця, на перетинанні яких стоїть елемент a_{ij}.

Невизначена система – система, яка має більше одного розв'язку.

Невироджена матриця – квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю.

Невласний інтеграл – інтеграл, для якого не виконується умова обмеженості підінтегральної функції або скінченності границь інтегрування.

Незалежні події – це такі події, що поява однієї з них не змінює ймовірність появи іншої.

Неможлива подія – подія, яка ніколи не відбудеться в умовах експерименту (випробування).

Неперервна випадкова величина – це випадкова величина, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.

Несумісна система – система, яка не має розв'язків.

Несумісні **події** – події, які не можуть відбутися одночасно.

Одинична матриця – квадратна матриця, в якій на головній діагоналі стоять 1, а всі інші елементи дорівнюють 0.

Перестановка з n елементів – кількість способів розставити ці елементи в певному порядку між собою.

Повна група подій – це така сукупність випадкових подій, що в результаті кожного випробування обов'язково відбудеться хоча б одна з них.

Ранг матриці – максимальна кількість її лінійно незалежних рядків.

Розміщення – це сполуки, які складаються з k елементів, вибраних із множини n елементів, де порядок цих елементів є важливим (або кількість способів розставити n елементів на k місць).

Розподіл випадкової величини – сукупність усіх можливих значень випадкової величини і відповідних їм ймовірностей.

Ряд розподілу дискретної випадкової величини – це таблиця, яка містить усі можливі значення випадкової величини у порядку їх зростання і відповідні цим значенням ймовірності.

Сумісна система – це система, яка має хоча б один розв'язок.

Функція розподілу випадкової величини – це ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше, ніж задане x.

Частинна похідна функції двох змінних по будь-якій змінній у точці – це похідна по цій змінній у припущенні, що інша змінна є фіксованою (сталою).

Числова послідовність – функція, яка визначена на множині натуральних чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Щільність розподілу неперервної випадкової величини X у точці x – це похідна від її функції розподілу у цій точці.

ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Борисовська Ю. О., Козлова О. С., Лисенко О. А., Тархова В. М. Вища та прикладна математика : методичні вказівки до виконання індивідуального завдання для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Менеджмент». Запоріжжя : ЗНУ, 2011. 77 с.

2. Борисовська Ю. О., Козлова О. С., Лисенко О. А., Тархова В. М. Вища та прикладна математика : навчально-методичний посібник до практичних занять для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Менеджмент». Запоріжжя : ЗНУ, 2012. 190 с.

3. Олійник О. М., Головань О. О., Куторницька О. А., Олійник М. О. Аналітичний підхід до розв'язання багатопродуктової статичної моделі управління запасами з обмеженою місткістю складу. *Електронне наукове видання «Менеджмент та підприємництво: тренди розвитку»*. 2024. №4 (30). С. 58–68. URL: https://doi.org/10.26661/2522-1566/2024-4/30-05.

4. Толок В. О., Киричевський В. В., Волкова Т. Д. Курс математики для економістів : навчальний посібник в трьох частинах. Київ : Наукова думка, 2002. Ч.1. 336 с.

5. Толок В. О., Киричевський В. В., Волкова Т. Д. Курс математики для економістів : навчальний посібник в трьох частинах. Київ : Наукова думка, 2002. Ч.2. 413 с.

6. Толок В. О., Киричевський В. В., Волкова Т. Д. Курс математики для економістів : навчальний посібник в трьох частинах. Київ : Наукова думка, 2002. Ч.3. 211 с.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 448 с.
2. Веригіна І. В., Островська О. В., Сугакова О. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : лекції і практикум. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 254 с.
3. Мандражи О. А. Вища математика для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої освіти галузі знань 07 «Управління та адміністрування» спеціальності 073 «Менеджмент» : навчальний посібник. Харків : ХНАУ, 2021. 127 с.
4. Менеджмент міжнародного бізнесу в умовах Індустрії 4.0 : колективна монографія / за заг. ред. Д. Т. Бікулова, О. М. Олійника. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2024. 424 с.
5. Сучасні вектори розвитку менеджменту міжнародного бізнесу : колективна монографія / за заг. ред. Д. Т. Бікулова, О. М. Олійника. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2023. 446 с.
6. Сучасні концепції бізнес-адміністрування : колективна монографія / за заг. ред. Д. Т. Бікулова, О. М. Олійника. Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2022. 352 с.

Додаткова:

1. Бікулов Д. Т., Головань О. О., Олійник О. М., Маркова С. В., Шупшинська К. С., Маказан Є. В., Сухарева К. В. Optimization of Inventory Management Models with Variable Input Parameters by Perturbation Methods. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2020. Т. 3. №3(105). С. 6–15. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.204231.
2. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. 184 с.
3. Головань О. О. Моделювання та оптимізація бізнес-процесів на підприємствах за допомогою асимптотичних методів. У кн.: Бікулов Д. Т., Олійник О. М., Маркова С. В. Сучасні концепції бізнес-адміністрування / за заг. ред. Д. Т. Бікулова, О. М. Олійника. Запоріжжя : Запорізький національний університет. 2022. С. 120–159.
4. Головань О. О., Олійник О. М., Кривега Л. Д., Сербіненко Н. В., Кривенко О., Гаркуша В. Optimization of logistics business processes by perturbation methods. У кн.: Sustainable geospatial development of natural and economic systems in Ukraine / за заг. ред. Л. А. Горошкової, Є. В. Хлобистова. Bilostok : Bilostok. 2020. С. 174-191.
5. Головань О. О., Олійник О. М., Сухарева К. В., Бікулов Д. Т., Воробйова С. І. Асимптотична модель оптимізації імпортних закупок на підприємствах харчової галузі в умовах зміни логістичних витрат. *Актуальні*

питання економічних наук. 2025. № 9. С. 1–18. URL: https://doi.org/10.5281/zenodo.15189366.

6. Горошкова Л. А., Хлобистов Є. В., Волков В. П., Головань О. О., Маркова С. В., Олійник О. М. Asymptotic Methods in Optimization of Multi-Item Inventory Management Model. CEUR Workshop Proceedings. 2020. Т. 2713. С. 393–414. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2713/paper45.pdf.

7. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика : практикум. Київ : Центр учбової літератури, 2023. 536 с.

8. Литвин І., Конончук О., Желізняк Г. Вища математика. Київ : Центр учбової літератури, 2021. 368 с.

9. Математичні моделі в менеджменті та маркетингу : навчальний посібник / за заг. ред. О. В. Кузьменко. Суми : Видавництво «Ярославна», 2020, 214 с.

10. Олійник О. М., Головань О. О., Куторницька О. А., Воробйова С. І. Моделювання та інжиніринг бізнес-процесів закупівель з використанням асимптотичних методів. *Management and entrepreneurship: trends of development*. 2025. № 1(31). С. 67-78. URL: https://doi.org/10.26661/2522-1566/2025-1/31-06.

11. Олійник О. М., Головань О. О., Куторницька О. А., Олійник М. О. Аналітичний підхід до розв'язання багатопродуктової статичної моделі управління запасами з обмеженою місткістю складу. *Електронне наукове видання «Менеджмент та підприємництво: тренди розвитку»*. 2024. №4 (30). С. 58–68. URL: https://doi.org/10.26661/2522-1566/2024-4/30-05.

12. Habrusiev H. V. Habrusieva I. Yu., Shelestovskyi B. H. Higher Mathematics. Part 1: Linear Algebra, Vector Algebra and Analitical Geometry. Ternopil : SMP «TAYP», 2021 84 p.

13. Ganna V. Zhuravska. Higher Mathematics. Differential Calculus of a Function of One Variable. Elements of Theory. Kyiv : Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2019. 81 p.

Інформаційні ресурси:

1. Головне управління статистики у Запорізькій області. URL: https://www.zp.ukrstat.gov.ua/ (дата звернення: 08.01.2026).

2. Дії над матрицями. URL: https://www.youtube.com/watch?v=4H9IZUgOMdA (дата звернення: 08.01.2026)

3. Запорізька обласна державна адміністрація. URL: http://www.zoda.gov.ua (дата звернення: 08.01.2026).

4. Запорізька торгово-промислова палата. URL: https://www.cci.zp.ua/ (дата звернення: 08.01.2026).

5. Інтегрування частинами -1. Основні типи інтегралів, що беруться частинами. URL: https://www.youtube.com/watch?v=jViWkxK8-Mc&list=PLMzgn5yIXA5dfEDUvwJufHTGHVi5wuL__&index=4 (дата звернення: 08.01.2026)

6. Логістика в Україні. URL : https://logistics-ukraine.com/ (дата звернення: 08.01.2026).

7. Офіційний сайт державної служби статистики України. URL: https://www.ukrstat.gov.ua/ (дата звернення: 08.01.2026)
8. Первісна функція і невизначений інтеграл. URL: https://www.youtube.com/watch?v=binzROlv4bA&list=PLMzgn5yIXA5dfEDUvwJ ufHTGHVi5wuL__&index=1 (дата звернення: 08.01.2026)
9. Приклади. Інтегрування зведенням безпосередньо до табличних інтегралів. URL: https://www.youtube.com/watch?v=VLFUJLS7lpM&list=PLMzgn5yIXA5dfEDUvw JufHTGHVi5wuL__&index=2 (дата звернення: 08.01.2026)
10. Приклади. Інтегрування підстановкою. Внесення під диференціал. URL: https://www.youtube.com/watch?v=mipzqt2F7D8&list=PLMzgn5y IXA5dfEDUvw JufHTGHVi5wuL__&index=3 (дата звернення: 08.01.2026)

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Головань Ольга Олексіївна
Олійник Олександр Миколайович
Бікулов Дамір Тагірович
Маркова Світлана Вікторівна
Сухарева Катерина Володимирівна
Маказан Євгенія Василівна

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ МЕНЕДЖМЕНТУ

Навчальний посібник
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Менеджмент»
галузі знань «Бізнес, адміністрування та право»

Рецензент *О. С. Верітова*
Відповідальний за випуск *Д. Т. Бікулов*
Коректор *О. О. Головань*