МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ З ДИСЦИПЛІНИ «КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ, ФІНАНСАХ, МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ»

Модуль 2: «Економічний ризик та кількісні методи його оцінки»

ТЕМА: МЕДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ ПОРТФЕЛЮ АКТИВІВ КОМПАНІЇ

1. Портфель активів: основні поняття та визначення
2. Кореляція активів, як основа управління портфелем
3. Оптимізація портфелю з двох активів
4. Оптимізація портфелю з N активів. Модель Марковіца

1. Портфель активів: основні поняття та визначення

Суттєво знизити економічний ризик від володіння активами можна в тому випадку, якщо інвестувати кошти не в поодинокі проекти, а в їхню сукупність, утворюючи портфель активів.

Портфель проектів – це диверсифікація (розподіл) інвестиційних коштів на реалізацію різних проектів в найбільш доходному, або менш ризикованому (надійному) співвідношенні.

Структура портфелю активів – це співвідношення часток коштів, вкладених в реалізацію різних проектів.

Таким чином, портфель активів компанії – це не просто набір виробничих технологій певної сукупної вартості, а пропорція (структура), з якою ці технології входять в портфель.

Будь-яка операційна, інвестиційна чи фінансова діяльність, за своєю суттю, є ризикованими. Тому, ідея поєднання максимізації прибутковості портфеля активів з мінімізацією ризику, є головною метою його формування.

Проте, формування оптимального портфеля активів – це лише початковий етап з його управління. Вартість продукції, обсяги її випуску, курси валют чи акцій змінюються з часом. Тому, управління портфелем активів вимагає постійної корекції його структури.

Управління портфелем активів – це процес формування, аналізу й систематичного коригування структури портфеля, з метою забезпечення максимальної віддачі від використання активів, в умовах мінімального ризику.

Вказані цілі є суперечливими між собою, оскільки максимізація віддачі призводить до зростання ризику й навпаки. Тому, ми маємо задачу багатокритеріальної оптимізації, яка може вирішуватись двома шляхами:

– мінімізація ризику в умовах прийнятного (задовільного) рівня доходності;

– максимізація доходності в умовах прийнятного (допустимого) рівня ризику.

Під **ризиком портфелю активів** будемо розуміти міру настання обставин, за яких суб'єкт господарювання може зазнати небажаних втрат, або ступінь відхилення фактичної середньої доходності портфелю від очікуваної.

В основі управління портфелем активів покладений **принцип диверсифікації** – це розподіл інвестиційних коштів між різноманітними активами, видами діяльності, галузями, регіонами, часом.

Наприклад, якщо ви прагнете убезпечити вільні грошові кошти (гривню) від знецінення внаслідок інфляції, зазвичай, ви купуєте долари чи євро. Портфельний інвестор диверсифікує свої кошти в різні валюти одночасно: долари, євро, англійські фунти стерлінгів, швейцарські франки тощо.

Вибір стратегії диверсифікації інвестиційних коштів залежить від мети формування портфелю, табл. 1.

Таблиця 1 – Класифікація портфелю активів за метою

Тип портфелю	Мета	Основні активи	Рівень ризику
Портфель зростання	Максимальне збільшення вартості активів	Акції інноваційних компаній з високим потенціалом зростання	Високий
Збалансований	Регулярні грошові виплати, або баланс між доходом й стабільністю	Акції успішних компаній з помірним зростанням, облігації	Середній
Консервативний	Збереження капіталу	Державні облігації, банківські депозити у державних банках, готівка	Низький

Незалежно від типу сформованого портфелю (табл. 1), головною метою диверсифікації є зниження волатильності (коливань) портфелю без значної втрати його потенційної доходності.

2. Кореляція активів, як основа управління портфелем

Під час вивчення експертних методів прийняття рішень в умовах невизначеності й ризику, основною проблемою завжди був вибір пріоритету, що є важливішим: мінімізація ризику, або максимізація доходності. Тоді, вказане питання вирішувалось чисто суб'єктивно, в залежності від схильності до ризику особи, що приймає рішення та її функції переваги.

На противагу цьому, в основі управління портфелем активів покладено **загальне правило диверсифікації**: в портфель необхідно включати ті активи (проекти), які мають від’ємну кореляцію своїх життєвих циклів, що наближається до -1.

Тобто, для мінімізації ризику, не всі можливі проекти слід долучати до формування портфелю активів своєї компанії, а лише ті, в яких коливання життєвих циклів мають протилежний характер.

На рис. 1 показаний випадок, коли проекти А та В мають синхронні періоди коливань очікуваних доходностей протягом року. Підприємство може спрямувати наявні інвестиційні кошти на реалізацію проекту А, або проекту В.

Також, підприємство може розподілити ці кошти між двома проектами в пропорції 50/50 й сформувати портфель АВ. Життєвий цикл портфелю АВ показаний на рис. 1 червоною лінією. В такому випадку, підприємство отримає усереднене значення очікуваної доходності й усереднену варіацію (коливання) даного показника.

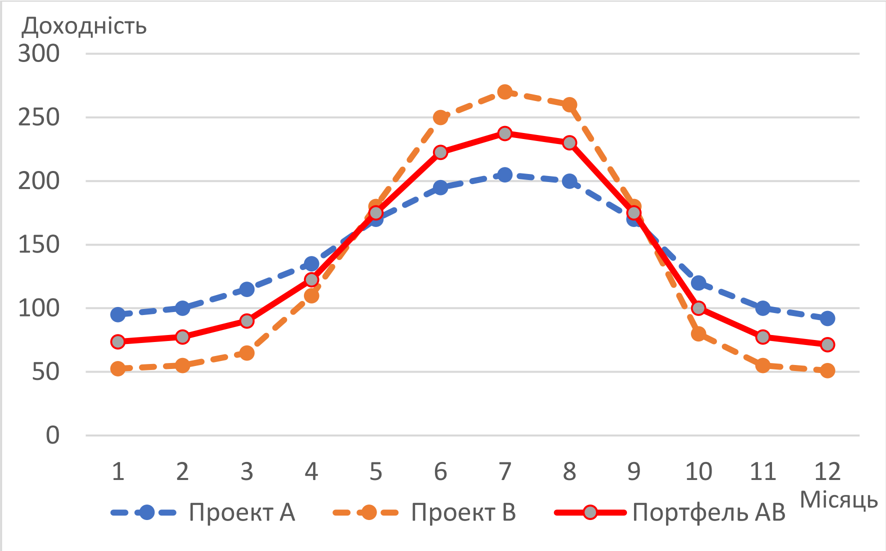

Рис. 1. Синхронні коливання життєвих циклів проектів А та В

На рис. 2 показаний випадок, коли проекти А та В мають протилежні періоди коливань очікуваних доходностей протягом року. Так само, підприємство може спрямувати наявні інвестиційні кошти на реалізацію проекту А, або проекту В.

Також, підприємство може розподілити ці кошти між двома проектами в пропорції 50/50 й сформувати портфель АВ, який показаний червоною лінією. В такому випадку, підприємство отримає усереднене значення очікуваної доходності й суттєве зниження варіації (коливань) даного показника.

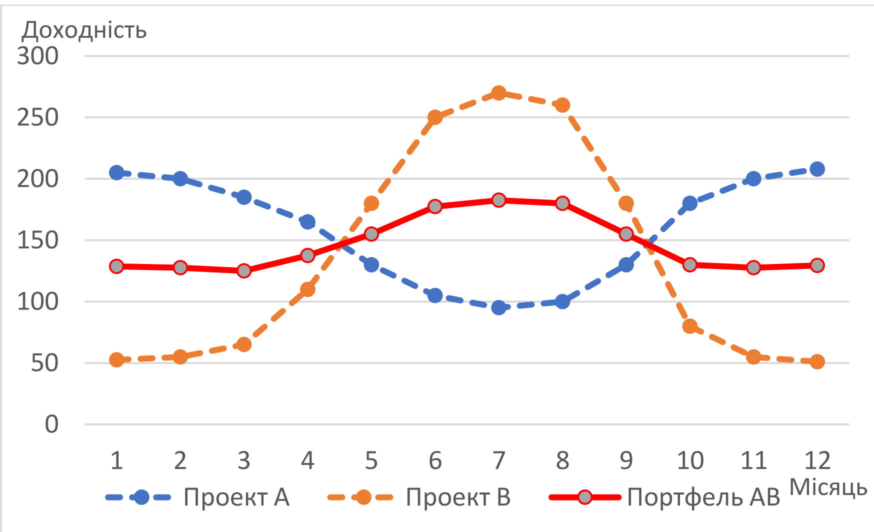

Рис. 2. Протилежні коливання життєвих циклів проектів А та В

Синхронність коливань очікуваної доходності різних активів, з яких формується портфель, можна оцінити за допомогою коефіцієнта коваріації, який розраховується за формулою:

$$Cov(R1_t;\quad R2_t) = \frac{\sum_{t=1}^{n}[(R1_t - \overline{R1}) \times (R2_t - \overline{R2})]}{n-1}, \tag{1}$$

Де $R1_t$, $R2_t$ – відповідно, доходності першого й другого активу (проекту) за період часу t;

$\overline{R1}$, $\overline{R2}$ – відповідно, середня доходність першого й другого активу (проекту) за весь період часу, тривалістю n.

1. Додатна коваріація $(Cov(R1_t;\quad R2_t) > 0)$ означає узгодженість коливань доходностей оцінюваних активів.

2. Значення коваріації, близьке до нуля $(Cov(R1_t;\quad R2_t) \approx 0)$ означає відсутність узгоджених коливань між ними.

3. Від’ємна коваріація $(Cov(R1_t;\quad R2_t) < 0)$ означає, що доходність активів змінюється в протилежних напрямках.

При управлінні портфелем, згідно загального правила диверсифікації, найбільш бажаним є третій випадок з від’ємною коваріацією; найбільш небажаним – перший випадок з додатною коваріацією.

Недоліком розглянутого коефіцієнта коваріації є його безрозмірність. Тобто, його розрахункове значення залежить від вхідних даних й може знаходитись в діапазоні $(-\infty < Cov < +\infty)$. Тобто, кількісна оцінка за формулою (1) не дає повного уявлення про міру узгодженості життєвих циклів активів.

Коефіцієнт кореляції Пірсона нормує коваріацію й приводить її значення до відрізку [-1; +1], формула (2).

$$Corr(R1_t;\quad R2_t) = \frac{Cov(R1_t;\quad R2_t)}{\sigma(R1_t) \times \sigma(R2_t)}, \tag{2}$$

Де $\sigma(R1_t)$, $\sigma(R2_t)$ – відповідно, середні квадратичні відхилення доходностей першого й другого активу (проекту) за весь період часу.

Градація значень коефіцієнта кореляції:

– $Corr \in [-1;\ -0{,}7)$, або $Corr \in (+0{,}7;\ +1]$ – сильна зворотна, або пряма лінійна залежність;

– $Corr \in [-0{,}7;\ -0{,}3)$, або $Corr \in (+0{,}3;\ +0{,}7]$ – середня зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок існує, але він менш сильний;

– $Corr \in [-0{,}3;\ -0{,}1)$, або $Corr \in (+0{,}1;\ +0{,}3]$ – слабка зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок слабкий;

– $Corr \in [-0{,}1;\ +0{,}1]$ – дуже слабка, або відсутня лінійна залежність.

– $Corr \to 0$ – кореляція відсутня, лінійного статистичного взаємозв'язку між змінними не спостерігається.

Таким чином, при формуванні портфелю, до його складу слід включати активи, кореляція яких прагне до -1.

3. Оптимізація портфелю з двох активів

Модель Марковіца (також відома як «Теорія сучасного портфеля») – це математична основа для формування портфеля активів, яка має на меті максимізувати очікувану дохідність для заданого рівня ризику, або мінімізувати ризик для заданого рівня очікуваної дохідності. Вона була розроблена Гаррі Марковіцом у 1952 році.

Основні припущення даної моделі:

1. Інвестори не схильні до ризику – це означає, що маючи два портфелі активів з однаковою очікуваною дохідністю, інвестор обирає той портфель, який має менший ризик;
2. Вибір інвесторів ґрунтується на двох факторах: очікувана дохідність (математичне сподівання) та ризик (дисперсія, або стандартне відхилення);
3. Диверсифікація – ризик портфеля можна зменшити, об'єднавши активи, які не мають прямої кореляції.

Оптимізація портфелю двох активів. Загальний випадок. Припустимо, що портфель складається з двох активів A_1 та A_2 (у вартісному вираженні), з частками x_1 та x_2. Причому:

$$x_1 + x_2 = 1$$

1. Очікувана доходність портфелю m_p

Доходність активу A_1 позначимо як m_1, а доходність активу A_2 – як m_2. Тоді, очікувана доходність такого портфелю є лінійною комбінацією доходностей його активів:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Тобто, доходність портфелю з двох активів є середньозваженою доходністю його складових.

Необхідно зазначити, що доходність такого портфелю завжди буде знаходитись в інтервалі від m_1 до m_2.

2. Ризик портфелю σ_p^2 (дисперсія)

Портфельний ризик є нелінійним й залежить від кореляції активів між собою:

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}$$

Де σ_1^2, σ_2^2 – відповідно, дисперсія першого та другого активу; ρ_{12} – коефіцієнт кореляції між активами

Зважаючи, що коефіцієнт кореляції може приймати значення в діапазоні $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$, то ризик портфелю з двох активів завжди буде знаходитись в межах:

$$x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 - 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_p^2 \ \leq x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2$$

Або

$$(x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2 \leq \sigma_p^2 \ \leq (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2$$

Тобто, у будь-якому випадку, ризик портфеля завжди є меншим середньозваженого ризику його складових, що є математичним обґрунтуванням доцільності диверсифікації:

$$\sigma_p^2 \ \leq (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2$$

Враховуючи вищесказане, розглянемо **особливі випадки оптимізації портфелю з двох активів**.

1. Абсолютно додатна кореляція (ρ = 1)

Очікувана доходність портфелю завжди буде дорівнювати середньозваженій доходності його активів:

$$m_p = x_1m_1 + x_2m_2$$

Ризик портфелю (стандартне відхилення σ_p) також буде дорівнювати середньозваженому ризику його активів:

$$\sigma_p^2 = (x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2$$

Звідки

$$\sigma_p = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$$

Тому, ми приходимо до лінійної залежності ризику від прибутковості. А отже, вирішення питань як мінімізації ризику, так й максимізації доходності, є тривіальним. Якщо експерт не схильний до ризику, то він сформує портфель лише з одного, менш ризикованого та менш доходного активу. Й навпаки, якщо експерт є схильним до ризику, то він надає перевагу більш доходному, але й більш ризиковому активу, рис. 3.

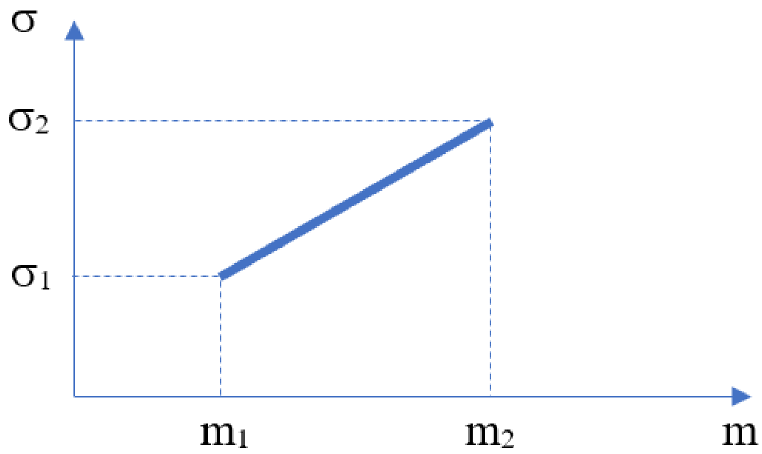

Рис. 3. Співвідношення доходності й ризику портфелю активів з абсолютно додатною кореляцією (ρ = 1)

2. Абсолютно від’ємна кореляція (ρ = -1)

Очікувана доходність портфелю залишається без змін:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Ризик портфелю (стандартне відхилення σ_p) буде дорівнювати:

$$\sigma_p^2 = (x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2$$

Звідки

$$\sigma_p = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2|$$

Ризик такого портфелю буде дорівнювати нулю, якщо його структура буде дорівнювати:

$$x_{1,opt} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

$$x_{2,opt} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

Тобто, при певній структурі двох активів з ненульовим ризиком, їхній портфель стає повністю безризиковим. Єдиною умовою цього є абсолютно від’ємна кореляція доходностей активів, рис. 4.

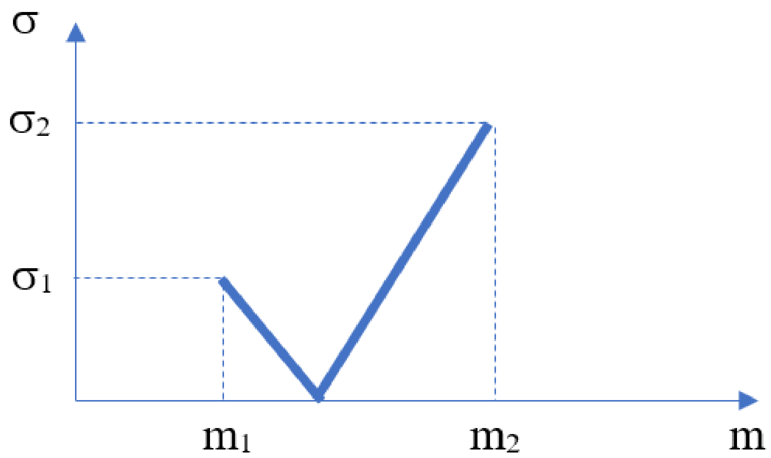

Рис. 4. Співвідношення доходності й ризику портфелю активів з абсолютно від'ємною кореляцією (ρ = -1)

3. Незалежні активи (ρ = 0)

Очікувана доходність портфелю залишається без змін:

$$m_p = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

Ризик портфелю буде дорівнювати:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2$$

Звідки

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2}$$

Мінімальне значення ризику такого портфелю досягається тоді, коли його структура буде дорівнювати:

$$x_{1,opt} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$x_{2,opt} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Відповідно, мінімальний ризик буде становити:

$$\sigma_{p,min} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

Залежність між ризиком й очікуваною доходністю такого портфелю буде мати вигляд, як на рис. 5.

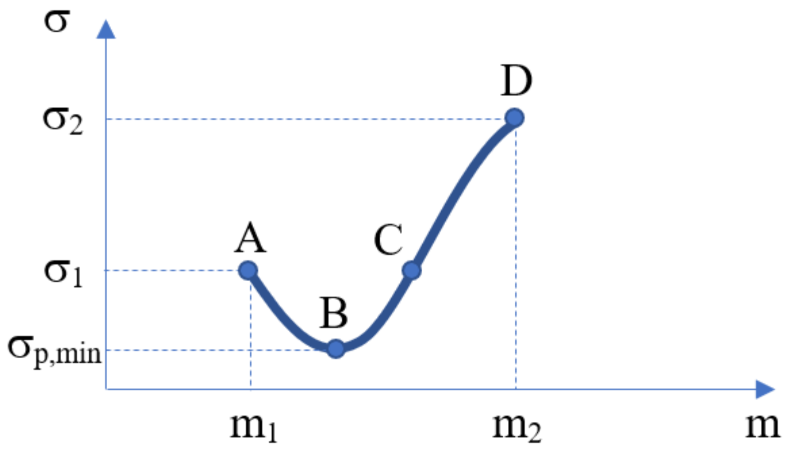

Рис. 5. Співвідношення доходності й ризику портфелю з незалежними активами (ρ = 0)

Мінімальний ризик даного портфелю забезпечується в крапці B, його обирає ОПР, яка не схильна до ризику.

Нормальна ОПР, серед відрізків AB та BC кривої, представленої на рис. 5, віддасть перевагу портфелю на відрізку BC. Оскільки, за того самого рівня ризику, аналогічна доходність буде вищою.

Якщо порівнювати між собою крапки A та C, то:

– крапка A відповідає першому активу;

– крапка C відповідає портфелю з таким самим рівнем ризику, як у першого активу й значно вищим рівнем очікуваної доходності.

Відрізок CD відповідає перевагам ОПР, яка є схильною до ризику.

4. Оптимізація портфелю з N активів. Модель Марковіца

Раніше, ми розглядали випадок оптимізації портфелю, який складається з двох активів, на основі показників очікуваної доходності (математичного сподівання) та ризику (дисперсії, або стандартного відхилення). Далі, перейдемо до оптимізації портфелю з довільної кількості активів.

Оптимізація портфелю з N активів. Припустимо, що наш портфель формується з n активів. При цьому, кожний i-ий актив має відому очікувану доходність m_i й ризик σ_i^2, а структура портфеля характеризується частками x_i, за умови $\sum x_i = 1$.

Тоді, очікувана доходність такого портфеля – це середньозважена доходність активів, які входять до його складу:

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

Відповідно, ризик портфелю (дисперсія), буде обчислюватись за формулою:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Де ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції між активами i та j.

Перша складова цієї формули – це сума ризиків окремих активів, які увійшли до складу портфелю; друга складова – це кореляційний ризик кожної пари активів між собою, що виникає внаслідок диверсифікації.

З останнього рівняння зрозумілим стає **загальне правило диверсифікації**: в портфель необхідно включати ті активи, які мають від'ємну кореляцію своїх життєвих циклів, що наближається до -1.

Тобто, перша складова останньої формули буде лише збільшувати ризик портфелю, при додаванні до його складу кожного наступного активу. Друга складова має можливість зменшити сукупний портфельний ризик σ_p^2, якщо парна кореляція між активами ρ_{ij} буде від'ємною.

Модель Марковіца. Модель Марковіца оптимізації портфелю з n активів полягає у знаходженні такої його структури, яка забезпечує мінімізацію ризику в умовах прийнятного (задовільного) рівня доходності, або максимізацію доходності в умовах прийнятного (допустимого) рівня ризику. Розглянемо ці два випадки.

1. Мінімізація ризику портфелю:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\right) \to min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i m_i \geq M$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Де M – прийнятний (задовільний) рівень доходності.

Дана оптимізаційна модель відповідає на питання: «Я хочу отримати портфель з доходністю, не нижче за M. Яка повинна бути його структура, щоб ризик портфелю був найнижчим?».

Шляхом послідовної покрокової зміни значення M (наприклад, від 5% до 30%), й відповідної оптимізації за даною моделлю, ми отримуємо набір портфелів, які на графіку «Ризик-Доходність» формують **ефективну**

множину. Ефективна множина пропонує портфель з мінімальним ризиком для кожного рівня доходності.

2. Максимізація очікуваної доходності портфелю:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i m_i\right) \to max$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}\right) \leq R$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Де R – прийнятний (допустимий) рівень ризику.

Дана оптимізаційна модель відповідає на питання: «Я хочу отримати портфель з рівнем ризику, не вище за R. Яка повинна бути його структура, щоб очікуваний дохід портфелю був найбільшим?».

Шляхом послідовної покрокової зміни значення R й відповідної оптимізації за даною моделлю, ми так само отримуємо набір портфелів, які на графіку «Ризик-Доходність» формують **ефективну множину**.

З іншої сторони, кожний інвестор, який формує портфель активів, має індивідуальну функцію переваги, які розглядались на початку даного курсу з ризикології. У випадку з моделлю Марковіца, такі функції переваги називаються **кривими байдужості**. Множина портфелів на кривій байдужості є рівнозначними для інвестора, з точки зору поєднання доходності й ризику.

Позначимо ефективну множину портфелів, яку ми визначили за допомогою моделі Марковіца й криві байдужості інвестора на рис. 6.

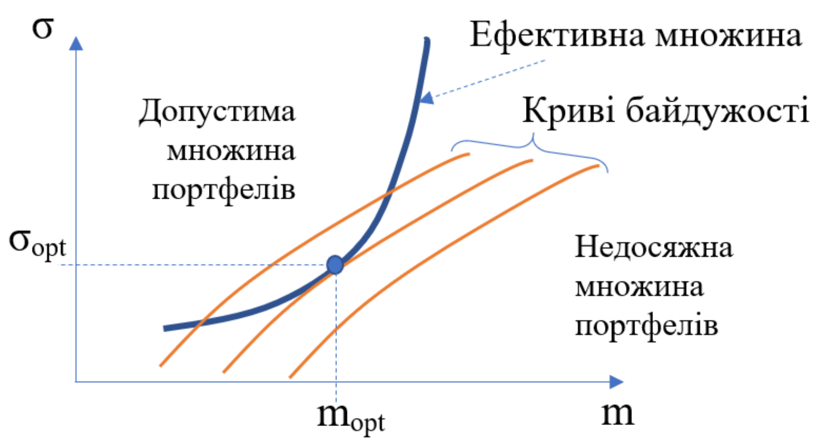

Рис. 6. Вибір оптимального портфелю

Ефективна множина портфелів позначена на рис. 6 синьою лінією; криві байдужості експерта – помаранчевими лініями.

Зліва зверху від ефективної множини знаходиться **допустима множина портфелів**. Ці портфелі є досяжними для інвестора, але вони характеризуються значно вищим ризиком за тієї самої доходності, як на ефективній множині портфелів.

Справа знизу від ефективної множини знаходиться **недосяжна множина портфелів**. Ці портфелі не можна сформувати на основі вхідних даних. Вони характеризуються значно меншим ризиком за тієї самої доходності, як на ефективній множині портфелів.

Кожна крива байдужості, яка знаходиться правіше від іншої, є більш бажаною для особи, що приймає рішення, оскільки забезпечує вищий рівень доходності за того самого рівня ризику.

Відповідно, оптимальним портфелем буде той, де крива байдужості буде мати єдину точку дотику з кривою ефективної множини.

Обмеження у застосуванні та недоліки моделі Марковіца:

1. Модель є чутливою до вхідних даних (динаміки активів за попередні періоди). Найменші похибки у вимірюванні ретроспективних даних призведуть до неправильної оцінки парних коефіцієнтів кореляції, що вплине на оптимальну структуру активів;

2. Від'ємна кореляція активів в минулому, не гарантує незмінну кореляцію цих активів в майбутньому. Тому, задача з управління портфелем, залишається вкрай актуальною;

3. Той факт, що доходність портфелю вимірюється на основі середньозважених доходностей його активів передбачає, що випадкові коливання доходностей кожного активу в часі мають нормальний розподіл. На практиці, це буває не завжди;

4. Відсутність урахування транзакційних витрат – модель ігнорує витрати на купівлю та продаж активів;

5. Велика кількість активів непропорційно збільшує обсяг необхідних розрахунків й ускладнює пошук оптимального рішення.

Наприклад, для портфелю зі 100 активів, на початковому етапі необхідно оцінити близько 5000 парних кореляцій між ними.

Складність знаходження оптимальних рішень полягає у тому, що модель Марковіца – це класична задача квадратичного програмування, оскільки ризик, який вимірюється показником дисперсії, є квадратичною функцією.

Для аналітичного розв'язку моделі Марковіца (пошуку оптимальної структури портфелю), можна використовувати метод множників Лагранжа. Його альтернативою є чисельні методи, з використанням інформаційних технологій (наприклад, «Пошук рішень» у Microsoft Excel).

ТЕМА: ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ: ТЕОРІЯ ІГОР

1. Постановка задачі теорії ігор
2. Зведення задачі теорії ігор до ЗЛП

1. Постановка задачі теорії ігор

Управління ризиками в економіці, фінансах, менеджменті та бізнесі передбачає не тільки їх вимірювання, але й управління ними в умовах невизначеності. Одним з таких методів зниження ризику є теорія ігор.

Задача теорії ігор. Припустимо, що ми маємо декілька конфліктуючих сторін (осіб), кожна з яких приймає певні рішення, визначені заданим набором правил. Причому, обираючи певне рішення, кожна з цих сторін не знає, які рішення будуть прийматись її конкурентами. Якщо кожній з цих сторін відомий можливий остаточний результат конфліктної ситуації при заздалегідь визначених виплатах, то говорять, що між ними відбувається гра.

Ситуація називається **конфліктною**, якщо в ній беруть участь сторони, інтереси яких є повністю, або частково протилежними.

Задача теорії ігор полягає у виборі такої стратегії поведінки кожного гравця, відхилення від якої може лише зменшити його виграш.

Кількісна оцінка результатів гри, називається **виплатами**.

Гра – це реальний, або формальний конфлікт, в якому присутні, як мінімум 2 учасники (гравці), кожний з яких прагне досягти своїх цілей. Допустимі дії кожного з гравців, спрямовані на досягнення певної мети, називаються **правилами гри**.

Гра називається **парною**, якщо в ній беруть участь тільки 2 гравця. Парна гра називається **грою з нульовою сумою**, якщо сума виплат дорівнює нулю, тобто програш одного гравця дорівнює виграшу іншого.

Парна гра з нульовою сумою називається **антагоністичною**, або грою з суворим суперництвом. Далі будемо розглядати антагоністичні ігри.

Однозначний опис вибору гравця в кожній з можливих ситуацій, в яких він повинний зробити особистий хід, називається **стратегією гравця**.

Особистий хід означає свідомий вибір гравця та реалізацію певної послідовності дій.

Стратегія гравця вважається **оптимальною**, якщо протягом гри вона забезпечує йому максимально можливий середній виграш, або мінімально можливий середній програш.

Припустимо, що ми маємо парну гру з нульовою сумою:

– перший гравець може обрати будь яку i-ту стратегію з m своїх можливих стратегій;

– другий гравець, не знаючи вибору першого, обирає j-ту стратегію з n своїх можливих стратегій.

В результаті такого вибору, перший гравець виграє суму a_{ij}, а другий гравець її програє. Тоді, платіжна матриця (матриця гри) A буде мати вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Рядки даної матриці A відповідають стратегіям першого гравця, а стовпці – стратегіям другого. Такі стратегії називаються **чистими стратегіями**.

Така гра називається скінченною грою розмірності $[m \times n]$.

Число $\alpha = \max\limits_{i}\left(\min\limits_{j}(a_{ij})\right)$ називається **нижньою ціною гри** (максимін), а відповідна стратегія – максиміном (рядок).

Число $\beta = \min\limits_{j}\left(\max\limits_{i}(a_{ij})\right)$ називається **верхньою ціною гри** (мінімакс), а відповідна стратегія гравця – мінімаксом (стовпцем).

Теорема 1. Нижня ціна гри ніколи не перевищує верхню ціну гри.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то число v називається **ціною гри**. Гра, для якої $\alpha = \beta$, називається **грою з сідловою крапкою**. Для такої гри, пошук оптимального рішення полягає у виборі максимінної, або мінімаксної стратегії, які є оптимальними для кожного з гравців.

Приклад 1. Нехай, платіжна матриця А має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри й оптимальну стратегію для першого та другого гравців.

Знайдемо нижню та верхню ціну гри. Нижня ціна приймає значення:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} min \\ 5 \\ 13* \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

$$\alpha = max(5; 13; 4; 3) = 13$$

Тоді, верхня ціна гри буде дорівнювати:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 15 & 13 & 20 & 13 & 15 \\ 10 & 5 & 8 & 12 & 4 \\ 14 & 4 & 7 & 3 & 17 \end{bmatrix}$$

$$max \quad 15 \quad 13* \quad 20 \quad 13* \quad 17 \qquad \beta = min(15; 13; 20; 13; 17) = 13$$

Як бачимо, нижня ціна гри співпадає з верхньою. Тобто, ціна гри дорівнює 13 у.о., а для кожного гравця існує гра з чистою стратегією:

– перший гравець у своєму розпорядженні має 4 стратегії (рядки матриці A). Оптимальною для нього є стратегія №2, оскільки нижня ціна гри міститься в другому рядку;

– другий гравець у своєму розпорядженні має 5 стратегій (стовпці матриці A). Оптимальними для нього є стратегія №2, або стратегія №4, оскільки верхня ціна гри міститься у другому та четвертому стовпцях;

– середній максимальний виграш першого гравця та середній мінімальний програш другого гравця, за умови використання ними оптимальних стратегій, складе 13 у.о. (елемент матриці A, що знаходиться на перетині чистих стратегій).

Якщо гра, яка визначається платіжною матрицею A, не має сідлової крапки, то для її розв'язання використовуються змішані стратегії.

Вектор, в якому кожна складова представляє собою відносну частку використання гравцем відповідної чистої стратегії, називається **змішаною стратегією** гравця.

Позначимо змішану стратегію першого гравця, як $U = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

Відповідно, змішана стратегія другого гравця – $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

З визначення змішаної стратегії випливає, що сума часток даних векторів дорівнює 1, а самі частки повинні бути більшими, або дорівнювати нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1; \;\; \sum_{j=1}^{n} z_j = 1$$

Якщо U^* є оптимальною змішаною стратегією першого гравця, а Z^* – оптимальною змішаною стратегією другого гравця, тоді ціна гри буде обчислюватись за формулою:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* Z_j^*$$

Визначення оптимальних стратегій U^*, Z^* та ціни гри v – це процес пошуку рішення гри.

<u>Теорема 2.</u> Кожна парна гра з нульовою сумою, має рішення в змішаних стратегіях.

<u>Теорема 3.</u> Якщо гра не має сідлової крапки, то для того, щоб число v було ціною гри, а U^* та Z^* оптимальними змішаними стратегіями, то необхідно й достатньо, щоб виконувались нерівності:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* \geq v$$

для всіх $j = 1,2,\ldots,n$;

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Z_j^* \leq v$$

для всіх $i = 1,2,\ldots,m$

Приклад гри зі змішаними стратегіями буде розглядатись нижче. Після того, як ми розглянемо зведення такої задачі теорії ігор до пари двоїстих задач лінійного програмування.

2. Зведення задачі теорії ігор до ЗЛП

Розглянемо гру розмірності $[m \times n]$, що визначається платіжною матрицею A. Згідно з теоремою 3, для оптимальної стратегії першого гравця $U^* = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ й ціни гри v, нерівність $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i^* \geq v$ буде виконуватись для всіх $j = 1,2,\ldots,n$.

Припустимо, що ціна гри $v > 0$. Цього завжди можна досягнути, додавши до всіх елементів матриці A одне й те саме постійне число C. Це не призведе до зміни оптимальних стратегій, а лише збільшить ціну гри на C.

Далі, розділивши дві частини останньої нерівності на v, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{U_i^*}{v} \geq 1$$

Введемо умовні позначення:

$$\frac{U_i^*}{v} = y_i^*$$

Тоді, остання нерівність буде мати вигляд:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$$

$$y_i^* \geq 0$$

Використовуючи введені позначення, перепишемо умову $\sum u_i = 1$ у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i^* = \frac{1}{v}$$

Оскільки перший гравець прагне отримати максимальний виграш v, він повинний забезпечити мінімізацію значення $\frac{1}{v}$. З огляду на це, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції:

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \to min$$

За умов:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$$

$$y_i^* \geq 0$$

Подібні міркування показують, що визначення оптимальної стратегії другого гравця зводиться до знаходження максимального значення функції $F = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \to max$ за аналогічних умов.

Таким чином, ми отримуємо пару двоїстих задач лінійного програмування:

<u>1. Пряма задача</u>

$$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \to min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq 1$$

для всіх $j = 1,2,\dots,n$

$$y_i^* \geq 0.$$

<u>2. Двоїста задача</u>

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \leq 1$$

для всіх $i = 1,2,\dots,m$

$$x_i^* \geq 0.$$

Таким чином, для знаходження рішення даної гри, яка визначається платіжною матрицею A, необхідно скласти пару двоїстих задач лінійного програмування й знайти їхні рішення. Далі, ці рішення використовуються для визначення оптимальних стратегій кожного гравця та ціни гри за формулами:

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}$$

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = v y_i^*$$

$$z_j^* = \frac{x_j^*}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = v x_j^*$$

Отже, процес пошуку рішення гри за допомогою методів лінійного програмування, складається з наступних етапів:

1. Складання пари двоїстих задач лінійного програмування, які є еквівалентними даній грі;
2. Визначення оптимальних рішень пари двоїстих задач;
3. Знаходження оптимальних стратегій для кожного гравця й ціни гри, з використанням співвідношень між розв'язками двоїстих задач.

Приклад 2. Нехай, платіжна матриця *A* має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Необхідно визначити ціну гри та оптимальні змішані стратегії першого та другого гравців.

Знайдемо нижню та верхню ціну гри. Нижня ціна приймає значення:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} min \\ -1 \\ -5 \\ -5 \end{matrix}$$

$$\alpha = max(-1; -5; -5) = -1$$

Відповідно, верхня ціна гри буде дорівнювати:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$max \quad 4 \quad 4 \quad 6 \qquad \beta = min(4; 4; 6) = 4$$

Як бачимо, нижня ціна гри не збігається з верхньою. Це означає, що для кожного з гравців існують оптимальні змішані стратегії.

В даному прикладі ціна гри може набувати від'ємних значень, оскільки деякі з оцінок приймають значення в діапазоні [-5; +6] ($a_{ij} < 0$). Щоб позбутись в умові задачі від'ємних значень, додаємо до всіх елементів матриці *A* таке число *C*, щоб кожен з них став більше нуля (*C* = 6):

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & 1 \\ 10 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Далі складаємо пряму й двоїсту задачі лінійного програмування та знаходимо їхній розв'язок:

1. Пряма задача

$$F^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* \to min$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 3y_2^* + 10y_3^* \geq 1 \\ 5y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \geq 1 \\ 11y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1^* \geq 0; y_2^* \geq 0; y_3^* \geq 0$$

Вирішуючи вказану задачу лінійного програмування, отримаємо наступні відповіді:

$F^* = 0.1538; y_1^* = 0.1077; y_2^* = 0.0462; y_3^* = 0.$

2. Двоїста задача

$$F^* = x_1^* + x_2^* + x_3^* \to max$$

$$\begin{cases} 8y_1^* + 5y_2^* + 11y_3^* \leq 1 \\ 3y_1^* + 10y_2^* + y_3^* \leq 1 \\ 10y_1^* + y_2^* + 12y_3^* \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1^* \geq 0; x_2^* \geq 0; x_3^* \geq 0$$

Розв'язуючи двоїсту задачу, отримуємо відповіді:

$F^* = 0.1538;\ x_1^* = 0.0769;\ x_2^* = 0.0769;\ x_3^* = 0.$

Далі визначаємо ціну гри:

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*} = \frac{1}{0.1538} = 6.5$$

Тоді, оптимальна змішана стратегія першого гравця буде знаходитись за формулою $u_i^* = v y_i^*$, тобто:

$$U^* = \begin{bmatrix} 6.5 \times 0.1077 \\ 6.5 \times 0.0462 \\ 6.5 * 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Це означає, що перший гравець повинний застосовувати першу стратегію з ймовірністю 0,7, а другу стратегію – з ймовірністю 0,3. Третю стратегію застосовувати не варто.

Оптимальна змішана стратегія другого гравця визначається за формулою $z_j^* = v x_j^*$, тобто:

$$Z^* = [6.5 \times 0.0769;\quad 6.5 \times 0.0769;\quad 6.5 \times 0] = [0.5;\quad 0.5;\quad 0]$$

Це означає, що другий гравець повинний застосувати першу стратегію з ймовірністю 0,5, а другу стратегію – з ймовірністю 0,5. Третю стратегію, так само, застосовувати не варто.

Не слід забувати, що отримана вище ціна гри $v = 6.5$ була розрахована з урахуванням того, що до всіх елементів матриці A додавалось число $C = 6$.

Тоді, початкова ціна гри складе: 6,5 – 6 = 0,5. Це буде середній максимально можливий виграш для першого гравця й середній мінімально можливий програш для другого гравця за умови, що вони обидва застосують оптимальні змішані стратегії.