ЗМІСТ

Лекція 10. Міри нечіткості

Мета лекції: опанувати міри нечіткості; визначати Шеннонівську ентропію; набути знань та навичок визначення ступеня недетермінованості нейтральної та спрямованої породжуючої системи з поведінкою.

План лекції

10.1 Ступінь недетермінованості. Шеннонівська ентропія.
10.2 Методи обчислень нечіткості.

Перелік ключових термінів і понять з теми: *ступінь недетермінованості; Шеннонівська ентропія; біт; нормалізована ентропія; ступінь недетермінованості; породжуюча нечіткість нейтральної / спрямованої породжуючої системи з поведінкою.*

10.1 Ступінь недетермінованості. Шеннонівська ентропія

Ступінь недетермінованості повинна вимірюватися узагальненою нечіткістю, супутньою породженню даних, а значить, вона має бути визначена через породжуючі функції поведінки f_{GB} та $\hat{f}_{GB}$ для нейтральних й спрямованих систем з поведінкою.

Якщо ці функції є функціями розподілу ймовірностей, то міра узагальненої нечіткості – це ***Шеннонівська ентропія***

$$H\left(f(x) \mid x \in X\right) = -\sum_{x \in X} f(x) \log_2 f(x), \qquad (10.1)$$

яка вимірює нечіткість в одиницях, названих ***бітами***.

Якщо припустити, що будь-яка кінцева множина X розглянутих альтернативних вихідних значень характеризується певним розподілом ймовірностей, то зручніше спростити позначення та писати $H(X)$ замість $H\left(f(x) \mid x \in X\right)$.

Легко бачити, що $0 \le H(X) \le \log_2 |H|$. Нижня межа $H(X) = 0$ досягається в тому випадку, коли ймовірності всіх вихідних значень, за винятком одного, дорівнюють 0; верхня межа досягається тоді, коли ймовірності всіх подій однакові, тобто дорівнюють $1/|X|$.

Відношення ентропії до її верхньої межі

$$\mathbf{H}(X) = \frac{H(X)}{\log_2 |X|}, \qquad (10.2)$$

називається ***нормалізованої ентропією***, причому $0 \le \mathbf{H}(X) \le 1$.

У нашому випадку множинами виходів є множини $\mathbf{C}, \mathbf{G}, \overline{\mathbf{G}}, \mathbf{E}$ а розподіл ймовірностей представляються функціями поведінки $f_B, f_{GB}, \hat{f}_B, \hat{f}_{GB}$, обумовленими відповідно виразами

$$f_B : C \to [0,1], \quad f_{GB} : \overline{\mathbf{G}} \times \mathbf{G} \to [0,1], \quad \hat{f}_B : \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{E}} \to [0,1], \quad \hat{f}_{GB} : \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{G}} \times \mathbf{G} \to [0,1] . \qquad (10.3)$$

Для спрощення запису опустимо індекси B і GB, а також знак ^. Таким чином, $f(\mathbf{c})$, $f(\mathbf{g} \mid \overline{\mathbf{g}})$, $f(\overline{\mathbf{e}}, \mathbf{e})$, $f(\mathbf{g} \mid \mathbf{e}, \overline{\mathbf{g}})$, позначають ймовірності, що визначаються відповідно формулами (10.3); сенс будь-якого з цих визначень однозначно визначається укладеними в дужки аргументами.

Крім того, визначимо безумовні ймовірності

$$f(\overline{\mathbf{g}}) = \sum_{c \succ \overline{g}} f(\mathbf{c}), \qquad (10.4)$$

де $\mathbf{c} \succ \overline{\mathbf{g}}$ вказує на те, що $\overline{g}$ є підмножиною стану c (підстаном c). Якщо $\mathbf{c} = \left(\mathbf{c}_k \mid k \in N_{|c|}\right)$, $\overline{\mathbf{g}} = \left(\overline{\mathbf{g}}_j \mid j \subset Z, Z \subset N_{|c|}\right)$, то $\mathbf{c} > \overline{\mathbf{g}}$ тоді і тільки тоді, коли $c_j = \overline{g}_j$ для всіх $j \in Z$.

Для спрямованих систем безумовні ймовірності обчислюються у вигляді

$$f(\overline{\mathbf{g}} \mid \mathbf{e}) = \sum_{\overline{\mathbf{e}} \succ \overline{\mathbf{g}}} f(\overline{\mathbf{e}} \mid \mathbf{e}), \qquad (10.5)$$

Умовні ймовірності, які характеризують процес породження даних, пов'язані з основними (спільними) та безумовними ймовірностям наступним чином:

$$f(\mathbf{g} \mid \overline{\mathbf{g}}) = f(\mathbf{c}) / f(\overline{\mathbf{g}}); \qquad (10.6)$$

$$f(\mathbf{g} \mid \mathbf{e}, \overline{\mathbf{g}}) = f(\overline{\mathbf{e}} \mid \mathbf{e}) / f(\overline{\mathbf{g}} \mid \mathbf{e}). \qquad (10.7)$$

Перша формула описує цей зв'язок для нейтральних, а друга – для спрямованих систем.

10.2 Методи обчислень нечіткості

При заданій породжуючій масці для нейтральної системи, через яку визначаються множини станів $\mathbf{G}, \overline{\mathbf{G}}$ генерованих і генеруючих обраних змінних, ***породжуюча нечіткість*** $H\left(\mathbf{G} \mid \overline{\mathbf{G}}\right)$ визначається як середня нечіткість, що базується на ймовірностях $f(\mathbf{g} \mid \overline{\mathbf{g}})$, зважених ймовірностями $f(\overline{\mathbf{g}})$ породжуючих умов:

$$H\left(\mathbf{G} \mid \overline{\mathbf{G}}\right) = -\sum_{\overline{g} \in \overline{\mathbf{G}}} f(\overline{\mathbf{g}}) \sum_{g \in \mathbf{G}} f(\mathbf{g} \mid \overline{\mathbf{g}}) \log_2 f(\mathbf{g} \mid \overline{\mathbf{g}}). \qquad (10.8)$$

Це значення визначає ***ступінь детермінованості*** даної нейтральної породжуючої системи з поведінкою.

Для спрямованих систем породжуюча нечіткість $H\left(\mathbf{G} \mid \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{G}}\right)$ обчислюється за формулою

$$H\left(\mathbf{G} \mid \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{G}}\right) = -\sum_{\mathbf{e} \in \mathbf{E}} \sum_{\overline{\mathbf{g}} \in \overline{\mathbf{G}}} f(\mathbf{e}, \mathbf{g}) \sum_{\mathbf{g} \in \mathbf{G}} f(\mathbf{g} \mid \mathbf{e}, \overline{\mathbf{g}}) \log_2 f(\mathbf{g} \mid \mathbf{e}, \overline{\mathbf{g}}), \qquad (10.9)$$

яку можна безпосередньо застосовувати в тому випадку, коли можна і має сенс визначати ймовірності $f(\mathbf{e} \mid \overline{\mathbf{g}})$, тобто коли спрямована система отримана з нейтральної [4, 5]. Якщо ми не володіємо ймовірностями станів елементів множини E або ці ймовірності несуттєві, тоді в якості базових ймовірностей беруться ймовірності $f(\overline{\mathbf{e}}\,|\,\mathbf{e})$ (аналог ймовірностей $f(\mathbf{c})$ для нейтральних систем), виходячи з яких обчислюються решта необхідних ймовірностей. У цьому випадку нечіткість $H(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}})$ обчислюється у вигляді

$$H(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}) = -\frac{1}{|E|}\sum_{\mathbf{e}\in\mathbf{E}}\sum_{\overline{\mathbf{g}}\in\overline{\mathbf{G}}} f(\overline{\mathbf{g}}\,|\,\mathbf{e})\sum_{\mathbf{g}\in\mathbf{G}} f(\mathbf{g}\,|\,\mathbf{e},\overline{\mathbf{g}})\log_2 f(\mathbf{g}\,|\,\mathbf{e},\overline{\mathbf{g}}), \qquad (10.10)$$

де ймовірності $f(\overline{\mathbf{g}}\,|\,\mathbf{e})$ та $f(\mathbf{g}\,|\,\mathbf{e},\overline{\mathbf{g}})$ обчислюється по заданим ймовірностям $f(\overline{\mathbf{e}}\,|\,\mathbf{e})$ згідно (10.5) та (10.7).

Зауважимо, що $H(\mathbf{G}\,|\,\overline{\mathbf{G}})$ можна обчислити, не використовуючи умовні ймовірності, у вигляді

$$H(\mathbf{G}\,|\,\overline{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{C}) - H(\overline{\mathbf{G}}). \qquad (10.11)$$

Також рівняння (10.9) та (10.10) можна замінити відповідно рівняннями

$$H(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{C}) - H(\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}), \qquad (10.12)$$

$$H(\mathbf{G}\,|\,\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{G}}) = \frac{1}{|E|}\left[\sum_{e\in E} H(\overline{\mathbf{E}}\,|\,\mathbf{e}) - \sum_{e\in E} H(\overline{\mathbf{G}}\,|\,\mathbf{e})\right]. \qquad (10.13)$$

Максимальне значення породжуючої нечіткості будь-якого типу дорівнює $\log_2|G|$. Отже, нормалізована породжуюча нечіткість отримується діленням породжуючої нечіткості на її максимальне значення. Наприклад, $H(\mathbf{G}\,|\,\overline{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{G}\,|\,\overline{\mathbf{G}})/\log_2|\mathbf{G}|$.

Питання для самоконтролю

1. Що таке біт?
2. Як визначається Шеннонівська ентропія?
3. Як визначається нормалізована ентропія?
4. В якому випадку $H(X) = 0$?
5. В якому випадку $H(X) = 1$?
6. Як визначається породжуюча нечіткість нейтральної породжуючої системи з поведінкою, використовуючи умовні ймовірності?
7. Як визначається породжуюча нечіткість нейтральної породжуючої системи з поведінкою, не використовуючи умовні ймовірності?
8. Як визначається породжуюча нечіткість спрямованої породжуючої системи з поведінкою, використовуючи умовні ймовірності?
9. Як визначається породжуюча нечіткість спрямованої породжуючої системи з поведінкою, не використовуючи умовні ймовірності?
10. Чому дорівнює максимальне значення породжуючої нечіткості будь-якого типу?