ЗМІСТ

Лекція 8. Формування другого епістемологічного рівня – нейтральної системи з поведінкою та нейтральної породжуючої системи з поведінкою

Мета лекції: набути знань та навичок формування нейтральної системи з поведінкою та нейтральної породжуючої системи з поведінкою.

План лекції

8.1 Етапи емпіричного дослідження.
8.2 Системи з поведінкою.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *правило зсуву; система з поведінкою; вибіркова змінна; нейтральна та породжуюча системи з поведінкою; маска; маска довідник; породжуюча функція поведінки; повна множина станів вибіркових змінних; функція поведінки; кодуюча функція.*

8.1 Етапи емпіричного дослідження

Будь-яке емпіричне дослідження включає наступні етапи (рис. 8.1) [4]:

<u>1 *етап*</u>: *визначення іcходної системи S* (задається об'єкт, мета та обмеження емпіричного дослідження, за якими на об'єкті визначається іcходна система);

<u>2 *етап*</u>: *збір даних, формування системи даних D* (для даної іcходної системи збираються дані та подаються у стандартному вигляді (матриця, масив даних));

<u>3 *етап*</u>: *обробка даних з метою визначення деяких їх параметрично інваріантних властивостей)*;

<u>4 *етап*</u>: *інтепретація результатів* (отримані параметрично інваріантні властивості інтерпретуються згідно з метою дослідження та робляться остаточні висновки, або дослідження починається знову з 3, 2 або 1 етапу).

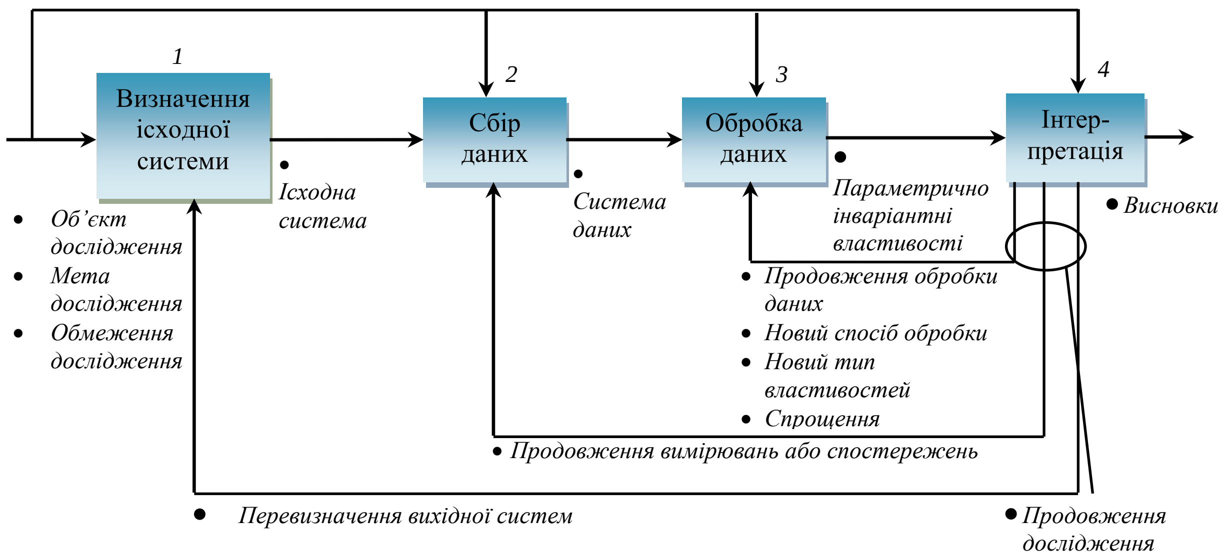

Рисунок 8.1 – Схема проведення ємпіричного дослідження

Перші два етапи розглянуті у попередніх лекціях, тому зосередимо увагу на третьому етапі **– *етапі обробки даних***.

На етапі обробки даних розв'язуються *наступні задачі*:

– задача виводу з заданих даних параметрично інваріантних властивостей всіх типів;
– задача порівняння виділених властивостей і виключення систем, властивості яких не задовольняють користувача;
– задача спрощення систем різних типів відповідно до критеріїв, вказаних користувачем, або за замовчуванням.

Вказані три задачі розв'язуються *на другому епістемологічному рівні*.

На цьому рівні ***параметрично інваріантні властивості*** являють собою безпосередній опис загального обмеження, пов'язаного з використовуваними змінними.

8.2 Системи з поведінкою

Термін ***поведінка*** використовується для характеристики загального параметрично інваріантного обмеження на змінні загальної представляючої системи *I*, а також на деякі додаткові абстрактні змінні.

Додаткові змінні визначаються на параметричній множині за допомогою ***правил зсуву (зрушення)*.**

Оскільки опис параметрично інваріантного обмеження на розглянуті змінні може бути використаний для породження станів змінних при заданій параметричній множині, то системи, що містять такі обмеження, називаються ***породжуючими системами***. Поведінка являє собою одну з форм завдання цього обмеження.

Для заданої загальної представляючої системи *I* діапазон можливих типів параметрично інваріантних обмежень залежить від властивостей, приписуваних параметричній множині.

Якщо на параметричній множині ніяких властивостей не визначено (як це часто буває для груп), то стани змінних можуть обмежувати тільки один одного.

У випадку, якщо параметрична множина впорядкована, то стани змінних можуть обмежуватися не тільки іншими станами, але і станами обраного ***сусідства*** для кожного конкретного значення параметра.

Сусідство на впорядкованій параметричній множині називається **маскою** і визначається через змінні, параметричну множину і набір правил зсуву на параметричній множині.

Правило зсуву, скажімо правило r_j, – це однозначна функція

$$r_j : W \to W, \qquad (8.1)$$

яка кожному елементу параметричної множини W ставить у відповідність інший (причому єдиний) елемент W.

Якщо, наприклад, параметрична множина повністю впорядкована (як у випадках, коли розглядається час або одночасний простір) і являє собою множину послідовних цілих додатних чисел, то будь-яке правило зсуву може бути задано рівнянням

$$r_j(w) = w + \rho, \quad (8.2)$$

де ρ – ціла константа (додатна, від'ємна або нуль). При $\rho = 0$ правило зсуву r_j називається ***тотожним правилом зсуву***.

Все вище сказане, можна пояснити наступним чином. Для того щоб система, була здатна генерувати дані, з вихідних даних, потрібно визначити деякі правила, за якими будуть визначатися нові дані. У вузькому сенсі це будуть деякі функції.

Наприклад, лінійна функція однієї змінної – геометрична пряма. Ця функція перетворює значення аргументу, в деяке значення. У більш широкому сенсі це параметрично інваріантне обмеження.

8.2.1 Вибіркові змінні і маски

Нехай задана загальна представляюча система *I*. Позначимо через *V* множину змінних з *I*, а через *R* набір правил зсуву, що розглядаються для цих змінних.

Сусідство на параметричній множині *W* визначається ***маскою*** M:

$$M \subseteq V \times R, \quad (8.3)$$

де R – множина правил зрушення, що розглядаються на повній параметричній множині *W*.

Множина змінних $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, $k \in N_{|M|}$, визначених через маску *M*, називається ***вибірковими змінними*** та задається рівняннями

$$s_{k,w} = v_{i,r_j(w)} \quad (8.4)$$

для $v_i \in V$ та $r_j \in R$.

Для повністю упорядкованої параметричної множини *W* вибіркові змінні можна задати за допомогою рівнянь

$$s_{k,w} = v_{i,w+\rho}. \quad (8.5)$$

Для введення ідентифікаторів *k* вибіркових змінних s_k застосовується однозначна кодуюча функція

$$\lambda: M \to N_{|M|}, \quad (8.6)$$

де $|M|$ – це кількість елементів множини *M*.

Повна множина станів вибіркових змінних позначається як *C* та визначається як декартовий добуток наступним чином

$$C = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{|M|}\ . \quad (8.7)$$

Відношення на повній множині станів вибіркових змінних позначається *C* та визначається ***функцією поведінки*** f_B виду

$$f_B : C \to \{0,1\}, \quad (8.8)$$

де $f_B(c) = 1$, якщо *c* входить до множини *C*; $f_B(c) = 0$, в протилежному випадку.

Отже, функція f_B – типова функція вибору, яка є параметрично інваріантною, оскільки визначає стани, що реально зустрічаються у системі даних D, але не визначає значення параметра, при якому вони мають місце.

Область визначення f_B однакова для всіх типів функцій поведінки та визначається через маску M, яка у свою чергу визначається через змінні й параметри загальної представляючої системи I.

Систему на другому епістемологічному рівні з визначеною функцією f_B будемо називати ***системою з поведінкою***. Така система характеризує параметрично інваріантне обмеження на множину змінних через функції поведінки та може бути подана трійкою [5]

$$F_B = (I, M, f_B). \tag{8.9}$$

8.2.2 Вибір маски у випадку повністю впорядкованих параметричних множин та параметричних множин, які не мають математичних властивостей

Розглянемо спочатку поняття маски та пов'язану з ним поведінку загальних представляючих систем для повністю впорядкованих параметричних множин, а потім поширимо його на частково впорядковані параметричні множини.

Позначимо повністю впорядковані параметричні множини через T, а їх елементи через t $(t \in T)$. При цьому рівняння (8.5) дещо зміниться:

$$s_{k,t} = v_{i,t+\rho}. \tag{8.10}$$

Для повністю впорядкованих параметричних множин маска може бути зображена у вигляді вирізки з матриці даних, яка представляє декартовий добуток $V \times R$ та в якій рядки позначені ідентифікаторами i змінних з множини V, а стовпці – цілими константами ρ, пов'язаними з правилами зсуву.

Елементи матриці можуть бути або порожніми, або мати ідентифікатори k вибіркових змінних, приписані парам (i, ρ) згідно (8.6). У візуальному представленні стає ясно, чому використовується термін «маска».

Часто буває зручно розбити маску M на підмаски M_i, кожна з яких пов'язана з однією змінною i, з системи I.

Формально

$$M_i = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in M, \alpha = v_1\}. \tag{8.11}$$

У візуальному (матричному) представленні M підмаски M_i являють собою рядки.

У будь-якій масці один стовпець відповідає тотожному правилом зсуву $(\rho = 0)$. Цей стовпець має особливе значення, оскільки пов'язані з ним вибіркові змінні є ідентичними базовим змінним заданої загальної представляючої системи. Будемо цей стовпець у масках називати ***довідником***.

Якщо маска поміщена на матрицю даних таким чином, що довідник збігається з певним значенням t, то маска виділить тільки деяку підмножину елементів, а саме елементи, які представляють повний стан вибіркових змінних при даному значенні t.

Для розуміння вище наведеного, розглянемо приклад для випадку, коли повна параметрична множина W не має математичних властивостей.

Приклад 8.1. Нехай побудована система даних D із сформованою матрицею даних d (рис. 8.2, б)). ***Повна параметрична множина W не має математичних властивостей***, тоді можна застосувати лише одну осмислену маску M з правилом зсуву r_j (2) при $\rho = 0$. Дана маска M подана на рис. 8.2, а). Ідентифікатори k вибіркових змінних s_k вводяться рівнянням (8.6).

	$\rho = 0$
$i = 1$	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

k

Маска M з ідентифікаторами вибіркових зммінних

а)

$W =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
V_1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	
V_2	1	2	2	2	1	1	0	0	1	2	
V_3	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
V_4	1	0	0	1	1	1	0	1	2	0	
V_5	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	
V_6	1	0	0	1	1	2	1	0	1	1	

Матриця даних d

Маска M

б)

Рисунок 8.2 – Використання маски:
а) опис маски M; б) використання маски M для побудови системи з поведінкою з неупорядкованою параметричною множиною

Визначимо повний стан вибіркових змінних через маску M при значені w=4:

$$\begin{array}{ccccc} S_{1,4} & = & V_{1,4} & = & 1 \\ S_{2,4} & = & V_{2,4} & = & 2 \\ S_{3,4} & = & V_{3,4} & = & 1 \\ S_{4,4} & = & V_{4,4} & = & 1 \\ S_{5,4} & = & V_{5,4} & = & 0 \\ S_{6,4} & = & V_{6,4} & = & 1 \end{array}$$

повний стан вибіркових змінних для маски M при $W = 4$

Функція поведінки для фраґменту матриці даних d при w=4, зображена на рис. 8.2, б), має вигляд

$$
\begin{array}{lll}
f_B(011111)=1, & f_B(011101)=1, & f_B(021011)=1, \\
f_B(021000)=1, & f_B(111112)=1, & f_B(011201)=1. \\
f_B(120000)=1, & f_B(100011)=1, & \\
f_B(121101)=1, & f_B(100110)=1, &
\end{array}
$$

Оскільки є можливими стани змінних $V_i=\{0,1,2\}$, $i=1,2,...,6$, а, наприклад, наступні повні стани вибіркових змінних є потенційно можливими, але не мають місця в системі даних, то в цьому випадку

$$f_B(000000)=0;\ f_B(111111)=0;\ f_B(222222)=0;\ f_B(200000)=0,\ \ldots$$

8.2.3 Породжуючі та породжувані змінні. Породжуюча функція поведінки

Незважаючи на те, що будь-яка система з поведінкою описує обмеження на змінні загальної представляючої системи, вона не містить опису того, як використовувати це обмеження для породження даних.

Для розробки такого опису потрібно розбити вибіркові змінні на *дві підмножини*:

– ***породжувані змінні*** – змінні, стани яких породжуються з обмеження;
– ***породжуючі змінні*** – змінні, стани яких використовуються як умови в процесі генерації.

Для заданої системи з поведінкою одним з способів визначення породжуваних та породжуючих змінних є визначення для даної маски M двох підмасок M_g та $M_{\bar{g}}$.

Будемо

$$M_G=\left(M;\ M_g,M_{\bar{g}}\right), \tag{8.12}$$

де

$$M_g,M_{\bar{g}}\subset M,\quad M_g\cup M_{\bar{g}}=M,\quad M_g\cap M_{\bar{g}}=0, \tag{8.13}$$

називати ***маскою породження***, тобто це маска M та її розбиття на породжувану підмаску M_g та породжуючу підмаску $M_{\bar{g}}$.

За аналогією з розбиттям M на M_g та $M_{\bar{g}}$ множина $N_{|M|}$ ідентифікаторів k вибіркових змінних можна розбити на дві підмножини K_g та $K_{\bar{g}}$, які представляють ідентифікатори відповідно породжуваних й породжуючих змінних. Отже, кодуюча функція (8.6) може бути замінена двома функціями

$$
\begin{aligned}
\lambda_g &: M_g\to K_g\ , \\
\lambda_{\bar{g}} &: M_{\bar{g}}\to K_{\bar{g}}\ ,
\end{aligned} \tag{8.14}
$$

за допомогою яких, множина станів G та $\bar{G}$ відповідно породжуваних і породжуючих змінних задаються декартовими добутками

$$
\begin{aligned}
G &= \times_{k\in K_g} S_k\ , \\
\bar{G} &= \times_{k\in K_{\bar{g}}} S_k\ .
\end{aligned} \tag{8.15}
$$

Тепер спосіб представлення стану породжуваних змінних (скажімо, $g \in G$), який визначається за станом породжуючих змінних (скажімо, $\bar{g} \in \bar{G}$), можна виразити функцією

$$f_{GB}: \bar{G} \times G \to \{0,1\}, \tag{8.16}$$

$$f_{GB}(\bar{g}, g) = \begin{cases} 1\ , \\ 0\ . \end{cases} \tag{8.17}$$

де:

$f_{GB}(\bar{g}, g) = 1$, якщо g може мати місце при умові, коли має місце $\bar{g}$;
$f_{GB}(\bar{g}, g) = 0$, якщо g не може мати місце при умові, коли має місце $\bar{g}$.

Для **детермінованих систем**

$$f_{GB}: \bar{G} \to G. \tag{8.18}$$

Назвемо цю функцію ***породжуючою функцією поведінки.***

Породжуюча система з поведінкою визначається трійкою

$$F_{GB} = (I, M_G, f_{GB}). \tag{8.19}$$

Будемо називати таку систему ***породжуючою системою з поведінкою***.

Алгоритм використання породжуючої системи з поведінкою для породження даних включає наступні два етапи:

1 *етап*: для деякого значення $t \in T$ задано стан $\bar{g} \in \bar{G}$, розглядуваний як початкова умова; для визначення стану $g \in G$ при тому самому значенні використовується функція f_{GB};

2 *етап*: значення t замінюється на нове (наступне в параметричній множині) та повторюється 1 етап (до останнього елементу параметричної множини).

Для **недетермінованих систем** маємо ***породжуючу функцію поведінки*** виду

$$f_{GB}: \bar{G} \times G \to [0,1], \tag{8.20}$$

де $f_{GB}(\bar{g}, g)$ – умовна ймовірність появи стану g за умови спостереження стану $\bar{g}$. Щоб підкреслити, що f_{GB} задає умовні ймовірності, для позначення ймовірності появи стану g при заданому $\bar{g}$ замість $f_{GB}(\bar{g}, g)$ використовується стандартне позначення $f_{GB}(g \mid \bar{g})$.

8.2.4 Порядок породження даних в системі з поведінкою. Особливості процедури породження даних

Фундаментальний підхід до аналізу систем з поведінкою базується на темпоральній (часовій) структурі даних. ***Ключовою ідеєю*** є те, що спосіб породження станів системи безпосередньо визначається цільовим призначенням дослідження (метою використання системи з поведінкою).

Згідно такого підходу, розрізняються ***два протилежні напрямки аналізу поведінки системи в часі***:

– *прогнозування (передбачення)* – генерація станів у прямому часі;
– *реконструкція (ретроспекція)* – генерація станів у зворотному часі.

Двоїстість цих напрямків відображає фундаментальну асиметрію часу в системному моделюванні та визначає методологію побудови і застосування поведінкових моделей.

В першому випадку, ***при прогностичному використанні системи*** стани породжуються у послідовності зростання часу ($t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \ldots \rightarrow t_n$), тобто ми рухаємося від минулого через теперішнє до майбутнього. Математично це формалізується таким чином: маючи початковий стан та/або попередні стани системи, необхідно визначити майбутні стани з використанням прямої функції переходу (функції поведінки). Такий підхід природно використовує причинно-наслідкові зв'язки, при цьому невизначеність зростає зі збільшенням *горизонту прогнозування* (періоду, на який складається прогноз), що робить критичною роль початкових умов та параметрів моделі. Типовими прикладами задач прогнозування є передбачення траєкторії руху об'єктів у балістиці та навігації, моделювання економічних показників, прогнозування розвитку епідемій та планування виробничих процесів і т. ін.

На противагу цьому, в другому випадку, ***при реконструктивному використанні системи*** стани породжуються у послідовності убування часу ($t_n \rightarrow t_{n-1} \rightarrow \ldots \rightarrow t_2 \rightarrow t_1$), що означає рух від теперішнього до минулого. Вхідною інформацією слугує поточний стан та можливо деякі проміжні стани, а метою є відновлення попередніх станів. Для відновлення використовуєтсья функція зворотного переходу, що вказує на принципову відмінність від попередньої прямої задачі прогнозування. Реконструкція стикається з фундаментальною проблемою неоднозначності: один і той самий поточний стан може бути результатом різних попередніх станів системи, що вимагає залучення додаткової інформації або введення обмежень для забезпечення унікальності розв'язку. Практичними прикладами реконструктивних задач є археологічна реконструкція минулих подій за артефактами; визначення причини захворювання за симптомами; розслідування аварій та катастроф; відновлення клімату минулого; побудова еволюційних дерев і т. ін..

Згідно з вище наведеним, вибір напрямку та порядок породження станів системи визначається конкретною епістемологічною метою дослідження та використання:

– якщо система з поведінкою використовується для *прогнозування* (*передбачення*), то стани мають породжуватися в порядку зростання часу (зліва направо); в такому випадку ставиться ***задача прогнозування*** (***передбачення***);
– якщо система з поведінкою використовується для *реконструкції* (*ретроспекції*), то стани мають породжуватися в порядку убування часу; в такому випадку ставиться ***задача реконструкції*** (***ретроспекції***).

Розуміння двоїстості цих задач є фундаментальним для коректної постановки та розв'язання задач системного аналізу, оскільки воно визначає як вибір математичного апарату, так і інтерпретацію отриманих результатів у контексті часової структури досліджуваної системи.

Розглянемо ***особливості процедури породження даних*** в залежності від розв'язання задачі прогнозування або реконструкції.

1. На 1 етапі неявно передбачається, що при заданому значенні параметру t стан $\bar{g}$ є відомим. Цей стан називається *початковою умовою*. Однак після цього все повністю визначається самим процесом породження, тобто станами $\bar{g}$ та g, пов'язаними з попереднім значенням параметра *t*. При цьому передбачається, що значення параметра t мають на 2 етапі змінюватися відповідно до порядку породження, за даними на множині *T*. Таким чином, значення параметра t змінюються або на $t+1$, або на $t-1$. У першому варіанті (*задача прогнозування* або *передбачення*) початкова умова має бути визначена для найменшого можливого значення *t*, а в другому варіанті (*задача реконструкції* або *ретроспекції*) – для найбільшого можливого значення *t*.
2. З необхідності породження даних в одному з двох порядків випливає, що існує тільки два власних розбиття маски M на M_g та $M_{\bar{g}}$, кожне з яких відповідає одному з двох порядків породження. Якщо дані породжуються в порядку зростання (спадання) *t*, то M_g містить рівно по одному елементу кожної підмаски M_i $(i \in N_n)$, елемент з найбільшим (найменшим) значенням ρ; інші елементи M входять в $M_{\bar{g}}$. *Таким чином, графічно можна представити, що* M_g *– це множина самих правих елементів маски* M *(правий край цієї маски) у випадку прогнозування (передбачення) даних або, навпаки, множина самих лівих елементів* M *(лівий край маски) у випадку реконструкції (ретроспекції).*
1. Передбачається, що для будь-якого стану $\bar{g} \in \bar{G}$ є принаймні один стан $g \in G$, який допускає функцією f_{GB} (тобто $f_{GB}(\bar{g}, g) = 1$). Якщо допускається тільки один стан, то для будь-якої початкової умови дані породжуються однозначно; такі системи називаються ***детермінованими***. Якщо допускається більш ніж один стан, то породження даних є проблематичним, оскільки породжений стан не завжди є однозначно визначеним. Для таких систем функції вибору поведінки не підходять. Більш змістовно вони описуються функціями поведінки інших типів.

8.2.5 Функції породження для недетермінованих систем

Параметрично інваріантне обмеження на множину вибраних змінних може бути охарактеризоване різними способами [4, 6].

Простий опис, розглянутий раніше, може обмежитися заданням функції вибору, визначеної на відповідній множині станів. Хоча функція вибору є, ймовірно, найбільш підходящим формальним апаратом для задання обмежень в детермінованих системах, в яких породження даних зручно описувати за допомогою функції, тож для роботи з недетермінованими системами функції вибору не годяться.

Традиційно з недетермінованими системами працюють методами теорії ймовірностей. При цьому основним поняттям при описі обмежень на змінні є поняття *імовірнісної міри*. З теорії ймовірностей добре відомо, що будь-яка імовірнісна міра, скажімо міра *p*, однозначно визначається функцією розподілу

$$f_B : C \to [0,1]. \qquad (8.21)$$

При цьому породжуюча функція поведінки f_{GB} має вигляд (8.20):

$$f_{GB} : \bar{G} \times G \to [0,1].$$

Питання для самоконтролю

1. Що таке правило зрушення?
2. Як визначається система з поведінкою?
3. Як визначається вибіркова змінна?
4. Як визначаються повні множини станів породжуваних G і породжуючих $\overline{G}$ вибіркових змінних?
5. Як визначається породжуюча система з поведінкою?
6. Як визначається маска?
7. Як визначається породжуюча функція поведінки?
8. Як визначається повна множина станів вибіркових змінних?
9. Як визначається функція поведінки?
10. Як визначається кодуюча функція?