**ЗМІСТ**

## Лекція 13. Спрощення першого та другого роду ісходних систем, систем даних, систем з поведінкою

**Мета лекції:** опанувати основні методи спрощення ісходних систем, систем даних і відповідних систем з поведінкою (породжуючих систем).

### План лекції

13.1 Спрощення першого роду ісходних систем, систем даних, систем з поведінкою.
13.2 Спрощення другого роду ісходних систем, систем даних, систем з поведінкою.

***Перелік ключових термінів і понять з теми:*** *спрощення першого / другого роду ісходних систем, систем даних, систем з поведінкою; решітка; V-решітка; розрішальна форма; розрішальна решітка; кількість розрішальних форм в решітці; об'єднана розрішальна решітка.*

На деякому етапі обробки заданої системи даних часто виникає ситуація, коли бажано спростити відповідні до цієї системи даних системи з поведінкою (породжуючі системи з поведінкою).

У багатьох випадках спрощення вимагає користувач, для якого існуючі системи з поведінкою (породжуючі системи) виявляються занадто складними для розуміння. В інших випадках спрощення потрібно через передбачуване використання системи або за різними методологічними міркуваннями.

Існує ***два основних методи одночасного спрощення ісходних систем, систем даних і відповідних систем з поведінкою (породжуючих систем)*** [4]***:***

1) *спрощення першого роду* (шляхом виключення деяких змінних з відповідної подібної системи);
2) *спрощення другого роду* (шляхом визначення класів еквівалентності станів деяких змінних).

### 13.1 Спрощення першого роду ісходних систем, систем даних, систем з поведінкою

Розглянемо спрощення першого роду, яке проводиться шляхом виключення деяких змінних з відповідної подібної системи.

Нехай множина змінних породжуючої (або ісходної системи, системи даних) системи з поведінкою *V* складається з *n* змінних і будь-яка підмножина *V*, за винятком порожньої множини, являє змістовне ***спрощення першого роду.***

Отже, є $2^n - 2$ нетривіальних спрощень першого роду. Вони є частково впорядкованими по відношенню «підмножина». Якщо для зручності включити вхідну множину *V* і порожню множину, то множина спрощень з частковим упорядкуванням утворює ***решітку***. Назвемо цю решітку ***решіткою змінних*** (або ***V-решіткою***) і позначимо через $\mathcal{L}_V$.

$V$-решітка може бути описана або у вигляді

$$\mathcal{L}_V=(\wp(V),\subseteq),$$

або у вигляді

$$\mathcal{L}_V=(\wp(V),\cap,\cup).$$

Позначимо через $f_B$ функцію поведінки заданої системи з поведінкою зі змінними, які складають множину $V$. При спрощення цієї системи за допомогою скорочення множини $V$ до підмножини $V'$ нова (спрощена) функція поведінки $f'(\beta)$ визначається проекцією, визначеною рівнянням

$$f'(\beta)=\left[f_B \downarrow V'\right](\beta), \tag{13.1}$$

**13.2 Спрощення другого роду ісходних систем, систем даних, систем з поведінкою**

***Спрощення другого роду*** проводяться шляхом визначення класів еквівалентності станів деяких змінних та, таким чином, зводяться до зменшення числа станів, які виділяються для окремих змінних.

Одним з способів опису такого спрощення є визначення функції

$$\sigma_{i,j} : V_i \rightarrow V_i', \tag{13.2}$$

де $V_i$ – задана множина станів (змінної $v_i$); $V_i'$ – спрощена (скорочена) множина станів тієї самої змінної; $\sigma_{i,j}(x)$ – новий стан, присвоєний вихідному стану $x$, а $j$ – це ідентифікатори, за допомогою яких розрізняються різні функції виду (13.2), застосовані до множини станів однієї і тієї самої змінної. Якщо $\sigma_{i,j}(x)=\sigma_{i,j}(y)$, то стани $x$ та $y$ з $V_i$ при спрощенні виявляються невиразними. Функція (13.2) має бути гомоморфною щодо всіх математичних властивостей вихідної множини $V_i$, які вважаються суттєвими з точки зору розглядуваної задачі. Таку функцію (13.2) будемо називати ***спрощуючою функцією***.

Будь-яка спрощуюча функція індукує розбиття на множині $V_i$. Використовуючи стандартне позначення, будемо це розбиття позначати як $V_i/\sigma_{i,j}$.

Будь-яке розбиття $V_i/\sigma_{i,j}$ складається з груп станів $V_i$, які не можна відрізнити при даному спрощені. Будемо таке розбиття (яке зберігає суттєві властивості $V_i$) називати ***розрішальною формою.***

Розрішальні форми, визначені на якийсь множині станів $V_i$, можуть бути впорядкованими за допомогою звичайного відношення уточнення, визначеного на розбитті даної множини. Таке відношення уточнення є відношенням часткового порядку і утворює решітку.

Для двох заданих розбиттів, скажімо $X$ та $Y$, визначених на одній й тій самій множині, будемо говорити, що $X$ ***є уточненим розбиттям*** $Y$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якої групи $x$ з $X$ існує група $y$ з $Y$, така, що $x \subseteq y$. Якщо $X$, є уточненим розбиттям $Y$, то $Y$ називається ***укрупненим розбиттям*** *X*.

Решітку розрішальних форм, визначених на множині станів $V_i$, будемо називати ***розрішальною решіткою*** та позначати через $\mathcal{L}_{\mathrm{V}_i}$.

Будь-яка розрішальна решітка множини станів $V_i$ може бути визначена або у вигляді

$$\mathcal{L}_{\mathrm{V}_i} = \left(\{V_i / \sigma_{i,j}\}, \leq\right),$$

або у вигляді

$$\mathcal{L}_{\mathrm{V}_i} = \left(\{V_i / \sigma_{i,j}\}, \times, +\right),$$

де × та + позначають відповідно добуток та суму розбиттів.

Якщо розглянута **множина станів не володіє математичними властивостями**, які мають бути збереженими, то в якості розрішальної форми може бути прийнято будь яке розбиття. В цьому випадку розрішальна решітка містить всі розбиття, які можуть бути визначеними на цій множині станів.

Якщо множина станів складається з $m$ станів, то кількість розрішальних форм в решітці, скажімо решітці $\Lambda_m$, визначається у вигляді

$$\Lambda_m = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \Lambda_i, \Lambda_0 = 1. \tag{13.3}$$

З табл. 13.1 можна побачимо, що кількість розрішальних форм є досить великою навіть для невеликої кількості станів змінної.

Таблиця 13.1

| $m$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda_m$ | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21147 | 115975 |

Оскільки найменша уточнена розрішальна форма (всі стани в одному блоці) сенсу не має, а найбільше уточнення не дає спрощення, то число осмислених спрощень дорівнює

$$\Lambda_m - 2 .$$

Якщо множина станів є повністю впорядкованою та потрібно зберегти цю впорядкованість при спрощеннях, то число розрішальних форм є істотно меншим за число, яке задається у вигляді (13.3).

Нехай $x_1, x_2, ..., x_m$ – стани та $x_k < x_{k+1}$ $(k = 1, ..., m-1)$. Тоді для будь якого $k \leq m-1$ стани $x_k$ та $x_{k+1}$ або об'єднуються в одну групу, або ні. Тільки ці розв'язки визначають конкретне розбиття. Отже, для $m$ станів маємо $m$–1 бінарний розв'язок.

Отже, для повністю впорядкованих множин станів маємо:

$$\Lambda_m = 2^{m-1}. \tag{13.4}$$

Ця решітка для $m$ станів є ізоморфною булевій решітці для впорядкування підмножин будь-якої множини з $m$–1 елементів.

В табл. 13.2 приводяться значення $\Lambda_m$, обчислені за (13.4). В цьому випадку число розрішальних форм є істотно меншим, ніж у випадку неупорядкованих множин станів. Кількість змістовних спрощень в цьому випадку також дорівнює $\Lambda_m - 2$.

Таблиця 13.2

| $m$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Lambda_m$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |

Кожен елемент *V*-решітки визначає конкретний вибір змінних з вихідної представляючої системи. Для будь-якої обраної змінної її розрішальна решітка складається з усіх можливих розрішальних форм. Якщо обрано кілька змінних, то будь-яка розрішальна форма для однієї змінної може бути об'єднана з будь-якою розрішальною формою іншої змінної. Всі ці комбінації можна включити в одну решітку, яка представляє обраний набір змінних. Будемо називати її ***об'єднаною розрішальною решіткою***. Математично вона являє собою добуток окремих розрішальних решіток, який визначається наступним чином.

Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ – множини елементів окремих розрішальних решіток обраних змінних, а **X** – множина елементів відповідної розрішальної решітки.

Тоді $\mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ та для двох заданих $n$-ок $(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{X}$ ми визначаємо, що $(x_1, x_2, ..., x_n) \le (y_1, y_2, ..., y_n)$ тоді і тільки тоді, коли $x_i \le y_i$ для всіх розрішальних решіток $(j = 1,2,...,n)$. Зрозуміло, що загальна кількість елементів об'єднаної розрішальної решітки дорівнює добутку кількості елементів окремих розрішальних решіток, тобто

$$|\mathbf{X}| = \prod_{j=1}^{n} |X_j|,$$

проте тільки деякі з них є змістовними спрощеннями. Зокрема, будь-яка комбінація, до якої входить найменша уточнена розрішальна форма (розбиття на одну групу) однієї з розрішальних решіток, є позбавленою сенсу. Комбінація всіх найбільш уточнених розрішальних форм також не є спрощенням. Отже, загальна кількість елементів об'єднаної решітки, які представляють змістовні спрощення, $|X_S|$ визначається у вигляді

$$|X_S| = \prod_{j=1}^{n} (|X_j| - 1) - 1.$$

В частинному випадку, коли всі окремі решітки є однаковими і кожна складається з $\Lambda_m$ розрішальних форм, ми отримуємо

$$|X_S| = (\Lambda_m - 1)^n - 1.$$

Більше того, якщо всі розрішальні решітки побудовані на повністю впорядкованій множині з $m$ станами, то

$$|X_S| = (2^{m-1} - 1)^n - 1.$$

Тепер припустимо, що ісходна система, яка має бути спрощена, містить $n$ змінних, $\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_n$ яким відповідають множини $X_1, X_2, ..., X_n$ розрішальних форм. Тоді загальна кількість осмислених спрощень (до яких входить і виключення змінних) $N(X_1, X_2, ..., X_n)$ визначається у вигляді

$$N\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)=\prod_{j=1}^{n}\left|X_j\right|-2. \qquad (13.5)$$

Вираз (13.5) отримано виходячи з того, що одноблокове розбиття множини станів може розглядатися як виключення відповідної змінної. Тоді осмисленим уточненням є будь-який елемент розрішальної решітки, за винятком найменш і найбільш уточнених об'єднаних розрішальних форм. Якщо всі змінні мають одну і ту саму множину розрішальних форм, скажімо множину **X**, то (13.5) значно спрощується і набуває вигляду $N\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)=|\mathbf{X}|^n-2$.

Якщо ж, крім того, множини станів змінних є повністю впорядкованими та кожна складається з $m$ станів, то $N\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)=2^{n(m-1)}-2$.

Якщо прийнято рішення про те, які спрощення даної системи з поведінкою слід виконати, то функцію поведінки спрощеної системи слід визначати через функцію поведінки даної системи. Якщо виключаються деякі змінні, то спочатку обчислюється проекція (13.1). Якщо потрібні подальші спрощення за допомогою укрупнення розрішальних форм деяких з залишених змінних, то мають бути зроблені зміни, аналогічні проекції. Спочатку, за необхідності, робиться укрупнення розрішальних форм. Це дає групи станів, нерозрізнюваних для нових розрішальних форм. Кожен блок замінюється одним станом. Ймовірність (або можливість) цього стану дорівнює сумі ймовірностей (або найбільшій можливості) всіх станів, які входять до групи.

Спрощення систем є важливим типом системних задач. У загальних рисах його можна охарактеризувати як процес зменшення певним чином складності системи певного епістемологічного рівня, який водночас зберігає якомога більший обсяг інформації, яка міститься в системі.

Усі задачі цього класу підпадають під наступний загальний опис:

- конкретна система **x** певного епістемологічного рівня;
- множина систем того само типу $Y_x$, розглядувані як змістовні спрощення **x**;
- набір вимог $Q$, розглядуваних як властивості систем з множини $Y_x$, які визначають підмножину $Y_Q$ множини $Y_x$ таку, що будь-яка система з $Y_Q$ задовольняє всім вимогам з $Q$.

Для демонстрації класу задач спрощення породжуючих систем припустимо, що **x** – система з поведінкою, $Y_x$ – множина всіх змістовних спрощень **x**, що базуються на тій же множині змінних, що і **x** (тобто системах з поведінкою, що базуються на всіх змістовних об'єднаних вирішальних формах, що виводяться з **x** без винятку змінних), а також припустимо, що **Q складається з двох вимог**:

1) *вимога простоти*: системи з $Y_Q$ мають бути найпростішими;
2) *вимога чіткості*: ступінь породжуючої нечіткості систем з $Y_Q$ має бути найменшою.

Для конкретизації вимоги простоти для систем з поведінкою $\mathbf{F}_B$ задамо певну міру складності, використовуючи позначення $|f_B|=|\{c \mid f_B(\mathbf{c})>0\}|$, де $f_B$

– функція поведінки системи. Що стосується вимоги чіткості, то вона виражається через імовірнісну нечіткість $H(\mathbf{G} \mid \overline{\mathbf{G}})$. Нехай ${}^k q_u$ та $\left|{}^k f_B\right|$ $(k = 1,2,\ldots)$ – відповідно значення породжуючих нечіткості й складності систем з поведінкою ${}^k\mathbf{F}_B$ з множини $Y_x$, де індекси $k$ – ідентифікатори відповідних об'єднаних розрішальних форм окремих систем ${}^k\mathbf{F}_B$. Чисельне впорядкування значень ${}^k q_u$ й $\left|{}^k f_B\right|$ задає впорядкування за нечіткістю $\overset{u}{\leq}$ та впорядкування за складністю $\overset{c}{\leq}$ на множині $Y_x$. У загальному випадку ці два порядки переваг суперечать один одному. Очевидно, що і впорядкування за нечіткістю, і впорядкування за складністю є рефлексивними, транзитивними і зв'язними, але не антисиметричними. Отже, вони являють собою зв'язні квазіупорядкування. Об'єднаний порядок переваг $\overset{*}{\leq}$ визначається наступним чином: ${}^j\mathbf{F}_B \overset{*}{\leq} {}^k\mathbf{F}_B$ тоді і тільки тоді, коли ${}^j q_u \overset{u}{\leq} {}^k q_u$ и $\left|{}^j f_B\right| \overset{c}{\leq} {}^k f_B$, де ${}^j\mathbf{F}_B$, ${}^k\mathbf{F}_B \in Y_x$ – узагальнене квазіупорядкування (рефлексивне і транзитивне відношення) на $Y_x$.

Тепер можна визначити множину розв’язків $Y_Q \subset Y_x$ (*множину допустимих спрощень* **x**), як множину всіх систем $Y_x$ з таких, що вони або еквівалентні, або непорівнювальні з точки зору об'єднаного впорядкування. Формально

$$Y_Q = \left\{ {}^j\mathbf{F}_B \in Y_x \mid \left(\forall\, {}^j\mathbf{F}_B \in Y_x\right)\left( {}^k\mathbf{F}_B \overset{*}{\leq} {}^j\mathbf{F}_B \Rightarrow {}^j\mathbf{F}_B \leq {}^k\mathbf{F}_B \right) \right\}. \qquad (13.6)$$

Після визначення множини $Y_Q$ допустимих спрощень заданої породжуючої системи, користувач може використати всі системи з $Y_Q$ як взаємодоповнюючі спрощення ісходної системи, може обрати одну найбільш підходящу або може скористатися додатковими критеріями для скорочення цієї множини.

## Питання для самоконтролю

1. Для чого проводиться спрощення систем?
2. Які основні методи одночасного спрощення систем даних Вам відомі?
3. В чому полягає спрощення першого роду?
4. В чому полягає спрощення другого роду?
5. Що розуміється під *V*-решіткою? Як визначається *V*-решітка?
6. Що розуміється під розрішальною формою?
7. Що називається розрішальною решіткою? Як вона визначається?
8. Як визначається кількість розрішальних форм в решітці при умові, що множина станів не володіє математичними властивостями?
9. Як визначається кількість розрішальних форм в решітці для повністю впорядкованих множин станів?
10. Що розуміється під об'єднаною розрішальною решіткою?