Міністерство освіти і науки України
Запорізький національний університет

**Н.О. Кондрат'єва, В.В. Леонтьєва, Н.В. Матвіїшина**

# ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

**Курс лекцій**
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»


Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол №
від

Запоріжжя
2026

УДК:519.816(075.8)
К 642

Кондрат’єва Н. О., Леонтьєва В. В., Матвіїшина Н. В. Теорія прийняття рішень : курс лекцій для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Комп’ютерні науки» освітньо-професійної програми «Комп’ютерні науки». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2026. 95 с.

Курс лекцій містить теоретичні положення, основні поняття, принципи, підходи, алгоритми та методи складання та розв’язання задач прийняття рішень, рекомендації щодо вивчення курсу «Теорія прийняття рішень» та спрямований на оволодіння системними знаннями з основних теоретичних положень теорії прийняття рішень, методологічних основ дослідження проблемних ситуацій, складання задач прийняття рішень, їх аналізу та розв'язання, а також вироблення навичок використання методології прийняття рішень у наукових та прикладних дослідженнях у різних галузях науки та техніки.

Для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Комп’ютерні науки», які навчаються за освітньо-професійною програмою «Комп’ютерні науки».

Рецензент
*С. І. Гоменюк*, доктор технічних наук, професор, професор кафедри програмної інженерії

Відповідальний за випуск
*С. М. Гребенюк*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фундаментальної та прикладної математики

## ЗМІСТ

# ВСТУП

Здатність приймати рішення є ключовою компетенцією сучасного фахівця, конкурентоспроможного на ринку праці. Курс «Теорія прийняття рішень» входить до циклу дисциплін професійної підготовки бакалаврів спеціальності «Комп'ютерні науки» та передбачає ґрунтовне ознайомлення з поняттями, принципами та методикою прийняття рішень в умовах невизначеності та конфліктності, опанування навичок розробки та практичного впровадження методів вирішення проблемних ситуацій при здійсненні ефективного керування складними системами різних рівнів, кількісного обґрунтування рішень щодо організації керування.

**Метою** вивчення навчальної дисципліни «Теорія прийняття рішень» є оволодіння системними знаннями з основних теоретичних положень теорії прийняття рішень, методологічних основ дослідження проблемних ситуацій, складання задач прийняття рішень, їх аналізу та розв'язання, а також вироблення навичок використання методології прийняття рішень у широкому спектрі економічних, виробничих, технічних, соціальних та інших практичних проблем.

**Основними завданнями** вивчення дисципліни «Теорія прийняття рішень» є засвоєння теоретичних знань з основних понять, типів задач, алгоритмів, напрямів й сфери застосування теорії прийняття рішень; набуття вмінь і навичок із формулювання задач прийняття рішень; використання набутих знань застосування методів та алгоритмів для аналітичного та чисельного розв'язання задач прийняття рішень; оволодіння здатністю використовувати набуті навички до застосування методології прийняття рішень при розв'язанні міждисциплінарних прикладних задач; набуття вмінь та навичок надання інтерпретації одержаних результатів; розвиток навичок творчого дослідження, логічного мислення та підвищення загального рівня математичної культури при розв'язанні практичних задач математичного моделювання і прийняття рішень.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких компетентностей:

Загальні:

– здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

– здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями;

– здатність приймати обґрунтовані рішення.

Спеціальні:

– здатність здійснювати формалізований опис задач дослідження операцій в організаційно-технічних і соціально-економічних системах різного призначення, визначати їх оптимальні розв'язки, будувати моделі оптимального управління з урахуванням змін економічної ситуації, оптимізувати процеси управління в системах різного призначення та рівня ієрархії;

– здатність до системного мислення, застосування методології системного аналізу для дослідження складних проблем різної природи, методів формалізації та розв’язування системних задач, що мають суперечливі цілі, невизначеності та ризики.

Програмні результати навчання*:*

– застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук;

– використовувати сучасний математичний апарат неперервного та дискретного аналізу, лінійної алгебри, аналітичної геометрії, в професійній діяльності для розв’язання задач теоретичного та прикладного характеру в процесі проектування та реалізації об’єктів інформатизації;

– використовувати методологію системного аналізу об’єктів, процесів і систем для задач аналізу, прогнозування, управління та проектування динамічних процесів в макроекономічних, технічних, технологічних і фінансових об’єктах.

Курс «Теорія прийняття рішень» є логічним продовженням курсів «Системний аналіз», «Дослідження операцій», «Теорія ймовірності та математична статистика». Набуті при вивченні даного курсу знання та навички необхідні для виконання кваліфікаційної роботи та подальшої професійної діяльності.

У запропонованому виданні подано тематику і зміст лекційних занять відповідно до силабуса навчальної дисципліни, визначено послідовність опрацювання студентом програмного матеріалу.

Автори курсу лекцій ставили своєю метою доступний виклад основних понять і методів сучасної теорії прийняття рішень, надання достатньої кількості завдань для самоконтролю знань здобувачів освіти.

## Лекція 1. Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття та визначення

**Мета лекції**: сформувати у студентів уявлення про сутність, предмет, основні поняття та задачі прийняття рішень; розглянути основні етапи дослідження задач прийняття рішень; ознайомитись із загальною постановкою однокритеріальної ЗПР; розглянути класифікації задач прийняття рішень.

### План лекції

1.1 Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття та визначення.
1.2 Методика дослідження задач прийняття рішень.
1.3 «Типовий» процес прийняття рішення.
1.4 Загальна постановка однокритеріальної задачі прийняття рішень.
1.5 Класифікація задач прийняття рішень.
1.6 Класифікація задач прийняття рішень в умовах невизначеності.

***Перелік ключових термінів і понять з теми:*** *проблемна ситуація; задача прийняття рішень; дисциплінуючі умови; операція; особа, що приймає рішення; стратегія; види стратегій; оперуюча сторона; критерій оптимальності; «типовий» процес прийняття рішення; однокритеріальна ЗПР; ЗПР в умовах визначеності, невизначеності та ризику; види невизначеностей; ЗПР в умовах «природних» невизначеностей; конфліктна ситуація; конфліктна ЗПР.*

### 1.1 Методологічні основи теорії прийняття рішень. Основні поняття та визначення

В останні десятиріччя спостерігається швидке поширення застосування різних галузей знань, особливо математичних, в моделюванні, аналізі та керуванні об’єктами дослідження [1-5]. При цьому спостерігається постійна взаємодія і взаємозбагачення між постановками практичних задач прийняття рішень та розробкою математичного апарату, необхідного для їх вирішення.

Основна увага при цьому приділяється науковому аналізу ряду можливих способів дії особи, що приймає рішення, з метою знаходження такого з них, який в певних умовах був би найкращим. Іншими словами, проводиться розгляд проблеми прийняття оптимальних рішень стосовно об'єктів різної природи в різних умовах їх існування.

Такий розгляд проводиться в рамках єдиної наукової дисципліни – ***теорії прийняття рішень (ТПР).*** Проблема прийняття рішень при цьому має універсальний, усеосяжний характер [3, 6]. Вона виникає практично у будь-якій сфері цілеспрямованої людської діяльності і складає її принципову суть.

Для розуміння поняття проблеми розглянемо поняття мети дослідження.

Під **метою** розуміється ідеальне представлення бажаного стану або результату діяльності. Якщо фактичний стан не відповідає бажаному, то має місце ***проблема***.

Вироблення плану дій з усунення проблеми складає ***сутність задачі прийняття рішень***.

Проблеми можуть виникати в наступних випадках:

- функціонування системи в даний момент не забезпечує досягнення поставлених цілей;
- функціонування системи в майбутньому не забезпечить досягнення поставлених цілей;
- потрібна зміна цілей діяльності і т. ін.

Проблема завжди пов'язана з певними умовами, які узагальнено називають ***ситуацією***.

Сукупність проблеми і ситуації утворює ***проблемну ситуацію***. Виявлення і опис проблемної ситуації дає початкову інформацію для постановки задачі прийняття рішень.

В такому випадку ***об'єктом дослідження ТПР*** виступає ситуація прийняття рішень, або так звана проблемна ситуація.

При цьому ***проблемну ситуацію*** (ситуацію, в якій відбувається прийняття рішень) характеризують наступні основні риси [7, 8]:

– *наявність мети (цілей).* Необхідність прийняття рішення диктується наявністю деякої мети, яку треба досягти: наприклад, виконати планове завдання, вибрати тип верстата, призначити план перевезень і так далі. Якщо ж мета не поставлена, то не виникає і необхідність приймати яке-небудь рішення;
– *наявність альтернативних ліній поведінки.* Рішення приймаються в умовах, коли існує більше за один спосіб досягнення мети, або, інакше, декілька альтернатив досягнення мети. З різними альтернативами можуть бути пов'язані різні витрати і різна вірогідність досягнення мети. Ці витрати і вірогідність не завжди можуть бути точно визначені. Тому часто прийняття рішень пов'язане з неясністю і невизначеністю. Якщо ж існує лише одна лінія поведінки, то вибору немає і, отже, рішення приймати не потрібно, воно є очевидним;
– *наявність обмежуючих чинників.* Рішення зазвичай приймаються в умовах дії великого числа чинників, що обмежують можливість вибору способів дій. Такі чинники ще називають *дисциплінуючими умовами*. Обмежуючі чинники, що підлягають розгляду, можна укрупнено розбити на три основні групи:
    - *економічні чинники,* пов'язані з ресурсами (наприклад, час, грошові засоби, трудові ресурси, виробничі можливості і т. ін.);
    - *технічні чинники,* які безпосередньо пов'язані з інженерним аналізом і виробленням вимог до технічних характеристик об'єктів (наприклад, габарити, вага, міцність, надійність, точність, температурні умови і т. ін.);

- *соціальні чинники* (у тому числі і чисто людські), які виражають вимоги як політичної й соціальної доцільності здійснення тієї або іншої альтернативи, так і людської етики і моралі.

Вказані чинники накладають обмеження на можливості досягнення поставленої мети. Очевидно, що відсутність обмежень істотно спрощує задачу прийняття рішення.

***Предметом дослідження ТПР*** виступають загальні закономірності вироблення рішень в проблемних ситуаціях, а також закономірності, властиві процесу моделювання основних елементів проблемної ситуації.

***Основним призначенням ТПР*** є розробка для практики науково-обгрунтованих рекомендацій по організації і технології побудови процедур підготовки і прийняття рішень в складних ситуаціях із застосуванням сучасних методів і засобів (в першу чергу, комп'ютерів і комп'ютерних систем).

***Задача прийняття рішення (ЗПР)*** виникає в тому і тільки у тому випадку, коли існує мета, яку треба досягти, коли можливими є різні способи її досягнення і існують чинники, що обмежують можливості досягнення мети. Виявлення усіх трьох вказаних основних елементів ЗПР має обов'язково передувати її безпосередньому рішенню.

В основі сучасної ТПР лежить *комплексна концепція прийняття рішень*, яка вимагає врахування усіх істотних аспектів проблемної ситуації і раціональної інтеграції як логічного мислення і інтуїції людини, так і математичних і технічних засобів [8, 9]. Згідно цієї концепції ***прийняття рішення*** – це свідомий вибір з ряду (альтернатив).

Цей вибір робить ***особа, що приймає рішенн***я (***ОПР***), яка є суб'єктом всякого рішення та в ролі якої виступає людина (*індивідуальне ОПР*) або група осіб (*групове ОПР*), що мають права вибору рішення і несуть відповідальність за його наслідки.

Одним з основних понять ТПР є поняття ***операції***, тобто організованої діяльності у досліджуваній сфері життя, об'єднаної єдиним задумом, спрямованої на досягнення певної мети і такої, що має характер повторюваності, тобто багатократності.

В якості прикладів різних операцій можна навести, наприклад, наступні:

1) виробнича діяльність галузі промисловості, що випускає деяку продукцію, спрямована на зменшення викидів хімічних речовин;
2) організація обчислювальної мережі з заданої кількості комп’ютерів, що забезпечує зберігання та обробку з найменшим часом доступу заданих обсягів інформації;
3) відображення повітряного нальоту засобами системи протиповітряної оборони;
4) сукупність заходів, спрямованих на підвищення надійності деякого технічного пристрою;
5) сукупність заходів, спрямованих на підвищення якості навколишнього середовища;
6) розподіл певних типів ресурсів, які відповідають сукупності вимог і забезпечують отримання найбільшого прибутку.

Сукупність осіб і технічних пристроїв, які прагнуть в цій операції до досягнення деякої мети, називається ***оперуючою стороною***.

Так, в першому наведеному вище прикладі операції (з галуззю промисловості) оперуючою стороною є особи, відповідальні за прийняття рішень відносно діяльності підприємств, що входять до складу галузі.

У операції можуть брати участь одна або декілька оперуючих сторін, переслідуючих різні, неспівпадаючі цілі.

Неспівпадання цілей оперуючих сторін створює ***конфліктну ситуацію***. Подібні операції називаються ***багатосторонніми*** або ***конфліктними***.

Так, в третьому наведеному вище прикладі операції результат операції залежить від діяльності двох сторін, переслідуючих протилежні цілі : нападаючої сторони, що здійснює повітряний наліт, і сторони, яка обороняється, відбиває наліт.

Разом з оперуючими сторонами в операції можуть брати участь арбітри і природні сили, поведінка яких не підпорядкована прагненню до досягнення цілей операції.

Для досягнення мети оперуюча сторона повинна мати в розпорядженні деякий *запас активних засобів (ресурсів)*, використовуючи або витрачаючи які вона може домагатися досягнення мети. В якості таких ресурсів, залежно від сутності операції, можуть виступати, наприклад, виробниче обладнання, запаси сировини, робоча сила, грошові кошти, засоби протидії в системі протиповітряної або протиракетної оборони і т. ін.

Операція є керованим заходом. Оперуюча сторона керує операцією, обираючи ті або інші способи використання ресурсів – ***способи дій*** (в якості синонімів терміну «спосіб дії» часто використовуються наступні терміни: ***альтернатива, стратегія, керування, рішення***). ***Спосіб дій*** – один із способів досягнення мети або один з кінцевих варіантів рішень.

Можливості оперуючої сторони по керуванню операцією завжди є обмеженими, оскільки завжди є обмеженими рядом природних причин ресурси, що перебувають у її розпорядженні. Цей факт проявляється в наявності обмежень – ***дисциплінуючих умов*** та у виборі способів дій оперуючої сторони – ***стратегій***.

***Стратегії***, що задовольняють накладеним обмеженням, називаються ***можливими*** або ***допустимими*** (у сенсі накладених обмежень).

Реалізація тієї або іншої допустимої стратегії оперуючої сторони зазвичай призводить до різних ***результатів операції***. Щоб порівнювати між собою якість різних стратегій, треба мати можливість оцінювати відповідні результати операції.

Результат операції оцінюється за допомогою деяких ***критеріїв якості*** (інакше: ***критеріїв ефективності*** або ***критеріїв оптимальності***).

***Критерій оптимальності*** є математичним виразенням мети операції (математичною моделлю мети операції), що дозволяє кількісно оцінити міру досягнення цієї мети.

Стратегія, найкраща в сенсі вибраного критерію оптимальності, тобто яка доставляє йому необхідне екстремальне (максимальне або мінімальне) значення, називається ***оптимальною стратегією*** (синонімами цьому терміну є терміни оптимального рішення, оптимального керування і т. п.).

Дослідження операції завершується рекомендаціями по вибору оптимальної стратегії. Саме ж прийняття рішення, тобто остаточний вибір стратегії і її реалізація, виходить за рамки дослідження і відноситься до компетенції відповідальної особи – ***керівника операції***.

Таким чином, теорію прийняття рішень, можливо, правильніше було б називати ***теорією обґрунтування рішень***.

Отже, ***наукове обґрунтування рішень*** – це передусім кількісна оцінка можливих рішень і вибір найкращого з них за деяким об'єктивним критерієм.

Тому в кількісній теорії прийняття рішення в якості критерію оптимальності може виступати тільки такий, який допускає кількісну оцінку. У кількісній теорії прийняття рішень широко оперують поняттями ***показник*** і ***критерій***.

Під ***показником*** в ТПР слід розуміти кількісну оцінку якоїсь властивості досліджуваного об'єкту.

При цьому властивості більшості складних об'єктів зазвичай є багатогранними. Для їх кількісної характеристики має бути використана сукупність багатьох показників.

> Так, наприклад, транспортний літак можна охарактеризувати за допомогою таких показників, як крейсерська швидкість, безпосадочна дальність польоту, вантажопідйомність, злітна вага, потрібна довжина злітної і посадочної смуги, і багатьох інших.

В ТПР ***критерієм*** є засіб для кількісної оцінки рішень, порівняння їх між собою і вибору найкращого (оптимального).

У сучасній науці про прийнятті рішень передбачається, що варіанти рішень (***альтернативи***) характеризуються різними показниками їх привабливості для особи, що приймає рішення (ОПР). Ці показники називають ознаками, факторами, атрибутами, критеріями.

Таким чином, під ***критерієм*** будемо розуміти спосіб вираження відмінностей в оцінці альтернативних варіантів з точки зору учасників процесу вибору, тобто розглядати його як показник привабливості варіантів рішень. Саме за допомогою критерію ОПР буде судити про перевагу результатів, а, отже, і способів проведення операції щодо вирішення проблеми.

У досить простих ситуаціях прийняття рішень вдається обмежитися єдиним критерієм оптимальності. Відповідні здачі прийняття рішень називаються ***одноцільовими*** **(*однокритеріальними*)** ***ЗПР***. Інакше мають місце ***багатоцільові*** **(*багатокритеріальні*)** ***ЗПР***.

**<u>Для будь-якої задачі прийняття рішень повинна існувати трійка</u>**:

< мета (критерії), альтернативи, результати >.

Якщо один з компонентів буде відсутнім, то проблема вважатиметься не поставленою.

## 1.2 Методика дослідження задач прийняття рішень

Методика дослідження задач прийняття рішень полягає в реалізації наступних трьох етапів [7, 9].

*Етап 1*. Побудова математичної моделі ЗПР.

На даному етапі для побудови математичної моделі задачі прийняття рішення необхідно задати наступні множини:

– *множина допустимих альтернатив* (стратегій, варіантів, дій, рішень, планів і т.д.). При цьому передбачається, що множина допустимих альтернатив містить не менше двох альтернатив – інакше потреба в прийнятті рішення відпадає;
– *множина можливих станів середовища*. При цьому під ***середовищем*** розуміється те, що визначає при кожній фіксованій альтернативі появу того чи іншого результату;
– *множина можливих результатів*.

*Етап 2*. Формування принципу оптимальності і знаходження оптимального рішення.

Реалізація даного етапу пов'язана з виведенням принципу оптимальності. Оскільки оптимального рішення для довільної ЗПР не існує, то розглядають окремі класи задач прийняття рішень і для кожного класу формують свій принцип оптимальності.

Слід зазначити, що для ЗПР визначеного класу може існувати кілька оптимальних рішень. Це пояснює необхідність третього етапу.

*Етап 3*. Аналіз отриманих результатів.

На даному етапі проводиться аналіз отриманих результатів, який полягає в співвіднесенні формально отриманих рекомендацій з вимогою ЗПР. Якщо оптимальне рішення, з якихось причин, виявляється неприйнятним, то це призводить або до вибору іншого оптимального рішення (якщо воно існує), або до зміни принципу оптимальності, або до зміни самої математичної моделі ЗПР.

## 1.3 «Типовий» процес прийняття рішення

Процеси прийняття рішень, що реалізуються в найрізноманітніших сферах діяльності, мають дуже багато спільного, тому необхідно мати деяку універсальну, «типову» схему процесу прийняття рішення, що встановлює найбільш доцільний набір і послідовність дій, вироблюваних при розв’язанні ЗПР.

«Типовий» процес прийняття рішення має наступну послідовність [8]:

1) попереднє формулювання проблеми;
2) визначення цілей операції і вибір відповідних критеріїв оптимальності;
3) виявлення і формулювання дисциплінуючих умов;
4) складання можливо повнішого списку альтернатив і попередній їх аналіз з метою відкидання явно неефективних;

5) збір необхідної інформації і прогнозування змін параметрів операції в майбутньому;
6) точне формулювання постановки задачі;
7) розробка математичної моделі операції, що дозволяє оцінювати ефективність кожної альтернативи;
8) аналіз і вибір методу розв’язання задачі і розробка алгоритму рішення;
9) оцінка альтернатив і визначення найбільш ефективних;
10) прийняття рішення відповідальним керівником;
11) виконання рішення і оцінка результатів.

Структурна схема процесу прийняття рішення представлена на рис. 1.1 [9, 10].

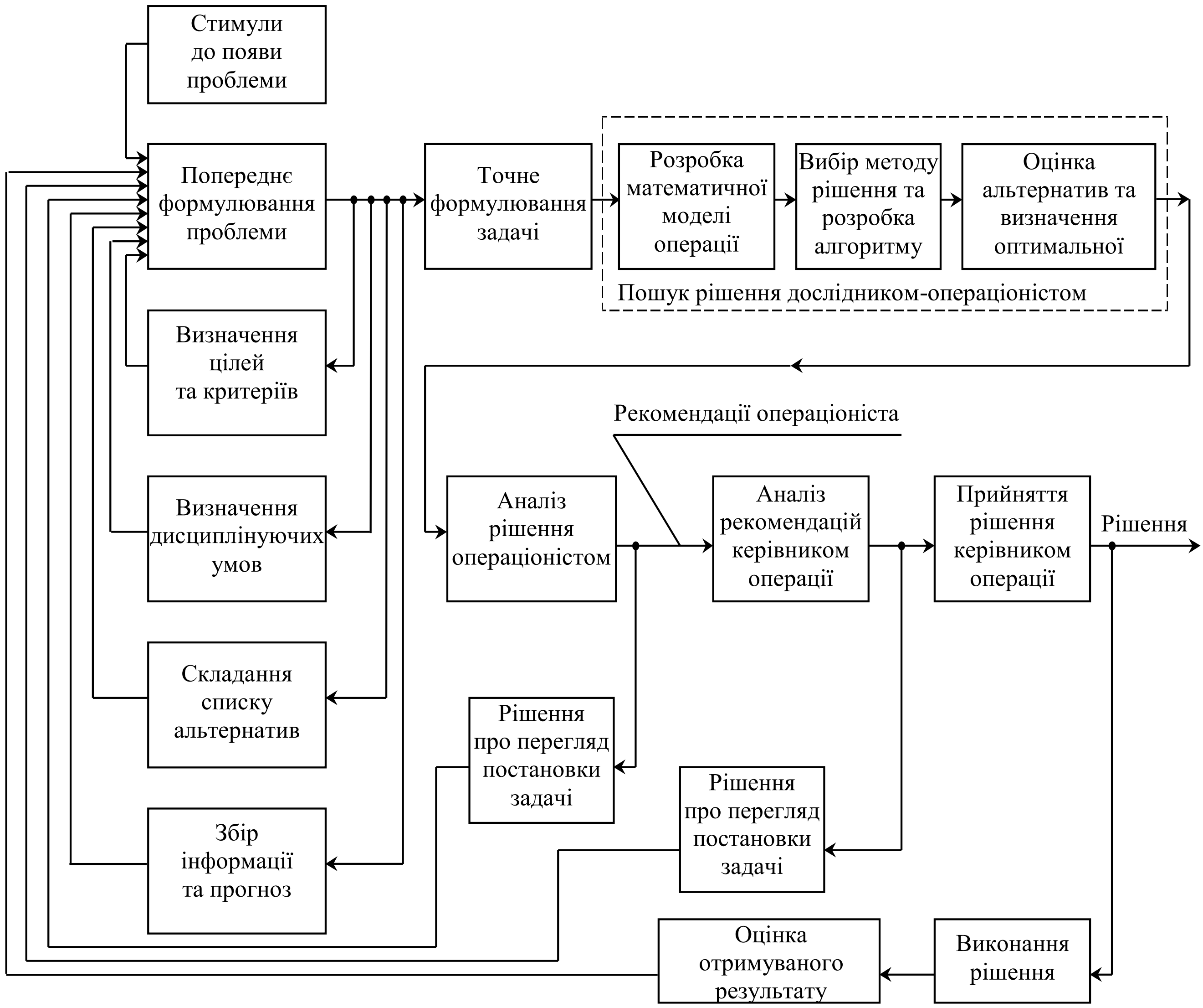


Рисунок 1.1 – Структурна схема процесу прийняття рішення

## 1.4 Загальна постановка однокритеріальної задачі прийняття рішень

Нехай є деяка операція, тобто керований захід, на результат якого оперуюча сторона може в якійсь мірі впливати.

Ефективність визначеного керування характеризується деяким критерієм оптимальності $F$, що допускає кількісне представлення. Критерій оптимальності може бути заданий або у вигляді функції (за допомогою одного із способів завдання функції), або, в складніших випадках, у вигляді функціонала, або мати лише алгоритмічне завдання.

Величина критерію оптимальності залежить від ряду чинників, які можна розбити на дві групи [9]:

1) *контрольовані (керовані) чинники*, вибір яких знаходиться у розпорядженні оперуючої сторони. Кожен конкретний вибір значень контрольованих чинників є стратегією оперуючої сторони;
2) *неконтрольовані (некеровані) чинники*, на які оперуюча сторона впливати не може. До складу неконтрольованих чинників може входити і час, якщо в операції беруть участь динамічні об'єкти, змінюючи свої властивості і поведінку в часі. Неконтрольовані чинники залежно від інформованості про них дослідника операції можна розбити на три групи:
   а) *детерміновані чинники* – невипадкові фіксовані чинники (невипадкові величини), значення яких повністю відомі оперуючій стороні до проведення операції;
   б) *стохастичні чинники* – випадкові фіксовані чинники (випадкові величини) і процеси з відомими оперуючій стороні законами розподілу;
   в) *невизначені чинники*, для кожного з яких відома тільки галузь можливих знань чинника або область, усередині якої знаходиться закон розподілу, якщо чинник випадковий. У останньому випадку має місце невизначений закон розподілу випадкового чинника. Значення невизначених чинників є невідомими оперуючій стороні у момент прийняття рішення про вибір оптимальної стратегії.

Відповідно до виділених чинників критерій оптимальності $F$ можна представити у вигляді залежності

$$F = F(X_1, X_2, ..., X_l, A_1, A_2, ..., A_p, Y_1, Y_2, ..., Y_q, Z_1, Z_2, ..., Z_r, t), \qquad (1.1)$$

де $X_1, ..., X_l$ – контрольовані чинники; $A_1, ..., A_p$ – неконтрольовані детерміновані чинники; $Y_1, ..., Y_q$ – неконтрольовані стохастичні чинники; $Z_1, ..., Z_r$ – неконтрольовані невизначені фактори. Величини $X$, $A$, $Y$, $Z$ в загальному випадку можуть бути масивами будь-якої розмірності: скалярами, векторами, матрицями і т.д.

Величини контрольованих (керованих) чинників зазвичай обмежені низкою природних причин, наприклад обмеженістю наявних для операції ресурсів. Математично ці обмеження записуються у вигляді дисциплінуючих умов:

$$g_i = g_i(X_1,...,X_l, A_1,...,A_{p_i}, Y_1,...,Y_{q_i}, Z_1,...,Z_{r_i}, t)\ \{\le, =, \ge\}\ b_i, \quad i \in \overline{1,m}, \qquad (1.2)$$

де $A_1,...,A_{p_i}$ – неконтрольовані детерміновані чинники; $Y_1,...,Y_{q_i}$ – неконтрольовані стохастичні чинники; $Z_1,...,Z_{r_i}$ – неконтрольовані невизначені фактори.

Умови (1.2) визначають області $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ простору, всередині яких розташовані можливі (допустимі) значення контрольованих факторів $X_1,...,X_l$.

Аналогічним чином можуть бути обмежені і області можливих значень неконтрольованих чинників. У ЗПР зазвичай передбачається, що ці області відомі оперуючій стороні.

Оскільки критерій оптимальності є кількісною мірою ступеня досягнення мети операції, то математично мета операції виражається в прагненні до максимально можливого збільшення (або зменшення) значення критерію *F*, що можна записати в вигляді

$$F \to \max\left(\text{або } \min\right). \qquad (1.3)$$

Засобом досягнення цієї мети є відповідний вибір оперуючою стороною керувань $X_1,...,X_l$ з областей $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ їх допустимих значень.

Отже, перед особою, відповідальною за прийняття рішення, стоїть задача яку можна сформулювати наступним чином: при заданих значеннях і характеристиках фіксованих неконтрольованих факторів $A_1,...,A_p$, $Y_1,...,Y_q$ з урахуванням невизначених факторів $Z_1,...,Z_r$ знайти оптимальні значення $\overline{X}_1,...,\overline{X}_l$ керувань $X_1,...,X_l$ з областей $\Omega_{X_1},...,\Omega_{X_l}$ їх допустимих значень, які по можливості звертали б в максимум (мінімум) критерій оптимальності *F*.

Наведене загальне формулювання задачі прийняття рішення не є строго математичним, про що свідчить обмовка «по можливості». Ця нестрогість обумовлена насамперед наявністю неконтрольованих невизначених, а також стохастичних чинників.

## 1.5 Класифікація задач прийняття рішень

ЗПР є вельми різноманітними. У зв'язку з цим виникає необхідність їх класифікувати.

В основі будь-якої класифікації лежать *ознаки*, за якими множина об'єктів поділяється на підмножини – класи.

Так, ЗПР можна класифікувати за різними ознаками. Розглянемо основні ознаки та класифікації ЗПР залежно від них.

**1. Класифікація ЗПР за *кількістю цілей операції,*** що переслідуються однією оперуючою стороною, і що відповідають цілям критеріїв оптимальності.

Згідно з цією класифікацією ЗПР поділяються на:

– *одноцільові* або *однокритеріальні (скалярні) ЗПР*;

– *багатоцільові* або *багатокритеріальні (векторні) ЗПР.*

**2. Класифікація ЗПР за *наявністю (або відсутністю) залежності критерію оптимальності і дисциплінуючих умов від часу*.**

Згідно з цією класифікацією ЗПР поділяються на:

– *статичні ЗПР*, у яких критеріальна функція і функції обмежень не залежать від часу;

– *динамічні ЗПР*, для яких характерно наступне:

а) в якості критерію оптимальності в динамічних ЗПР виступає функціонал, залежний від функцій часу, які описують поведінку деяких динамічних об'єктів, що беруть участь в операції;

б) у складі дисциплінуючих умов в динамічних ЗПР зазвичай є присутніми так звані диференціальні зв'язки, що подаються у вигляді диференціальних рівнянь, які описують поведінку динамічних об'єктів, що беруть участь в операції.

**3. Класифікація ЗПР за *наявністю випадкових і невизначених чинників***, що впливають на результат операції (визначеність – ризик – невизначеність).

Згідно з цією класифікацією ЗПР поділяються на [7, 11]:

1) *ЗПР в умовах визначеності* (*детерміновані ЗПР*), які характеризуються однозначним, детермінованим зв'язком між прийнятим рішенням і його результатом. Це найбільш простий і найбільш вивчений випадок прийняття рішень, коли відносно кожної стратегії оперуючої сторони заздалегідь, до проведення операції, відомо, що вона незмінно приводить до деякого конкретного результату. У таких ЗПР критерій оптимальності і дисциплінуючі умови залежать тільки від стратегій оперуючої сторони і фіксованих детермінованих неконтрольованих чинників, повністю відомих оперуючій стороні;
2) *ЗПР в умовах ризику* (*стохастичні ЗПР*). В цьому випадку кожна стратегія оперуючої сторони може привести до одного з множини можливих результатів, причому кожен результат має певну ймовірність появи (для ОПР ця ймовірність до проведення операції є повністю відомою). У таких ЗПР критерій оптимальності залежить, окрім стратегій оперуючої сторони і детермінованих чинників, також від фіксованих стохастичних чинників. Сама назва «задача прийняття рішень в умовах ризику» пов'язана з наступними обставинами. Незважаючи на те, що усі випадкові явища і процеси, супроводжуючі операцію і впливаючи на її результат, є добре вивченими і усі їх необхідні статистичні характеристики є повністю відомими, результат кожної конкретної реалізації операції заздалегідь (до її проведення) є невідомим, випадковим. У цьому сенсі оперуюча сторона завжди ризикує (в більшій чи меншій мірі) отримати не той результат, на який вона орієнтується, обираючи свою оптимальну стратегію з розрахунку на усереднені, статистичні характеристики випадкових чинників;

3) *ЗПР в умовах невизначеності,* у яких критерій оптимальності залежить, окрім стратегій оперуючої сторони і фіксованих чинників, також від невизначених чинників, не підвладних оперуючій стороні і не відомих їй в момент прийняття рішення. В результаті впливу таких чинників кожна стратегія оперуючої сторони виявляється пов'язаною з множиною можливих результатів, вірогідність яких або невідомі оперуючій стороні, або зовсім не мають сенсу.

На рис. 1.2 представлено класифікаційне «дерево» ЗПР, що відповідає виділеним вище класифікаційним ознакам [9].

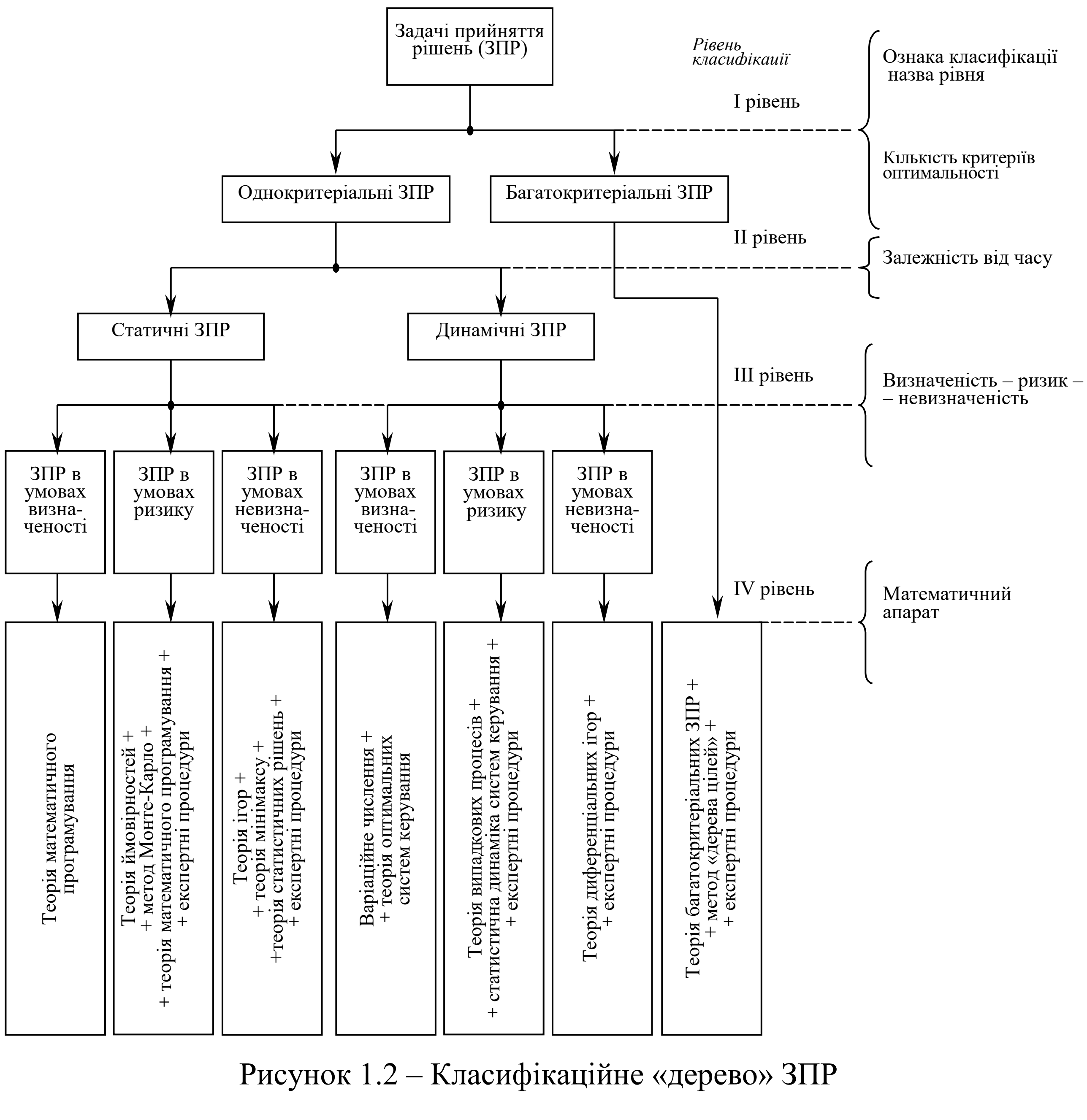


Рисунок 1.2 – Класифікаційне «дерево» ЗПР

## 1.6 Класифікація задач прийняття рішень в умовах невизначеності

***ЗПР в умовах невизначеності*** визначалася раніше як задача вибору оптимальної стратегії в операції, результат якої крім стратегій оперуючої сторони і ряду фіксованих факторів (детермінованих або стохастичних, або тих і інших разом) залежить також від деяких невизначених факторів, непідвладних оперуючій стороні і невідомих їй в момент прийняття рішення [10, 11].

Внаслідок впливу невизначених факторів кожної конкретної стратегії оперуючій стороні відповідає не єдиний, як в детермінованому випадку, а множина можливих результатів. Конкретна реалізація результату операції для кожної стратегії оперуючої сторони визначається конкретною реалізацією невизначених факторів (а також, звичайно, конкретною реалізацією фіксованих стохастичних факторів, якщо в даній операції вони входять до складу фіксованих факторів, що впливають на результат операції).

Підкреслимо принципову *відмінність між фіксованими стохастичними факторами і невизначеними факторами*. І ті і інші чинники призводять до розкиду в можливих результатах операції при багаторазовій реалізації однієї і тієї самої стратегії оперуючої сторони в аналогічних умовах проведення операції. У цьому полягає їх *схожість між собою* на відміну від детермінованих чинників.

*Різниця ж між фіксованими стохастичними факторами і невизначеними факторами* полягає в тому, що відносно перших дослідник операції в своєму розпорядженні має всю повноту статистичної інформації; цієї інформації достатньо для визначення ймовірностей появи можливих результатів операції і прийняття рішення про вибір оптимальної «в середньому» стратегії.

У цьому сенсі ***фіксовані стохастичні чинники*** є факторами, повністю вивченими дослідником операції. Щодо невизначених факторів дослідник операції подібною інформацією не володіє.

У подальшому викладі для простоти і визначеності домовимося розглядати в основному ЗПР в умовах невизначеностей в спрощеному, «чистому» вигляді, тобто «очищеними» від впливу фіксованих стохастичних чинників. Це дозволить нам приділити основну увагу вивченню впливу невизначених факторів. Звичайно, подібні ЗПР являють собою певну ідеалізацію реальних операцій, результати яких зазвичай залежать від усіх видів факторів.

Далі розглядатимемо задачі вибору оптимальних стратегій в операціях, результат яких залежить від стратегій оперуючої сторони, фіксованих детермінованих чинників і невизначених факторів. У таких ЗПР кожній стратегії оперуючої сторони відповідає множина можливих результатів, які визначаються конкретними реалізаціями невизначених факторів.

Відносно ймовірностей різних реалізацій результатів операції можливі *два випадки*:

1) ймовірності можливих результатів операції не мають фізичного сенсу;
2) ймовірності можливих результатів операції мають фізичний зміст, але або зовсім невідомі досліднику операції.

Перше відповідає невизначеним факторам нестохастичної природи, які не можуть бути описані в термінах теорії ймовірностей. Друге відповідає факторам зі стохастичною (ймовірнісною) природою, невизначеність щодо яких обумовлена їх недостатньою вивченістю.

Відповідно до характеру причини, що викликає невизначеність нестохастичної природи, можна виділити дві групи факторів:

1) *стратегічні невизначеності* – невизначені фактори, що з'являються за рахунок участі в операції кількох оперуючих сторін, тобто розумних, активно діючих учасників операції, які переслідують різні (незбіжні) цілі. Невизначеність тут обумовлена тим, що кожна з діючих сторін змушена приймати рішення в умовах, коли їй невідомі майбутні дії (стратегії), які будуть зроблені в процесі проведення операції іншими її учасниками. Звідси випливає і назва цих факторів;
2) *концептуальні невизначеності* – невизначені фактори, супутні прийняттю особливо складних рішень, що мають довготривалі і далекосяжні наслідки, і пов'язані з нечіткими уявленнями оперуючої сторони про свої власні цілі і цілі інших учасників операції, про свої і чужі можливості щодо досягнення цілей, про майбутні шляхи розвитку і т.п., а також фактори, пов'язані з труднощами кількісної оцінки ступеня досягнення особливо складних, неформалізованих цілей, що мають лише якісний опис.

Невизначені фактори стохастичної природи мають і іншу поширену назву – природні невизначеності. *Природні невизначеності* – це невизначені фактори, що з'являються із-за недостатньої вивченості оперуючою стороною «природи», пов'язаної з даної операцією. Під словом «*природа*» в ТПР розуміють всю сукупність обставин, в умовах яких доводиться приймати рішення. Сюди можна віднести невідомі характеристики деяких процесів, пов'язаних з протіканням операції, або невідомі властивості об'єктів, що беруть участь в операції, а також невідомі зовнішні умови виконання операції.

*ЗПР в умовах дії невизначених стратегічних факторів* можна назвати *багатосторонніми ЗПР*, оскільки результат відповідних операцій залежить від діяльності декількох оперуючих сторін. Розбіжність цілей оперуючих сторін багатосторонньої операції створює конфлікт між її учасниками, інакше, – конфліктну ситуацію прийняття рішень. Звідси йде ще одна назва подібних ЗПР – ЗПР в умовах конфліктної ситуації (*конфліктні ЗПР*).

Підкреслимо принципову відмінність ЗПР в умовах конфліктної ситуації від інших видів ЗПР в умовах невизначеності.

*З конфліктними ЗПР зазвичай пов'язують два припущення*:

1) для кожної оперуючої сторони багатосторонньої операції є відомими як цілі, так і весь набір можливих стратегій всіх інших учасників операції;
2) оскільки кожен учасник багатосторонньої операції є розумним і активно діючим, то визначальним в його поведінці є прагнення до максимально можливого досягнення власних цілей.

*Конфліктні ЗПР* можна поділити на:

- *однорівневі ЗПР*, у яких учасники операції не пов'язані ніякими формами підпорядкування, вони діють на одному рівні влади, а їх дії пов'язані лише тим, що вони беруть участь в одній операції і зацікавлені в тому чи іншому її кінці;
- *багаторівневі ЗПР*, що виникають в складних системах керування з ієрархічною структурою, для яких характерною є наявність декількох рівнів керування, в яких нижчі підпорядковані вищим, але в той же час володіють деякими правами щодо прийняття самостійних рішень. Цілі нижчих рівнів керування не завжди повністю відповідають цілям вищих рівнів. Це і породжує *багаторівневі ЗПР* (*ієрархічні ЗПР*).

*Однорівневі конфліктні ЗПР* можуть бути як антагоністичними, так і неантагоністичні. *Антагоністична ЗПР* пов'язана з операцією, в якій стикаються інтереси двох сторін, що переслідують прямо протилежні цілі. Багаторівневі ЗПР не є антагоністичними: дослідження ситуацій прямої непокори і протидії нижчестоящих керівників вищим не є предметом математичної теорії прийняття рішень.

У зазначеному сенсі *ЗПР в умовах «природних» невизначеностей* є принципово більш складними. Тут другим учасником операції є «природа». Однак природу не можна розглядати як розумного, активно діючого учасника операції; їй не можна приписати ніяких свідомо поставлених цілей, до здійснення яких вона прагне. Тим самим невизначеність виступає тут в більш «важкій» формі. Однак природа розвивається і «діє» відповідно до своїх об'єктивно існуючих законів. У людини є можливість поступово вивчати ці закони, зокрема за допомогою спеціальних експериментів, і тим самим знижувати ступінь невизначеності. У цьому – ключ до розв’язання ЗПР в умовах «природних» невизначеностей.

Найбільш складний клас ЗПР в умовах невизначеностей складають *ЗПР в умовах дії невизначених факторів концептуального характеру*. Ці задачі можна також назвати ЗПР в умовах невизначених цілей і можливостей. Тут невизначеність виступає в найбільш важкій формі.

Для розв’язання ЗПР в умовах невизначеності концептуального характеру в даний час математичний апарат розроблений слабо. Тут розв’язання задачі виливається насамперед в чисто концептуальну проблему, спрямовану на розкриття невизначеності щодо концепцій (цілей і можливостей їх досягнення). Ця проблема вирішується, з використанням експертних евристичних процедур, зокрема з використанням методу «дерева цілей».

Проведеному огляду ЗПР в умовах невизначеності відповідає класифікаційна схема, подана на рис. 1.3 [11].

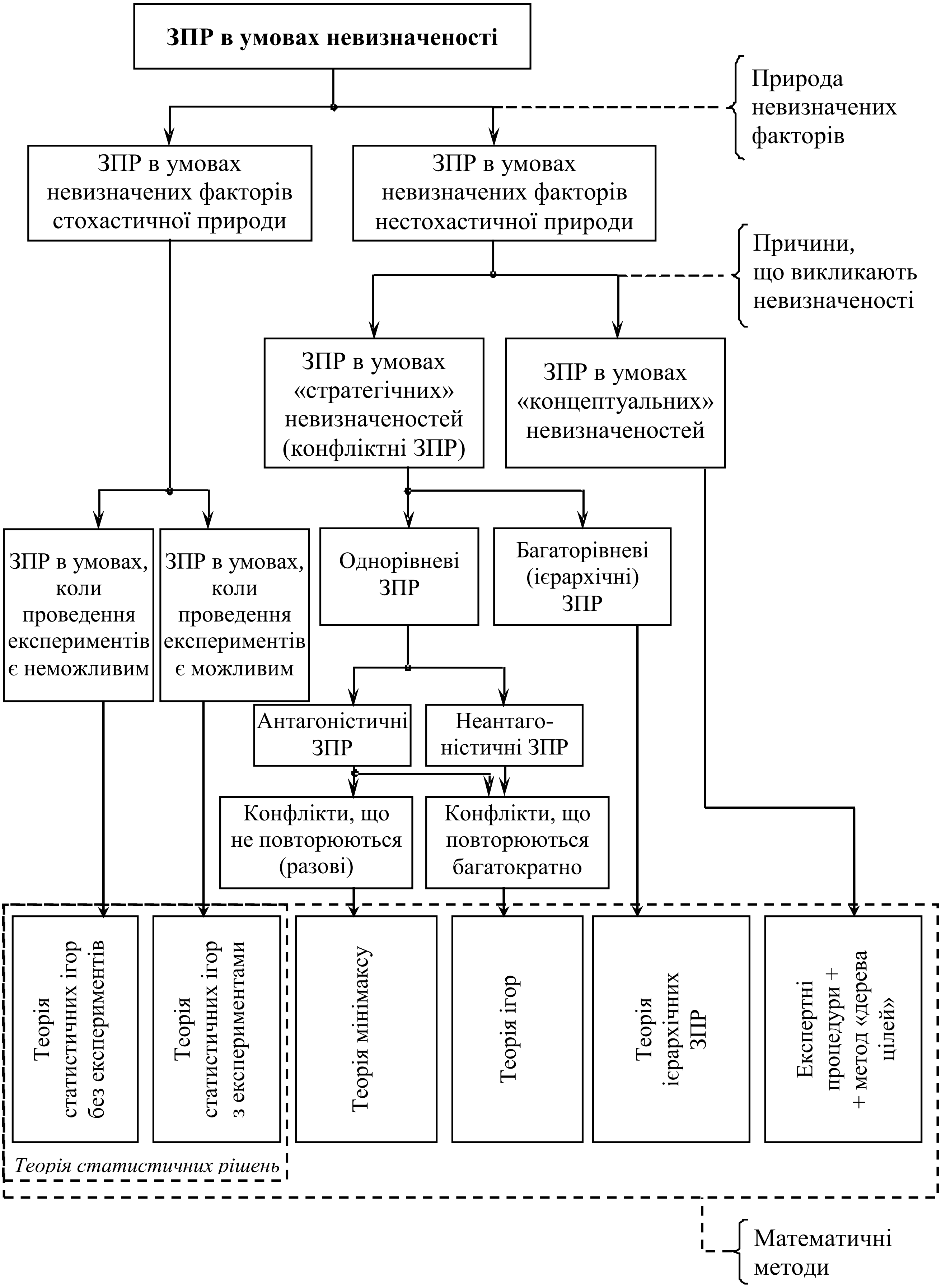


Рисунок 1.3 – Класифікаційна схема ЗПР в умовах невизначеності

## Питання для самоконтролю

1. Наведіть основні риси, що характеризують ситуацію, в якій відбувається прийняття рішень.
2. Що таке критерії? Наведіть приклади критеріїв.
3. Що таке альтернативи? Наведіть приклади альтернатив.
4. Сформулюйте основне призначення ТПР.
5. Що дає початкову інформацію для постановки задачі прийняття рішень?
6. Що означає, що виникла задача прийняття рішень?
7. Які припущення зазвичай пов'язують з конфліктними ЗПР?
8. В чому полягає антагоністична ЗПР?
9. В чому полягає неантагоністична ЗПР?
10. Вкажіть причини, що викликають невизначеність нестохастичної природи.
11. В чому полягає різниця між фіксованими стохастичними факторами і невизначеними факторами?
12. На які класи поділяються ЗПР за класифікаційною ознакою – «визначеність – ризик – невизначеність»?
13. За якими ознаками можна класифікувати задачі прийняття рішень?
14. На які класи поділяються ЗПР за класифікаційною ознакою «кількість цілей операції»?
15. На які класи поділяються ЗПР за класифікаційною ознакою «наявність або відсутність залежності критерію оптимальності і дисциплінуючих умов від часу»?

## Лекція 2. Прийняття рішень на основі бінарних відношень

**Мета лекції:** ознайомити з апаратом бінарних відношень та його використанням при прийнятті рішень; вивчити методи прийняття рішень на основі заданих відношень переваги, функцій вибору та функцій корисності; набути навичок застосування цих методів на практиці.

### План лекції

2.1 Математичні основи теорії бінарних відношень.
2.2 Бінарні відношення в теорії прийняття рішень.

***Перелік ключових термінів і понять з теми:*** *бінарне відношення; відношення на множині; верхній та нижній розрізи відношення; порожнє, повне, діагональне та антидіагональне відношення; операції над відношеннями; властивості відношень; відношення еквівалентності, порядку, домінування та переваги; R-оптимальність; найкращий, найгірший, максимальний та мінімальний елементи з множини альтернатив; функція вибору та її класи; функція корисності; методики визначення корисності в різних ситуаціях.*

Теорія бінарних відношень становить фундаментальний апарат сучасної математики, який знаходить широке застосування в різноманітних галузях, зокрема в теорії прийняття рішень [9, 10, 12]. Дана тема присвячена систематичному викладу математичної теорії бінарних відношень та її застосуванню в задачах вибору та прийняття рішень.

Прийняття рішень тісно пов'язане з відношеннями (загалом *відношення* – це взаємозв'язок елементів певних множин), адже в основі будь-якого рішення ОПР лежить перевага альтернатив. Модель переваги представляється через специфічний тип відношень, що отримав назву ***«простір відношень переважності»***.

Найелементарніший випадок, який дає можливість здійснити обґрунтований вибір серед кількох об'єктів, передбачає наявність одного ***«критерію якості»***. Такий критерій дозволяє порівняти будь-які два об'єкти, однозначно визначити, який із них є кращим (найважливішим, суттєвішим, переважнішим), і обрати той (чи ті), для якого цей критерій приймає максимальне значення. Проте у більшості практичних ситуацій встановити один числовий критерій або набір критеріїв і охарактеризувати окремий об'єкт (альтернативу) через один чи кілька таких критеріїв є досить важким завданням або взагалі нездійсненним. Водночас, якщо розглядати об'єкт не ізольовано, а у парі з іншим об'єктом, то для певних пар можна здійснювати попарне порівняння, встановлюючи, який із них є кращим (переважнішим за інший) або рівноцінним. Така можливість попарного порівняння дає змогу впорядковувати об'єкти, використовуючи *мову бінарних відношень*. За таких умов стверджують, що два досліджувані ***об'єкти знаходяться у бінарному відношенні***.

Концепція бінарного відношення знаходить широке застосування в теорії прийняття рішень, оскільки вона забезпечує можливість формалізації операцій попарного порівняння між досліджуваними об'єктами (альтернативами), і тим самим дозволяючи моделювати переваги ОПР, структурувати множини альтернатив та будувати раціональні механізми вибору.

## 2.1 Математичні основи теорії бінарних відношень [9, 12]

### 2.1.1 Поняття про бінарне відношення. Способи задавання відношень

Говорити про відношення ми можемо лише тоді, коли ми вміємо виділяти множину об’єктів, на якій це відношення визначено.

Математично визначення відношення можна сформулювати таким чином.

*Відношенням* $R$ на множині $\Omega$ називається підмножина множини $\Omega\times\Omega$, тобто $R\subset\Omega\times\Omega$.

Задавання підмножини $R$ в множині $\Omega\times\Omega$ визначає, які пари знаходяться у відношенні $R$. Відношення $R$ на множині $\Omega$ позначатимемо у вигляді $(R,\Omega)$.

Якщо елементи $x$ та $y$ множини $\Omega$ знаходяться у відношенні $R$, то це записується у вигляді $x\,R\,y$ або $(x,y)\in R$.

В якості прикладу розглянемо множину натуральних чисел $N$. Відношення «менше або дорівнює» ($\le$) є бінарним відношенням на $N$, оскільки для довільних $m,n\in N$ можна визначити, чи виконується $m\le n$.

Для того, щоб задати відношення $(R,\Omega)$ необхідно задати всі пари $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, які включено в $R$.

Крім повного перелічування усіх пар виділяють три способи задавання відношень: матрицею, графом та задаванням відношення розрізами, причому задавання через матрицю та граф застосовуються для задавання відношень на скінченних множинах, а задавання відношень через розрізи відношення може застосовуватись і для нескінченних множин.

Опишемо ці способи задавання відношень.

**1. Задавання бінарного відношення переліком пар**, що перебувають у ньому або за допомогою правила, яке дає змогу з’ясувати, перебуває пара в певному відношенні, чи ні.

Наприклад, $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $R_1=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_3,a_2),(a_3,a_4)\}$.

**2. Задавання відношення матрицею.** Нехай $\Omega$ складається з $n$ елементів, $R$ – відношення на $\Omega$. Занумеруємо елементи множини $\Omega$ цілими числами від 1 до $n$. Для того, щоб задати відношення побудуємо квадратну таблицю розміром $n\times n$. Її $i$-ий рядок відповідає елементу $x_i$ множини $\Omega$, $j$-й стовпчик – елементу $x_j$ з $\Omega$. На перерізі $i$-го рядка та $j$-го стовпчика ставимо 1, якщо виконується $x_i\,R\,x_j$, і нуль в інших випадках, тобто

$$a_{ij}(R)=\begin{cases}1, & x_i\,R\,x_j,\\ 0, & \text{в інших випадках,}\end{cases}$$

**3. Задавання відношення за допомогою графа.** Для того, щоб задати відношення графом поставимо у взаємно однозначну відповідність елементам скінченної множини Ω, на якій визначено відношення, вершини графа $x_1,...,x_n$ (за будь-якою нумерацією).

Проведемо дугу від $x_i$, до $x_j$, тоді й тільки тоді, коли виконується $x_i\,R\,x_j$ (якщо $i = j$ дуга $(x_i, x_j)$ перетворюється у петлю при вершині $x_i$).

Якщо задано будь-який орієнтований граф $G$ з $n$ вершинами, та вибрана нумерація на множині Ω, то, таким чином, на Ω задане деяке відношення $R = R(G)$, таке, що $x_i\,R\,x_j$ виконується тоді і тільки тоді, коли в графі $G$ є дуга $(x_i, x_j)$. Отже, граф є геометричним зображенням відношення.

Для багатьох альтернатив граф може мати складний вигляд. У такому випадку кращими будуть ті альтернативи, з яких дуги тільки виходять.

Зображення переваг у вигляді графів дає змогу наочно оцінювати переваги альтернатив за сукупністю критеріїв.

**4. Задавання відношень розрізами.** Розглянемо відношення $R$ на множині Ω.

*Верхнім розрізом* $R^+(x)$ відношення $(R,\Omega)$ в елементі $x$ називається множина елементів $y\in\Omega$ таких, що $(x, y)\in R$

$$R^+(x)=\{y\in\Omega\,|\,(x,y)\in R\}. \qquad (2.1)$$

Тобто верхній розріз (множина $R^+$) це множина всіх таких елементів $y$, з якими фіксований елемент $x$ знаходиться у відношенні $R$ $(x\,R\,y)$.

*Нижнім розрізом* $R^-(x)$ відношення $(R,\Omega)$ в елементі $x$ називається множина елементів $y\in\Omega$ таких, що $(y,x)\in R$

$$R^-(x)=\{y\in\Omega\,|\,(y,x)\in R\}. \qquad (2.2)$$

Тобто нижній розріз (множина $R^-$) – це множина всіх таких елементів $y$, які перебувають у відношенні $R$ з фіксованим елементом $x$ $(y\,R\,x)$.

Відношення $R$ задане, якщо для кожного $x\in\Omega$ задано множину $R^+(x)$ або для кожного $x\in\Omega$ задано множину $R^-(x)$.

Розглянемо **відношення спеціального виду**, та описані вище способи їх задавання.

Відношення називається ***порожнім*** (позначається ∅), якщо воно не виконується для жодної пари $(x, y)\subset\Omega\times\Omega$.

Для порожнього відношення справедливо:

1. Матриця $A$ (∅) така, що $a_{i,j}$ (∅) = 0, для всіх $i, j$;
2. Граф $G$(∅) не має дуг;
3. $R^+(x) = R^-(x) = \varnothing$ для всякого $x\in\Omega$.

Відношення називається ***повним*** (позначається $U$), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$. Для повного відношення вірно:

1. Матриця $A\ (U)$ така, що $a_{i,j}\,(U) = 1$, для всіх $i, j$;
2. Граф $G(U)$ такий, що дуги з'єднують аби-яку пару вершин;
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega$ для всіх $x \in \Omega$.

Відношення називається ***діагональним*** або відношенням рівності (позначається $E$), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються із співпадаючих елементів: $x\ E\ y$, якщо $x$ та $y$ це один і той самий елемент множини $\Omega$. Для діагонального відношення $E$ мають місце твердження:

1. Матриця $A\ (E)$ така, що

$$a_{i,j}(E)=\begin{cases}1, \text{ якщо} & i=j,\\ 0, \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

2. Граф $G(E)$ такий, що наявні тільки петлі у вершинах;
3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = x$ для всіх $x \in \Omega$.

Відношення називається ***антидіагональним*** ( позначається $\overline{E}$ ), якщо воно виконується для всіх пар $(x, y) \subset \Omega\times\Omega$, які складаються з не співпадаючих елементів. Для відношення $\overline{E}$ справедливо:

1. Матриця $A\ (E)$ така, що

$$a_{i,j}(\overline{E})=\begin{cases}1, \text{ якщо} & i\neq j,\\ 0, \text{ в інших випадках}\end{cases}$$

2. Граф $G(\overline{E})$ такий, що наявні всі дуги $(x_i, x_j)$ якщо $i \neq j$, (відсутні тільки петлі при вершинах).

3. Розрізи $R^+(x) = R^-(x) = \Omega \setminus \{x\}$ для всіх $x \in \Omega$.

### 2.1.2 Операції над бінарними відношеннями

Бінарні відношення, будучи множинами, допускають стандартні теоретико-множинні операції, а також мають специфічні операції. Розглянемо їх докладно.

Будемо говорити, що відношення $R_1$ *включено* у відношення $R_2$ (записується $R_1 \leq R_2$), якщо множина пар, для яких виконується відношення $R_1$ включена у множину пар, для яких виконується $R_2$.

Відношення $R_1$ *строго включено* у $R_2$ $(R_1 < R_2)$, якщо $R_1 \leq R_2$ й $R_1 \neq R_2$.

*Рівність відношень* реалізується так само як і рівність множин.

Для матричного задавання відношень буде вірним наступне правило: якщо $R_1 \leq R_2$, то $a_{ij}(R_1) \leq a_{ij}(R_2),\ i, j = \overline{1,n}$.

Відношення $\overline{R}$ називається *доповненням* відношення $R$, тоді і тільки тоді, коли воно виконується лише для тих пар елементів, для яких не виконується відношення $R$.

Очевидно, що

$$\overline{R} = \Omega^2 \setminus R. \qquad (2.3)$$

Тому у матричному запису $a_{ij}(\overline{R}) = 1 - a_{ij}(R),\ i, j = \overline{1,n}$.

У графі $G(\overline{R})$ присутні ті й тільки ті дуги, які відсутні у графі $G(R)$.

Для розрізів відношення $\overline{R}$ справедливо: $\overline{R}^+(x) = \Omega \setminus R^+(x)$, $\overline{R}^-(x) = \Omega \setminus R^-(x)$.

*Перерізом* відношення $R_1$ та $R_2$ (записується $R_1 \cap R_2$) називається відношення, яке визначено перерізом відповідних підмножин з $\Omega^2$.

В матричному записі це означає, що

$$a_{ij}(R_1 \cap R_2) = min\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\},\ i, j = \overline{1,n}.$$

*Об'єднанням* відношень $R_1$ та $R_2$ (позначається $R_1 \cup R_2$) називається відношення, що визначено об'єднанням відповідних підмножин з $\Omega^2$.

В матричному записі це можна записати, як

$$a_{ij}(R_1 \cup R_2) = max\{a_{ij}(R_1), a_{ij}(R_2)\}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

*Зворотним* до відношення $R$ називається відношення $R^{-1}$, яке визначається такою умовою:

$$x\,R^{-1}y \Leftrightarrow y\,R\;x. \tag{2.4}$$

Для матриць відношень $R$ та $R^{-1}$ буде мати місце $a_{ij}(R^{-1}) = a_{ji}(R)$.

*Добутком* (або *композицією* відношень $R_1$ та $R_2$ (позначається $R_1 \cdot R_2$) називається відношення, яке визначається за правилом:

$x\,(R_1 \cdot R_2)\,y$, якщо існує елемент $z \in \Omega$, такий що $x\,R_1\,z$ та $z\,R_2\,y$.

Відношення $(R_1, \Omega_1)$ називається *звуженням* відношення $(R, \Omega)$ на множину Ω, якщо $\Omega_1 \subseteq \Omega$ та $R_1 = R \cap \Omega_1 \times \Omega_1$. Звуження відношення $(R, \Omega)$ на множину $\Omega_1$ називають також відношенням $R$ на множині $\Omega_1$.

### 2.1.3 Властивості бінарних відношень

Класифікація бінарних відношень базується на ключових властивостях, що визначають їх структуру та поведінку.

Відношення $R$ називатимемо *рефлексивним*, якщо $x\,R\,x$ для будь-якого $x \in \Omega$.

Наприклад, «бути схожими», «бути не старшим» – рефлексивні відношення, «бути братом», «бути старшим» – не рефлексивні.

В матриці рефлексивного відношення на головній діагоналі знаходяться одиниці, тобто матриця така, що $a_{i,j} = 1$, якщо $i = j$. Граф рефлексивного відношення обов'язково має петлі у вершинах. Для верхнього й нижнього розрізів справедливо $x \in R^+(x),\ x \in R^-(x)$ для всіх $x \in \Omega$.

Відношення $R$ називатимемо *антирефлексивним*, якщо $x\,R\,y$ означає $x \neq y$, для $\forall x \in \Omega$.

В матриці антирефлексивного відношення на головній діагоналі знаходяться нулі, тобто $a_{i,j} = 0$, якщо $i = j$. Граф рефлексивного відношення не має петель у вершинах, і верхні та нижні розрізи задовольняють умові $x \notin R^{+}(x)$, $x \notin R^{-}(x)$ для всіх $x \in \Omega$.

Наприклад, «більше», «менше», «бути старшим» – антирефлексивні відношення.

Відношення $R$ називається *симетричним*, якщо $R \leq R^{-1}$ $(x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$.

Матриця симетричного відношення симетрична, тобто $a_{i,j} = a_{ji}$, для всіх $i, j$. У графі всі дуги парні. Для розрізів має місце рівність $R^{+}(x) = R^{-}(x)$ для всіх $x \in \Omega$.

Наприклад, «бути схожим», «працювати в одному відділі» – симетричні відношення.

Відношення $R$ називається *асиметричним*, якщо $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$ (тобто з двох виразів $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ хоча б один не вірний).

У матриці симетричного відношення $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$ для всіх $i, j$. Тобто з двох симетричних елементів $a_{ij}$ і $a_{ji}$ хоча б один обов'язково дорівнює 0.

Наприклад, «більше» та «менше» – асиметричні відношення.

Зауважимо, що антирефлексивність є обов'язковою умовою асиметричності.

Відношення $R$ називається *антисиметричним*, якщо $x\,R\,y$ та $y\,R\,x$ можуть бути вірні одночасно тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

Для матриці антисиметричного відношення справедливо $a_{ij} \wedge a_{ji} = 0$, якщо $i \neq j$.

Наприклад, «більше або дорівнює», «не більше», «не гірше» – антисиметричні відношення.

Відношення R називається *транзитивним*, якщо $R^2 \leq R$ ( якщо з $x\,R\,z$ та $z\,R\,y$ випливає $x\,R\,y$).

Наприклад, «більше або дорівнює», «менше», «бути старшим», «працювати в одному відділі» – транзитивні відношення.

Умова $R^2 \leq R$ дає зручний спосіб перевірки транзитивності відношення. Якщо відношення задано матрицею для цього необхідно обчислити матрицю відношення $R^2$ (тобто піднести в квадрат матрицю вихідного відношення) і перевірити умову. Якщо $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}(R)$ для всіх $i, j$ – відношення транзитивне. Якщо ж умову $a_{ij}\left(R^2\right) \leq a_{ij}(R)$порушено хоча б для однієї пари індексів $i, j$ – відношення не буде транзитивним.

Відношення R називається *ациклічним*, якщо $R \bigcap R^{-1} = \varnothing$, тобто з $x\,R\,z_1$, $z_1\,R\,z_2$, ... , $z_{k-1}\,R\,y$ випливає, що $x \neq y$.

Це означає, що граф такого відношення не містить циклів.

Відношення R називається *від'ємно транзитивним*, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

Відношення R називається *сильно транзитивним*, якщо воно водночас транзитивне та від'ємно транзитивне.

Властивості ациклічності та транзитивності особливо важливі у теорії прийняття рішень, тому що вони виражають природні взаємозв'язки між об'єктами. Дійсно, якщо об'єкт *x* в деякому сенсі не гірше за об'єкт *y*, а об'єкт *y* в тому ж сенсі не гірше за об'єкт *z*, то природно чекати, що об'єкт *x* буде не гіршим за об'єкт *z* (транзитивність), і у всякому разі *z* не краще за *x* (ациклічність).

### 2.1.4 Спеціальні класи бінарних відношень: відношення еквівалентності, порядку, домінування та переваги

Відношення *R* є відношенням *еквівалентності* (*еквівалентністю*), якщо воно рефлексивне, симетричне та транзитивне. Позначимо його $R_e$ , або символом ~.

Задавання еквівалентності на множині тісно пов'язане з розбиттям множини на її підмножини, що не перетинаються.

Нехай задане розбиття множини Ω. Тобто на множині Ω задані такі її підмножини $\Omega_1$, $\Omega_2$,… $\Omega_N$, що $\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i$, причому $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ , для $i \neq j, \quad i, j, = 1,2,\ldots,N$.

Введемо на множині Ω відношення *R* таким чином: $x\,R\,y$ тоді і тільки тоді, коли існує множина $\Omega_i$, така, що $x \in \Omega_i$ і $y \in \Omega_i$.

Таким чином, задавання еквівалентності на деякій множині Ω рівносильне задаванню розбиття цієї множини на класи еквівалентних між собою елементів. І навпаки, всіляке розбиття множини Ω визначає на цій множині відповідну йому еквівалентність.

Відношенням *нестрогого порядку* «$\leq$» (*нестрогим порядком* називається відношення, яке має властивості рефлективності, антисиметричності та транзитивності.

Відношенням *строгого порядку* «<» (*строгим порядком* називається відношення, яке має властивості антирефлективності, асиметричності та транзитивності.

Нехай задано відношення «$\leq$» – нестрогий порядок на множині $\Omega$. Йому можна поставити у відповідність строгий порядок «<», який визначається таким чином: $x < y$ тоді і тільки тоді коли $x \leq y$ та $x \neq y$. І навпаки, нехай «<» – відношення строгого порядку на множині $\Omega$. Йому можна поставити у відповідність відношення «$\leq$» таким чином: $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $x < y$ або $x = y$. Тобто за нестрогим порядком ми можемо визначити відповідний йому строгий порядок і навпаки.

Якщо на деякій множині задане відношення порядку (для всіх, або деяких пар його елементів), то кажуть, що на множині заданий *частковий порядок.*

Частковий порядок, заданий на множині $\Omega$ називається лінійним порядком, якщо для будь яких елементів $x \in \Omega,\ y \in \Omega$ має місце одна з трьох умов $x < y$, $x = y$ або $x > y$ (тобто ми можемо порівняти будь які два елементи з $\Omega$).

Відношенням *домінування* називається відношення, що має властивості антирефлексивності і асиметричності.

Будемо говорити, що $x$ домінує $y$, якщо $x$ в якому-небудь сенсі краще за $y$.

Отже, відношення строгого порядку є особливим випадком відношення домінування, коли вимагається ще й транзитивність. У загальному випадку при домінуванні як транзитивність так і ациклічність можуть не мати місця.

Два елементи можна порівняти за відношенням $R$, якщо $x\ R\ y$ або $y\ R\ x$. В інших випадках елементи незрівняні.

У випадку повного відношення $R$ на множині $\Omega$, всілякі два елементи цієї множини можна порівняти.

Для опису переваги використовують такі бінарні відношення, дані на множині альтернатив $\Omega$:

а) відношення строгої переваги $R^S$;

б) відношення байдужості $R^I$;

в) відношення нестрогої переваги.

*Відношення строгої переваги* $R^S$ означає, що один об’єкт (строго) переважає інший (краще).

*Відношення байдужості* $R^I$ означає, що об’єкти однакові за перевагами, і якщо обмежити вибір цими двома об’єктами, все одно який з них вибирати.

*Відношення нестрогої переваги* означає що один об’єкт не менш переважний, ніж інший ( не гірше)

Припустимо, що за допомогою ОПР або експертів визначене відношення нестрогої переваги $R$ на множині припустимих альтернатив $X$.

Це означає, що відносно будь-якої пари $(x, y) \subset X \times X$, відомо:

1) « $x$ не гірше $y$ », тобто $x \geq y$ (інакше $(x, y) \in R$);

2) « $y$ не гірше $x$ », тобто $y \geq x$ ( або $(y, x) \in R$);

3) « $x$ та $y$ не порівняні між собою» ( $(x, y) \notin R$ та $(y, x) \notin R$ ).

Ця інформація дозволяє звузити клас раціональних виборів, включивши до нього лише ті альтернативи, які не домінуються жодною іншою альтернативою множини $X$.

Щоб пояснити це поняття, визначимо відповідні відношенню переваги $R$ відношення строгої переваги $R^S$ та відношення однаковості (байдужості) $I$.

Будемо казати, що альтернатива $x$ строго краще альтернативи $y$ (строго переважає альтернативу $y$), якщо одночасно $x \geq y$ та $y \neq x$, тобто

$$(x, y) \in R \text{ і } (y, x) \notin R.$$

Сукупність усіх таких пар назвемо відношенням *строгої переваги* $R^S$ на множині *X*.

Легко бачити, що це відношення повинно задовольняти таким властивостям:

1) антирефлексивність,

2) асиметричність.

Для більш компактного запису відношення $R^S$ використаємо визначення відношення $R^{-1}$, зворотного до *R*, а саме $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Тоді відношення строгої переваги може бути записано в такому вигляді: $R^S = R \setminus R^{-1}$.

*Відношення однаковості*, що відповідає відношенню переваги *R*, визначається таким чином. Пара $(x, y) \in R^I$ тоді і лише тоді, коли або не вірне ні $x \geq y$ ні $y \geq x$ або одночасно $x \geq y$ та $y \geq x$. Інакше кажучи, $(x, y) \in R^I$ коли інформація, яку ми маємо недостатня для того, щоб зробити обґрунтований вибір між альтернативами *x* та *y*.

Відношення $R^I$ може бути записано у такій формі:

$$R^I = \left(\left(X \times X\right) \setminus \left(R \cup R^{-1}\right)\right) \cup \left(R \mid R^{-1}\right).$$

Легко побачити, що чим більше інформації про реальну ситуацію або процес, тим вужче відношення однаковості.

Якщо $(x, y) \in R^S$, то будемо казати, що альтернатива *x* домінує альтернативу *y* $(x > y)$.

Альтернативу $x \in X$ назвемо недомінуємою на множині *X* за відношенням *R*, якщо $(y, x) \notin R^S$, для $\forall y \in X$. Тобто якщо *x* – альтернатива, що не домінується, то в множині *X* не має жодної альтернативи, яка домінувала би *x*. (У наведеному вище прикладі недомінуємою є альтернатива $x_1$).

Якщо деякі альтернативи у певному сенсі є недомінованими, то їх вибір у задачах прийняття рішень доречно вважати раціональним у межах поданої інформації.

Отже, інформація у формі відношення переваги дозволяє звузити клас раціональних виборів на множині *X* до множини альтернатив, що не домінуються, тобто до множини виду:

$$X^{н.д.} = \left\{x \middle| x \in X,\ (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in R \setminus R^{-1}, \forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}\right\}.$$

### 2.1.5 Поняття *R*-оптимальності, найкращого, найгіршого, максимального та мінімального елементів

Наведені вище відомості були пов'язані з формалізацією попарного порівняння альтернатив, яка необхідна для виділення найкращого елемента (або декількох кращих) з всієї множини альтернатив *X*. Для того ж, щоб виділити «кращий» елемент, необхідно формалізувати поняття «кращий». Використаємо для цього апарат бінарних відношень.

З обиранням за даним відношенням *R* кращого елемента тісно пов'язане поняття найкращого та найгіршого елементів.

Елемент $x^*$ з множини *X* будемо називати *найкращим* за відношенням *R*, якщо для $\forall x \in X$ виконується $x^* \, R \, x$.

Елемент $x_* \in X$ будемо називати *найгіршим* за відношенням *R*, якщо $\forall x \in X$ має місце $x \, \mathrm{R} \, \mathrm{x}_*$.

Легко бачити, що найкращій та найгірший елементи існують не завжди. Наприклад, їх не буде коли відношення не є повним.

Елемент $x^0$ називається *максимальним* за відношенням $R^S$ на множині *X*, якщо для $\forall x \in X$ має місце або $x^0 \, \mathrm{R}^{\mathrm{S}} \, \mathrm{x}$, $\forall y \in X$ або $x^0$ незрівняний з *X*.

Тобто не існує елемента (альтернативи) $x \in X$, який би був кращим за альтернативу $x^0$.

Елемент $x_0$ називається *мінімальним* відносно *R* на множині *X*, якщо для $\forall x \in X$ або $x \, R^S x_0$ або *x* незрівняний з $x_0$. Тобто не існує елемента $x \in X$ який би був гіршим за $x_0$, немає жодного елемента *x*, який би домінувався елементом $x_0$.

У наведеному вище прикладі максимальним елементом буде елемент *a*, мінімальним – елемент *c*.

Множина мінімальних за *R* елементів множини *X* позначається $min_R X$ .

Зауважимо, що якщо найкращі елементи існують, то вони будуть і максимальними, але не навпаки.

Отже, якщо треба обрати найкращу в деякому сенсі альтернативу, то природнім буде її вибір із множини максимальних (недомінуємих) альтернатив.

Позначимо множину максимальних за *R* об'єктів множини *X* як $max_R X$ . Ця множина *внутрішньо стійка* в тому сенсі, що якщо $a, b \in max_R X$ , то не може бути ні $a \, R b$ ні $b \, R \, a$.

Множина називається *зовнішньо стійкою*, якщо для кожного елемента $a \in X$ , який не є максимальним, знайдеться переважніший за нього елемент серед максимальних. Тобто буде $a^0 R \, a$ для деякого $a^0 \in max_R X$ .

Внутрішнє та зовнішнє стійка множина $max_R X$ називається *ядром* відношення *R* в *X*. Поняття стійкості має велике значення, бо якщо множина $max_R X$ зовнішньо стійка, то оптимальний елемент повинен бути вибраний саме з цієї множини. Якщо ж множина $max_R X$ не є зовнішнє стійкою, то для обмеження вибору цією множиною нема підстав.

У випадку, коли потрібно вибрати не один, а декілька кращих елементів, або впорядкувати всі об'єкти за перевагою, поняття максимального елемента і ядра втрачають своє значення.

Числова функція $\varphi$, яка визначена на множині $X$ називається *зростаючою* (*не спадною*) за відношенням *R*, якщо з $a\,R\,b$ випливає $\varphi(a) > \varphi(b)$ (відповідно $\varphi(a) \ge \varphi(b)$) для всіх $a, b \in X$ .

Має місце наступна лема.

**Лема 2.1.** Нехай $B \subseteq A$ і $a^0 \in B$ надає не спадній за відношенням *R* на *B* функції $\Psi$ найбільше на *B* значення. Для того щоб об'єкт $a^0$ був максимальним за відношенням *R* на *B* достатньо виконування однієї з наступних умов:

1. $\Psi$ зростає за *R* на *B*.
2. $a^0 \in B$ – єдина точка максимуму $\Psi$ на *B*.

*Доведення*. Припустимо, що $a^0$ не є максимальним за відношенням *R*. Тоді в множині *B* знайдеться такий елемент *a*, що $a\,R\,a^0$. Але тоді має виконуватись $\Psi(a) \ge \Psi\left(a^0\right)$, причому ця нерівність строга, якщо $\Psi$ зростає за *R* на *B*. Але строга нерівність суперечить тому, що $a^0$ точка максимуму $\Psi$, нестрога нерівність – тому, що $a^0$ єдина точка максимуму $\Psi$ на *B*.

Лема доведена.

При моделюванні реальних систем можуть зустрітися такі ситуації, коли у ОПР, або у експертів нема чіткого уявлення про переваги між альтернативами. І якщо необхідно подати чіткі висновки про переваги, то в цьому випадку експерти повинні в певному сенсі «огрубляти» свої знання та уявлення, а математична модель буде менш адекватна реальній ситуації.

Більш гнучким способом формалізації цих уявлень є можливість для експертів визначити міру свого переконання в перевазі альтернативи числами з інтервалу [0;1]. Тоді, за допомогою експертів, формулюється *нечітке відношення переваги*, у якому кожній парі $(x, y)$ відповідає число з інтервалу [0,1], що описує міру вірності переваги $x \ge y$. В цьому випадку застосовуються методи прийняття рішень на основі *нечітких відношень* переваги.

*Характерною особливістю «мови» бінарних відношень* є припущення про те, що результат порівняння за перевагою двох елементів не залежить від складу всієї множини. Однак в ряді випадків така залежність має місце і для її врахування необхідна більш багата «мова» опису переваг, основана на використанні функцій вибору.

## 2.2 Бінарні відношення в теорії прийняття рішень [10, 12]

### 2.2.1 Поняття функції вибору. Класи функцій вибору

В реальних ситуаціях вибору на множини Ω альтернатив ОПР обирає деяку альтернативу, керуючись своєю особистою думкою щодо кращих альтернатив. У різних людей уявлення про одну і ту ж саму ситуацію може істотно різниться.

Розглянемо таку ситуацію вибору, в яких множини альтернатив *X* є підмножинами Ω.

Позначимо $C(X)$ множину альтернатив, яку виділено ОПР з множини *X*, і встановимо зв'язки між множинами $C(X)$ при різних множинах *X*. Вибір здійснює одна ОПР.

Математично це можна записати так: якщо $X' \subseteq X$ і $x \in C(X) \cap X'$, то $x \in C(X')$.

Тобто всілякий вибір у конкретній ситуації можна вважати логічно обґрунтованим при відомих виборах в інших ситуаціях, які пов'язані з даною, оскільки множини $C(X)$ виявляються залежними при різних *X*. Для формалізації взаємної залежності використовують поняття функції вибору.

***Функцією вибору*** $C(X)$ називається відображення, яке ставить у відповідність кожній множині $X \subset \Omega$ її підмножину $C(X) \subset X$.

$C(X)$ будемо інтерпретувати як найбільш переважні альтернативи з *X*.

В визначенні ніяких апріорних обмежень на функції вибору не накладається, зокрема не виключена можливість пустого вибору, тобто ситуації коли $C(X) = \varnothing$.

Ця ситуація називається ***відмовою від вибору***.

Наприклад, відмовою від вибору може бути ситуація, коли магазин відмовляється від закупівлі продукції певного постачальника.

В окремому випадку, коли подане відношення *R* на множині альтернатив, функцію вибору можна визначити такою рівністю:

$$C(X) = max_R X .$$

Існують й інші способи задавання функцій вибору. За відношенням переваги ми можемо побудувати функцію вибору, але не для всякої функції вибору існує відповідне відношення переваги.

Функції вибору зручно класифікувати за тими умовами, які за звичай використовують при їх вивченні.

### 2.2.2 Функції корисності. Методика визначення корисності можливих результатів

Для порівняння різних альтернатив і вибору найкращої з них також можна використовувати деяку кількісну міру властивостей, за значеннями якої можна порівняти альтернативи між собою і вибрати найкращу. Така міра носить назву **«*функція корисності*»**. Правила (процедури) прийняття рішень на її основі використовують теорію корисності, розроблену Дж. Фон Нейманом і О. Моргенштерном. Її математична основа – система аксіом, в яких стверджується, що існує деяка міра цінності, що дозволяє упорядкувати альтернативи (результати рішень) і яка називається ***функцією корисності***, або ***корисністю результатів***.

Практичне застосування теорії корисності ґрунтується на таких *аксіомах*.

**Аксіома 2.1.** Результат (альтернатива) $x_i$ є кращою за альтернативу $x_j$ (записується $x_i > x_j$), тоді і тільки тоді, коли $u(x_i) = f(x_i) > u(x_j)$, де $u(x_i)$ і $u(x_j)$ корисності альтернативи $x_i$ і $x_j$ відповідно.

**Аксіома 2.2.** Транзитивність: якщо $x_i > x_j$, а $x_j > x_k$, то $x_i > x_k$, і $u(x_i) > u(x_k)$.

**Аксіома 2.3.** Лінійність: якщо $x_1$, $x_2$ деякі альтернативи, то властивість адитивності функції $u(x_1, x_2)$ записується як $u(x_1, x_2) = u(x_1) + u(x_2)$.

Аналогічно, якщо є $n$ результатів $x_1, x_2, \dots\ x_n$, які досягаються одночасно, то

$$U(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_s(x).$$

Визначимо в термінах функції корисності (цільової функції) $f(x)$ наступні відношення на множині альтернатив $X$:

– відношення слабої (нестрогої) переваги – «не гірше» (позначається знаком $\geq$);

– відношення рівноцінності (позначаєтьсязнаком ~);

– відношення строгої переваги (позначається знаком >).

Для двох альтернатив $x_1$, $x_2$ говоритимемо, що

$x_1 \geq x_2$, тоді і лише тоді, коли $f(x_1) \geq f(x_2)$;

$x_1 \sim x_2$, тоді і лише тоді, коли $f(x_1) = f(x_2)$;

$x_1 > x_2$, тоді і лише тоді, коли $f(x_1) > f(x_2)$.

Знаки $\geq$ і $<$ при порівнянні значень цільових функція для різних альтернатив беруться залежно від того, чи вважається кращою альтернатива при більшому або меншому значенні цільової функції.

**Методика визначення корисності можливих результатів.**

Розглянемо декілька варіантів методики визначення корисності в різних ситуаціях.

*І. Випадок, коли є тільки два результати.* Відповідна методика визначення корисності така:

Визначаємо, який результат є кращим для особи, що приймає рішення. Нехай $x_1 > x_2$, тобто $x_1$ краща ніж $x_2$.

1. Потім визначаємо таку ймовірність $\alpha$, при якій досягнення результату $x_1$ буде еквівалентне $x_2$, отриманому з ймовірністю 1.

2. Оцінюємо співвідношення між корисностями результатів $x_1$ і $x_2$. Для цього приймемо корисність $u(x_2) = 1$. Тоді $\alpha u(x_1) = u(x_2)$; $u(x_1) = 1/\alpha$.

II. *Випадок коли наявні n можливих альтернатив $x_1, x_2, \dots, x_n$ між якими встановлено перевагу $x_1 > x_2 > \dots > x_n$.*

Для цього випадку методика визначення корисності така:

1. Визначаємо величину $\alpha_1$ з умови $\alpha_1 u(x_1) = u(x_2)$;

2. Аналогічно визначаємо:

$$\alpha_2 u(x_2) = u(x_3);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$\alpha_{n-1} u(x_{n-1}) = u(x_n).$$

3. Поклавши корисність найменш переважного результату, що дорівнює 1, знаходимо:

$$u(x_n) = 1;$$
$$u(x_{n-1}) = 1/\alpha_{n-1};$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$u(x_1) = \frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}...\alpha_1}.$$

*III. Випадок, коли деякі критерії є якісними.*

Застосовується методика, яка заснована на алгоритмі, що запропонований Р. Акофом і Р. Черчменом

Припускатимемо, що наявні $n$ альтернатив $x_1$, $x_2$, … $x_n$. Методика визначення корисності складається з наступних етапів:

1. Упорядковують всі альтернативи за зменшенням переваги. Нехай $x_1$ – альтернатива, що має найбільшу перевагу, а $x_n$ – альтернатива, перевага якої найменша.

2. Складають таблицю можливих комбінацій результатів, що досягаються одночасно, і тоді встановлюють їх перевагу щодо окремих результатів $x_1$, $x_2$, … $x_n$ (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 – Можливі комбінації результатів

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $x_1$ або $x_2 + x_3 + … + x_n$ | $n + 1$ | $x_2$ або $x_3 + x_4 +… + x_{n-1}$ |
| 2 | $x_1$ або $x_2 + x_3 +… + x_{n-1}$ | $n + 2$ | $x_2$ або $x_3 + x_4 + …+ x_{n-2}$ |
| 3 | $x_1$ або $x_2 + x_3 + … + x_{n-2}$ | $n + 3$ | $x_2$ або $x_3 + x_4 + …+ x_{n-3}$ |
| … | . . . | … | … |
| $n$ | $x_2$ або $x_3 + x_4 + … + x_n$ | $N$ | $x_{n-2}$ або $x_{n-1} + x_n$ |

Цю інформацію про перевагу результатів отримують від експертів.

3. Приписують початкові оцінки корисності окремих результатів $u_0(x_1)$, $u_0(x_2)$, ... , $u_0(x_n)$. Потім початкові оцінки підставляють в останнє співвідношення табл. 2.1. Якщо воно задовольняється, то оцінки не змінюють.

В протилежному випадку, проводять корекцію корисності так, щоб задовольнялося дане співвідношення.

Після цього переходять до наступного співвідношення. Процес корекції продовжується до тих пір, поки не утворюється система оцінок $u^*(x_1)$, $u^*(x_2)$, …, $u^*(x_n)$, яка задовольнятиме всім вказаним в таблиці співвідношенням. Корекцію слід проводити так, щоб по можливості змінювати оцінки для мінімальної кількості результатів.

Таку методику визначення корисності можна застосовувати, коли кількість результатів $n$ обмежена, а саме $n < 6$ або 7.

У випадках, коли $n > 7$, запропонований модифікований спосіб корекції оцінок.

Множину альтернатив розбивають на підмножини, що складаються з 5-7 альтернатив і мають один спільний результат, наприклад $x_1$. Потім приписують початкові значення корисності для всіх альтернатив, причому корисність спільного результату $x_1$ однакова у всіх підмножинах. Далі застосовують спосіб корекції оцінок корисності незалежно в кожній з підмножин з обмеженням $u(x_1) = const$. В результаті отримують систему корисності з єдиною мірою для всіх підмножин $u(x_1)$.

Після того як, відповідно до описаної методики, функція корисності всіх альтернатив визначена, вирішальне правило вибору найкращої з них в умовах визначеності записується таким чином:

*знайти такий $x_0$, що $f(x_0) = max\ f(x)$.*

Очевидно, що цільова функція, на підставі якої проводиться вибір шуканої альтернативи, може бути побудована різними способами. Цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що характеризують одну і ту ж властивість вибираного рішення і визначені на одній множині допустимих альтернатив, називатимемо *еквівалентними*, якщо вони визначають на ній одне і те ж відношення слабої переваги, тобто якщо для будь-яких двох альтернатив $x_1$ і $x_2$ з $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$ випливає, що $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ і, навпаки, з $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ виходить, що $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$. Тут індекс $f_i$ над знаком слабої переваги вказує на функцію, за допомогою якої це відношення задається. З даного визначення виходить, що еквівалентні цільові функції визначають на множині $X$ одні і ті ж відношення строгої переваги і еквівалентності.

Наступна проста теорема встановлює, якими властивостями повинні задовольняти еквівалентні цільові функції.

**Теорема 2.1.** Для того, щоб цільові функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ були еквівалентні, достатньо, щоб існувало таке монотонне перетворення $w(z)$, що переводить область значення функції $f_2(x)$ в область значень функції $f_1(x)$. Тобто $f_1(x) = w(f_2(x))$ для всієї множини допустимих альтернатив. При цьому, якщо обидві цільові функції максимізовувалися, то перетворення $w(z)$ має бути монотонно-зростаючою функцією, а якщо ні, то $w(z)$ має бути монотонно-спадною функцією.

*Доведення.* Розглянемо випадок критеріїв, що максимізуються і монотонно-зростаючого перетворення $w(z)$, оскільки інші випадки доводяться аналогічно. Тоді, якщо $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$, тобто $f_2(x_1) \geq f_2(x_2)$, то $w(f_2(x_1)) \geq w(f_2(x_2))$ і значить $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$. Твердження $x_1 \overset{f_2}{\geq} x_2$ виходить з $x_1 \overset{f_1}{\geq} x_2$ через монотонність зворотного перетворення.

Теорему доведено.

Наведемо приклади еквівалентних максимізованих цільових функцій:

$f_1(x) = af_2(x) + b$, де $a>0$,

$f_1(x) = ln\ f_2(x) + b$, якщо $f_2(x)>0$.

Отже, поняття бінарного відношення дозволяє формалізувати операції попарного порівняння об'єктів і математично обґрунтувати вибір одного або декількох об’єктів у випадку, коли неможливо задати критерій на множині альтернатив, але можна оцінити переваги однієї альтернативи над іншою.

Бінарні відношення можна задавати матрицею, графом, розрізами. Для них визначені операції перерізу, об’єднання, доповнення та інші.

В теорії прийняття рішень важливе значення мають такі властивості відношень як рефлективність, симетричність (асиметричність), транзитивність.

Функції вибору використовуються для задавання правила вибору альтернатив. Залежно від природи задачі вони можуть мати різні властивості. За даним відношенням переваги можна побудувати відповідну йому функцію вибору, але не навпаки.

Функції корисності є кількісною мірою за якою можна порівняти альтернативи між собою.

## Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення бінарного відношення. Які способи задавання відношень Ви знаєте? Які із способів задавання відношень можна використовувати для задавання відношення на нескінченній множині?
2. Як визначається верхній (нижній) розріз відношення?
3. Які математичні операції застосовні до відношень?
4. Яке відношення називається рефлексивним (антирефлексивним)?
5. Яке відношення називається транзитивним, сильно транзитивним, від’ємно транзитивним?
6. Як визначається транзитивне замикання відношення
7. Яким властивостям задовольняє відношення переваги
8. Як визначається найкращий(найгірший) елемент? Який елемент є мінімальним (максимальним) за даним відношенням переваги?
9. Дайте визначення відношень еквівалентності, байдужості, переваги, домінування.
10. Як за даним відношенням нестрогої переваги побудувати відповідні йому відношення строгої переваги, байдужості, еквівалентності?
11. Що означає властивість зовнішньої і внутрішньої стійкості множини?
12. Що таке функція вибору? Як побудувати функцію вибору за даним відношенням переваги? Чи завжди за даною функцією вибору можна побудувати відповідне їй відношення переваги? Наведіть приклади класифікацій функцій вибору.
13. Що означає умова спадкоємства? Суматорности? Плотта?
14. Дайте визначення функції корисності. Як визначити корисність за даними перевагами на множині альтернатив? Як побудувати функцію корисності на множині альтернатив у випадку, коли деякі критерії є якісними?
15. Що означає еквівалентність цільових функцій? Яким властивостями повинні задовольняти еквівалентні цільові функції? Наведіть приклади еквівалентних перетворень цільових функцій.

## Лекція 3. Прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику

**Мета лекції:** ознайомити з методологічними основами прийняття рішень; засвоїти методику розв'язання задач прийняття рішень із використанням класичних, похідних й розширених критеріїв; набути навичок застосування критеріїв на практиці.

### План лекції

3.1 Методологія теорії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Матриця рішень та оціночні функції.
3.2 Класичні критерії теорії прийняття рішень.
3.3 Похідні критерії теорії прийняття рішень.
3.4 Розширені критерії теорії прийняття рішень.
3.5 Алгоритм розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень

***Перелік ключових термінів і понять з теми:*** *корисність рішення; матриця рішень; оціночна функція; позиція оптимізму; позиція песимізму; позиція нейтралітету; позиція компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами; позиція відносного песимізму; класичні, похідні та розширені критерії прийняття рішень.*

### 3.1 Методологія теорії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику. Матриця рішень та оціночні функції

Невизначені фактори, закон розподілу яких невідомий, є найбільш характерними при розв'язанні задач прийняття рішень [7-11]. Саме на цей випадок слід орієнтуватися при виборі гнучких конструкторських рішень.

У контексті прийняття рішень можна виокремити два ключові типи задач.

По-перше, це *ЗПР в умовах ризику*, також відомі як стохастичні задачі, при яких кожна стратегія може призвести до одного з багатьох можливих результатів із відомою ймовірністю появи. Ці ймовірності визначаються заздалегідь на основі експертних оцінок або статистичних даних. Ризик у таких ситуаціях полягає в можливості отримання результату, який відрізняється від очікуваного, навіть з урахуванням статистичних характеристик. Критерій оптимальності в подібних ЗПР залежить як від стратегій оперуючої сторони і детермінованих чинників, так і від стохастичних факторів.

По-друге, існують *ЗПР в умовах повної невизначеності*, які виникають, коли обрані дії можуть призвести до будь-якого результату, а доступна інформація є неточною, неповною або некількісною (якісно виміряною). У таких випадках критерій оптимальності залежить не тільки від стратегій оперуючої сторони та фіксованих чинників, але й від невизначених факторів, на які оперуюча сторона не має впливу і про які не має інформації на момент прийняття рішення. Втім, враховуючи, що невизначені фактори з невідомим законом розподілу є найбільш характерними для реальних ЗПР, саме на них варто орієнтуватися при пошуку гнучких рішень.

При дослідженнях в області прийняття рішень важливо розрізняти два види невизначеності: стохастичну та нестохастичну.

Невизначеність нестохастичної природи обумовлена взаємодією кількох активних учасників з різними цілями.

Натомість, невизначеності стохастичного типу зумовлені впливом так званої «природи» – неактивного учасника, який є незацікавленою стороною без свідомо поставлених цілей. Задачі такого типу розв'язуються за допомогою *теорії статистичних рішень* (*теорії ігор з природою*), де ОПР діє в умовах, коли стратегії інших учасників є невідомими. Для врахування невизначеності стохастичного типу формуються спеціальні критерії прийняття рішень, на основі яких приймаються рішення.

Перш ніж розглядати подібні критерії, зауважимо, наступні ключові припущення:

1) будь-який критерій оптимальності відповідає меті досліджуваного об’єкта;
2) критерій будується на основі оціночної функції, яка відображає позицію ОПР щодо досліджуваної проблемної ситуації.

Розглянемо, яким чином здійснюється аналіз процесу прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

Всяка діяльність завжди є тісно пов’язаною з невизначеністю та ризиком щодо майбутніх результатів прийняття рішень. Припустимо, що потрібно вибрати найкращу з $m$ альтернатив у випадку, коли остаточний результат кожної альтернативи $E_i$ ($i = \overline{1,m}$) буде визначатися конкретним станом навколишнього середовища («природи») $F_j$ ($j = \overline{1,n}$). Отже, альтернативами в задачі виступають варіанти, які обирає ОПР, а результатами рішення – наслідки обраних альтернатив при конкретному стані природи. У цьому контексті природа розглядається як незацікавлена сторона, а її стан – як ситуація, на яку ОПР має обмежений вплив або не може вплинути взагалі. Альтернатива ж представляє собою напрямок дій або стратегію, яку може обрати ОПР.

Під ***результатом рішення*** $e_{ij} = e(E_i\,;F_j\,)$ будемо розуміти оцінку, яка відповідає варіанту $E_i$ й умовам $F_j$ та яка характеризує прибуток, корисність або надійність. Такий результат будемо називати ***корисністю рішення***.

Дані, необхідні для ухвалення рішення в умовах невизначеності та ризику, коли множини альтернатив та станів середовища є скінченними, зазвичай задаються у формі матриці, рядки якої відповідають можливим діям, а стовпці – можливим станам системи, тобто ***множина (матриця) рішень*** $\left\| e_{ij} \right\|$ має вигляд

| | $F_1$ | $F_2$ | ... | $F_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | $e_{11}$ | $e_{12}$ | ... | $e_{1n}$ |
| $E_2$ | $e_{21}$ | $e_{22}$ | ... | $e_{2n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $E_m$ | $e_{m1}$ | $e_{m2}$ | ... | $e_{mn}$ |

Щоб прийти до однозначного й по можливості найвигіднішого варіанту рішення, необхідно ввести ***оціночну (цільову) функцію***, яка відображає позицію ОПР за досліджуваною проблемною ситуацією.

При цьому матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ зведеться до одного стовпця виду

| | |
|---|---|
| $E_1$ | $e_{1r}$ |
| $E_2$ | $e_{2r}$ |
| $E_3$ | $e_{3r}$ |
| … | … |
| $E_i$ | $e_{ir}$ |
| … | … |
| $E_m$ | $e_{mr}$ |

Кожному варіанту $E_i$ приписується деякий результат $e_{ir}$, що характеризує, у цілому, всі наслідки цього рішення. Такий результат ми будемо надалі позначати тим же символом $e_{ir}$.

Виникає, однак, проблема, який вкласти зміст у результат $e_{ir}$.

Якщо, наприклад, наслідки кожного з альтернативних рішень характеризувати комбінацією з його найбільшого й найменшого результатів, то можна прийняти

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij}. \tag{3.1}$$

Найкращий у цьому змісті результат має вигляд

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \min_j e_{ij} + \max_j e_{ij} \right). \tag{3.2}$$

Формуючи в такий спосіб бажаний результат, ОПР виходить із ***компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами***.

Розглянемо тепер деякі інші оціночні функції, а також відповідні до них вихідні позиції.

***Оптимістична позиція***:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \max_j e_{ij} \right). \tag{3.3}$$

З матриці результатів рішень $e_{ij}$ обирається варіант (рядок), що містить в якості можливого наслідку найбільший із всіх можливих результатів. ОПР стає на точку зору азартного гравця й робить ставку на те, що випаде найвигідніший випадок.

***Позиція нейтралітету***:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right). \tag{3.4}$$

ОПР виходить з того, що всі відхилення результату рішення від «середнього» випадку, що зустрічаються, є припустимими, та приймає рішення, оптимальне з цього погляду.

***Песимістична позиція***:

$$\max_i e_{ir} = \max_i \left( \min_j e_{ij} \right). \qquad (3.5)$$

ОПР виходить з того, що треба орієнтуватися на найменш сприятливий випадок і приписує кожному з альтернативних варіантів найгірший з можливих результатів. Після цього він обирає найвигідніший варіант, тобто очікує найкращого результату в найгіршому випадку. Для кожного іншого зовнішнього стану результат може бути тільки рівним цьому або кращим.

***Позиція відносного песимізму***:

$$\min_i e_{ir} = \min_i \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \qquad (3.6)$$

Для кожного варіанта рішення ОПР оцінює втрати в результаті в порівнянні з певним по кожному варіанту найкращим результатом, а потім із сукупності найгірших результатів обирає найкращий відповідно до представленої оціночної функції.

На основі оціночних функцій будуються критерії прийняття рішень.

### 3.2 Класичні критерії теорії прийняття рішень

Розглянемо найбільш поширені класичні критерії прийняття рішень, в основу яких покладено позиції ОПР [7-15]:

1) мінімаксний критерій (ґрунтується на песимістичній позиції ОПР);

2) критерій максимаксу (азартного гравця) (ґрунтується на оптимістичній позиції ОПР);

3) критерій крайнього песимізму (ґрунтується на припущенні про максимально несприятливу поведінку зовнішнього середовища щодо ОПР);

4) критерій Байєса-Лапласа (ґрунтується на позиції нейтралітету ОПР);

5) критерій Севіджа (ґрунтується на позиції компромісу між оптимістичним та песимістичним підходами ОПР).

**<u>Мінімаксний критерій (Вальда)</u>**

При використанні даного критерію для прийняття рішень гра з природою розглядається як гра з агресивним супротивником. Вибір такого критерію обумовлюється відсутністю в ОПР інформації про ймовірності появи різних станів природи. Важливою умовою застосування критерію є наявність чисельної оцінки результату для кожного варіанту рішення при відповідному стані $F_j$ $(j = \overline{1,n})$ природи. Прийняття рішення в цьому випадку здійснюється в умовах невизначеності. В основі критерію Вальда лежить гіпотеза антагонізму, згідно з якою ОПР виходить із припущення, що природа поводиться по відношенню до неї найгіршим чином. Відповідно, кожний варіант оцінюється результатом, що має найгірше числове значення для нього. При виборі варіанту $E_i$ $(i = \overline{1,m})$ ОПР знає лише про можливість настання одного з результатів, що знаходиться в $i$-му рядку таблиці, а остаточний результат визначається двома факторами: вибором варіанту та станом природи. Якщо матриця рішень представлена у вигляді матриці виграшів, то кожний варіант оцінюється найменшим можливим виграшом. Оптимальним вважається варіант, у якого мінімальний елемент є найбільшим. Формально мінімаксний критерій можна записати як обрання такого варіанту, який максимізує мінімальний виграш серед усіх можливих станів природи:

$$Z_{\text{ММ}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.7}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij}. \tag{3.8}$$

Тоді узагальнений вигляд критерію можна представити у вигляді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} \right\}, \tag{3.9}$$

де $Z_{\text{ММ}}$ – оціночна функція *ММ*-критерія.

Такий підхід характеризується принципом гарантованого результату: при виборі варіанту $E_i$ $(i = \overline{1,m})$ жоден стан $F_j$ $(j = \overline{1,n})$ природи не може призвести до результату гіршого, ніж мінімальний для цього варіанту. Такий критерій зазвичай застосовують ОПР, схильні до крайньої обережності, оскільки обраний за його допомогою варіант повністю виключає ризик при прийнятті рішення. Саме через орієнтацію на пошук варіанту з найменшими можливими втратами цей критерій часто називають «песимістичним».

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем з найменших результатів $e_{ir}$ кожного рядку; обирати належить ті варіанти $E_{i0}$, у рядках яких стоять найбільші значення $e_{ir}$ цього стовпця.

**Критерій максимаксу (азартного гравця)**

Даний критерій ґрунтується на гіпотезі про сприятливу поведінку зовнішнього середовища $F_j$ $(j = \overline{1,n})$ по відношенню до ОПР.

При застосуванні цього критерію ОПР не володіє інформацією про ймовірності виникнення різних станів зовнішнього середовища, проте кожний варіант характеризується найбільш сприятливим потенційним результатом. При використанні матриці виграшів $\left\| e_{ij} \right\|$ за критерієм максимаксу кожний варіант $E_i$ $(i = \overline{1,m})$ оцінюється результатом, що забезпечує найбільший виграш. Оптимальним вважається той варіант, у якого максимальний елемент є найбільшим серед усіх можливих. Таким чином, ОПР робить ставку на найвигіднішій сценарій розвитку подій, поводячись як азартний гравець, схильний до ризику (ігнорує можливі втрати) та демонструючи крайній оптимізм (розраховує на максимально можливий виграш). Саме тому цей критерій часто називають ***критерієм крайнього оптимізму***, а застосовуваний підхід – ***підходом азартного гравця***.

Формально максимаксний критерій можна представити як вибір варіанту з найбільшим значенням у матриці рішень $\left\| e_{ij} \right\|$, не враховуючи при цьому ризики, пов'язані з несприятливими змінами навколишнього середовища:

$$Z_{\text{MaxMax}} = \max_i e_{ir}, \quad (3.10)$$

$$e_{ir} = \max_j e_{ij}. \quad (3.11)$$

Для визначення оптимального варіанту спочатку знаходять максимальний елемент для кожного рядка матриці рішень $\|e_{ij}\|$, а потім обирають рядок (варіант) з найбільшим значенням цього максимуму:

$$\text{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \text{E} \wedge e_{i0} = \max_i \max_j e_{ij} \right\}. \quad (3.12)$$

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється додатковим стовпцем $e_{ir}$, що містить найбільші результати для кожного рядка. Оптимальним вважається той варіант $E_0 = E_{i0}$, у рядку якого стоїть найбільше значення стовпця $e_{ir}$.

**Критерій крайнього песимізму**

Даний критерій ґрунтується на припущенні про максимально несприятливу поведінку зовнішнього середовища $F_j$ ($j = \overline{1,n}$) (природи) щодо ОПР. Важливо зазначити, що за цих умов ОПР не володіє інформацією щодо ймовірностей виникнення різних станів природи, тому кожний варіант характеризується найменш сприятливим для нього результатом. При застосуванні матриці виграшів оцінювання кожного варіанту $E_i$ ($i = \overline{1,m}$) відбувається за результатом, що приносить мінімальний виграш. Відповідно, оптимальним вважається той варіант, у якого найменшим є елемент серед усіх мінімальних елементів. Такий підхід свідчить про те, що при використанні критерію крайнього песимізму ОПР орієнтується на найменш вигідний варіант розвитку подій. Фактично, ОПР поводиться як гравець, який категорично уникає будь-якого ризику та демонструє крайній песимізм у своїх очікуваннях.

У контексті матриці виграшів критерій песимізму передбачає вибір такого варіанта рішення, який мінімізує мінімальні виграші для кожного варіанта ситуації. Математично це можна записати наступним чином:

$$Z_{\text{MinMin}} = \min_i e_{ir}, \quad (3.13)$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij}. \quad (3.14)$$

Після цього обираємо оптимальний варіант $\text{E}_0$ відповідно до умови

$$\text{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \text{E} \wedge e_{i0} = \min_i \min_j e_{ij} \right\}. \quad (3.15)$$

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється додатковим стовпцем $e_{ir}$, що містить найменші результати для кожного рядка. Оптимальним вважається той варіант $E_0 = E_{i0}$, у рядку якого стоїть найменше значення стовпця $e_{ir}$.

## Критерій Байєса–Лапласа

Даний критерій застосовується для ЗПР в умовах часткової невизначеності, орієнтується на максимізацію середнього очікуваного виграшу та використовується при наявності підстав думати ОПР, що деякі з станів природи більш або менш ймовірні стосовно інших. Нехай $q_j$ – ймовірність появи зовнішнього стану $F_j$; тоді для *BL*-критерія

$$Z_{\mathrm{BL}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.16}$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \wedge \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}. \tag{3.18}$$

*Правило вибору рішення за BL-критерієм*: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що включає математичне очікування значень кожного з рядків; обираються ті варіанти $E_{i0}$, в рядках яких стоїть найбільше значення $e_{ir}$ цього стовпця.

Якщо припустити, що поведінка зовнішнього середовища є нейтральною по відношенню до ОПР, то в такому випадку всі стани зовнішнього середовища є рівно ймовірними ($q_1 = \ldots = q_n = 1/n$), а, отже стовпець результатів подаватиметься у вигляді

$$e_{ir} = 1/n \sum_{j=1}^{n} e_{ij}. \tag{3.19}$$

В такій ситуації в якості оптимального варіанту обирається такий, якому відповідає максимальне середнє значення:

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \right) \wedge q_1 = \ldots = q_n = 1/n \right\}. \tag{3.20}$$

Критерій такого типу називається ***нейтральним критерієм, критерієм Лапласа-Бернуллі*** або ***критерієм недостатньої підстави***.

*Правило вибору рішення за критерієм Лапласа-Бернуллі*: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що середнє значення кожного з рядків; обираються ті варіанти $E_{i0}$, в рядках яких стоїть максимальне середнє значення $e_{ir}$ цього стовпця.

При цьому критерії Байєса-Лапласа та Лапласа-Бернуллі використовуються при наступних умовах:

а) якщо є відомим розподіл ймовірностей появи станів зовнішнього середовища;

б) якщо ймовірності появи станів зовнішнього середовища є сталими величинами;

в) якщо передбачається, що реалізація рішень здійснюється нескінченне число разів.

Критерій Байєса-Лапласа демонструє виняткову надійність та повністю виключає ризики лише за чітко визначених умов. Проте варто зауважити, що будь-які відхилення від цих умов суттєво збільшують ризикованість застосування даного критерію. На відміну від максимінного критерію, підхід Байєса-Лапласа характеризується більш оптимістичними прогнозами, однак одночасно вимагає значно вищого рівня інформованості та передбачає множинні реалізації процесу прийняття рішень. Також необхідно підкреслити, що справжня надійність критерію Байєса-Лапласа забезпечується виключно за умови точного визначення ймовірностей виникнення різних станів зовнішнього середовища. Втім, у реальній практиці такі точні числові значення зазвичай недоступні, що істотно знижує довіру до даного критерію. Саме тому фахівці часто віддають перевагу більш надійному максимінному критерію, який гарантує певний мінімальний результат навіть за найнесприятливіших умов.

**Критерій мінімаксних шкодувань або критерій Севіджа**

Даний критерій базується на концепції відносного песимізму ОПР. Такий підхід являє собою методику прийняття рішень в умовах невизначеності, спрямовану на мінімізацію максимально можливого ризику. Методологія застосування критерію передбачає послідовне виконання кількох аналітичних етапів. Спочатку для кожної потенційного варіанту ОПР здійснюється розрахування очікуваного значення втрати (ризику). Надалі для кожного з розглянутих варіантів визначається максимальний ризик з урахуванням усіх можливих сценаріїв розвитку ситуації. Раціональний вибір ОПР відповідно до даного критерію полягає у виборі варіанту, який мінімізує максимально можливий ризик серед усіх доступних стратегічних варіантів. Суттєвою перевагою критерію Севіджа є можливість для ОПР враховувати не лише очікувані втрати, але й імовірність реалізації найгіршого сценарію розвитку подій. Такий комплексний підхід дозволяє обрати оптимальний варіант, який мінімізує ймовірність отримання найменш сприятливого результату. Математично оптимальне рішення за критерієм Севіджа визначається через низку формалізованих виразів. Спочатку обчислюється значення ризику як різниця між максимально можливим виграшом при певному стані природи та виграшом при застосуванні конкретного варіанту рішення:

$$a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}, \tag{3.21}$$

далі для кожного варіанту визначається максимальний ризик

$$e_{ir} = \max_j a_{ij} = \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right). \tag{3.22}$$

На основі цих обчислень формується оціночна функція

$$Z_S = \min_i e_{ir} = \min_i \left[ \max_j \left( \max_i e_{ij} - e_{ij} \right) \right], \tag{3.23}$$

яка дозволяє побудувати множину оптимальних варіантів рішення та визначити оптимальний варіант, при якому максимальне значення ризику набуває найменшого значення:

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_i e_{ir} \right\}. \tag{3.24}$$

*Правило вибору рішення*: кожний елемент матриці рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ віднімається з найбільшого результату $\max_i e_{ij}$ відповідного стовпця; різниці $a_{ij}$ утворюють матрицю залишків $\left\| a_{ij} \right\|$; ця матриця поповнюється стовпцем найбільших різниць $e_{ir}$; обираються ті варіанти $E_{i0}$, в рядках яких стоїть найменше для цього стовпця значення.

Важливо при цьому зауважити, що умови застосування критерію Севіджа є аналогічними до умов, які застосовуються до критерію Вальда, що підкреслює їхню концептуальну спорідненість у сфері прийняття рішень в умовах невизначеності. Варто також підкреслити, що вибір оптимальних варіантів за критерієм Севіджа має узагальнюючий характер відносно виборів за критеріями Вальда та максимаксу, що сприяє уникненню значних ризиків у процесі прийняття управлінських рішень.

При розв'язанні задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику досить часто виникають ситуації, коли класичних критеріїв прийняття рішень стає не достатньо. Визвано це тим, що обраний критерій прийняття рішень має бути таким, щоб відповідати найкращим чином системі переваг ОПР, тобто щоб повністю відповідати його позиції відносно досліджуваної проблемної ситуації.

Фактично вибір критерію прийняття рішень означає й вибір найкращого рішення, оскільки реалізація алгоритму (правила) використання конкретного критерію повністю визначає оптимальне рішення.

Все це призвело до необхідності використання спеціальних груп критеріїв, які дозволяють більш точно врахувати позицію ОПР та інформацію відносно досліджуваної проблемної ситуації та забезпечують здійснення такого вибору альтернативного рішення в умовах невизначеності та ризику, який найкращим чином відповідає перевагам й вимогам особи, що приймає рішення.

До таких груп критеріїв прийняття рішень відносять:

– похідні критерії;

– розширені критерії.

### 3.3 Похідні критерії теорії прийняття рішень

Розглянемо наступні основні похідні критерії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику [7, 11, 13, 14]:

а) критерій Гурвиця;

б) критерій Ходжа-Лемана;

в) критерій Гермейєра.

**Критерій Гурвиця**

$$Z_{\mathrm{HW}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.25}$$

$$e_{ir} = c \min_j e_{ij} + (1-c) \max_j e_{ij}. \tag{3.26}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ Ei_0 \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[ c \min_j e_{ij} + (1-c)\max_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le c \le 1 \right\}, \tag{3.27}$$

де $c$ – ваговий множник.

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, що містить середні зважені найменшого й найбільшого результатів для кожного рядка (3.26); обираються ті варіанти $E_{i0}$, у рядках яких стоять найбільші елементи $e_{ir}$ цього стовпця.

Для $c = 1$ HW-критерій перетворюється на *ММ*-критерій.

Для $c = 0$ він перетворюється на критерій азартного гравця.

**Критерій Ходжа–Лемана**

Оціночна функція визначається рівністю

$$Z_{\mathrm{HL}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.28}$$

$$e_{ir} = \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij}, \quad 0 \le \nu \le 1, \tag{3.29}$$

а множина *HL*-оптимальних рішень записується у вигляді

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \left[ \nu \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j + (1-\nu) \min_j e_{ij} \right] \wedge 0 \le \nu \le 1 \right\}. \tag{3.30}$$

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється стовпцем, складеним з середніх зважених (з постійними вагами) математичного очікування та найменшого результату кожного рядка (3.29); обираються ті варіанти рішень $E_{i0}$, у рядках яких стоїть найбільше значення цього стовпця.

Для $\nu = 1$ *HL*-критерій перетворюється на *BL*-критерій.

Для $\nu = 0$ перетворюється на *ММ*-критерій.

**Критерій Гермейєра**

Цей критерій є орієнтованим на величини втрат, тобто на від'ємні значення усіх $e_{ij}$, тобто $e_{ij} < 0$. У випадку, коли серед величин $e_{ij}$ зустрічаються й додатні значення, можна перейти до строго від'ємних значень за допомогою перетворення $e_{ij} - a$ при підходячим чином підібраному $a > 0$. Так, наприклад, для обрання константи $a$ можна застосувати наступний вираз: $a = \left| \max_{i,j} e_{ij} \right| + 1$.

В якості оціночної функції критерію Гермейєра виступає

$$Z_{\mathrm{G}} = \max_i e_{ir}, \tag{3.31}$$

$$e_{ir} = \min_j e_{ij} q_j . \quad (3.32)$$

За критерієм Гермейєра

$$\mathrm{E}_0 = \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \min_j e_{ij} q_j \wedge e_{ij} < 0 \right\}. \quad (3.33)$$

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\left\| e_{ij} \right\|$ доповнюється ще одним стовпцем, що містить у кожному рядку найменший добуток наявного у неї результату на ймовірність відповідного стану $F_j$; обираються ті варіанти $E_{i0}$, у рядках яких знаходиться найбільше значення $e_{ir}$ цього стовпця.

У випадку рівномірного розподілу $q_j = 1/n$, $j = 1,...,n$, *G*-критерій стає ідентичним до *ММ*-критерію.

### 3.4 Розширені критерії теорії прийняття рішень

Розглянемо наступні найбільш поширені розширені критерії прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику [11, 13-15]:

а) *BL (MM)* – критерій;
б) *BL (S)* – критерій;
в) критерій добутків.

**BL (MM) – критерій**

Вихідним для побудови *BL(MM)*-критерію є *BL*-критерій.

Внаслідок того, що розподіл ймовірностей $q = (q_1,...,q_n)$ встановлюється емпірично та тому є відомим не точно, отже, відбувається, з одного боку, ослаблення критерію, а з іншого, напроти, за допомогою заданих границь для ризику й за допомогою *ММ*-критерію забезпечується відповідна свобода дій.

Визначення оптимального варіанту за *BL(MM)*-критерієм включає наступні етапи:

1 етап. Зафіксуємо опорне значення, що задається *ММ*-критерієм:

$$Z_{\text{ММ}} = \max_i \min_j e_{ij} = e_{i_0 j_0},$$

де $i_0$ и $j_0$ – індекси, які є оптимальними для варіантів рішень та, відповідно, станів, що розглядаються за *ММ*-критерієм.

2 етап. Визначення першої індексної множини $I_1$.

2.1 Для цього визначається $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ для всіх $i \in \{1,...m\}$.

2.2 За допомогою деякого заданого або обраного рівня допустимого ризику $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ визначимо деяку множину згоди, що є підмножиною множини індексів $\{1,...,m\}$:

$$I_1 := \left\{ i \;\middle|\; i \in \{1,...,m\} \wedge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\}. \quad (3.34)$$

Величина $\varepsilon_i := e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ для всіх $i \in I_1$ характеризує найбільші можливі втрати в порівнянні зі значенням $e_{i_0 j_0}$, що задається *ММ*-критерієм. З іншого боку, в результаті такого зниження відкриваються й можливості для збільшення виграшу в порівнянні з тим, що забезпечується *ММ*-критерієм.

3 етап. Визначення другої індексної множини $I_2$.

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,...,m\} \wedge \max_j e_{ij} - \max_j e_{i_0 j} \ge e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij} = \varepsilon_i \right\}. \qquad (3.35)$$

Величина $\max_j e_{i_0 j}$ – це максимальне число, яке зафіксоване в тому рядку, де визначено опорне значення за *ММ*-критерієм.

4 етап. Визначення оптимального варіанту за *BL(ММ)*-критерієм.

Для цього на множині-перетинання $I_1 \cap I_2$ ми обираємо тільки такі варіанти рішень, для яких, з одного боку, у певних станах можуть мати місце втрати в порівнянні зі станом, що задається *ММ*-критерієм, але в інших станах мається хоча б такий самий приріст виграшу.

Отже, оптимальними в смислі *BL(ММ)*-критерію будуть рішення з множини

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} q_j \right\}. \qquad (3.36)$$

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється ще трьома стовпцями: у першому з них записуються математичні очікування кожного з рядків, у другому – різниці поміж опорним значенням $e_{i_0 j_0} = Z_{\text{ММ}}$ та найменшим значенням $\min_j e_{ij}$ відповідного рядка, в третьому стовпці містяться різниці між найбільшим значенням $\max_j e_{ij}$ кожного рядка й найбільшим значенням $\max_j e_{i_0 j}$ того рядка, у якому знаходиться значення $e_{i_0 j_0}$. Обираються ті варіанти $E_{i_0}$, рядки яких дають найбільше математичне очікування. А саме, відповідне значення $e_{i_0 j_0} - \min_j e_{ij}$ з другого стовпця має бути меншим або рівним деякому заздалегідь заданому рівню ризику $\varepsilon_{\text{доп}}$. Значення ж з третього стовпця має бути більшим за значення з другого стовпця.

## ***BL(S)*-критерій**

Розглянемо комбінацію критерію Байєса-Лапласа з критерієм Севіджа, що називається *BL(S)*-критерієм.

За опорну величину приймемо

$$Z_{\text{S}} = \min_i \max_j a_{ij} = a_{i_0 j_0},$$

де $a_{ij} = \max_i e_{ij} - e_{ij}$.

Через $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ знову визначимо припустиму границю ризику.

Тоді

$$I_1 := \left\{ i \;\middle|\; i \in \{1,...,m\} \;\wedge\; \max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} \le \varepsilon_{\text{доп}} \right\},$$

$$\max_j a_{ij} - a_{i_0 j_0} = \varepsilon_i ,$$

$$I_2 := \left\{ i \middle| i \in \{1,...,m\} \wedge \min_j a_{i_0 j} - \min_j a_{ij} \ge \varepsilon_i \right\},$$

де $\varepsilon_{\text{доп}} > 0$ – припустима границя ризику. Для $\mathrm{E}_0$ маємо:

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \min_{i \in I_1 \cap I_2} \sum_j a_{ij} q_j \right\}.$$

**Критерій добутків**

Цей критерій орієнтований на величини виграшів, тобто на додатні значення $e_{ij}$. У випадку, коли серед величин $e_{ij}$ зустрічаються й від'ємні значення, можна перейти до строго додатних значень за допомогою перетворення $e_{ij} + a$ при підходячим чином підібраному $a > 0$. Так, наприклад, для обрання константи $a$ можна застосувати наступний вираз: $a = \left| \min_{i,j} e_{ij} \right| + 1$.

Визначимо оціночну функцію:

$$Z_{\mathrm{P}} = \max_i e_{ir} , \tag{3.37}$$

$$e_{ir} = \prod_j e_{ij} . \tag{3.38}$$

Тоді

$$\mathrm{E}_0 := \left\{ E_{i0} \middle| E_{i0} \in \mathrm{E} \wedge e_{i0} = \max_i \prod_j e_{ij} \wedge e_{ij} > 0 \right\}. \tag{3.39}$$

*Правило вибору рішення*: матриця рішень $\|e_{ij}\|$ доповнюється новим стовпцем, що містить добуток всіх результатів кожного рядку; обираються ті варіанти $E_{i0}$, у рядках яких знаходяться найбільші значення цього стовпця.

## 3.5 Алгоритм розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень

Розв'язання задач прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику із використанням критеріїв прийняття рішень проводиться **за наступними етапами**:

1 *етап*: За досліджуваною проблемою складається матриця рішень $\|e_{ij}\|$ виду

| | $F_1$ | $F_2$ | ... | $F_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | $e_{11}$ | $e_{12}$ | ... | $e_{1n}$ |
| $E_2$ | $e_{21}$ | $e_{22}$ | ... | $e_{2n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| $E_m$ | $e_{m1}$ | $e_{m2}$ | ... | $e_{mn}$ |

2 *етап:* В залежності від обраного критерію прийняття рішення кожному варіанту $E_i$ приписується деякий результат $e_{ir}$, що характеризує наслідки цього рішення. При цьому матриця рішень $\|e_{ij}\|$ зводиться до одного стовпця виду

| | |
|---|---|
| $E_1$ | $e_{1r}$ |
| $E_2$ | $e_{2r}$ |
| $E_3$ | $e_{3r}$ |
| … | … |
| $E_i$ | $e_{ir}$ |
| … | … |
| $E_m$ | $e_{mr}$ |

Примітка: Попередньо матриця рішень $\|e_{ij}\|$, якщо цього вимагає застосування обраного критерію, має бути приведена до певного виду (наприклад, з додатними, від'ємними і т.д. елементами).

3 *етап:* В залежності від обраного критерію прийняття рішення за використанням відповідного правила вибору обирається оптимальний варіант рішення $E_0$.

## Питання для самоконтролю

1. Що називається корисністю рішення?
2. Охарактеризуйте оціночну функцію за оптимістичною позицією ОПР.
3. Опишіть критерій мінімакса (Вальда).
4. Опишіть критерій Севіджа.
5. Опишіть критерій Байєса–Лапласа.
6. Що таке коефіцієнт песимізму в критерії Гурвіца?
7. Опишіть критерій Ходжа-Лемана.
8. Опишіть критерій Гермейєра.
9. З яким критерієм становиться ідентичним критерій Гермейєра у випадку рівномірного розподілу ймовірностей станів середовища?
10. Що визначає ваговий множник критерію Ходжа-Лемана?
11. Що таке опорне значення в критерії $BL$ ($MM$)?
12. Як обирається перша індексна множина за критерієм $BL(MM)$?
13. Як обирається перша індексна множина за критерієм $BL(S)$?
14. Опишіть критерій добутків.
15. Який з критеріїв орієнтований на додатні елементи матриці рішень?

### Лекція 4. Прийняття рішень на основі теорії ігор

**Мета лекції:** ознайомити з основними поняттями теорії ігор; опанувати алгоритм формалізації конфліктної ситуації та побудови її математичної моделі; засвоїти властивості розв'язків матричних ігор; вивчити методи розв'язання матричних ігор; набути навичок застосування цих методів на практиці.

#### План лекції

4.1 Формалізація конфліктних ситуацій за допомогою теорії ігор.
4.2 Матричні ігри. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях.
4.3 Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях. Властивості розв'язків матричних ігор.
4.4 Аналітичні та чисельний методи розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях.

***Перелік ключових термінів і понять з теми:*** *конфліктна ситуація; гра; оціночна функція; гравець; партія; хід; стратегія; функція виграшу; ціна гри; ситуація; розв'язок гри; класифікація ігор; сідлова точка; верхня та нижня ціни гри; розв'язок гри в чистих стратегіях; чиста стратегія; активна стратегія; змішана стратегія; розв'язок гри в змішаних стратегіях.*

#### 4.1 Формалізація конфліктних ситуацій за допомогою теорії ігор

#### 4.1.1 Сутність конфліктних ситуацій та передумови їх виникнення

Багато практичних ситуацій, у яких розглядається питання про вибір розв'язку, володіють тією властивістю, що в них зустрічаються не менш двох сторін з різними (іноді, протилежними) інтересами, кожна з яких для досягнення своєї мети має можливість діяти різними способами, вибір яких при деяких умовах може здійснюватися залежно від дій протиборчої сторони. Такі ситуації називаються ***конфліктними*** [16-18].

Отже, зіткнення протилежних інтересів призводить до виникнення конфліктних ситуацій.

***Конфліктною ситуацією*** в такому формулюванні називається ситуація, у якій стикаються інтереси двох чи більше сторін, що мають суперечливі цілі, причому виграш кожної зі сторін залежить від того, як поводитимуться інші.

Конфліктні ситуації характеризуються *наступними рисами*:

1. наявність зацікавлених сторін (споживачі, фірми, країни й т.ін.);
2. існування можливих дій кожної зі сторін;
3. інтереси сторін (задоволення потреб сторін).

Наприклад, конфліктні ситуації виникають в процесі конкурентної боротьби, коли через дії окремих господарюючих суб'єктів інші суб'єкти зазнають збитків, але ці суб'єкти можуть здійснювати відповідні дії, спрямовані на покращення своїх конкурентних позицій, завдаючи втрат іншим суб'єктам. Крім того, конфліктні ситуації виникають при дослідженні широкого діапазону військових проблем – від тактики одиночних боїв-дуелів між танками та бойовими літаками до стратегічних питань проведення великих операцій та воєн у цілому. В таких постановках виникають задачі вибору оптимальних видів озброєння, оптимальних угруповань збройних сил та оптимальних методів проведення тактичних боїв та операцій.

Конфліктні ситуації можуть виникати й у одного суб'єкта господарювання, наприклад, через суперечності між окремими цілями діяльності та способами їх досягнення. Так, можуть виявитися суперечливими цілі максимізації прибутку підприємства у найближчій та довгостроковій перспективах. Мета збільшення обсягу виробництва продукції підприємства може суперечити меті зменшення шкідливого впливу на довкілля. Можливе застосування диференційованого ціноутворення, що сприятиме збільшенню прибутку підприємства. Дія чинників зовнішнього оточення, яку неможливо спрогнозувати, також може призвести до виникнення конфліктних ситуацій.

Конфліктні ситуації можуть виникати з різних причин, що зумовлює необхідність розв'язання цих ситуацій за допомогою спеціальних методів. Якщо потрібно знайти найкраще рішення в умовах конфлікту, доцільно скористатися положеннями теорії ігор.

### 4.1.2 Основні поняття й визначення теорії ігор

Апаратом розв'язання зазначених задач є ***теорія ігор***, яка представляє собою теорію побудови математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту [6, 16, 18]]. Оскільки сторони, що беруть участь у вирішенні конфліктів, зацікавлені у прихованні своїх намірів від супротивника, прийняття рішень в умовах конфлікту виявляється переважно прийняттям рішень в умовах невизначеності. Фактор невизначеності в даній ситуації можна інтерпретувати як супротивника ОПР.

Щоб виключити труднощі, які виникають при аналізі конфліктних практичних ситуацій у результаті наявності багатьох несуттєвих факторів, будується спрощена модель ситуації.

Математична модель конфліктної ситуації називається ***грою***.

Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється тим, що не включає другорядні, несуттєві для ситуації фактори й ведеться за певними правилами, які в реальній ситуації можуть порушуватися.

Отже, ***теорія ігор*** – це теорія математичного моделювання умов конфлікту й пошук на цій основі оптимальних компромісів.

***Предметом дослідження теорії ігор*** є такі ситуації, у яких важливу роль відіграють конфлікти та спільні дії.

Природною базою для аналізу конфліктних ситуацій виступають широко розповсюджені ігри – шахи, шашки, карткові ігри. Тому теорії ігор властива наступна термінологія.

***Гравці*** – сторони, що беруть участь у конфлікті.

Гравці, які мають протилежні по відношенню один до одного інтереси, називаються ***супротивниками***.

***Партія*** – одне здійснення гри.

***Стратегії*** – доступні (з деякого набору правил) для гравців дії, у загальному випадку – це набір правил і обмежень.

***Правила гри*** – це допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення деякої мети.

На множині всіх можливих стратегій задається ***функція виграшу*** або ***платіжна функція***. Якщо стратегії гравців є визначеними, то дана функція для цього конкретного набору стратегій визначає розмір виграшу або програшу кожної зі сторін.

***Ситуації*** **–** це можливі наслідки конфлікту. Кожна ситуація – результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Ситуація називається ***прийнятною*** для гравця, якщо цей гравець, змінюючи в ситуації свою стратегію, не може збільшити свого виграшу.

***Ситуація рівноваги*** – ситуація, прийнятна для всіх гравців.

***Процес розв'язання гри*** – процес знаходження ситуації рівноваги.

***Виграш (програш, нічия)*** – наслідки конфлікту, результати гри.

Виграші (програші, нічиї) учасників мають кількісне вираження (якщо це не так, то завжди можна їм його приписати, наприклад, у шахах вважати «виграш» за 1, «програш» – за $(-1)$, «нічию» – за 0).

Розвиток гри в часі можна представляти як ряд послідовних «ходів» учасників.

***Ходом*** називається вибір гравцем одного з передбачених правилами гри дій та його здійснення.

Ходи бувають:

- *особисті* **–** гравець свідомо обирає та здійснює той або інший варіант дій (приклад – будь-який хід у шахах).
- *випадкові* – вибір здійснюється не волею гравця, а якимось механізмом випадкового вибору (кидання монети, гральної кістки, виймання карти з колоди і т.ін.).

Усяка гра містить у собі ***три елементи***: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I,\ \{x\},\ \{H\} > = <\text{ гравці, стратегії, виграші } >.$$

Невизначеність результату гри викликається **різними причинами**, які розбиваються на 3 групи:

1. *особливості правил гри*, які викликають величезну різноманітність у її розвитку таким чином, що результат гри неможливо передбачити заздалегідь – комбінаторні ігри (шахи, шашки);
2. *вплив випадкових факторів* – азартні ігри (кістки, карти);
3. *відсутність інформації* про дії супротивника.

***Основною метою розв’язування задач цього класу*** є розробка рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій дії конфліктуючих сторін із застосуванням методичних підходів теорії ігор, що дає змогу ефективно спланувати принципи поведінки та стратегії вибору дій в різних ситуаціях.

Отже, ***основною метою та задачею теорії ігор*** є вироблення рекомендацій для гравців, тобто визначення для них оптимальних стратегій.

***Оптимальною стратегією*** гравця називається стратегія, яка забезпечує йому найкраще положення в даній грі, тобто отримання максимального виграшу. Якщо гра повторюється неодноразово й містить, крім особистих, ще й випадкові ходи, оптимальна стратегія забезпечує максимальний середній виграш.

### 4.1.3 Класифікація ігор

На сьогоднішній день існує багато підходів до класифікацій ігор [6, 18]. Розглянемо основні з них.

1. Залежно від кількості гравців розрізняють:
   - *ігри двох гравців (парні ігри)* – ігри, у яких можуть зустрічатися інтереси двох супротивників (такі ігри є найбільш вивченими);
   - *ігри n гравців (множинні)* – ігри, у яких можуть зустрічатися інтереси трьох і більше супротивників (є менш дослідженими через виникаючі принципові труднощі й технічні можливості одержання розв'язку. Чим більше гравців, тим більше проблем).
2. За кількістю стратегій ігри діляться на:
   - *кінцеві ігри* – ігри, у яких усі гравці мають кінцеве число можливих стратегій;
   - *нескінченні ігри* – ігри, у яких хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій.
3. За доступністю інформації ігри діляться на:
   - *ігри з повною інформацією* – гра, у якій кожний гравець при кожному особистому ході знає всю передісторію її розвитку, тобто результати всіх попередніх ходів, як особистих, так і випадкових (шахи, шашки, «хрестики й нулики»);
   - *ігри з неповною інформацією* (карти).
4. За характером взаємодії ігри діляться на:
   - *безкоаліційні ігри* – ігри, при яких гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції;
   - *коаліційні ігри* – ігри, при яких гравці можуть вступати в коаліції;
   - *кооперативні гри* – ігри, при яких коаліції є визначеними наперед.
5. За характером виграшів ігри діляться на:
   - *ігри з нульовою сумою* (загальний капітал усіх гравців не змінюється, а перерозподіляється між гравцями, тобто один гравець отримує виграш за рахунок програшу інших гравців; сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю). Ігри двох гравців з нульовою сумою відносяться до класу *антагоністичних ігор* (при цьому виграш одного гравця дорівнює, природно, програшу іншого гравця);
   - *ігри з ненульовою (фіксованої) сумою* (ігри, в яких потрібно здійснювати внесок за право участі в них).

6. За кількістю ходів ігри діляться на:
   - *однокрокові ігри* – ігри, у яких після кожного ходу гра закінчується й відбувається перерозподіл виграшів;
   - *багатокрокові ігри* (шахи).
7. За видом функцій виграшу ігри діляться на:
   - *матричні ігри*. Під *матричною грою* розуміється кінцева гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 2, стовпець – номеру застосовуваної стратегії гравця 2; на перетині рядка й стовпця матриці перебуває виграш гравця 1, що відповідає застосовуваним стратегіям). Для матричних ігор доведено, що кожна з них має розв'язок і він може бути легко знайдений аналітичними та чисельними методами;
   - *біматричні ігри*. Під *біматричною грою* розуміється кінцева гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (у кожній матриці рядок відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, на перетинанні рядка й стовпця в першій матриці перебуває виграш гравця 1, у другій матриці – виграш гравця 2.). Для біматричних ігор також розроблена теорія оптимальної поведінки гравців, однак розв’язувати такі ігри складніше, ніж звичайні матричні;
   - *неперервні ігри* – ігри, у яких функція виграшів кожного гравця є неперервно залежною від стратегій. Ігри цього класу мають розв'язки, однак не розроблено практично прийнятних методів їх знаходження;
   - *опуклі ігри* – ігри, у яких функція виграшів є опуклою. Для них розроблено прийнятні методи розв'язання, що полягають у відшуканні чистої оптимальної стратегії (певного числа) для одного гравця та ймовірностей застосування чистих оптимальних стратегій іншого гравця. Така задача розв’язується порівняно легко.

### 4.2 Матричні ігри. Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричних ігор у чистих стратегіях

Як вже відомо, будь-яка гра містить у собі **три елементи**: учасників гри – гравців, правила гри, оцінку результатів дій гравців:

$$\Gamma = < I,\ \{x\},\ \{H\} > = < \text{гравці, стратегії, виграші} >.$$

Таким чином, будь-яка гра передбачає наступне:

- *наявність деякого числа n осіб, які беруть у ній участь (гравців)*. За кількістю гравців ігри класифікуються на ігри двох осіб, трьох осіб тощо;
- *наявність правил гри*, які визначають можливі варіанти дій гравців, обсяг інформації кожної сторони про дії іншої, результат гри, до якого

приводить відповідна послідовність ходів. У більшості ігор передбачається, що інтереси учасників піддаються кількісному опису, тобто результат гри (виграш) визначається певним числом;

– *наявність кінцевого виграшу (або програшу) кожного гравця*. Коли гра закінчується, кожен гравець отримує дохід $p_i$ (якщо $p_i < 0$, то це означає, що гравець програв), що залежить від його поведінки та поведінки інших гравців.

Найбільш вивченим класом ігор є так звані ***ігри з нульовою сумою*** [6, 16-19], коли у будь-якій партії має місце умова

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0,$$

виконання якої означає, що, якщо хтось виграє, то хтось обов'язково програє. Особливо це проявляється в іграх двох осіб з нульовою сумою, коли $p_1 + p_2 = 0$, тобто $p_2 = -p_1$ (інтереси гравців є суворо протилежними, оскільки виграш одного гравця є одночасно програшем іншого). Такі ігри називають *антагоністичними*.

Інші ігри – ***з ненульовою сумою*** – виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

Будь-яка гра складається з *партій*, які починаються та закінчуються, після чого гравцям виплачуються їх виграші.

У свою чергу кожна партія складається з *ходів*, які одночасно чи послідовно роблять гравці.

Опис гри як послідовності ходів зветься ***позиційною формою гри***. Теорія ігор у позиційній формі розроблена дуже слабо.

Основний зміст сучасної теорії ігор – це так звана ***матрична форма гри***. У цьому випадку вважається, що кожен гравець робить лише один хід, причому всі ходи робляться одночасно. Після цього кожному гравцеві виплачується виграш (або береться програш) в залежності від того, які ходи були зроблені ним та іншими гравцями.

Взагалі кажучи, гра в позиційній формі може бути зведена до гри в матричній формі, проте для реальних ігор це зведення є настільки складним, що практично є неможливим навіть для сучасних ЕОМ. Однак цілком можливо, що в майбутньому така інформація матиме і практичний зміст.

### 4.2.1 Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу

Кінцева парна гра двох осіб з нульовою сумою (***антагоністична гра двох осіб*** або ***двох коаліцій***) в матричній формі займає центральне місце у сучасній теорії ігор, оскільки теорія таких ігор розроблена майже остаточно.

Для такої гри характерним є те, що в ній виграш однієї сторони дорівнює програшу іншої, а сума виграшів обох сторін дорівнює нулю.

Подібна ситуація є типовою у практичній діяльності ОПР, які щоденно приймають рішення за умов гострої конкуренції, неповноти інформації тощо. Основною метою розв’язування задач цього класу є розроблення рекомендацій щодо вибору оптимальних стратегій конфліктуючих сторін на основі застосування методичних підходів теорії ігор.

Розглянемо таку гру.

Нехай у грі беруть участь два гравці *A* та *B* з протилежними інтересами (виграш одного гравця дорівнює програшу іншого).

У розпорядженні гравця *A* є лише *m* можливих ходів $i = 1, 2, ..., m$ (*m* можливих стратегій $A_1, A_2, ..., A_m$); у розпорядженні гравця *B* (супротивника) є *n* можливих ходів $j = 1, 2, ..., n$ (*n* можливих стратегій $B_1, B_2, ..., B_n$). Натуральні числа *m* та *n* ніяким чином не пов'язані.

Можливі такі ходи (стратегії) гравців *A* та *B* називаються ***чистими стратегіями***.

Обидва гравці роблять одночасно по одному ходу, після чого партія вважається закінченою.

Отже, парна гра складається із двох ходів:

1. гравець *A* робить хід *i* та обирає одну зі своїх можливих чистих стратегій $A_i$ $(i = \overline{1, m})$;
2. гравець *B* робить хід *j* та обирає свою чисту стратегію із $B_j$ $(j = \overline{1, n})$ при повному незнанні обраної стратегії гравцем *A*.

Введемо наступні позначення: $\varphi_1(A_i, B_j)$ – виграш гравця *A*;

$\varphi_2(A_i, B_j)$– виграш гравця *B*.

Виграші повинні задовольняти умові:

$$\varphi_1(A_i, B_j) + \varphi_2(A_i, B_j) = 0. \tag{4.1}$$

Якщо позначимо, що

$$\varphi_1(A_i, B_j) = \varphi(A_i, B_j),$$

то, отже,

$$\varphi_2(A_i, B_j) = -\varphi(A_i, B_j).$$

Оскільки виграш гравця *A* дорівнює виграшу гравця *B* зі зворотним знаком, ми можемо цікавитися тільки виграшем $\varphi(A_i, B_j)$ гравця *A*. Природно, *A* прагне максимізувати, а *B* – мінімізувати $\varphi(A_i, B_j)$.

Якщо гравець *A* обирає деяку стратегію $A_i$, то це само по собі не може впливати на значення функції $\varphi(A_i, B_j)$, тобто вплив $A_i$ на величину значення $\varphi(A_i, B_j)$ є невизначеним. Визначити $j$ можна тільки після вибору своєї стратегії $B_j$ гравцем *B*.

Наслідки гри $m \times n$ повністю визначаються матрицею (***платіжною матрицею*** або ***матрицею гри***) виду

$$A = (a_{ij})_{m \times n},$$

де $a_{ij} = \varphi(A_i, B_j)$.

Наприклад, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$.

***Матриця гри*** – це таблиця, у яку зведені правила гри в такий спосіб:

а) кількість рядків у матриці *A* відповідає кількості стратегій гравця *A*, а кількість стовпців – кількості стратегій гравця *B*;

б) номер рядка матриці *A* відповідає номеру стратегії $A_i$ гравця *A*, а номер стовпця – номеру застосовуваної стратегії $B_j$ гравця *B*;

в) на перетині рядка $A_i$ й стовпця $B_j$ перебуває елемент $a_{ij}$, тобто виграш гравця *A* (відповідний до застосовуваних стратегій) або програш гравця *B*. Таким чином, елементи $a_{ij}$ матриці *А* є платою гравця *B* гравцю *A* у випадку вибору гравцем *A* стратегії $A_i$ (*i*-го рядка), а гравцем *B* – стратегії $B_j$ (*j*-го стовпця). Кількість таких ситуацій дорівнюватиме $(m \times n)$.

Елементи $a_{ij}$ матриці *A* можуть бути додатними, від'ємними або рівними нулю:

– якщо елемент $a_{ij}$ матриці є додатним ($a_{ij} > 0$), то це означає, що гравець *B* в певній ситуації повинен сплатити гравцю *A* суму, яка дорівнює значенню цього елемента $a_{ij}$;

– якщо елемент $a_{ij}$ – від'ємний ($a_{ij} < 0$), то це означає, що гравець *A* сплачує гравцю *B* суму, яка дорівнює абсолютному значенню цього елемента $a_{ij}$;

– якщо елемент $a_{ij} = 0$, то це означає, що ніякої виплати не проводиться.

Отже, в грі двох осіб з нульовою сумою один гравець виграє стільки ж, скільки програє інший (всі виплати проводяться з «кишень» супротивників). Це і пояснює назву – гра з нульовою сумою.

При складанні моделі гри платіжну матрицю зручно попередньо подати у табличній формі виду

| | $B_1$ | $B_2$ | $\dots$ | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\dots$ | $a_{2n}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ |

З метою формалізації конфліктної ситуації та подання її у вигляді математичної моделі задач теорії ігор, тобто гри, здійснюються наступні етапи:

1 етап: визначення гравців (учасників гри) та всіх можливих дії кожного гравця;

2 етап: складання платіжної функції кожного гравця (якщо вона є уявною в аналітичному вигляді);

3 етап: обчислення виграшів кожного гравця в залежності від одночасних дій гравця та його противника;

4 етап: заповнення платіжної матриці гри.

Зведення гри до матричної форми є досить складним, а іноді і нездійсненним завданням через незнання стратегій, їх значну кількість та складність оцінки виграшу, що свідчить про обмеженість можливостей теорії ігор при розв’язанні задач.

Оскільки скінченну парну гру з нульовою сумою можна представити у вигляді матриці, таку гру називають ***матричною***.

За загальним виглядом платіжні матриці (в умовах конфлікту) та матриці рішень (в умовах невизначеності й ризику) є подібними. Відмінність між ними полягає в тому, що:

– *в умовах конфлікту* в якості розумних суперників (гравців) виступають свідомі суб’єкти керування, які будують свою стратегію відповідно до дій один одного;
– *в умовах невизначеності та ризику* «супротивником» суб’єкта керування є середовище (природа), протидія якого не є свідомою та яке не може реагувати на дії суб’єкта керування.

Тому ігри, які відповідають конфліктним ситуаціям, називаються ***стратегічними***, а ігри, що відповідають умовам невизначеності та ризику – ***статистичними***.

Аналіз платіжної матриці дозволяє розробити рекомендації щодо вибору оптимальних рішень гравців.

Отже, після побудови матриці гри необхідно обрати оптимальну (ефективну) стратегію, тобто вирішити гру, для чого, в першу чергу, потрібно ознайомитися з принципами, на які спираються гравці *A* та *B* при виборі своїх стратегій $A_i$ $(i = \overline{1,m})$ та $B_j$ $(j = \overline{1,n})$.

### 4.2.2 Принципи вибору стратегій гравцями *A* и *B*. Розв’язання матричних ігор у чистих стратегіях

Нехай гравець *A* обирає деяку стратегію $A_i$.

Тоді *в найгіршому випадку* (коли його вибір стане відомим супротивникові) він одержить виграш, що дорівнює

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Передбачаючи таку можливість, гравець *A* повинен обрати таку стратегію $A_{i0}$, щоб максимізувати свій мінімальний виграш, тобто

$$\alpha = \alpha_{i0} = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}. \qquad (4.2)$$

Величина $\alpha$ гарантує виграш гравця *A* та називається **нижньою ціною гри**, яка показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець *A*, застосовуючи свої стратегії при будь-яких діях гравця *B*.

Стратегія $A_{i0}$, що забезпечує одержання $\alpha$ називається **максимінною стратегією**, ідея якої полягає в тому, що гравець *A* не розраховує на можливі помилки гравця *B* та одержує **гарантований виграш** $\alpha$.

Гравець *B*, обираючи стратегію виходить із наступного принципу: при виборі деякої стратегії $B_j$ його програш не перевищить максимального зі значень елементів *j*-го стовпця матриці, тобто

$$\beta_j = \max_i a_{ij}.$$

Розглядаючи всі значення $\beta_j$, гравець *B* обирає таке значення $\beta_{j0}$, при якому його максимальний програш буде мінімальним, тобто

$$\beta = \beta_{j0} = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}. \quad (4.3)$$

Величина $\beta$ називається **верхньою ціною гри**, яка показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може гарантувати собі гравець $A$.

Відповідна до виграшу $\beta$ стратегія $B_{j0}$ називається **мінімаксною стратегією.**

Ситуація $(i, j)$, яка відповідає парі стратегій $(A_i, B_j)$ та якій поставлено у відповідність число $a_{ij}$, визначає результат вибору кожним гравцем своєї стратегії.

Якщо гравці *A* та *B* прийняли відповідно стратегії $A_{i0}$ й $B_{j0}$, то говорять, що вони використовують **принцип мінімаксу (принцип гарантованого результату)**: *поступай таким чином, щоб при найгіршій для тебе поведінці супротивника одержати максимальний виграш.*

У випадку, коли $\alpha = \beta$, ми маємо справу з ***сідловою точкою*** або ***точкою рівноваги***.

***Сідлова точка*** – це такий елемент $a_{i_0 j_0}$ матриці *A*, який одночасно є мінімальним у рядку й максимальним у стовпці.

Стратегії $(i_0, j_0)$, які є відповідними до сідлової точки $a_{i_0 j_0}$, називаються ***оптимальними чистими стратегіями***.

Ознака наявності сідлової точки й урівноваженої пари стратегій (пари стратегій $A_{i_0}$, $B_{j_0}$, які володіють властивістю рівноваги) – це рівність нижньої й верхньої цін гри

$$V = \alpha = \beta.$$

Значення $V = \alpha = \beta$ називається ***чистою ціною гри***.

Ціна гри $V$ й набір стратегій $(i_0, j_0)$ утворюють ***розв'язок гри в чистих стратегіях***, тобто набір

$$\{(i_0, j_0), V\}.$$

**Твердження 4.1.** Ситуація $(i_0, j_0)$ в матричній $m \times n$- грі є ***рівноважною (сідловою точкою)***, якщо для будь-якого $i = 1,\ldots,m$ й кожного $j = 1,\ldots,n$ виконується нерівність

$$a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}.$$

У грі може існувати не одна сідлова точка, наприклад

$$(i_0, j_0),\ (i_{10}, j_{10}),\ (i_{20}, j_{20}).$$

Зокрема, наприклад, матриця $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ має 4 сідлові точки, що дорівнюють 2, які розташовані в першому рядку й першому стовпці, у першому рядку й четвертому стовпці, у другому рядку й першому стовпці, у другому рядку й четвертому стовпці матриці, відповідно.

Дійсно, визначаючи нижню та верхню ціни гри, маємо:

$$
\begin{array}{rcc}
 & & \min\limits_j a_{ij} \\
 & & \| \\
\text{A} = & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ -2 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \left.\begin{matrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right\} \alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\
\max\limits_i a_{ij} = & \begin{matrix} 2 & 7 & 6 & 2 \end{matrix} &
\end{array}
$$

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = 2$$

Даний приклад показує, що матриця може мати кілька (більше однієї) сідлових точок.

Проте, якщо матриця має кілька сідлових точок, всі їх значення є рівними.

Так, у матриці, всі елементи якої дорівнюють один одному, всі елементи є сідловими точками. Максимальна кількість сідлових точок у такій грі дорівнює $(m \times n)$, $m-$кількість рядків, $n-$кількість стовпців матриці.

**Твердження 4.2.** У випадку існування сідлової точки платіжної матриці говорять, що гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Вірним є й *зворотне твердження*: гра має розв'язок у чистих стратегіях тоді й тільки тоді, коли платіжна матриця гри має сідлову точку.

**Теорема 4.1.** У матричній грі нижня ціна гри $\alpha$ не перевершує верхньої ціни гри $\beta$, тобто $\alpha \le \beta$.

*Доведення*. За визначенням маємо:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \le a_{ij} \ \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right);\ \beta_j = \max_i a_{ij} \ge a_{ij} \ \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right).$$

Тоді

$$\alpha_i \le a_{ij} \le \beta_j \ \left(\forall i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right),$$

звідки $\alpha_i \le \beta_j$.

Оскільки отримана нерівність виконується для довільних $\alpha_i$ та $\beta_j$, то вона виконується й для $\alpha$ та $\beta$, тобто:

$$\max_i \alpha_i = \alpha \le \beta = \min_j \beta_j .$$

Отже, доведено, що $\alpha \le \beta$.

Теорема доведена.

### 4.3 Гра двох осіб з нульовою сумою виграшу. Розв'язання матричної гри з матрицею гри (2×2) в змішаних стратегіях. Властивості розв'язків матричних ігор

#### 4.3.1 Розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається зі знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha = \beta,$$

то знаходженням цієї сідлової точки закінчується дослідження гри, оскільки, як відомо, у випадку існування сідлової точки платіжної матриці, ***гра має розв'язок у чистих стратегіях***.

Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, тобто

$$\alpha < \beta,$$

то ***гра має розв'язок у змішаних стратегіях***.

При цьому умова $\alpha < \beta$ означає, що гравець $A$ не має сподіватися на виграш більший, ніж верхня ціна гри $\beta$, та може бути впевнений в отриманні виграшу, не меншого, ніж нижня ціна гри $\alpha$.

Визначимо, що називається змішаною стратегією для кожного з гравців та яким чином вони обираються.

***Змішаною стратегією першого гравця*** називається вектор

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

де $p_i \geq 0, i = \overline{1,m}, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$

***Змішаною стратегією другого гравця*** називається вектор

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

де $q_j \geq 0, j = \overline{1,n}, \quad \sum_{j=1}^{n} q_i = 1.$

Вектор $p$ є вектором ймовірності застосування $i-$ої стратегії першим гравцем. Аналогічно, вектор $q$ є вектором ймовірності застосування $j-$ої стратегії другим гравцем.

Частинним випадком змішаної стратегії виступає ***чиста стратегія***. Наприклад, застосування чистої стратегії $A_3$ буде відповідати вектору $p^{(3)} = (0,0,1,0,\ldots,0)$, а застосування чистої стратегії $B_2$ буде відповідати вектору $q^{(2)} = (0,1,0,0,\ldots,0)$. Тобто, якщо в змішаній стратегії яка-небудь $i-$та чиста стратегія застосовується з ймовірністю, що дорівнює 1, то всі інші чисті стратегії не застосовуються. Ця $i-$та чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії.

Оскільки гравці обирають свої чисті стратегії випадково й незалежно один від одного, то *гра має випадковий характер*. Тому випадковою стає й величина виграшу (програшу).

У цьому випадку ***середня величина виграшу гравця А*** виражається у вигляді математичного очікування його виграшів та є функцією від двох змішаних стратегій, яку ми будемо визначати в такий спосіб:

$$f(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,p_i q_j\,, \tag{4.4}$$

де $f(p,q)-$ це ***платіжна функція гри*** з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$.

Стратегії $p^*=(p_1^*,p_2^*,...,p_m^*)$, $q^*=(q_1^*,q_2^*,...,q_n^*)$ називаються ***оптимальними***, якщо для довільних стратегій $p$ $(\forall p=(p_1,p_2,...,p_m))$ та $q$ $(\forall q=(q_1,q_2,...,q_n))$ виконується умова:

$$f(p,q^*)\le f(p^*,q^*)\le f(p^*,q). \tag{4.5}$$

Це означає, що використання у грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує:

- гравцю *A* виграш, не менший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії $p$;
- гравцю *B* програш, не більший, ніж той, що він отримає при використанні ним будь-якої іншої стратегії $q$.

Сукупність оптимальних стратегій та ціни гри становить ***розв'язок гри***.

Значення платіжної функції при оптимальних стратегіях визначає ***ціну гри***, яка подається у вигляді

$$V=f(p^*,q^*).$$

Тоді фактично ***розв'язком гри в змішаних стратегіях*** є набір (трійка):

$$(p^*,q^*,V).$$

Справедливою є наступна *основна теорема теорії матричних ігор*.

**Теорема 4.2 (фон Неймана).** У змішаних стратегіях будь-яка кінцева матрична гра має розв'язок.

Нехай маємо матричну гру з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й деякі оптимальні змішані стратегії $p^*$ й $q^*$ гравців *A* та *B*, що забезпечують суму виграшу *V*. Виникає питання: як перевірити, що набір $(p^*,q^*,V)$ є розв'язком гри?

Для цього необхідно перевірити справедливість нерівності (4.5) для довільних змішаних стратегій, у тому числі й для стратегій $p^*$ та $q^*$.

Однак різних змішаних стратегій, серед яких є і оптимальні стратегії – нескінченна множина. І в цьому випадку неможливо перевірити справедливість нерівності (4.5).

На це питання дозволяє відповісти наступна теорема.

**Теорема 4.3 (критерій оптимальності змішаних стратегій).** Для того, щоб змішані стратегії $p^*=(p_1^*,p_2^*,...,p_m^*)$ й $q^*=(q_1^*,q_2^*,...,q_n^*)$ були оптимальними для гравців *A* та *B* у грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ й виграшем $V$, необхідно й достатньо виконання наступних нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge V, \tag{4.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le V. \tag{4.7}$$

*Доведення*

*Необхідність.*

Нехай $p^*, q^*$ – оптимальні змішані стратегії. Доведемо, що для них виконуються співвідношення (4.6) та (4.7).

Оскільки $p^*, q^*$ – це оптимальні стратегії, то вони за визначеннями задовольняють співвідношенню (4.5).

Використовуючи (4.4) та нерівність (4.5) ми можемо записати:

$$f(p, q^*) \le f(p^*, q^*) \le f(p^*, q),$$

звідки маємо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* \le V \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j, \tag{4.8}$$

де нерівність (4.8) одержуємо з нерівності (4.5) шляхом явного опису функцій $f(p, q^*)$, $f(p^*, q^*)$ та $f(p^*, q)$.

Розглянемо праву частину співвідношення (4.8). Значення $V \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій $q$, де $q = (q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n) = \left(0, \ldots, \overset{(j)}{1}, \ldots, 0\right)$ – виконується для будь-яких змішаних стратегій, у тому числі й для чистої стратегії. Тоді $V \le \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$, що свідчить про виконання нерівності (4.6).

Співвідношення (4.7) перевіряється аналогічно: шляхом підстановки до лівої частини нерівності (4.8) вектору стратегії $q^*$:

$$V \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*,$$

у тому числі $p = (p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m) = \left(0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0\right)$.

У такий спосіб доведено співвідношення (4.7): $V \ge \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*$.

*Достатність*.

Нехай виконуються умови (4.6) та (4.7). Покажемо, що $p^*, q^*$ – оптимальні змішані стратегії. З урахуванням співвідношення (4.6) перетворимо праву частину співвідношення (4.7), а з урахуванням співвідношення (4.6) – ліву частину співвідношення (4.7).

Нехай $q$ – довільний вектор.

Тоді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \right) \underset{\text{на основі}(4.6)}{\geq} \sum_{j=1}^{n} q_j V = V \sum_{j=1}^{n} q_j = V .$$

Аналогічно, для лівої частини співвідношення (4.8). Нехай $p$ – довільний вектор. Тоді:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \right) \underset{\text{на основі}(4.6)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} p_i V = V \sum_{i=1}^{m} p_i = V$$

Теорема доведена.

**Зауваження до Теореми 4.3.** На підставі теореми 4.3 можна зробити висновок: якщо гравець *A* ухвалює оптимальну змішану стратегію $p^*$, а гравець *B* – будь-яку чисту стратегію $B_j$, то виграш гравця *A* буде не меншим ціни гри $V$. Аналогічне твердження справедливе й для другого гравця: якщо гравець *B* ухвалює оптимальну змішану стратегію $q^*$, а гравець *A* – будь-яку чисту стратегію $A_i$, то виграш гравця *B* буде не більшим ціни гри $V$.

Чисті стратегії, що входять до оптимальної змішаної стратегії будь-якого гравця з ймовірностями, відмінними від нуля, називаються ***активними стратегіями***.

Для активних стратегій справедливою є наступна теорема.

**Теорема 4.4 (про активні стратегії).** Якщо один з гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним та рівним ціні гри не залежно від того, яку стратегію приймає інший гравець, якщо тільки той (другий гравець) не виходить за межі своїх активних стратегій.

Для практичного розв'язання задач теорії ігор досить корисною є наступна теорема.

**Теорема 4.5 (про афінні перетворення).** Оптимальні змішані стратегії $p^*$ й $q^*$ відповідно гравців *A* та *B* у матричній грі з матрицею $(a_{ij})_{m\times n}$ з ціною гри $V$ будуть оптимальними й у матричній грі з матрицею $(ba_{ij}+c)_{m\times n}$ з ціною гри $V' = bV + c$, де $b > 0$.

На підставі теореми 4.5 платіжну матрицю, що містить від'ємні числа, можна перетворити в матрицю з додатними числами.

### 4.3.2 Властивості розв'язків матричних ігор [6, 18]

#### 4.3.2.1 Домінування чистих стратегій

Застосування принципу домінування дозволяє іноді зменшити кількість стратегій гравців, тобто зменшити розмірність матриці *A*. Це випливає з того факту, що доміновані стратегії можуть бути виключені, при цьому ціна гри не змінюється.

***Рядок з номером і домінує рядок з номером k***, якщо виконується умова

$$a_{ij} \ge a_{kj} \quad \text{для } j = \overline{1, n}.$$

Причому існує хоча б один стовпець із номером $m$, для якого виконується умова:

$$a_{im} > a_{km}.$$

Домінований рядок $k$ можна викреслити з матриці, оскільки цією стратегією перший гравець ніколи не скористається, оскільки його виграш при виборі стратегії $i$ завжди буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії $k$.

***Стовпець j домінує стовпець із номером k***, якщо виконується умова:

$$a_{ij} \le a_{ik} \quad \text{для } i = \overline{1, m}.$$

Причому існує хоча б один рядок з номером $p$, для якого виконується умова

$$a_{pj} < a_{pk}.$$

Домінований стовпець $k$ також може бути викресленим з матриці, оскільки другий гравець не буде обирати цю стратегію, оскільки його програш при такому виборі стратегії $j$ буде не меншим, ніж при виборі ним домінованої стратегії $k$.

Стратегії вважаються ***еквівалентними (дубльованими)***, якщо всі виграші цих стратегій є однаковими. Еквівалентні стратегії також можуть бути викресленими з матриці. Викреслення проводиться при цьому таким чином, щоб з числа еквівалентних стратегій залишилась лише одна.

**Теорема 4.6.** Якщо елементи одного рядка (стовпця) не всі є меншими (більшими) або рівними відповідним елементам інших рядків (стовпців), але усі є меншими (більшими) або рівними деяким опуклим лінійним комбінаціям відповідних елементів інших рядків (стовпців), то цю стратегію можна виключити, замінивши її змішаною стратегією з відповідними частотами використання чистих стратегій.

Аналогічно, якщо кожний елемент деякого стовпця більше або дорівнює деякій опуклій лінійній комбінації відповідних елементів деяких інших стовпців, то цей стовпець можна виключити з розгляду.

Як видно, можливості домінування змішаними стратегіями на відміну від чистих є значно менш прозорими (потрібно належним чином підібрати частоти застосування чистих стратегій), але такі можливості існують, ними корисно вміти користуватися.

З урахуванням принципу домінування чистих стратегій ***процедура розв'язання гри в загальному вигляді включає наступні кроки***:

1 етап: для визначеної платіжної матриці гри проводиться її спрощення за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії);

2 етап: для спрощеної матриці гри проводиться розрахунок нижньої та верхньої цін гри;

3 етап: проводиться перевірка наявності сідлової точки та визначається метод розв'язання гри:

3.1. якщо сідлова точка існує ($\alpha = \beta$), то, отже, гра має розв'язок у чистих стратегіях;

3.2. якщо сідлова точка відсутня ($\alpha < \beta$), то, отже, гра має розв'язок у змішаних стратегіях;

4 етап: проводиться розв'язання гри.

#### 4.3.2.2 Строго детерміновані й не строго детерміновані ігри з матрицею $(2\times 2)$. Принципи розв'язання

Розглянемо матричні ігри з $(2\times 2)$-матрицею, які часто зустрічаються в теорії ігор або зводяться до них у результаті застосування властивості домінування.

Будемо говорити, що гра з $(2\times 2)$-матрицею є ***строго детермінованою***, якщо ця матриця містить елемент, скажемо $V$, який одночасно є мінімальним елементом в утримуючому його рядку й максимальним елементом в утримуючому його стовпці.

Тоді оптимальні стратегії гравців полягають у наступному:

- для гравця *A*: «обрати рядок, що містить $V$»;
- для гравця *B*: «обрати стовпець, що містить $V$».

Ціною гри й буде число $V$.

Матрична гра називається ***необразливою***, якщо її ціна дорівнює нулю ($V = 0$).

**Властивість:** матрична гра з матрицею *A*, у якій в одному рядку або в одному стовпці стоять однакові елементи, є ***строго детермінованою***.

Деякі матричні ігри не є строго детермінованими, тобто відповідна їм матриця не містить елемента, який був би одночасно мінімальним у своєму рядку й максимальним у своєму стовпці.

Не строго детерміновані матричні ігри з $(2\times 2)$-матрицею можна охарактеризувати в такий спосіб.

**Теорема 4.7 (*про строгу недетермінованість гри*).** Гра з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не є строго детермінованою тоді й тільки тоді, коли виконано одне з наступних двох умов:

а) $a < b, a < c$, $d < b$ та $d < c$;

б) $a > b, a > c$, $d > b$ та $d > c$.

Ці співвідношення означають, що елементи головної діагоналі матриці мають бути меншими (більшими) кожного з двох елементів іншої діагоналі матриці.

*Доведення*

Якщо виконується будь-яка з умов (а) або (б), то, як неважко перевірити, жоден елемент матриці не може бути одночасно мінімальним у тому рядку, якому він належить, і максимальним у тому стовпці, якому він належить; отже, гра не буде строго детермінованою.

Щоб довести другу частину теореми, згадаємо, що гра є строго детермінованою, якщо у відповідній їй матриці є рівними два елементи якого-небудь рядка або стовпця. Отже, можна припустити, що ніякі два елементи одного й того самого рядка або того самого стовпця не є рівними.

Припустимо тепер, що $a < b$. Тоді $a < c$, інакше елемент $a$ буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Крім того, $c > d$, інакше, елемент $c$ буде мінімальним елементом свого рядка й максимальним елементом свого стовпця. Нарешті, $d < b$, інакше елемент $d$ буде мінімальним елементом рядка й максимальним елементом стовпця. Отже, припущення $a < b$ приводить до відзначеного вище випадку (а).

Аналогічне припущення $a > b$ приводить до випадку (б).

Теорема доведена.

Вирішимо питання про те, <u>яким чином обирати оптимальну змішану стратегію гравців зі всіх доступних для них змішаних стратегій</u>.

Розглянемо не строго детерміновану гру з матрицею

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Для не строго детермінованої гри з введеною матрицею $G$ число $V$ називається ***ціною*** цієї ***гри***, а вектори $p^* = \left(p_1^*, p_2^*\right)$ й $q^* = \begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix}$ – ***оптимальні стратегії*** гравців $A$ та $B$, якщо мають місце наступні нерівності:

$$p^* G = \left(p_1^*, p_2^*\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq (V, V); \tag{4.9}$$

$$Gq^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Нехай гравець $A$ обирає змішану стратегію $p = \left(p_1, p_2\right)$ й (незалежно) гравець $B$ обирає змішану стратегію $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$. Тоді гравець $A$ виграє суму $a$ з ймовірністю $p_1q_1$, суму $b$ з ймовірністю $p_1q_2$, суму $c$ з ймовірністю $p_2q_1$ та суму $d$ з ймовірністю $p_2q_2$.

В такому випадку середнє значення виграшу (математичне очікування) гравця *A* обчислиться у вигляді

$$ap_1q_1 + bp_1q_2 + cp_2q_1 + dp_2q_2 = pGq.$$

Аналогічно, знаходиться й середнє значення виграшу гравця *B*. Воно дорівнює цьому ж виразу, але зі зворотним знаком.

Щоб виправдати дане вище визначення, потрібно показати, що, якщо для матриці $G$ існують $V, p^*, q^*$ із зазначеними властивостями, то гравець *A* може зробити середнє значення свого виграшу рівним або більшим $V$, а гравець *B* може зробити це середнє значення рівним або меншим $V$.

Нехай $q$ – будь-яка стратегія для гравця *B*. Помноживши (4.9) праворуч на $q$, ми одержимо співвідношення $p^*Gq \geq (V,V)q = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця *B* гравець *A* може забезпечити собі виграш, середнє значення якого щонайменше дорівнює $V$.

Аналогічно, нехай $p$ – будь-який вектор стратегії для гравця *A*. Помноживши (4.10) ліворуч на $p$, ми одержимо співвідношення $pGq^* \leq p\begin{pmatrix} V \\ V \end{pmatrix} = V$, яке показує, що при будь-якій грі гравця *A* гравець В може зробити середнє значення виграшу *A* рівним максимально $V$.

Саме в цьому полягає *тлумачення оптимальних стратегій* $p^*$ та $q^*$.

Якщо обидва гравця грають оптимальним чином, то для гравця *A* середнє значення виграшу дорівнює $V$, а для гравця *B* середнє значення виграшу дорівнює $(-V)$.

Вирішимо питання про *існування стратегій* $p^*$ *та* $q^*$ *в не строго детермінованій грі*. Тоді як при більш складних іграх знаходження оптимальних стратегій виявляється важкою задачею, вирішення цього питання у випадку не строго детермінованої гри з $(2 \times 2)$-матрицею може бути отримане ***алгебраїчним методом*** за наступними співвідношеннями:

$$p_1^* = \frac{d-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{4.11}$$

$$p_2^* = \frac{a-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{4.12}$$

$$q_1^* = \frac{d-b}{(a+d)-(b+c)}, \tag{4.13}$$

$$q_2^* = \frac{a-c}{(a+d)-(b+c)}, \tag{4.14}$$

$$V = \frac{ad-bc}{(a+d)-(b+c)}. \tag{4.15}$$

Легко перевірити, що знайдені по формулах (4.11)-(4.15) вектори $p, q$ й число $V$ задовольняють умовам (4.9), (4.10). У дійсності нерівності (4.9) та (4.10) у цьому простому випадку переходять у рівності. Цей факт не має місця в загальному випадку не строго детермінованих ігор, матриця яких має більше число рядків або стовпців.

Знаменник кожної з формул (4.11)-(4.15) являє собою різницю між сумами елементів по двом діагоналям.

Оскільки для не строго детермінованої гри елементи по одній діагоналі мають перевершувати елементи по іншій діагоналі, то знаменник не може звернутися в нуль.

У чисельнику дробу для $V$ стоїть визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Якщо для не строго детермінованої гри з матрицею $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ визначник

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0,$$

то така не строго детермінована гра буде ***необразливою***.

З урахуванням принципу домінування чистих стратегій, а також понять строгої детермінованості й строгої не детермінованості ігор, ***процедура розв'язання гри в загальному вигляді включає наступні кроки***:

1 етап: для визначеної платіжної матриці гри проводиться її спрощення за допомогою використання принципу домінування (виключаючи доміновані та дублюючі стратегії);

2 етап: для спрощеної матриці гри проводиться дослідження не строгої детермінованості гри за теоремою 4.7 та визначається метод розв'язання гри:

- 2.1. якщо умови теореми 4.7 порушуються, то гра визначається строго детермінованою; для такої гри існує розв'язок у чистих стратегіях;
- 2.2. якщо умови теореми 4.7 виконуються, то гра визначається не строго детермінованою; для такої гри розв'язку у чистих стратегіях не існує, але при цьому гра має розв'язок у змішаних стратегіях;

3 етап: проводиться розрахунок нижньої та верхньої цін гри;

4 етап: проводиться розв'язання гри.

*Примітка*: якщо на 1 етапі розв'язання гри проводилось спрощення матриці гри та викреслювались окремі доміновані рядки та/або стовпці матриці, то при розв'язанні гри у змішаних стратегіях потрібно неактивні стратегії з нульовою ймовірністю застосування внести до остаточної відповіді у відповідні вектори $p^*$ та $q^*$.

## 4.4 Аналітичні та чисельний методи розв’язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях

### 4.4.1 Графоаналітичний метод розв’язання ігор з платіжною матрицею розмірністю $2\times n$ та $m\times 2$

#### 4.4.1.1 Умови використання графоаналітичного (графічного) методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Графоаналітичний (графічний) метод застосовується тільки до ігор, у яких хоча б один гравець має тільки 2 стратегії, тобто до ігор з матрицею гри $2\times n$ виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}_{2\times n};$$

або до ігор з матрицею гри $m\times 2$ виду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}_{m\times 2}.$$

Передбачається, що цей метод застосовується у випадках відсутності у грі сідлової точки.

#### 4.4.1.2 Основні етапи реалізації графоаналітичного методу. Розв’язання матричних ігор з платіжною матрицею розмірністю $2\times n$ та $m\times 2$ графоаналітичним методом

Розглянемо гру виду $(2\times n)$

| | $q_1$ | $q_2$ | $\cdots$ | $q_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ |
| $p_2=1-p_1$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ |

Оскільки гравець *A* має тільки 2 стратегії, то, отже, $p_2=1-p_1$ (це витікає з властивості, що $\sum_{i=1}^{2} p_i=1$). При цьому $p_1\ge 0$, $p_2\ge 0$.

Очікувані виграші гравця *A*, що відповідають чистим стратегіям гравця *B*, представляються у табл. 4.1. Очевидно з табл. 4.1, що очікуваний виграш гравця *A* лінійно залежить від $p_1$.

Відповідно до критерію мінімаксу для ігор в змішаних стратегіях гравець *A* повинен обирати $p_1$ таким чином, щоб максимізувати свій мінімальний виграш. Аналогічно, для гравця *B*: гравець *B* повинен обирати свою змішану стратегію $q_1$ таким чином, щоб мінімізувати свій максимальний програш.

Таблиця 4.1 – Очікувані виграші гравця *A*, відповідні чистим стратегіям гравця *B*

| Чисті стратегії гравця *B* | Очікувані виграші гравця *A* |
|---|---|
| 1 | $p_1 a_{11} + (1 - p_1) a_{21} = (a_{11} - a_{21}) p_1 + a_{21}$ |
| 2 | $p_1 a_{12} + (1 - p_1) a_{22} = (a_{12} - a_{22}) p_1 + a_{22}$ |
| … | ……… |
| $n$ | $p_1 a_{1n} + (1 - p_1) a_{2n} = (a_{1n} - a_{2n}) p_1 + a_{2n}$ |

Ця задача може бути розв'язана графічно побудовою прямих ліній, що відповідають лінійним функціям від змінної $p_1$ (для гравця *A*) або від змінної $q_1$ (для гравця *B*).

Сформулюємо ***алгоритм розв'язання матричної гри з матрицею*** $(2 \times n)$ ***або*** $(m \times 2)$ ***графоаналітичним методом:***

1 *етап*. Визначення гравця, який має дві чисті стратегії.

2 *етап*. Знаходження оптимальних стратегій для гравця *A* та ціни гри $V$ (якщо гравець *A* має 2 чисті стратегії):

2.1) Відміряємо горизонтальний відрізок [0, 1]. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого рядка платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого рядка платіжної матриці. Масштаб на лівому та правому перпендикулярах однаковий, хоча може не співпадати із масштабом горизонтального одиничного відрізка.

2.2) З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця *B*, тобто в платіжній матриці відображені у стовпцях.

2.3) Виділяємо нижню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у частковому випадку може бути прямою.

2.4) Знаходимо на цій ламаній максимальну (найвищу) точку (точки). Абсциса цієї точки є ймовірністю $p^*$ вибору гравцем *A* чистої стратегії $A_2$ в оптимальній змішаній стратегії $P^* = (1 - p^*, p^*)$.

3 *етап*. Знаходження оптимальних стратегій для гравця *B* та ціни гри $V$:

3.1) Відміряємо горизонтальний відрізок [0,1]. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого стовпця платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого стовпця платіжної матриці. Масштаб по обох перпендикулярах, знову ж таки, однаковий.

3.2) З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця *A*, тобто в платіжній матриці відображені у рядках. Отримуємо $m$ відрізків.

3.3) Виділяємо верхню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у частковому випадку може бути прямою.

3.4) Знаходимо на цій ламаній мінімальну (найнижчу) точку (точки). Абсциса мінімальної точки вказує ймовірністю $q^*$ вибору гравцем *B* чистої стратегії $B_2$ в оптимальній змішаній стратегії $Q^* = \left(1 - q^*, q^*\right)$.

**Зауваження:** Якщо на початку розв’язання гри гравець *B* має 2 чисті стратегії, то для розв’язання гри спочатку реалізується етап 3 (будується графік для гравця *B*), а потім – етап 2 (будується графік для гравця *A*).

### 4.4.2 Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування [16, 17, 19]

Нехай є матрична гра з матрицею $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$.

Позначимо:

$p^* = \left(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\right)$– оптимальна змішана стратегія гравця *A*;

$q^* = \left(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n\right)$– оптимальна змішана стратегія гравця *B*.

Стратегія $p^*$ гравця *A* гарантує йому виграш (за теоремою 4.3), не менший ціни гри $V$, незалежно від вибору стратегії $B_j$ гравцем *B*.

Це можна записати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq V, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.16}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \quad p_i \geq 0. \tag{4.17}$$

Аналогічно, стратегія $q^*$ гравця *B* гарантує йому програш, не більший ціни гри $V$, незалежно від вибору стратегії $A_i$ гравцем *A*, тобто:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq V, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.18}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1, \quad q_j \geq 0. \tag{4.19}$$

Оскільки елементи платіжної матриці відповідно до теореми 4.5 можна завжди зробити позитивними, то і ціна гри $V > 0$.

Перетворимо системи (4.16) і (4.18), розділивши обидві частини кожного нерівності на додатне число $V$:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{a_{ij} p_i}{V} \geq 1, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} q_j}{V} \leq 1, \quad i = \overline{1, m},$$

Введемо нові позначення

$$\begin{cases} \dfrac{p_i}{V} = x_i\ , \quad i = \overline{1, m}\ , \\ \dfrac{q_j}{V} = y_j\ , \quad j = \overline{1, n}\ , \end{cases}$$

при підстановці яких в (4.16)-(4.19) отримуємо 2 системи:

а) $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad j = \overline{1, n}, & (4.20) \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \dfrac{1}{V}, \quad x_i \ge 0\ , \quad i = \overline{1, m}. & (4.21) \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad i = \overline{1, m}, & (4.22) \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \dfrac{1}{V}, \quad y_j \ge 0\ , \quad j = \overline{1, n}. & (4.23) \end{cases}$$

У випадку а) перший гравець прагне знайти такі значення $x_i$ та, отже, $p_i$, щоб ціна гри $V$ була максимальною. Тому рішення першої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень $p_i$ $(i = \overline{1, m})$, при яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min\ .$$

Аналогічно, у випадку б) другий гравець прагне знайти такі значення $y_j$ та, отже, $q_j$, щоб ціна гри $V$ була найменшою. Тому рішення другої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень $q_j$ $(j = \overline{1, n})$, при яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max\ .$$

Отже, фактично в (4.21) і (4.23) ми отримуємо цільові функції відповідно для систем (4.20) і (4.22):

а) $$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \to \min\ , \tag{4.24}$$

б) $$f(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{V} \to \max\ . \tag{4.25}$$

Таким чином, ми отримали двоїсті одна до одної задачі лінійного програмування:

а) $$f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{V} \to \min\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{4.26}$$

$$x_i \ge 0$$

б) $f(y) = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{V} \to \max$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.27}$$

$$y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Розв'язавши пару взаємодвоїстих симетричних задач (4.26) та (4.27), знайдемо

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i^*} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j^*}; \quad p_i = V \cdot x_i^* \ \left(i = \overline{1, m}\right), \quad q_j = V \cdot y_j^* \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

за допомогою яких визначаємо рішення гри

$$\left(p^*, q^*, V\right) = \left(\left(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_m\right), \left(q_1, \ldots, q_j, \ldots, q_n\right), V\right).$$

### 4.4.3 Чисельний метод розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях

#### 4.4.3.1 Сутність чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

Спосіб відшукання наближеного рішення прямокутних ігор був сформульований в роботі Г.В. Брауна, а збіжність процесу була доведена Джулією Робінсон в 1951 році.

Цей метод, званий ще ***ітеративним (методом ітерацій)***, є одним з найпростіших чисельних методів розв'язання ігор та спирається на традиційний статистичний принцип: засновувати майбутні рішення на відповідній передісторії.

Полягає він в послідовній процедурі «зближення» верхньої і нижньої ціни гри із заданою точністю.

#### 4.4.3.2 Основна ідея та етапи реалізації чисельного методу розв'язання матричних ігор у змішаних стратегіях

***Ідея методу полягає в наступному***.

Розігрується «уявний експеримент», у якому сторони *A* і *B* по черзі застосовують один проти одного свої стратегії

$$A: \ A_1, A_2, \ldots, A_m \quad \Rightarrow \quad A_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right),$$
$$B: \ B_1, B_2, \ldots, B_n \quad \Rightarrow \quad B_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right),$$

прагнучи виграти побільше (для гравця *A*) і програти поменше (для гравця *B*).

Експеримент складається з ряду «партій» гри.

Починається він з того, що один з гравців (скажімо, *A*) вибирає довільно одну зі своїх стратегій $A_i$. Противник (*B*) відповідає йому тією зі своїх стратегій $B_j$, яка є найгіршою для *A*, тобто звертає його виграш при стратегії $A_i$ в мінімум.

Далі знову черга гравця *A* – він відповідає *B* тією своєю стратегією $A_k$, яка дає йому максимальний виграш при стратегії $B_j$ противника.

Далі – знову черга противника. Він відповідає гравцю *A* тією своєю стратегією, яка є найгіршою не для останньої, застосованої гравцем *A*, стратегії $A_k$, а для ***змішаної стратегії***, в якій досі застосовані стратегії $A_i$, $A_k$ зустрічаються з рівними ймовірностями.

І так далі: на кожному кроці ітераційного процесу кожен гравець відповідає на черговий хід іншого *тією своєю стратегією, яка є оптимальною для нього щодо змішаної стратегії іншого, в яку всі застосовані до сих пір стратегії входять пропорційно частотам їх застосування*.

Замість того, щоб обчислювати кожен раз середній виграш, можна користуватися просто «накопиченим» за попередні ходи виграшем та вибирати ту свою стратегію, при якій цей накопичений виграш є максимальним (мінімальним).

Доведено, що такий метод сходиться: при збільшенні числа «партій» середній виграш на одну партію буде наближатися до ціни гри, а частоти застосування стратегій – до їх ймовірностей в оптимальних змішаних стратегіях гравців, тобто

$$p_i = \frac{N(i)}{K}, \quad q_j = \frac{N(j)}{K}.$$

де $N(i), N(j)$ – число номерів $i$ або $j$, які співпали та були обрані в даній партії стратегій гравців *A* і *B* відповідно; $K$ – загальне число ходів (партій).

Дуже важливою перевагою ітераційного методу розв'язання ігор є те, що його трудомісткість порівняно повільно зростає зі збільшенням розмірності гри $m \times n$, тоді як трудомісткість методів лінійного програмування зростає при збільшенні розмірності задачі набагато швидше.

## Питання для самоконтролю

1. Що таке конфліктна ситуація? Наведіть основні риси конфліктної ситуації.
2. Що називається грою?
3. Яка стратегія називається оптимальною стратегією?
4. Надайте визначення гри двох осіб з нульовою сумою виграшу.
5. Яка величина називається верхньою ціною гри? Що називають нижньою ціною гри?
6. Що означає поняття сідлова точка, що це за такий елемент?
7. Що означає знайти розв'язок гри в чистих стратегіях?
8. Які стратегії називаються змішаними?
9. Що являє собою розв'язок гри у змішаних стратегіях?

10. Сформулюйте теорему про критерій оптимальності змішаних стратегій.
11. Сформулюйте умови домінування чистих стратегій гравця *A*.
12. Надайте визначення не строго детермінованої гри з матрицею (2×2). Умови строгої не детермінованості гри.
13. Яким чином знаходиться розв'язок гри у змішаних стратегіях для не строго детермінованої гри з матрицею (2×2)?
14. Розкрийте основні етапи реалізації графоаналітичного методу.
15. Наведіть основні етапи реалізації методу Брауна-Робінсон.

## Лекція 5. Прийняття колективних рішень із застосуванням методів та правил теорії голосування

**Мета лекції:** опанувати основні правила теорії голосування та їх застосування до розв'язання практичних задач прийняття колективних рішень.

### План лекції

5.1 Правила голосування.
5.2 Парадокси голосування і причини їх виникнення.

***Перелік ключових термінів і понять з теми:*** *правило відносної більшості; правило відносної більшості з вибуванням; голосування з послідовним винятком; правило Борда; процедура Кондорсе; правило Копленда; правило Сімпсона; парадокси голосування і причини їх виникнення.*

У повсякденному житті ми постійно стикаємося з ситуаціями, коли рішення має прийматися не однією людиною, а групою. Парламент обирає законопроекти для голосування, рада директорів вибирає стратегію розвитку компанії, родина вирішує, куди поїхати у відпустку, а група друзів обирає фільм для перегляду. У всіх цих випадках виникає фундаментальне питання: як об'єднати різні, часто суперечливі, думки окремих людей в одне спільне рішення? [12, 20, 21]

Здавалося б, відповідь проста: провести голосування. Саме більшість колективних рішень і приймається на основі голосування. Голосування зазвичай відбувається на рівні великомасштабних національних, регіональних виборів, виборів на місцевому рівні, на засіданнях Вчених рад університету і факультетів, на засіданнях кафедр, при прийнятті рішень Державною екзаменаційною комісією, у студентських колективах, у сім'ї (яку телевізійну програму дивитись) і т. п. та можуть відігравати важливу роль для суспільства в ухваленні рішень. Однак практика показує, що різні способи голосування можуть призводити до різних результатів навіть за однакових переваг учасників. Більше того, деякі методи голосування можуть приводити до парадоксальних ситуацій, коли результат суперечить здоровому глузду.

Хоча практика голосування нараховує тисячі років, фактичне його вивчення почалося близько двохсот років тому у працях французів Борда (Жан Шарль де Борд (1733–1799), фізик, математик, політик, член Французької Академії наук) і Кондорсе (Жан Антуан Ніколя де Кондорсе, (1745–1794), філософ, математик член Французької АН. Отже, один із найважливіших способів, за допомогою якого населення може вплинути на прийняття рішень з боку уряду, є голосування. Голосування є формальним виразом волі на користь того чи іншого кандидата на посаду або пропонованого рішення з певного питання.

Розглянемо основні правила теорії голосування та їх застосування до розв'язання практичних задач [12].

### 5.1 Правила голосування

Розглянемо типову ситуацію колективного вибору.

Нехай $N$={1, 2,…, $n$} – множина виборців (учасників, агентів), які приймають рішення, $A$={$a$, $b$, $c$} – множина «кандидатів» (альтернатив, варіантів), серед яких потрібно обрати.

Кожен виборець задає «індивідуальну перевагу» на множині кандидатів у вигляді строгого ранжування, тобто задає лінійний порядок $L(A)$ (повне, транзитивне, асиметричне бінарне відношення).

Сукупність (система) індивідуальних переваг усіх виборців називається ***профілем переваг***.

***Правило голосування*** (або ***процедура колективного вибору***) – функція, яка кожному профілю переваг ставить у відповідність:

- або одну альтернативу-переможця;
- або множину переможців (у випадку нічиєї);
- або колективне ранжування всіх альтернатив.

Розглянемо найбільш уживані на практиці правила голосування.

#### 5.1.1 Правило відносної більшості

*Кожен виборець віддає свій голос найбільш кращому для себе кандидату - залишає одне ім'я в бюлетені, інші викреслює. Обирається кандидат, який отримав найбільшу кількість голосів.*

**Приклад 5.1.** Чотири кандидати $a$, $b$, $c$, $d$ вибираються в чотирьох виборчих групах, де кількість виборців 3, 5, 7 і 6 відповідно. Результати голосування занесемо в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 –Результати голосування

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 7 | 6 |
| *a* | *a* | *b* | *c* |
| *d* | *c* | *d* | *d* |
| *c* | *d* | *c* | *b* |
| *b* | *b* | *a* | *a* |

За правилом відносної більшості кандидат $a$ набирає 8 голосів, кандидат $b$ набирає 7 голосів, кандидат $c$ набирає 6 голосів, кандидат $d$ набирає 0 голосів. Отже, переможцем є кандидат $a$. Але наскільки хороший кандидат $a$? 13 виборців проти 8 вважають, що $b \succ a$, також 13 виборців проти 8 вважають, що $c \succ a$ та ще 13 виборців проти 8 вважають, що $d \succ a$. Тобто, для більшості виборців кандидат $a$ є найгіршим з усіх кандидатів.

**Приклад 5.2.** У п'яти виборчих групах, з кількістю виборців відповідно 9, 7, 6, 2 і 4 вибирають одного з чотирьох кандидатів *a, b, c, d*. Результати голосування представлені в табл. 5.2.

Таблиця 5.2 –Результати голосування

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 6 | 2 | 4 |
| *a* | *b* | *c* | *c* | *d* |
| *d* | *d* | *b* | *a* | *c* |
| *b* | *c* | *d* | *b* | *b* |
| *c* | *a* | *a* | *d* | *a* |

За правилом відносної більшості кандидат *a* набирає 9 голосів, кандидат *b* набирає 7 голосів, кандидат *c* набирає 8 голосів, кандидат *d* набирає 4 голоси. Отже, переможцем також є кандидат *a*.

Проаналізуємо і тут ситуацію з переможцем.

17 виборців з 28 вважають, щои $b \succ a$, 19 виборців вважають, що $c \succ a$ і ще 17 виборців вважають, що $d \succ a$. Крім того, 17 виборців поставили кандидата а на останнє місце, тобто абсолютна більшість вважає, що цей кандидат - найгірший.

Що ми бачимо? Формально правило відносної більшості враховує волю більшості. Однак, це правило може суперечити думці більшості, тобто приводити до обрання кандидата, який при парному порівнянні програє будь-якому іншому кандидату.

### 5.1.2 Правило відносної більшості з вибуванням

*У першому турі кожен виборець віддає свій голос найбільш кращого для себе кандидата (залишає одне ім'я в бюлетені, інших викреслює). Якщо кандидат набирає суворе більшість голосів, то він обирається. В іншому випадку в другому турі проводиться голосування за правилом більшості з двома кандидатами, які набрали найбільшу кількість голосів у першому турі.*

Розглянемо результати виборів при даній обробці думки виборців, наведених в прикладі 1. У першому турі кандидат *a* набирає 8 голосів, *b* набирає 7 голосів, *c* набирає 6 голосів, *d* набирає 0 голосів. Максимальна кількість голосів у кандидата *a*, але ця кількість не є строгою більшістю (8 <13). Отже, проводиться другий тур. У другому турі порівнюються кандидати *a* і *b*. 13 виборців проти 8 вважають, що $b \succ a$, отже, переможцем є кандидат *b*.

Здавалося б, все правильно і повністю відповідає процедурі голосування. Однак як справи з кандидатами *c* і *d*, які вибули в першому турі? 14 проти 7 вважають, що $c \succ b$, і рівно стільки ж виборців вважають, що $d \succ a$. Виходить, щоб кандидати, які вибули в першому турі, були в два рази краще переможця!

Розглянемо тепер результати виборів в прикладі 5.2 по процедурі ***відносної більшості з вибуванням***. У першому турі кандидат а набирає 9 голосів, $b$ набирає 7 голосів, $c$ набирає 8 голосів, $d$ набирає 4 голоси. Максимальна кількість голосів у кандидата $a$, але ця кількість не є строгою більшістю (9<15). Отже, проводиться другий тур. У другому турі порівнюються кандидати $a$ і $c$. 19 виборців проти 9 вважають, що $c \succ a$, отже, переможцем є кандидат $c$. Тут теж все законно. Але в першому турі вибули кандидати $b$ і d, при цьому 16 виборців з 28 вважають, що $b \succ c$, і 20 виборців з 29 вважають, що $d \succ c$. Виходить, що і цей переможець далеко не кращий.

Видно, що партії, які не користуються підтримкою більшості виборців, але висунули єдиного кандидата, можуть здобути перемогу на виборах за правилом відносної більшості, якщо партії, які мають підтримку більшості виборців, не змогли домовитися і висунути єдиного кандидата. У той же час правило відносної більшості з вибуванням може зіграти об'єднуючу роль і привести до перемоги представника близьких за поглядами партій, які не змогли домовиться про висунення єдиного кандидата (в останньому прикладі кандидата $c$).

### 5.1.3 Голосування з послідовним винятком

*Спочатку встановлюється порядок порівняння кандидатів, потім за правилом більшості кандидати послідовно порівнюються попарно. Якщо кандидатів m, то маємо m-1 турів голосування. У першому турі порівнюються два перших кандидата з ланцюжка порівняння, переможець першого туру в другому турі порівнюється з третім кандидатом в ланцюжку і так далі. Переможець (m-1) -го туру є переможцем за цією процедурою. Це правило має ще одну назву - «олімпійська система».*

Визначимо переможця голосування по даній схемі для прикладу 5.2. Нехай порядок порівняння буде наступний: $a \to b \to c \to d$. У першому турі 17 з 28 виборців вважають $b \succ a$ і, отже, кандидат $b$ виходить у другий тур. У другому турі 16 з 28 виборців вважають, що $b \succ c$ , значить, $b$ виходить в третій тур. В останньому турі 15 з 28 виборців вважають, що $b \succ d$ і, отже, обраним за цією системою голосування виявляється кандидат $b$.

### 5.1.4 Правила голосування Кондорсе і Борда

Як показують приклади, при одній і той ж думці виборців про кандидатів за допомогою різних систем голосування можуть бути обрані різні кандидати.

***Правило Борда***

*Кожен виборець повідомляє свої переваги, впорядковуючи m кандидатів від кращого до гіршого (байдужність забороняється). Кандидат не одержує балів за останнє місце, отримує один бал від кожного кандидата за передостаннє і так далі.*

Дане правило використовується при виборах національних представників в парламент Словенії, а також в при голосуванні на Євробаченні.

**Процедура Кондорсе**

*Для заданої таблиці результатів голосування (таблиці переваг) переможцем по Кондорсе називається кандидат, який перемагає будь-якого іншого кандидата при парному порівнянні за правилом більшості. Якщо парні порівняння утворюють цикл, то переможця по Кондорсе немає, і кажуть, що має місце так званий парадокс Кондорсе.*

**Приклад 5.2 (продовження).** Визначимо переможця за правилом Борда для результатів переваг, що містяться в прикладі 5.2. У виборах бере участь $m$=4 кандидати. Кандидат не одержує балів за 4-е місце, за 3-е місце отримує 1 бал, за 2-е місце – 2 бали, за 1-е місце – 3 бали.

Отже кандидат $a$ отримує

$$\Sigma a = 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 31 \text{ бал.}$$

Кандидат $b$ отримує

$$\Sigma b = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 15 \cdot 1 = 48 \text{ балів.}$$

Кандидат $c$ отримує

$$\Sigma c = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 39 \text{ балів.}$$

Кандидат $d$ отримує

$$\Sigma d = 4 \cdot 3 + 16 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 50 \text{ балів.}$$

Отже, переможцем за правилом Борда є кандидат $d$. Переможцем по Кондорсе є кандидат $b$, який перемагає кандидата $a$ з рахунком 17:11, кандидата $c$ з рахунком 16:12, кандидата $d$ з рахунком 15:13.

### 5.1.5 Узагальнення процедур Кондорсе і Борда

Природним узагальненням процедури Борда є голосування з підрахунком очок.

При $m$ кандидатах фіксуємо неубутню послідовність чисел $s_0 \le s_1 \le \cdots \le s_{(m-1)}$, причому $s_0 < s_{(m-1)}$. Виборці впорядковують кандидатів, причому $s_0$ балів дається за останнє місце, $s_1$ – за передостаннє і т. д. Обирається кандидат з максимальною сумою балів.

Дана процедура досить широко використовується на практиці.

Покажемо, що результати голосування істотно залежать від вибору чисел $s_i$.

Так, за результатами переваг з прикладу 2 по процедурі Борда (тобто $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=2$, $s_3=3$) перемагає кандидат $d$; при $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=2$, $s_3=4$ перемагає кандидат $b$; при $s_0 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 4$ перемагає кандидат $a$.

Якщо $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} = 0$, $s_{m-1} = 1$, то дана процедура збігається з процедурою голосування за методом відносної більшості.

Наведемо два найбільш природні узагальнення процедури Кондорсе.

**Правило Копленда**

*Порівняємо кандидата а з будь-яким іншим кандидатом х. Нарахуємо йому К* $(a \succ x)$ *= +1, якщо для більшості* $a \succ x$, *К* $(a \succ x)$ *= -1, якщо для більшості* $x \succ a$ *і К* $(a \succ x)$ *= 0 при рівності в оцінці кандидатів. Оцінкою Копленда для кандідата а назвемо суму К (а) =* $\sum_x [K\,(a \succ x)]$. *Обирається кандидат з найвищою оцінкою Копленда.*

**Правило Сімпсона**

*Розглянемо кандидата a і будь-якого іншого кандидата x. Позначимо через S ($a \succ x$) число виборців, для яких $a \succ x$. Оцінкою Сімпсона для кандидата a назвемо мінімальне з числі S ($a \succ x$): S (a) = Σx[S ($a \succ x$)]. Обирається кандидат з найвищою оцінкою Сімпсона.*

Переможець за Кондорсе отримує найвищу оцінку Копленда $m-1$, а також оцінку Сімпсона вище $n$ / 2.

## 5.2 Парадокси голосування і причини їх виникнення

Аналіз розглянутих прикладів вже показав, що абсолютно демократичним способом можна вибрати такого переможця, який на думку абсолютної більшості виборців є найгіршим. Чому виникає такий парадокс? Розглянемо деякі з цих властивостей докладніше.

### 5.2.1 Монотонність

Припустимо, що кандидат a вибирається (серед переможців) при даному профілі голосування і профіль зміниться тільки так, що положення кандидата a поліпшується, а відносне порівняння пари будь-яких інших кандидатів для виборця залишається незмінним. Тоді кандидат a для нового профілю і раніше повинен бути обраний (знову серед переможців).

Вимогу монотонності не задовольняє, наприклад, правило відносної більшості з вибуванням.

**Приклад 5.3**. У чотирьох виборчих групах з кількістю виборців відповідно 6, 5, 4 і 2 визначається переможець з трьох кандидатів *a, b, c*. Думки виборців представлені в профілі *A* (табл. 5.3).

Таблиця 5.3 – Результати голосування

| Профіль А | | | |
|---|---|---|---|
| I | II | III | IV |
| 6 | 5 | 4 | 2 |
| *a* | *c* | *b* | *b* |
| *b* | *a* | *c* | *a* |
| *c* | *b* | *a* | *c* |

За правилом відносної більшості в другий тур проходять *a* і *b* і перемагає *a* (11 голосів проти 6). Припустимо, що профіль *A* – це дані соціологічного опитування. І було вирішено провести активну агітацію в найменшій з виборчих груп. Отримали новий профіль голосування (табл. 5.4).

Таблиця 5.4 – Результати голосування

| Профіль Б | | | |
|---|---|---|---|
| I | II | III | IV |
| 6 | 5 | 4 | 2 |
| *a* | *c* | *b* | *a* |
| *b* | *a* | *c* | *b* |
| *c* | *b* | *a* | *c* |

У цьому профілі кандидат *a* поліпшив свої позиції в четвертій виборчої групі – вийшов на перше місце. Визначимо переможця за профілем *Б*. Кандидат *a* тепер впевнено виграє в 1-му турі і програє у 2-му турі кандидату *c*, тобто поліпшення позиції кандидата *a* призвело до його поразки. Як же так? У профілі *Б* відбулося тільки поліпшення становища кандидата! Виникає питання: на чиї гроші проводили агітацію в четвертій виборчої групі?

Отже, за правилом відносної більшості з вибуванням може бути вигідно спеціально програти вибори на деякій ділянці, щоб вивести у другий тур суперника, у якого можна виграти заключний тур виборів. В історії відомі такі випадки.

### 5.2.2 Анонімність

Імена виборців не мають значення: якщо два виборця поміняються голосами, то результати виборів не зміняться.

Ця умова вимагає, щоб думки всіх виборців були рівноцінними для процедури голосування. Така вимога реалізується принципом рівноправності виборців. Однак, існують процедури голосування, свідомо надають думку одного або частини виборців більшу вагу (наприклад, голова правління або члени правління мають два голоси) або, наприклад, впорядкування суддівських голосів, яке активно використовується спортивними відділами газет для визначення місць, зайнятих спортивними командами та передачі інформації коментаторами по телефону. Може виявитися, що зовні рівноправна процедура насправді такою не є.

### 5.2.3 Нейтральність

Імена кандидатів не мають значення. Якщо ми поміняємо місцями кандидатів а і *b* у перевазі кожного виборця, то результат голосування зміниться відповідно (якщо раніш вибирався *a*, то тепер буде вибиратися *b* і навпаки; якщо вибирався деякий кандидат *x*, відмінний від *a* і *b*, то він же і буде обраний .

Це властивість також реалізується принципом рівноправності кандидатів. Але існують процедури, що свідомо порушують цю вимогу. Наприклад, на голосування ставиться поправка до деякого існуючого стану (законопроекту, Конституції). При цьому часто потрібно для внесення поправки отримати більше, наприклад, 2/3 голосів виборців, тобто поправка і існуючий стан ставиться в нерівноправне становище. Іноді нерівноправність виникає не явно. Правило Копленда і Сімпсона анонімні і нейтральні, якщо ми розглядаємо їх як відображення, що ставлять у відповідність кожному профілю переваг підмножину переможців. Правило Борда також анонімно і нейтрально. Це ж справедливо для правила голосування з підрахунком очок, якщо все бали є різними. Якщо ввести деяке правило при рівності балів, що виділяє єдиного переможця, то або анонімність, або нейтральність порушаться.

**Приклад 5.4.** Припустимо, що на деякому засіданні за правилом голосування з послідовним винятком проводиться відбір альтернативного законопроекту *a, b, c, d* (технічного проекту, нового зразка для виробництва і т. ін.). Думки учасників засідання наведені в табл. 5.5.

Таблиця 5.5 – Результати голосування

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 |
| *d* | *a* | *d* | *b* |
| *b* | *b* | *c* | *c* |
| *a* | *c* | *a* | *d* |

Голова засідання ставить на голосування проекти в послідовності $a \to b \to c \to d$. При першому голосуванні до другого туру виходить *a*, при другому голосуванні $a \succ c$ і на третій тур виходить знову *a*. На заключному турі $d \succ a$ і, отже, перемагає *d*. Легко перевірити, що при послідовному порівнянні $a \to b \to d \to c$ перемагає *c*, при $b \to d \to a \to c$ перемагає *a* і при $a \to d \to b \to c$ перемагає *a*. Таким чином, використовуючи те, що голосування з послідовним винятком перестає бути нейтральним, голова засідання може в даному випадку за рахунок вибору відповідної послідовності порівняння домогтися будь-якого результату голосування.

### 5.2.4 Оптимальність за Парето

Якщо кандидат *a* для всіх краще кандидата *b*, то кандидат *b* не може бути переможцем.

**Приклад 5.5.** Розглянемо наступну табл. 5.6.

Таблиця 5.6 – Результати голосування

| II | I | III |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| *a* | *b* | *c* |
| *d* | *a* | *b* |
| *c* | *d* | *a* |
| *b* | *c* | *d* |

За правилом голосування з послідовним винятком при використанні послідовності $a \to b \to c \to d$ маємо $a \succ b$, далі другий тур – $c \succ b$, в третьому турі $d \succ c$ . Отже, перемагає *d*. У той же час кандидат *a* для всіх виборців краще кандидата *d*.

З прикладу 5.5 видно, що правило голосування з послідовним вибуванням (олімпійська система) не є оптимальним за Парето. Правило Копленда оптимальні по Парето, правило Борда також оптимально за Парето. Те ж саме справедливо для правила голосування з підрахунком очок, якщо: $s_k < s_{k+1}$.

**Приклад 5.6.** Чотири кандидати *a, b, c, d* борються за звання переможця. Виборці згруповані в 4 групи мають наступні переваги, подані у табл. 5.7.

Таблиця 5.7 – Результати голосування

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 5 | 4 |
| *a* | *a* | *d* | *b* |
| *d* | *d* | *b* | *c* |
| *c* | *b* | *c* | *a* |
| *b* | *c* | *a* | *d* |

За попередніми даними, переможець за Сімпсоном – кандидат *a*. Переможця по Кондорсе немає.

Чотири студента, обговорюючи виборчу кампанію, прийшли до спільної думки з приводу кандидатів - $c \succ a \succ b \succ d$-і вирішили взяти участь у виборах. З їх приходом профіль голосування змінюється (табл. 5.8).

Таблиця 5.8 – Результати голосування

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 5 | 4 | 4 |
| *a* | *a* | *d* | *b* | *c* |
| *d* | *d* | *b* | *c* | *a* |
| *c* | *b* | *c* | *a* | *b* |
| *b* | *c* | *a* | *d* | *d* |

Тепер переможець за Сімпсоном - *b*. Ті, що прийшли виборці вважали, що $a > b$, тобто вони підтримали кандидата а, але в результаті такої підтримки кандидат а програв вибори. («Парадокс неучасті» – краще б ці студенти залишилися допивати пиво і не брали участь у виборах).

Таким чином, можна сформулювати ще одну вимогу до процедур голосування в вигляді аксіоми.

### 5.2.5 Аксіома участі

*Нехай кандидат а є переможцем для виборців з множини N. Розглянемо деякого виборця $x \in / N$ і визначимо переможця при об'єднані множин виборців $N \cup x$. Тоді повинен бути обраний або кандидат а, або кандидат, який для виборця x строго краще, ніж а.*

На жаль не можна вказати кращу для всіх випадків процедуру голосування. З наведених прикладів видно, що перш, ніж якесь із правил голосування приймати як процедуру, що об'єднує думки окремих виборців в колективну думку, потрібно глибоко проаналізувати цю процедуру, оцінити всі «за» і «проти», і тільки потім законодавчо затверджувати такий вибір. Вибір процедури голосування для кожної конкретної ситуації носить принциповий характер.

$$a = 1+1+1 = 3;$$
$$b = 1-1-1 = -1;$$
$$c = 1+1-1 = 1;$$
$$d = -1-1-1 = -3.$$

Отже, переможцем є кандидат: $a$.

## Питання для самоконтролю

1. Що є предметом вивчення у теорії голосування?
2. Які конфлікти вирішуються голосуванням?
3. Що таке процедура голосування?
4. Що таке феномен голосування?
5. Сформулюйте правило відносної більшості.
6. Сформулюйте правило відносної більшості із вибуттям.
7. У чому основна відмінність процедури Борда від процедур, заснованих на правилі більшості?
8. Яка ідея закладена у процедурі Кондорсе?
9. Чи є процедури Борда та Кондорсе різними по суті?
10. Яка проблема може виникнути під час застосування процедури Кондорсе?
11. Назвіть узагальнення процедури Борда.
12. Сформулюйте правило Копленда.
13. Сформулюйте правило Сімпсона.
14. Охарактеризуйте парадокси голосування і наведіть причини їх виникнення
15. Сформулюйте аксіому участі.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Бескровний О. І., Павленко В. І., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень. Київ : Університет «Україна», 2019. 420 с.
2. Бутко М. П. та ін. Теорія прийняття рішень: підручник. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 360 с.
3. Василевич Д. Ф., Юртин І. І. Прийняття рішень за умов конфлікту та невизначеності. Київ : Київський ун-т ім. Б. Грінченка, 2013. 128 с.
4. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник. 3-тє вид., стер. Львів : «Магнолія – 2006», 2024. 350 с.
5. Катренко А. В., Пасічник В. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.
6. Нестеренко О. В., Савенков О. І., Фаловський О. О. Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень : навч. посіб. Київ : Національна академія управління, 2016. 188 с.
7. Нікіфорова Л. О., Шиян А. А. Управління процесами прийняття інноваційних рішень в сфері high tehnologies : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2018. 85 с.
8. Петруня Ю. Є. та ін. Прийняття управлінських рішень : навч. посіб. Дніпропетровськ : Університет митної справи та фінансів, 2015. 209 с.
9. Саричева Л. В., Сергєєва К. Л. Комп'ютерна підтримка прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НГУ, 2016. 98 с.
10. Тоценко В. Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект. Київ : Наук. думка, 2012. 381 с.
11. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 299 с.
12. Ушакова І. О. Теорія прийняття рішень : практикум. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. 234 с.
13. Бедрик Б. О., Леонтьєва В. В., Кондрат’єва Н. О. Розв’язання слабо структурованих проблем в сфері цивільної безпеки засобами теорії статистичних рішень. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 151-153.
14. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Голуб О. О., Усатенко Г. Г., Потемкин А. П., Булин І. С. Проблема вибору оптимальних рішень в умовах неповної інформації в сфері цивільної безпеки та її розв’язання із застосуванням методології статистичних рішень. Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали VI Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 28-30 травня 2025 р.) / [ред. колегія: С. В. Кюрчев, В. О. Радкевич, В. М. Кюрчев та ін.]. – Запоріжжя : ТДАТУ, 2025. С. 29-33.

15. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Комплексна методика аналізу та розв'язання неструктурованих багатооб'єктних проблем: теоретичні засади та практична апробація. *Методи та прилади контролю якості*. 2025. № 1(54). С. 132–155.
16. Пазинич К. А., Кондрат'єва Н. О., Леонтьєва В. В. Алгоритмізація розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях методом зведення їх до задач лінійного програмування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 167-167.
17. Сіренко Ю. В., Чепіжний А. В., Кучмистенко О. В., Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Вольвач Т. С., Савойський О. Ю. Підвищення показників ефективності та якості моніторингу електропостачання молокозаводу. *Механіка та автоматика агропромислового виробництва* : загальнодержавний збірник / ІМА АПВ НААН; за заг. ред. В. В. Адамчука. Глеваха, 2025. Вип. 6 (120). С. 190-202.
18. Федотов Є. Є., Кондрат'єва Н. О., Леонтьєва В. В. Автоматизація розв'язання задач колективного вибору із використанням методів та правил теорії голосування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 175-176.
19. Kondratieva N. O., Leontieva V. V., Pazinich K. A., Zhelobetskiy A. P., Usatenko G. G., Gorbachov O. A. Automation of the process of studying conflict situations and solving game theory problems with linear programming methods. *International scientific journal SWorldJournal*. 2025. Т. 31. № 2. С. 26-37.
20. Topalov A., Makhnov A., Humeniuk T., Lukashova V., Leontieva V., Kondratieva N. Specialized Computer Control System for Hybrid Power Supply of Small Electric-Powered Vessel. in Proc. *15th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, Sibenik, Croatia. 2025, Vol.1. P. 605-608.
21. Topalov A., Kondratenko Y., Leontieva V., Kondratieva N. Simulation Modeling of the Hall Electromagnetic Transducer for Measuring the Thickness of a Ferromagnetic Film. Eds : L. David, Y. Kondratenko, V. Vychuzhanin, H. Yin, N. Rudnichenko. *Information Control Systems and Technologies* : 13th International Scientific and Practical Conference (ICST 2025). CEUR Workshop Proceedings, 24–26 Sept. 2025. Odesa. Vol. 4048. P. 385–396.
22. Dennis A., Wixom B. H., Roth R. M. Systems analysis and design. New York : John Wiley & Sons. 2019. 594 p.
23. McNamara J. M., Leimar O. Game Theory in Biology. Oxford : Oxford University Press, 2020. 352 p.
24. Samuel G. O., Ekoko P. O. Formulation of game model as a linear program ming problem using various models. *African Journal of Mathematics and Statistics Studies*. 2024. Issue 2, Vol. 7. P. 79–95.

## ІНФОРМАЦІЙНІ РЕСУРСИ


1. Електронні ресурси з математики. *Бібліотека TWIRPX*. URL : https://www.twirpx.com/files/#files_mathematics.
2. Наукові ресурси. *Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського*. URL : http://www.nbuv.gov.ua/node/1539.
3. Підручники для вузів онлайн. URL : https://pidru4niki.com/.
4. Links for Game Theory. *The Economics Network*. URL : https://www.economicsnetwork.ac.uk/subjects/gametheory.
5. Mathematics. *UMass Boston Open Courseware*. URL : http://ocw.umb.edu/mathematics.html.
6. Maths Resources Index. *The Economics Network*. URL : https://www.economicsnetwork.ac.uk/subjects/mathsforeconomists.
7. Science, Maths & Technology. *Learning Space. The Open University*. URL : https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology.


## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА


1. Topalov A., Makhnov A., Humeniuk T., Lukashova V., Leontieva V., Kondratieva N. Specialized Computer Control System for Hybrid Power Supply of Small Electric-Powered Vessel. in Proc. *15th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, Sibenik, Croatia. 2025, Vol.1. P. 605-608.
2. Topalov A., Kondratenko Y., Leontieva V., Kondratieva N. Simulation Modeling of the Hall Electromagnetic Transducer for Measuring the Thickness of a Ferromagnetic Film. Eds : L. David, Y. Kondratenko, V. Vychuzhanin, H. Yin, N. Rudnichenko. *Information Control Systems and Technologies* : 13th International Scientific and Practical Conference (ICST 2025). CEUR Workshop Proceedings, 24–26 Sept. 2025. Odesa. Vol. 4048. P. 385–396.
3. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Комплексна методика аналізу та розв’язання неструктурованих багатооб’єктних проблем: теоретичні засади та практична апробація. *Методи та прилади контролю якості*. 2025. № 1(54). С. 132–155.
4. Сіренко Ю. В., Чепіжний А. В., Кучмистенко О. В., Леонтьєва В. В., Кондрат’єва Н. О., Вольвач Т. С., Савойський О. Ю. Підвищення показників ефективності та якості моніторингу електропостачання молокозаводу. *Механіка та автоматика агропромислового виробництва* : загальнодержавний збірник / ІМА АПВ НААН; за заг. ред. В. В. Адамчука. Глеваха, 2025. Вип. 6 (120). С. 190-202.
5. Рудаков Д. В., Сдвижкова О. О. Математичне моделювання природничих систем: навч. посіб.; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». Дніпро: НТУ «ДП», 2022. 178 с.
6. Frahm G. Rational Choice and Strategic Conflict: The Subjectivistic Ap proach to Game and Decision Theory. Berlin: De Gruyter, 2019. 340 p.

7. Бескровний О. І., Павленко В. І., Тимошенко А. Г. Дослідження операцій і методи прийняття технічних рішень. Київ : Університет «Україна», 2019. 420 с.
8. Бутко М. П. та ін. Теорія прийняття рішень: підручник. Київ : Центр навчальної літератури, 2018. 360 с.
9. Катренко А. В., Пасічник В. В. Прийняття рішень: теорія та практика : підручник Львів : Новий Світ – 2000, 2020. 447 с.
10. Ус С. А., Коряшкіна Л. С. Моделі й методи прийняття рішень : навч. посіб. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. 299 с.
11. Василевич Д. Ф., Юртин І. І. Прийняття рішень за умов конфлікту та невизначеності. Київ : Київський ун-т ім. Б. Грінченка, 2013. 128 с.
12. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень : підручник. Київ : Освіта України, 2018. 246 с.
13. Бедрик Б. О., Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О. Розв'язання слабо структурованих проблем в сфері цивільної безпеки засобами теорії статистичних рішень. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 151-153.
14. Леонтьєва В. В., Кондрат'єва Н. О., Голуб О. О., Усатенко Г. Г., Потемкин А. П., Булин І. С. Проблема вибору оптимальних рішень в умовах неповної інформації в сфері цивільної безпеки та її розв'язання із застосуванням методології статистичних рішень. Розвиток сучасної науки та освіти: реалії, проблеми якості, інновації: матеріали VI Міжнародної наук.-практ. інтернет-конф. (м. Запоріжжя, 28-30 травня 2025 р.) / [ред. колегія: С. В. Кюрчев, В. О. Радкевич, В. М. Кюрчев та ін.]. – Запоріжжя : ТДАТУ, 2025. С. 29-33.
15. Петруня Ю. Є. та ін. Прийняття управлінських рішень : навч. посіб. Дніпропетровськ : Університет митної справи та фінансів, 2015. 209 с.
16. Kondratieva N. O., Leontieva V. V., Pazinich K. A., Zhelobetskiy A. P., Usatenko G. G., Gorbachov O. A. Automation of the process of studying conflict situations and solving game theory problems with linear programming methods. *International scientific journal SWorldJournal*. 2025. Т. 31. № 2. С. 26-37.
17. Пазинич К. А., Кондрат'єва Н. О., Леонтьєва В. В. Алгоритмізація розв'язання задач теорії ігор в змішаних стратегіях методом зведення їх до задач лінійного програмування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 167-167.
18. Itchhaporia D. (2022). Game Theory, Health Care, and Economics. Journal of the American College of Cardiology, issue 15, vol. 79, pp. 1542–1543.
19. Samuel G. O., Ekoko P. O. Formulation of game model as a linear program ming problem using various models. *African Journal of Mathematics and Statistics Studies*. 2024. Issue 2, Vol. 7. P. 79–95.

20. Шматько Н. М., Кармінська-Бєлоброва М. В., Пантелєєв М. С. Особливості ко лективного методу прийняття управлінських рішень в умовах ризику. Вісник Національного технічного університету «ХПІ» (економічні науки): зб. наук. пр. Харків : НТУ «ХПІ». 2022. № 1. С. 8–12.
21. Федотов Є. Є., Кондрат'єва Н. О., Леонтьєва В. В. Автоматизація розв'язання задач колективного вибору із використанням методів та правил теорії голосування. *Актуальні проблеми математики та інформатики* : збірка тез доповідей Шістнадцятої Всеукраїнської, двадцять третьої регіональної наукової конференції молодих дослідників (м. Запоріжжя, 26 квітня 2025 р.). Запоріжжя : Видавничий дім «Гельветика», 2025. С. 175-176.

Навчальне видання
(*українською мовою*)

Кондрат'єва Наталія Олександрівна
Леонтьєва Вікторія Володимирівна
Матвіїшина Надія Вікторівна

# ТЕОРІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Курс лекцій
для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра
спеціальності «Комп'ютерні науки»
освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки»

Рецензент *С.І. Гоменюк*
Відповідальний за випуск *С.М. Гребенюк*
Коректор *В.В. Леонтьєва*