ТЕМА 8
ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

<u>Питання №1</u>
<u>Алгебра подій</u>

Випадкова подія – це будь-який результат експерименту (випробування), який за одних і тих самих умов може відбутися, а може й ні.

Події позначаються великими літерами A, B, C,…

Події класифікують залежно від того, наскільки гарантована їхня поява:

1) *достовірна (вірогідна) подія* – це подія, яка обов’язково відбудеться в умовах експерименту (випробування);

2) *неможлива подія* – подія, яка ніколи не відбудеться в умовах експерименту (випробування).

Події називаються *несумісними*, якщо вони не можуть відбутися одночасно, поява однієї з них виключає можливість появи інших.

Події називаються *сумісними*, якщо вони можуть відбутися одночасно.

Подія, яка відбувається у тому випадку, коли не відбувається подія A, називається *протилежною подією* і позначається $\bar{A}$.

Повна група подій – це така сукупність випадкових подій, що в результаті кожного випробування обов’язково відбудеться хоча б одна з них. Тобто це перелік усіх можливих варіантів розвитку подій, які тільки можуть статися в конкретній ситуації. Поза цією групою нічого іншого відбутися не може.

Окремим випадком повної групи є протилежні події A та $\bar{A}$. Вони завжди утворюють повну групу несумісних подій.

Сумою (об’єднанням) декількох випадкових подій називається подія, яка полягає у здійсненні хоча б однієї з даних подій, тобто або A, або B, або A і B разом:

$$A + B = C.$$

Якщо події A і B несумісні, то сума вказує на те, що відбудеться тільки одна з них.

Добутком подій (перетином) A і B – називається подія C, яка полягає в тому, що обидві події обов’язково відбудуться:

$$A \times B = C.$$

Приклад. Деяка фірма-постачальник реалізує товар трьом різним фірмам-покупцям. Події A_1, A_2, A_3 – відповідна фірма-покупець одержує товар у встановлений термін. Записати події:

1) товар в установлений термін одержить хоча б одна фірма

$$A_1 + A_2 + A_3 = C \text{ (оскільки події сумісні);}$$

2) товар в установлений термін одержать усі фірми

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = C;$$

3) товар в установлений термін одержить тільки третя фірма

$$\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times A_3 = C;$$

4) тільки одна фірма одержить товар в установлений термін

$$A_1 \times \overline{A_2} \times \overline{A_3} + \overline{A_1} \times A_2 \times \overline{A_3} + \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times A_3 = C.$$

Питання №2
Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає способи підрахунку кількості варіантів вибору або розміщення елементів множини.

Нехай потрібно виконати послідовно дві дії. Якщо перша дія виконана m різними способами, а друга – n різними способами, то обидві дії можна виконати $m \times n$ різними способами. Якщо ж потрібно послідовно виконати три дії, причому перша дія може бути виконано m способами, друга – n способами і третя – k способами, тоді три дії можна виконати $m \times n \times k$ способами.

Загальне правило комбінаторики (правило множення): нехай потрібно послідовно виконати n дій, причому перша дія може бути виконана m_1 способами, друга – m_2 способами тощо, нарешті n-а дія – m_n способами. Тоді число всіх способів, якими можна виконати ці n дій

$$S_n = m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_n. \qquad (8.1)$$

У комбінаториці виділяють три основні типи сполук: *перестановки*, *розміщення* та *комбінації*.

Перестановкою з n елементів називається кількість способів розстановки цих елементів у певному порядку між собою.

Число всіх різних перестановок з n елементів дорівнює n факторіал, тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Число всіх перестановок з n елементів позначають P_n:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (8.2)$$

Приклад 1. Керівник відділу маркетингу запланував провести 6 індивідуальних зустрічей (one-to-one) зі своїми підлеглими. Він вирішив провести всі зустрічі одну за одною без перерв. Скількома різними способами менеджер може скласти графік цих зустрічей (тобто визначити черговість підлеглих)?

У нас n=6 об’єктів (співробітників). Ми використовуємо всіх співробітників. Порядок важливий, оскільки графік «Олександр Миколайович перший, Ольга Олексіївна друга» відрізняється від графіка «Ольга Олексіївна перша, Олександр Миколайович другий». Оскільки ми переставляємо всі елементи множини, використовуємо формулу перестановки (8.2):

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Отже, менеджер може скласти 720 різних варіантів графіка зустрічей зі співробітниками.

Розміщення (або варіації) – це сполуки, які складаються з k елементів, обраних із множини n елементів, де порядок цих елементів є важливим (або кількість способів розставити n елементів на k місць).

Головна відмінність розміщень від комбінацій полягає в тому, що якщо ми просто поміняємо обрані об’єкти місцями, то отримаємо вже нову сполуку.

Число всіх розміщень із n елементів по k обчислюється за формулою

$$A_n^k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ співмножників}}. \qquad (8.3)$$

або

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (8.4)$$

Приклад 2. У відділі працює 10 співробітників. Потрібно обрати керівника проєкту та його асистента. Визначити кількість варіантів такого призначення.

Оскільки треба обрати 2 співробітників з 10, причому порядок є важливим, то використовуємо розміщення

$$A_{10}^2 = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{8!\cdot 9\cdot 10}{8!} = 9\cdot 10 = 90.$$

Отже, існує 90 способів такого призначення.

Комбінації – це сполуки, які складаються з k елементів, обраних із множини n елементів, якщо порядок вибору не має значення.

Це ключова відмінність від розміщень. У комбінаціях важливо лише те, які саме елементи потрапили до групи, а не те, у якій послідовності їх обирали.

Число всіх комбінацій з n елементів по k обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (8.5)$$

Приклад 3. У відділі маркетингу працює 8 фахівців. Для участі у виставці потрібно обрати команду з 3 осіб. Скількома способами це можна зробити?

Використовуємо комбінацію, оскільки в цьому випадку важливо лише перебування в команді

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!\,3!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{5!\,6\cdot 7\cdot 8}{5!\,1\cdot 2\cdot 3} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 7\cdot 8 = 56$$

Питання №3
Класичне визначення ймовірності

Число, яке є мірою об’єктивної можливості того, що подія відбудеться, називається її *ймовірністю*.

Ймовірність події позначають $P(A)$.

Відношення числа сприятливих випадків настання події A до числа усіх можливих випадків називається *ймовірністю* події A

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (8.6)$$

де m – число випробувань, в яких подія A наступила;

n – загальне число випробувань.

Формула (8.6) називається *формулою класичної ймовірності*.

Ймовірність будь-якої події не може бути від’ємною або більше одиниці, отже $0 \le P(A) \le 1$, причому $P(A) = 0$, якщо подія A – неможлива, а $P(A) = 1$ якщо A – вірогідна подія.

Ймовірність протилежної події до події A *визначається за формулою:*

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A). \quad (8.7)$$

Приклад 1. У кадровому резерві є 10 кандидатів: 6 чоловіків і 4 жінки. Потрібно сформувати групу з 3 осіб для аудиту. Яка ймовірність того, що до групи потраплять лише жінки? Яка ймовірність того, що у групі буде хоча б один чоловік?

Загальна кількість способів обрати 3 особи з 10:

$$C_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!\,3!} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{7!\,8\cdot 9\cdot 10}{7!\,1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Кількість способів обрати 3 жінки з 4-х наявних:

$$C_{4}^{3} = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{3!\cdot 4}{3!} = 4$$

Ймовірність того, що у групі будуть усі жінки

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033 \text{ (приблизно 3,3\%)}$$

Подія, що у групі буде хоча б один чоловік, є протилежною до події, коли в групі будуть усі жінки.

Отже, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}033 = 0{,}967$ (приблизно 96,7%).

Питання №4
Ймовірності несумісних та сумісних, залежних та незалежних подій

Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає можливість появи іншої в одному і тому ж випробуванні. Вони не можуть статися одночасно.

Ймовірність суми скінченного числа несумісних подій (A_1, A_2, …, A_n) дорівнює сумі їхніх ймовірностей.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).. \qquad (8.8)$$

Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

$$P(A + B + C + \ldots + M) = 1. \qquad (8.9)$$

Приклад 2. Компанія вирішує, яким транспортом доставити товар. Варіант A: доставка морем (ймовірність обрання – 0,5); варіант B: доставка залізницею (ймовірність – 0,3); варіант C: доставка автомобільним транспортом (ймовірність – 0,15), варіант D : доставка авіаційним транспортом (ймовірність – 0,05). Визначити ймовірність того, що доставка товару відбудеться наземним транспортом.

Події A, B, C, D є несумісними. Подія, що товар буде відправлено наземним транспортом, об'єднує дві події: доставка залізницею або доставка авто. Ймовірність цієї події визначається за формулою (8.8):

$$P(B+C) = P(B) + P(C) = 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}45$$

Події називаються *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появи іншої. Тобто вони можуть відбутися одночасно.

Оскільки події можуть перетинатися, то для визначення ймовірності суми (об'єднання) цих подій треба відняти ймовірність їх спільної появи, щоб не порахувати її двічі.

Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх добутку, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \times B). \qquad (8.10)$$

Приклад 3. Компанія запускаєте нову лінійку товарів і хоче оцінити охоплення аудиторії. Подія A: клієнт дізнався про товар із реклами в Instagram ($P(A)$=0,6). Подія B: клієнт дізнався про товар через «сарафанне радіо» ($P(B)$=0,4). Ймовірність того, що клієнт бачив рекламу в Instagram і чув про товар від друга $P(A\times B)$=0,2. Визначити ймовірність того, що клієнт бачив рекламу.

Події є сумісними. Згідно з формулою (8.10) маємо

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A\times B)=0,6+0,4-0,2=0,8.$$

Тобто 80% цільової аудиторії компанії охоплено хоча б одним каналом комунікації.

Події A та B називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не змінює ймовірність появи іншої.

Ймовірність добутку двох і більше незалежних подій дорівнює добутку їхніх ймовірностей

$$P(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n). \qquad (8.11)$$

Приклад 4. Компанія має два заводи в різних країнах: один у Польщі, інший у В’єтнамі. Подія A: страйк працівників у Польщі ($P(A)$ = 0,05). Подія B: тайфун у В’єтнамі ($P(B)$ = 0,1). Визначити ймовірність того, що обидва заводи зупиняться одночасно.

Події A і B є незалежними. Ймовірність того, що обидва заводи зупиняться одночасно, дорівнює добутку ймовірностей подій A і B:

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B)=0,05\times 0,1=0,005 \ (0,5\%).$$

Події називаються *залежними*, якщо поява однієї з них змінює ймовірність появи іншої. Тут з’являється поняття *умовної ймовірності*.

Ймовірність події A знайдена в припущенні, що подія B наступила, називається *умовною ймовірністю* події A щодо події B і позначається $P_B(A)$.

Ймовірність добутку двох залежних подій (або ймовірність сумісної появи двох залежних подій) A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої

$$P(A \times B) = P(A) \times P_A(B), \qquad (8.12)$$

або

$$P(A \times B) = P(B) \times P_B(A). \qquad (8.13)$$

Приклад 5. Ймовірність того, що партія товару має дефект, становить $P(B)$=0,1 (10%). Якщо партія має дефект, ймовірність того, що клієнт поверне товар і залишить негативний відгук (подія A), становить $P_B(A)$=0,8 (80%). Якщо партія не має дефектів, ймовірність того, що клієнт все одно залишить негативний відгук (наприклад, через довгу доставку), складає 0,05 (5%). Яка ймовірність того, що відбудуться обидві події одночасно: партія буде дефектною і компанія отримаєте негативний відгук?

$$P(A \times B) = P(B) \times P_B(A) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08 \ (\%)$$

Отже, ймовірність того, що компанія випустить браковану партію і отримаєте за це публічну скаргу, становить 8%.

Приклад 6. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити оргкомітет із трьох чоловік. Яка ймовірність того, що всі троє, які увійдуть в оргкомітет, є бухгалтери.

Позначимо події

A_1 – перший бухгалтер, який увійде в оргкомітет;

A_2 – другий бухгалтер, який увійде в оргкомітет;

A_3 – третій бухгалтер, який увійде в оргкомітет.

$B = A_1 \times A_2 \times A_3$ – три бухгалтери, які увійдуть в оргкомітет.

$$P(B) = P(A_1 \times A_2 \times A_3) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \times A_2}(A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56},$$

або $$P(B) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}.$$

Питання №5

Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Прикладні аспекти застосування формул повної ймовірності і Байєса в теорії управління

Формула повної ймовірності використовується у менеджменті для прогнозування та оцінки загальних шансів на успіх, а формула Байєса – для аналізу причин того, що вже сталося, та коригування планів.

Знайдемо ймовірність деякої події A, що може відбутися разом з однією з подій H_1, H_2, …, H_n, що утворюють повну групу подій. Будемо називати ці події *гіпотезами*.

Ймовірність події A обчислюється як сума добутків ймовірності кожної гіпотези на умовну ймовірність події A за цієї гіпотези, тобто

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A), \qquad (8.14)$$

де $P(H_i)$ – апріорна ймовірність того, що справдиться H_i гіпотеза;

$P_{H_i}(A)$ – ймовірність події A за умови, що гіпотеза H_i відбулася.

Формула повної ймовірності застосовується у таких сферах управління:

– *управління ланцюгами поставок*: визначення ймовірності затримки товару через процедури на митниці, на складі або через погодні умови;

– *HR-менеджмент*: визначення ймовірності того, що новий працівник пройде випробувальний термін, враховуючи різні рівні його початкової підготовки;

– *маркетинг*: розрахунок конверсії сайту, де відвідувачі приходять із різних джерел (соцмережі, пошук, реклама), кожне з яких має свою специфічну ймовірність покупки.

Приклад 7. Компанія планує випустити новий смартфон. Успіх продажу (подія A) залежить від економічної ситуації в країні:

1) Відомі гіпотези (стани ринку):

H_1 – економічне зростання, $P(H_1) = 0{,}3$;

H_2 – стабільність, $P(H_2) = 0{,}5$;

H_3 – рецесія, $P(H_3) = 0{,}2$.

Гіпотези H_1, H_2, H_3, утворюють повну групу подій, оскільки

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1$$

2) Відома оцінка ймовірності успіху за кожної умови:

– при зростанні успіх майже гарантований $P_{H_1}(A) = 0{,}9$;

– при стабільності шанси непогані $P_{H_2}(A) = 0{,}6$;

– при рецесії шанси низькі $P_{H_3}(A) = 0{,}2$.

Розрахувати ймовірність успіху на ринку нового смартфону.

Використовуємо формулу повної ймовірності (8.14)

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}61$$

Отже, загальна ймовірність успіху проєкту становить 0,61 (61%). Цей показник допомагає вирішити, чи варто інвестувати ресурси, порівнюючи його з ризиками.

Логічним продовженням формули повної ймовірності є формула Байєса. Якщо повна ймовірність допомагає «прогнозувати майбутнє», то формула Байєса дозволяє «аналізувати минуле» або переоцінювати шанси, коли вже отримано новий результат.

Формула Байєса дозволяє визначити ймовірність того, що спрацювала саме конкретна гіпотеза H_i, за умови, що подія *A* вже відбулася.

Ймовірність гіпотези за умови, що подія *A* відбулася, дорівнює відношенню добутку ймовірності даної гіпотези на умовну ймовірність появи події *A* при даній гіпотезі до повної ймовірності появи події *A*, тобто

$$P_A(H_i) = P\left({}^{H_i}/_{A}\right) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \qquad (8.15)$$

Приклад 8. Використовуючи дані *прикладу 1*, визначити яка ймовірність того, що компанія досягла успіху у запуску смартфона (запуск смартфона виявився успішним, тобто подія *A* відбулася) саме завдяки економічному зростанню (гіпотеза H_1).

Визначаємо ймовірність того, що відбулася гіпотеза H_1 за умови успіху A, використовуючи формулу Байєса (8.15)

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}9}{0{,}61} = \frac{0{,}27}{0{,}61} = 0{,}443 \text{ (44,3\%)}$$

Аналогічно можна розрахувати інші гіпотези $P_A(H_2)$ та $P_A(H_3)$ табл. 8.1

Таблиця 8.1 – Ймовірності гіпотез

Стан ринку	Початкова ймовірність	Ймовірність після успіху
Зростання H_1	30%	44,3% (зросла)
Стабільність H_2	50%	49,2% (майже не змінилась)
Рецесія H_3	20%	6,5% (різко впала)

Аналіз даних табл. 8.1 дозволяє зробити такі висновки:

1) ймовірність того, що компанія працювала в умовах рецесії, впала з 20% до 6,5%, що є логічним, оскільки під час рецесії навряд чи можна було б досягли успіху;

2) ймовірність того, що економіка зростала, збільшилася з 30% до 44,3%.

3) успіх підтверджує позитивний стан ринку, що є сигналом для менеджера, оскільки тепер ці нові дані можна використовувати для планування наступних кроків або інвестицій.