

МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ  
З ДИСЦИПЛІНИ «КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ, ФІНАНСАХ,  
МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ»

**Модуль 1: «Оптимізаційні методи та моделі»**

ТЕМА: КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ МЕРЕЖЕВОГО ПЛАНУВАННЯ В  
ЕКОНОМІЦІ, ФІНАНСАХ, МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ

План

1. Етапи планування мережевої моделі та управління бізнес-процесами
2. Структурне планування: мережева модель
3. Календарне планування бізнес-процесів
4. Календарний графік реалізації бізнес-процесів. Задача розподілу ресурсів

**1. Етапи планування мережевої моделі та управління бізнес-процесами**

Успішне управління бізнес-процесами передбачає широке використання методів планування комплексу робіт, контролю за перебігом й термінами їх виконання та ліквідації виникаючих відхилень шляхом перерозподілу наявних ресурсів.

Бізнес-процес є сукупністю взаємопов'язаних операцій, які повинні виконуватись в певній послідовності для досягнення поставленої мети. Ці операції є хронологічно впорядкованими за датами їх завершення: деякі операції не можуть розпочинатись до завершення інших. Реалізація бізнес-процесів зазвичай потребує часу та ресурсів.

Мережеве планування та управління бізнес-процесами складається з трьох етапів:

1. Структурне планування;
2. Календарне планування;
3. Оперативне управління.

**Структурне планування** розпочинається з розкладання бізнес-процесу на чітко визначені операції. Далі відбувається оцінка тривалості виконання цих операцій й будується мережева модель (мережева діаграма), кожна дуга якої (стрілка), позначає роботу.

Таким чином, мережева модель представляє собою графічний взаємозв'язок між операціями бізнес-процесу. Побудова мережевої моделі на етапі структурного планування дозволяє детально проаналізувати всі операції й покращити структуру бізнес-процесу ще до його реалізації.

Структурне планування відіграє важливу роль у розробці графіка виконання бізнес-процесу. Його кінцевою метою є створення таблиці, в якій зазначається час початку й закінчення кожної операції, а також її зв'язок з іншими операціями бізнес процесу (**календарне планування**). Крім того, даний календарний план повинний надавати можливість визначати критично

важливі за часом виконання операції, яким необхідно приділити особливу увагу, щоб завершити його в строк.

Для некритичних операцій в календарному плані повинна бути передбачена можливість виявлення часових резервів, які можуть бути використані з користю для затримки виконання таких операцій, з точки зору ефективного використання ресурсів.

Завершальним етапом мережевого планування є **оперативне управління** реалізацією виконання бізнес-процесу. Цей етап передбачає використання мережевої моделі та календарного планування для періодичного звітування про хід виконання проекту. За результатами його виконання, мережева модель може бути скоригована. У цьому випадку розробляється новий календарний план для решти проекту.

## 2. Структурне планування: мережева модель

Мережева модель показує взаємозв'язки між операціями бізнес-процесів й послідовністю, в якій вони виконуються. Графічне представлення мережевої моделі називається мережевим графом.

Операції в мережевому графі зображуються стрілками (орієнтованими дугами), напрямки яких показують послідовності реалізації цих операцій в часі.

Впорядковані взаємозв'язки між операціями визначаються за допомогою подій. Події – це моменти часу, коли певні операції завершуються й розпочинаються інші. Таким чином, початок й завершення будь-якої операції описуються парою подій, які називають початковою й кінцевою подіями.

Згідно з прийнятою термінологією, кожна операція є орієнтованою дугою графа, а кожна подія – його вершиною (вузлом). При цьому, довжина дуги не є пропорційною тривалості операції. Також, графічне зображення дуг не обов'язково має бути прямою лінією.

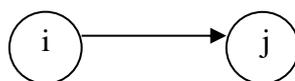


Рис. 1

На рис. 1 наведений приклад графічного представлення операції (i, j) з початковою подією i та кінцевою подією j.

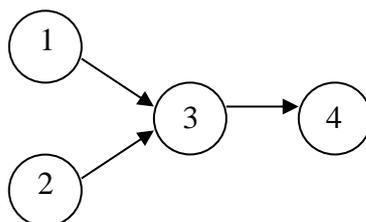


Рис. 2

На рис. 2 наведений приклад, який показує, що операції (1; 3) та (2; 3) повинні бути завершені до того, як розпочнеться операція (3; 4).

Вершини графу в мережевій моделі повинні нумеруватись. Причому, порядковий номер попередньої події завжди є меншим за номер наступної події.

Початкова подія – це подія, яка не має попередніх операцій.

Кінцева подія – це подія, яка не має наступних операцій й яка є кінцевою метою всього бізнес-процесу.

Правила побудови мережевих моделей:

1. Мережа будується від початкової події бізнес-процесу до кінцевої події. Напрямок орієнтованих дуг (стрілок) – зліва направо. Кожна операція представлена однією орієнтованою дугою.
2. В мережі не повинно бути замкнутих циклів, тобто послідовностей операцій, які повертаються до ранніх подій.
3. В мережі жодна операція не повинна дублюватись, як показано на рис. 3:

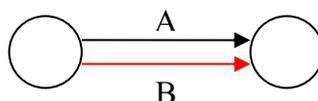


Рис. 3

На рис. 3 операції А та В мають однакові події початку й завершення. Тобто, подія В дублює А. Щоб уникнути їхнього дублювання, між початковою й кінцевою подіями вводиться фіктивна операція. Варіанти введення фіктивної операції D показані на рис. 4:

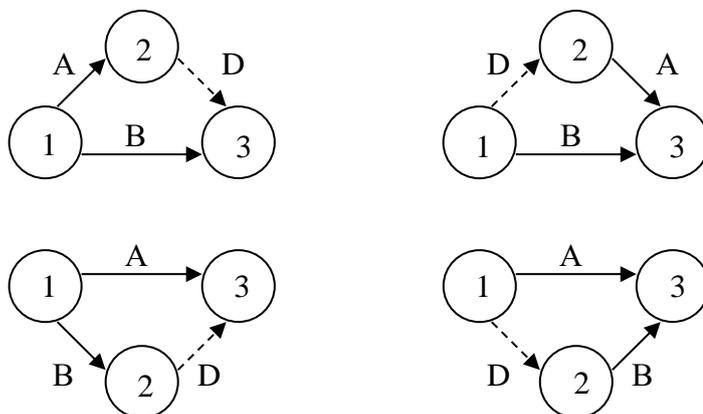


Рис. 4

В результаті внесених змін, операції А та В тепер однозначно визначаються парою подій, які відрізняються між собою. Фіктивна операція D не вимагає витрат часу й ресурсів.

**Приклад.** Під час реалізації бізнес-процесу, операції А та В повинні виконуватись до операції С, а операція Е відбувається лише після операції В. Тоді, мережева модель буде мати вигляд:

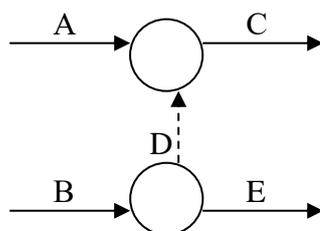


Рис. 5

Фіктивна операція D не потребує жодних ресурсів та часу. Вона лише показує, що C повинна виконуватись після B.

4. В мережі не повинно бути «обірваних» (хвостових) подій, до яких не входить жодна операція, за винятком початкової події, рис. 6:

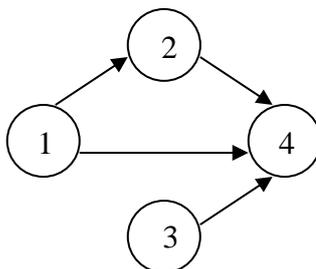


Рис. 6. «Обірвана» подія №3

5. В мережі не повинно бути тупикових подій, з яких не виходить жодна операція, за винятком кінцевої події, рис. 7:

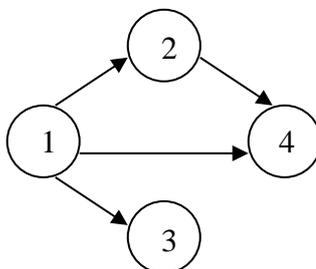


Рис. 7. Тупикова подія №3

### 3. Календарне планування бізнес-процесів

Побудова мережевої моделі в рамках структурного планування є першим кроком в отриманні календарного плану, який визначає дати початку й завершення кожної операції. Через наявність взаємозв'язків між різними операціями, необхідно проводити розрахунки часу їхнього початку й завершення. Вказані розрахунки можуть бути виконані безпосередньо в мережі.

В результаті таких розрахунків, визначаються критичні й некритичні операції бізнес-процесу. Некритична операція характеризується тим, що проміжок часу між її раннім початком й пізнім завершенням (в рамках даного бізнес-процесу), перевищує її фактичну тривалість. У цьому випадку говорять, що операція має запас часу (резерв).

**Визначення критичного шляху.** Для визначення поняття критичного шляху в мережевій моделі, розглянемо поняття шляху й повного шляху.

**Шлях** – це будь-яка послідовність операцій, яка призводить від однієї події до іншої, де кожна операція відбувається лише один раз.

**Повний шлях** – це будь-який мережевий шлях, початок якого співпадає з початковою подією бізнес-процесу, а кінець – з кінцевою подією даного бізнес-процесу.

**Критичним шляхом** називають найдовший з усіх повних шляхів, тривалість якого впливає на тривалість реалізації всього бізнес-процесу.

Критичний шлях визначає безперервну послідовність критичних операцій. Тобто, критичний шлях визначає всі критичні операції бізнес-процесу. Методика визначення такого шляху буде розглянута в наступному прикладі.

**Приклад.** Нехай, мережева модель має вигляд, як показано на рис. 8:

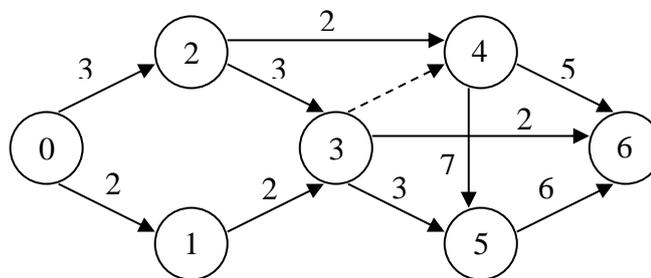


Рис. 8

Оцінки часу, необхідного для виконання кожної операції, наведені на рис. 8, поруч з відповідними орієнтованими дугами.

Тоді, розрахунок критичного шляху буде складатись з двох етапів:

1. Прямий прохід.

Розрахунок починається з початкової події та триває до тих пір, поки не буде досягнуто кінцеву подію мережевого графу. Для кожної події обчислюється число, яке представляє собою самий ранній час, коли вона може відбутись.

2. Зворотний прохід.

Розрахунок починається з кінцевої мережевої події та триває до тих пір, поки не буде досягнута початкова подія. Для кожної події обчислюється число, яке представляє собою найпізніший час її завершення.

Введемо наступні умовні позначення:

$РСН_i$  – ранній строк настання всіх операцій, що виходять з  $i$ -ої події (ранній строк настання  $i$ -ої події);

$ПСЗ_i$  – пізній строк завершення всіх операцій, що входять до  $i$ -ої події;

$T_{ij}$  – тривалість операції ( $i; j$ ).

Якщо  $i = 0$ , тобто ми виходимо з початкової події, то  $РСН_0 = 0$ .

Під час реалізації прямого проходу, розрахунок виконується за формулою:  $PCH_j = \max(PCH_i + T_{ij})$  за всіма операціями ( $i; j$ ). Тому, для розрахунку  $PCH_j$   $j$ -ої події, необхідно спочатку визначити  $PCH_i$  всіх попередніх подій.

Для розглянутого прикладу, раннім строком настання кожної операції буде:

$$\begin{aligned} PCH_0 &= 0; \\ PCH_1 &= \max(PCH_0 + T_{01}) = \max(0 + 2) = 2; \\ PCH_2 &= \max(PCH_0 + T_{02}) = \max(0 + 3) = 3; \\ PCH_3 &= \max(PCH_1 + T_{13}; PCH_2 + T_{23}) = \max(2 + 2; 3 + 3) = 6; \\ PCH_4 &= \max(PCH_2 + T_{24}; PCH_3 + T_{34}) = \max(3 + 2; 6 + 0) = 6; \\ PCH_5 &= \max(PCH_3 + T_{35}; PCH_4 + T_{45}) = \max(6 + 3; 6 + 7) = 13; \\ PCH_6 &= \max(PCH_3 + T_{36}; PCH_4 + T_{46}; PCH_5 + T_{56}) = \\ &= \max(6 + 2; 6 + 5; 13 + 6) = 19. \end{aligned}$$

На цьому прямий прохід завершується.

Зворотний прохід починається з кінцевої мережевої події. Його метою є визначення пізніх строків завершення всіх операцій, що входять до  $i$ -ої події,  $ПСЗ_i$ .

Якщо взяти до уваги рівняння  $i = n$ , де  $n$  - номер кінцевої події в мережі, то рівність  $ПСЗ_n = PCH_n$  - це відправна крапка зворотного проходу. У загальному випадку, пізній строк завершення будь-якої  $i$ -ої події обчислюється за формулою:  $ПСЗ_i = \min(ПСЗ_j - T_{ij})$  за всіма операціями ( $i; j$ ).

Для розглянутого прикладу, пізнім строком завершення кожної операції буде:

$$\begin{aligned} ПСЗ_6 &= PCH_6 = 19; \\ ПСЗ_5 &= \min(ПСЗ_6 - T_{56}) = \min(19 - 6) = 13; \\ ПСЗ_4 &= \min(ПСЗ_5 - T_{45}; ПСЗ_6 - T_{46}) = \min(13 - 7; 19 - 5) = 6; \\ ПСЗ_3 &= \min(ПСЗ_4 - T_{34}; ПСЗ_5 - T_{35}; ПСЗ_6 - T_{36}) = \\ &= \min(6 - 0; 13 - 3; 19 - 2) = 6; \\ ПСЗ_2 &= \min(ПСЗ_3 - T_{23}; ПСЗ_4 - T_{24}) = \min(6 - 3; 6 - 2) = 3; \\ ПСЗ_1 &= \min(ПСЗ_3 - T_{13}) = \min(6 - 2) = 4; \\ ПСЗ_0 &= \min(ПСЗ_1 - T_{01}; ПСЗ_2 - T_{02}) = \min(4 - 2; 3 - 3) = 0. \end{aligned}$$

На цьому етапі зворотний прохід також завершується. Для наочності, покажемо ранні строки настання та пізні строки завершення всіх операцій на мережевій моделі, рис. 9:

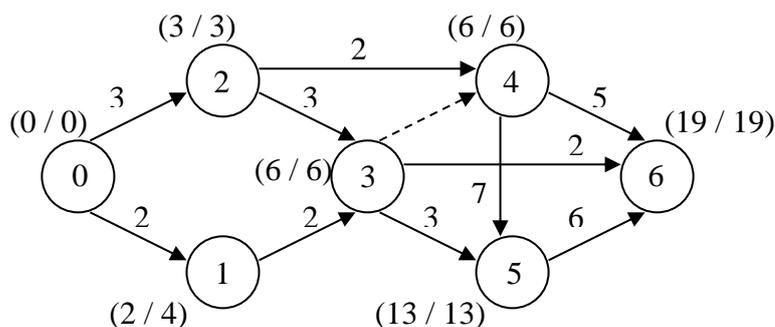


Рис. 9

У круглих дужках біля кожної вершини графу вказується: ( $PCH / PCZ$ ).

За результатами прямого й зворотного проходів можна визначити операції, які належать до критичного шляху.

Операція ( $i; j$ ) належить до критичного шляху, якщо вона задовольняє наступним умовам:

1.  $PCH_i = PCZ_i$
2.  $PCH_j = PCZ_j$
3.  $PCH_j - PCH_i = PCZ_j - PCZ_i = T_{ij}$

Ці умови означають, що між ранніми строками настання та пізніми строками завершення критичних операцій, запасів часу не існує.

До критичних операцій не належать:

- операція (0; 1) – умова (2);
- операція (2; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 6) – умова (3).

Тоді, **критичний шлях** – це найкоротша можлива тривалість всього бізнес-процесу, від початкової події до кінцевої. Для розглянутого прикладу, критичним шляхом буде наступна послідовність операцій:

(0; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6).

Після визначення критичного шляху, необхідно оцінити запаси часу для некритичних операцій. Оскільки для критичних операцій запаси часу дорівнюють нулю.

Для цього введемо наступні умовні позначення, що пов'язані з кожною операцією:

$PCZ_{ij}$  – ранній строк завершення операції ( $i; j$ );

$PCH_{ij}$  – пізній строк настання операції ( $i; j$ ).

Ці показники розраховуються за формулами:

$$PCZ_{ij} = PCH_i + T_{ij};$$

$$PCH_{ij} = PCZ_j - T_{ij}.$$

При оцінці резервів часу для некритичних операцій, розрізняють:

- повний резерв ( $PP$ );
- вільний резерв ( $BP$ ).

Повний резерв часу для некритичної операції ( $i; j$ ) – це різниця між максимальним проміжком часу, за який може бути виконана дана операція ( $PCZ_j - PCH_i$ ) та її тривалістю ( $T_{ij}$ ), тобто:

$$PP_{ij} = PCZ_j - PCH_i - T_{ij} = PCZ_j - PCZ_{ij} = PCH_{ij} - PCH_i.$$

Вільний резерв часу для некритичної операції ( $i; j$ ) визначається виходячи з припущення, що всі операції в мережі починаються з ранніх строків. Тоді, вільний резерв – це перевищення допустимого проміжку часу ( $PCH_j - PCH_i$ ) тривалості операції ( $T_{ij}$ ), тобто:

$$BP_{ij} = PCH_j - PCH_i - T_{ij}.$$

Зведемо результати розрахунків критичного шляху й резервів часу некритичних операцій в табл. 1:

Таблиця 1

Операція ( $i; j$ )	$T_{ij}$	$PCH_i$	$PCZ_{ij}$	$PCH_{ij}$	$PCZ_j$	$PP_{ij}$	$BP_{ij}$
(0; 1)	2	0	2	2	4	2	0
(0; 2)*	3	0	3	0	3	0*	0
(1; 3)	2	2	4	4	6	2	2
(2; 3)*	3	3	6	3	6	0*	0
(2; 4)	2	3	5	4	6	1	1
(3; 4)*	0	6	6	6	6	0*	0
(3; 5)	3	6	9	10	13	4	4
(3; 6)	2	6	8	17	19	11	11
(4; 5)*	7	6	13	6	13	0*	0
(4; 6)	5	6	11	14	19	8	8
(5; 6)*	6	13	19	13	19	0*	0

Слід звернути увагу, що лише критичні операції повинні мати повний резерв часу, що дорівнює нулю.

Якщо повний резерв дорівнює нулю, то й вільний резерв теж буде дорівнювати нулю. Однак, зворотне твердження не є істинним: оскільки рівність  $BP_{ij} = 0$  не означає, що дана операція є критичною,  $PP_{ij}$  може приймати значення, відмінні від нуля, наприклад операція (0; 1).

#### 4. Календарний графік реалізації бізнес-процесів. Задача розподілу ресурсів

Після зведення в табл. 1 результатів розрахунків критичного шляху й резервів часу, можна переходити до побудови календарного графіка (діаграми Ганта).

Для цього, по-перше, визначаються календарні строки виконання критичних операцій.

По-друге, розглядаються некритичні операції, для яких вказуються їхні ранні строки настання  $РСН_i$  й пізні строки завершення  $ПСЗ_i$ . Відрізки часу, в межах яких можуть виконуватись некритичні операції, позначаються на діаграмі пунктирними лініями.

Роль повного й вільного резервів часу у виборі календарних дат виконання некритичних операцій пояснюється двома наступними правилами:

1. Якщо повний резерв дорівнює вільному резерву, то календарні дати некритичних операцій можуть бути обрані в будь-якому інтервалі між раннім строком настання  $РСН_i$  й пізнім строком завершення  $ПСЗ_i$ ;
2. Якщо вільний резерв часу менше повного резерву, то дата початку некритичної операції може бути зміщена по відношенню до раннього строку настання  $РСН_i$  не більше ніж на величину вільного резерву, не впливаючи на вибір календарних дат безпосередньо для наступних операцій.

Для розглянутого прикладу, діаграма Ганта має вигляд на рис. 10:

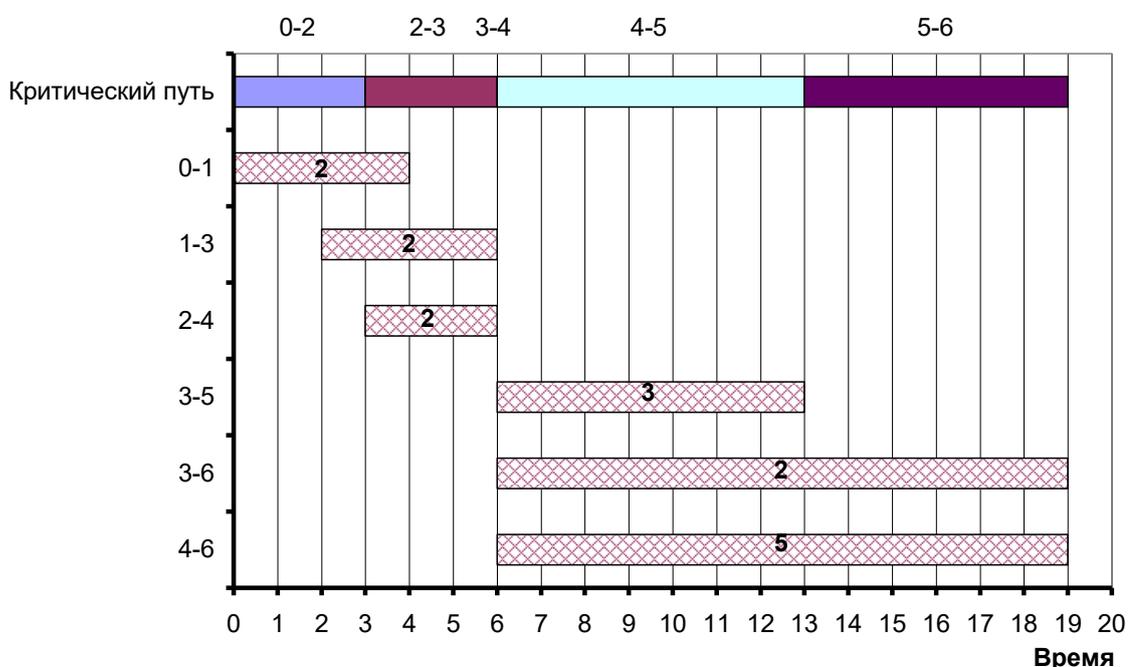


Рис. 10 Діаграма Ганта

В даному прикладі, друге правило було застосоване тільки до операції (0; 1), оскільки її вільний резерв дорівнює 0, а повний резерв – 2. Таким

чином, якщо дата початку операції (0; 1) збігається з її раннім строком настання  $t = 0$ , то календарну дату наступної некритичної операції (1; 3), яка слідує за (0; 1), можна обрати між її раннім раннім строком настання  $t = 2$  й пізнім строком завершення  $t = 6$ .

Якщо ж дата початку операції (0; 1) зсунута по відношенню до  $t = 0$ , то ранній строк настання операції (1; 3) повинен бути зміщений як мінімум на таку ж величину. Так, наприклад, якщо операція (0; 1) починається в момент  $t = 1$ , то вона завершиться в  $t = 3$ . Відповідно, календарну дату операції (1; 3) можна вибрати між  $t = 3$  й  $t = 6$ .

Це обмеження не поширюється на інші некритичні операції, так як їхні повні й вільні резерви часу дорівнюють один одному. Таким чином, операції (3; 5), (3; 6) й (4; 6) можуть виконуватися в часових інтервалах, зазначених на діаграмі Ганта, рис. 10, незалежно один від одного.

Отже, якщо вільний резерв часу певної операції є меншим повного резерву часу, це є ознакою того, що остаточні календарні дати такої операції не можуть бути зафіксовані без попередньої перевірки, як це вплине на терміни виконання безпосередньо наступних операцій.

При побудові календарного графіку бізнес-процесу, також доводиться враховувати наявність ресурсів, оскільки одночасне (паралельне) виконання деяких операцій може виявитися неможливим через ресурсні обмеження. Саме в цьому випадку, повні резерви часу некритичних операцій є найбільш цінними. Зміщуючи некритичні операції в ту чи іншу сторону, в межах свого повного резерву, можна знизити максимальну потребу в ресурсах.

Для нашого прикладу припустимо, що для виконання різних операцій необхідні такі обсяги людських ресурсів, табл. 2.

Таблиця 2

Операція ( $i$ ; $j$ )	Потреби в робочій силі, чол.
(0; 1)	0
(0; 2)	5
(1; 3)	0
(2; 3)	7
(2; 4)	3
(3; 4)	–
(3; 5)	2
(3; 6)	1
(4; 5)	2
(4; 6)	5
(5; 6)	6

Завдання полягає в побудові такого календарного графіку реалізації бізнес-процесу, де потреба в трудових ресурсах буде найбільш рівномірною протягом усього періоду.





Як видно з рис. 13 та 14, при ранньому строку некритичних операцій, максимальна потреба в трудових ресурсах становить 10 осіб., а при пізньому – 12 осіб.

Однак, як видно з наведених вище розрахунків, незалежно від використання ранніх чи пізніх резервів часу для некритичних операцій, потреба в робочій силі для даного бізнес-процесу не може бути менше 10 осіб. Це відбувається тому, що інтервал часу, протягом якого може бути виконана операція (2; 4), співпадає с інтервалом критичної операції (2; 3).

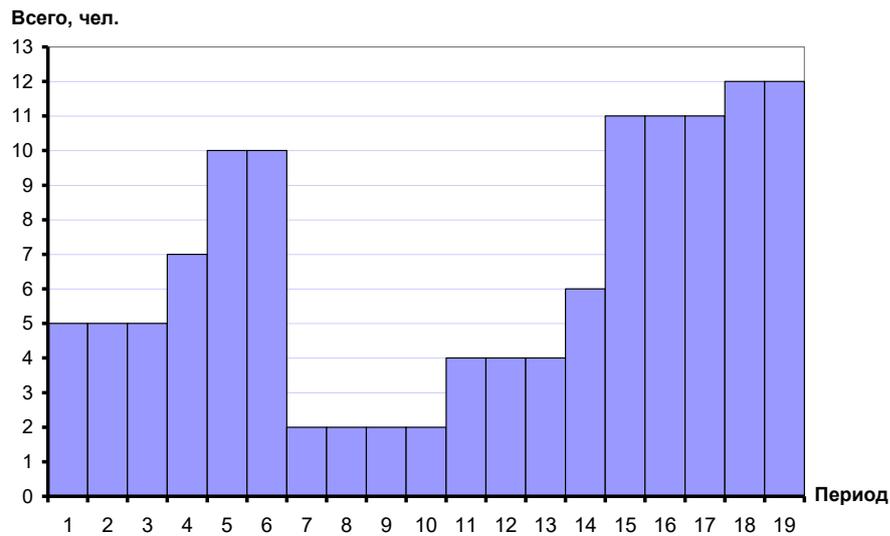


Рис. 13. Денні потреби в трудових ресурсах, пізній строк некритичних операцій

Графік потреб в робочій силі з раннім строком некритичних операцій може бути вдосконалений, з точки зору рівномірного використання ресурсів, шляхом вибору пізнього строку виконання операції (3; 5). В той же час, операцію (3; 6) слід розпочинати виконувати після завершення операції (4; 6).

Під час реалізації деяких проектів може бути поставлена мета не тільки забезпечити рівномірне використання ресурсів, але й обмеження максимальної потреби в них. Якщо дану мету не можна досягти шляхом перенесення календарних дат некритичних операцій, то для зменшення потреб в ресурсах, необхідно збільшувати тривалість деяких критичних операцій.

На даний час такий метод, який забезпечує вирішення задачі з рівномірного розподілу ресурсів, не розроблений. Тому, доводиться використовувати евристичні алгоритми, що побудовані на правилах використання часових резервів для некритичних операцій.

**Послідовний метод.** Суть методу полягає в тому, що ресурси, які були виділені на виконання операції, закріплюються за нею до її завершення.

Обмеженість ресурсів призводить до того, що не всі операції, початок яких за мережевою моделлю є можливим, можуть бути розпочаті одночасно.

В таких ситуаціях потрібний критерій, який буде надавати перевагу тій чи іншій операції. Такі критерії можна сформулювати у вигляді наступних правил-переваг:

- спрямовувати ресурси на виконання операції, яка має найменший повний резерв часу (за інших рівних умов);
- спрямовувати ресурси на виконання максимально тривалої операції;
- спрямовувати ресурси на виконання операції, яка потребує найбільшої кількості ресурсів;
- спрямовувати ресурси на виконання операції з найменшим порядковим номером в мережевій моделі.

Під час виконання операцій згідно мережевої моделі, необхідно контролювати час, протягом якого витрати ресурсів відповідають їхньому плановому розподілу. Одночасно слід відслідковувати обсяги вільних ресурсів, оскільки початок відповідної операції визначається не лише її раннім строком настання, але й наявністю вільних ресурсів.

З огляду на вищесказане, алгоритм послідовного розподілу ресурсів складається з етапів:

1. Формується перелік операцій, які можуть бути розпочаті, з урахуванням умов їхньої послідовності (мережевої моделі). Згідно з обраним правилом переваги, для цих операцій визначаються пріоритети й напрямки розподілу вільних ресурсів.

2. Операції, на виконання яких було виділено ресурси, позначаються як «незавершені». Серед них є така операція, яка буде завершена раніше за всі інші: наявні ресурси будуть поповнюватись за рахунок вивільнених.

3. З множини виконуваних операцій виключаються вже виконані.

Описана процедура повторюється циклічно до тих пір, поки всі операції не будуть виконані. Строк завершення останньої операції визначає час виконання всього проекту.

**Мережеве планування в умовах невизначеності.** В ситуаціях, коли тривалості операцій  $T_{ij}$  точно не відомі (вони є випадковими величинами), то для їхньої оцінки проводиться експертне опитування за трьома часовими характеристиками:

- оптимістична (мінімальна) оцінка  $T_{ij,min}$ ;
- песимістична (максимальна) оцінка  $T_{ij,max}$ ;
- найбільш вірогідна оцінка  $T_{ij,v}$ .

Тоді, очікуваний час виконання операцій знаходять за формулою:

$$T_{ij} = \frac{T_{ij,min} + 4T_{ij,v} + T_{ij,max}}{6}$$

Якщо відомими є тільки крайні оцінки часу, тоді формула буде мати вигляд:

$$T_{ij} = \frac{2T_{ij,min} + 3T_{ij,max}}{5}$$

**Аналіз вартості й часу реалізації бізнес-процесу.** Припустимо, що очікувана тривалість виконання бізнес-процесу нас не влаштовує й ми хотіли би її скоротити. Це пов'язано з використанням додаткових ресурсів (збільшення чисельності працюючих, закупівля додаткового обладнання тощо).

*Отже, скорочення термінів реалізації бізнес-процесу призводить до збільшення витрат на його реалізацію. Як наслідок, необхідно знайти компроміс між скороченням часу, необхідного для виконання всього проекту, та економією додаткових витрат на нього.*

Для розрахунку мінімальних додаткових витрат, необхідних для скорочення часу реалізації бізнес-процесу, можна використовувати оптимізаційну модель у вигляді задачі лінійного програмування.

Введемо умовні позначення. Нехай:

$T_{ij}$  – нормальна тривалість операції ( $i; j$ );

$T'_{ij}$  – тривалість операції ( $i; j$ ), з максимально можливим скороченням часу її виконання за рахунок додаткових ресурсів;

$M_{ij} = (T_{ij} - T'_{ij})$  – величина максимально можливого скорочення тривалості операції ( $i; j$ ) за рахунок додаткових ресурсів;

$B_{ij}$  – планові витрати на виконання операції ( $i; j$ ), в нормальних умовах;

$B'_{ij}$  – планові витрати на виконання операції ( $i; j$ ), за максимально можливим скороченням часу її виконання;

$K_{ij} = \frac{B'_{ij} - B_{ij}}{M_{ij}}$  – питомі витрати на скорочення тривалості операції ( $i; j$ );

$T_0$  – бажана тривалість виконання всього бізнес-процесу.

Введемо припущення про пропорційність: будь-яка додаткова частка скороченого часу на операцію, потребує постійної (незмінної в часі) частки додаткових витрат.

В якості змінних нашої задачі лінійного програмування виступають:

$x_i$  – час настання  $i$ -ої події (відображає факт завершення всіх операцій, що входять в цей вузол),  $i = 1 \dots n$ ;

$y_{ij}$  – обсяг скорочення часу виконання операції ( $i; j$ ).

Враховуючи вказані умовні позначення, в кінцевому випадку наша модель набуває вигляду:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} y_{ij} \rightarrow \min \quad (\text{цільова функція})$$

$x_j \geq x_i + T_{ij} - y_{ij}$  (обмеження);

$y_{ij} \leq M_{ij}$ ;

$$x_n \leq T_0;$$
$$x_i \geq 0; y_{ij} \geq 0 \text{ (умови невід'ємності).}$$

Таким чином, дана модель буде мінімізувати загальні витрати на скорочення часу реалізації бізнес-процесу за умови того, що тривалість виконання всього проекту не повинна перевищувати цільове значення  $T_0$ .