

Тема 9. Випадкові величини

Питання №1

Поняття випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини

Випадковою величиною називається величина, яка залежно від результату випробування випадково приймає одне значення з множини можливих значень.

На відміну від випадкової події, яка є якісною характеристикою випадкового результату, випадкова величина характеризує результат випробування кількісно.

Приклад випадкових величин: кількість клієнтів у черзі, число бракованих деталей у партії; час обслуговування одного клієнта, обсяг річного виторгу тощо.

Виділяють *дискретні та неперервні випадкові величини*.

Дискретною називається така випадкова величина, яка приймає скінченну або нескінченну зчислену множину значень.

Неперервною називається така випадкова величина, яка може приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.

Випадкові величини позначають великими літерами X, Y, \dots , а їх можливі значення – маленькими літерами x, y тощо.

Щоб задати випадкову величину недостатньо перерахувати всі її можливі значення. Необхідно також знати, як часто можуть з'явитися її значення в результаті випробувань за однакових умов, тобто необхідно знати ймовірності їх появи.

Сукупність усіх можливих значень випадкової величини і відповідних їм ймовірностей складають *розподіл випадкової величини*.

Питання №2

Закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке правило (таблиця, функція), яке дозволяє знаходити ймовірності можливих подій, пов'язаних із випадковою величиною (наприклад, ймовірність того, що вона прийме яке-небудь значення або попаде в який-небудь інтервал).

Закон розподілу випадкової величини може бути заданий у вигляді таблиці, у вигляді функції розподілу, у вигляді щільності розподілу.

1) Табличне значення закону розподілу може використовуватися тільки для дискретної випадкової величини.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини X називається таблиця, яка містить усі можливі значення випадкової величини у порядку їх зростання і відповідні цим значенням ймовірності.

Таблиця 1 – Ряд розподілу дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2		p_n	

2) Найбільш загальною формою задання закону розподілу випадкової величини є функція розподілу, яка може використовуватися як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що вона прийме значення менше, ніж задане x

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (9.1)$$

Властивості функції розподілу:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ (як ймовірність)

2) Функція розподілу випадкової величини є неспадаючою функцією, тобто при $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3) Ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[a, b)$ дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу, тобто

$$P\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a). \quad (9.2)$$

4) $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

Для дискретної випадкової величини X , яка приймає значення x_1, x_2, \dots, x_n , функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i). \quad (9.3)$$

Це означає, що функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини є розривною східчастою функцією, стрибки якої відбуваються у точках, які відповідають можливим значенням випадкової величини, і дорівнюють ймовірностям цих значень.

Неперервна випадкова величина має неперервну функцію розподілу.

3) Як закон розподілу, який має сенс тільки для неперервних випадкових величин, використовується *щільність розподілу* або *щільність ймовірності*.

Щільністю розподілу неперервної випадкової величини X у точці x називається похідна від її функції розподілу у цій точці

$$f(x) = F'(x). \quad (9.4)$$

Сутність щільності розподілу $f(x)$ полягає у тому, що вона показує, як часто з'являється випадкова величина X у деякому околі точки x при повторенні випробувань.

Графік щільності розподілу $f(x)$ називається *кривою розподілу*.

Властивості щільності розподілу $f(x)$:

1) $f(x)$ є невід'ємною функцією (як похідна неспадаючої функції)

$$f(x) \geq 0$$

2) Ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в інтервал $(a; b)$ дорівнює інтегралу від щільності розподілу, узятому по цьому інтервалу

$$P\{a < X < b\} = \int_a^b f(x) dx. \quad (9.5)$$

3) Функція розподілу неперервної випадкової величини дорівнює інтегралу від щільності розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (9.6)$$

4) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Питання №3
Основні числові характеристики випадкових величин

Кожний закон розподілу повністю характеризує випадкову величину з ймовірнісної точки зору. Однак при розв'язанні деяких практичних задач немає необхідності знати усі можливі значення випадкової величини і відповідні їм ймовірності. Часто достатньо визначити окремі числові параметри, які характеризують суттєві риси розподілу. Ці числа, які характеризують у стислій формі найбільш суттєві риси розподілу, називаються *числовими характеристиками випадкової величини*.

1) Математичне очікування випадкової величини.

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх її можливих значень на ймовірності цих значень.

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (9.7)$$

Математичним очікуванням неперервної випадкової величини X з щільністю розподілу $f(x)$ називається число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \quad (9.8)$$

Математичне очікування часто називають *середнім значенням випадкової величини*.

Математичне очікування неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать інтервалу $(a; b)$, обчислюють за формулою:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx. \quad (9.9)$$

Властивості математичного очікування:

1) $M(C) = C$, де $C = const$

2) $M(CX) = CM(X)$, де $C = const$

3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X та Y незалежні випадкові величини

5) $M(X - M(X)) = 0$

2) Дисперсія випадкової величини.

За допомогою дисперсії і середньоквадратичного відхилення можна судити про розсіювання випадкової величини відносно її математичного очікування.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне очікування квадрата відхилення випадкової величини від її математичного очікування

$$D(X) = M [(X - M(X))^2] \quad (9.10)$$

Для дискретної випадкової величини дисперсія розраховується за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i. \quad (9.11)$$

Для неперервної випадкової величини, закон розподілу якої заданий щільністю розподілу $f(x)$, дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \quad (9.12)$$

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що є не завжди зручно. Тому на практиці як характеристику розсіювання більш зручно використовувати число, розмірність якого співпадає з розмірністю випадкової величини, – *середньоквадратичне відхилення*

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}. \quad (9.13)$$

Властивості дисперсії:

- 1) $D(C) = 0$, де $C = \text{const}$
- 2) $D(CX) = C^2 D(X)$, де $C = \text{const}$
- 3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$
- 4) $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$
- 5) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$