

МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ  
З ДИСЦИПЛІНИ «КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ В ЕКОНОМІЦІ, ФІНАНСАХ,  
МЕНЕДЖМЕНТІ ТА БІЗНЕСІ»  
**Модуль 3: «Методи прогнозування в економіці, фінансах, менеджменті  
та бізнесі»**

ТЕМА: ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ

1. Експертні методи прогнозування фінансових явищ
2. Математичні основи колективного узгодження рішень

**1. Експертні методи прогнозування фінансових явищ**

Експертні методи прогнозування використовуються в тих випадках, коли неможливо врахувати вплив багатьох факторів через значну складність об'єкта прогнозування. В цьому випадку використовуються оцінки експертів. При цьому розрізняють індивідуальні та колективні експертні оцінки, які об'єднує загальний принцип дії.

**Методи індивідуальної експертної оцінки**



Рис. 1. Класифікація методів індивідуальної експертної оцінки для прогнозування

1. Методи інтерв'ю – передбачають безпосередній контакт експерта зі спеціалістами широкого профілю та зацікавленими особами за схемою «питання-відповідь». До їхнього складу входять:

– метод вербальної інформації – призначений для збору даних щодо стану довкілля. Сюди слід зарахувати інформацію, яка отримується з радіо-, ТВ та Інтернет, від споживачів, постачальників, конкурентів, консультантів. Така інформація стосується всіх основних факторів зовнішнього оточення, її легко отримати, але дані можуть виявитись неточними й надмірно суб'єктивними;

– модель очікування споживачів – є прогнозом, що базується на результатах опитування клієнтів організації. Споживачів просять оцінити

власні потреби у майбутньому й нові вимоги до продукції компанії. Зібравши всі отримані дані й зробивши з власного досвіду поправки, керівник найчастіше може точно передбачити сукупний попит;

– сукупна думка збутовиків – досвідчені торгівельні агенти часто добре прогнозують майбутній попит. Вони безпосередньо знайомі зі споживачами й можуть взяти до уваги їхні недавні дії швидше, ніж вдасться зібрати дані з інших джерел й побудувати кількісну модель. Торгівельний агент нерідко «відчує» ринок краще, ніж прогнозні кількісні моделі;

– промислове шпигунство – це спосіб збору даних про дії конкурентів. Шпигунство – досить поширена практика в житті корпорацій.

2. Метод аналогій – спирається на метод ситуацій в менеджменті. Експерт повинний бути знайомий із засобами професійного управління, які довели свою ефективність, на всі випадки життя; вміти передбачати наслідки застосування тих чи інших заходів. Проводячи аналогії між власним досвідом й поточною ситуацією, експерт виконує прогнозування.

3. Аналітичний метод – передбачає самостійну роботу експерта над аналізом тенденцій й шляхів розвитку прогнозованого об'єкта. За результатами роботи, експерт розробляє аналітичну записку.

4. Сценарний метод – є логічним продовженням аналітичного методу. Від заснований на визначенні логіки розвитку процесу чи явища в часі за різних умов (оптимістичні, песимістичні, реалістичні). Для кожної з умов розробляється окремий сценарій досягнення поставлених цілей. Цілі, як правило, формулюються у вигляді ієрархічного переліку – дерева цілей.

Наприклад, перший рівень: соціально-економічний розвиток, продовольча безпека, енергетична безпека, безпека банківського сектору. На другому рівні виконується їх подальша деталізація і так далі.

Наступною групою експертних методів прогнозування є методи колективної експертної оцінки. Вони дозволяють групі експертів дійти узгодженої думки. Колективне прийняття рішень щодо можливого розвитку ситуації має певні відмінності від індивідуальної оцінки:

– різний рівень авторитетності експертів сприяє виникненню конформізму, коли більшість з них погоджується з думкою більш компетентних колег;

– дискусія щодо проблемної ситуації може зводитись до діалогу найбільш активних експертів, які не завжди є компетентними;

– публічність висловлювання думок може призводити до небажання відмовитись від власної точки зору, навіть, якщо вона була хибною.

Саме тому, колективні експертні методи повинні враховувати дані психологічні особливості та створювати умови щодо їх нівелювання.

### **Методи колективної експертної оцінки**

1. Метод комісій є найбільш популярним через відносну легкість організації й передбачає створення робочої групи, яка забезпечує підготовку й проведення опитування, обробку матеріалів й аналіз результатів експертної оцінки. Робоча група:

- розробляє перелік питань для експертів, забезпечує однозначність розуміння експертами цих питань, а також незалежність їх суджень;
- призначає склад експертів для розробки прогнозу;
- проводить опитування експертів й обробку результатів;
- узгоджує думки експертів за допомогою методів прийняття рішень.

Спочатку виконується оцінка міри узгодженості думок, яка не повинна перевищувати певну межу, тобто, точки зору експертів не повинні суперечити одна іншій. Якщо ця умова виконується, тоді обчислюється узгоджена групова оцінка.



Рис. 2. Класифікація методів колективної експертної оцінки для прогнозування

## 2. Метод мозкової атаки – включає наступні етапи:

- формування групи учасників мозкової атаки за чисельністю та складом (найбільш оптимальна група – 10-15 чол.; склад групи – з осіб одного рангу, якщо учасники знають один одного; з осіб різних рангів, якщо учасники незнайомі один з одним);

- процес генерації ідей – кожен із учасників висловлює будь-які ідеї щодо проблемної ситуації; критика висловлювань заборонена;

- оцінка всіх ідей на практичну реалізацію – всебічна критика всіх запропонованих варіантів рішень, або розвитку подій зі складанням списку тих ідей, які практично можна реалізувати.

## 3. Метод Дельфі – експерти, які практикують у різних, але взаємопов'язаних сферах діяльності, незалежно один від одного заповнюють докладну анкету з приводу проблемної ситуації.

На другому етапі кожний експерт отримує результати зведення відповідей інших експертів й його просять заново переглянути свій прогноз. Якщо він не збігається з прогнозами інших, експерт повинний докладно пояснити свою думку.

Вказана процедура повторюється 3-4 рази, доки експерти не прийдуть до спільної думки. Важливим моментом є анонімність експертів. Анонімність допомагає уникнути можливого групового обговорення проблеми, а також виникнення міжособистих конфліктів внаслідок відмінностей у статусі чи компетентності.

## 2. Математичні основи колективного узгодження рішень

Всі розглянуті колективні методи прогнозування виходять з необхідності узгодження позицій експертів. Для вибору ефективних (найкращих) рішень з множини допустимих використовується метод оптимальності Парето.

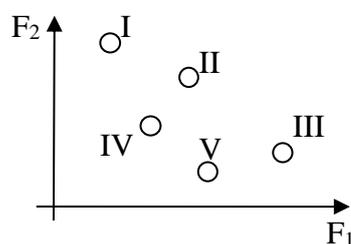
### Метод оптимальності Парето

Обрані рішення складають першу множину ефективних рішень, оптимальних за Парето. На наступному етапі з множини допустимих рішень видаляються ефективні рішення першої групи. З тих рішень, що залишились, визначають ефективні рішення другої групи. І так далі, поки всі рішення не будуть віднесені до відповідної групи, тобто, проранжовані.

Множиною ефективних за Парето рішень називаються такі, для яких при переході від одного рішення до іншого неможливо покращити оцінку одного експерта, не погіршивши оцінок інших експертів. Або, для рішення із множини ефективних не існує іншого рішення, яке є строго кращим за оцінками всіх експертів.

Зауваження: для застосування методу Парето, всі рішення попередньо повинні бути проранжовані експертами.

**Приклад 1.** Нехай ми маємо множину з п'яти допустимих рішень, які оцінюються двома експертами  $F_1$  та  $F_2$  й позначені крапками на площині. Також припустимо, що вища оцінка відповідає кращому рішенню:



Тоді, розглянемо наступні пари рішень:

- рішення IV та V неможливо порівняти між собою, оскільки перший експерт  $F_1$  віддав перевагу п'ятому, а другий експерт – четвертому рішенню;
- рішення I, II та III також неможливо порівняти між собою з тієї самої причини;
- рішення II строго краще за IV. Тому, оскільки рішення I, II та III є непорівняними між собою, то рішення I та III кращі за IV;

– так само, рішення III є строго кращим за V. Тому, оскільки рішення I, II та III є непорівняними між собою, то рішення I та II кращі за V;

– рішення I, II та III складають множину ефективних рішень, оскільки при переході від одного рішення до іншого, неможливо покращити оцінку першого експерта, не погіршивши оцінку другого. Крім того, рішення I, II та III не гірші за IV, а рішення II є строго кращим за нього; рішення I, II та III не гірші за V, а рішення III є строго кращим за нього.

Мірою звуження множини допустимих рішень до множини ефективних є коефіцієнт визначеності вибору  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{m_g - m_0}{m_g - 1}, \quad (1)$$

Де  $m_g$  – кількість допустимих рішень;  $m_0$  – кількість ефективних рішень.

Коефіцієнт  $\gamma$  показує, на скільки зменшилась невизначеність вибору у зв'язку зі знаходженням множини ефективних рішень з множини допустимих,  $\gamma \in [0; 1]$ :

– якщо  $\gamma = 1$ , то множина ефективних рішень містить єдине оптимальне. Це є найкращим варіантом;

– якщо  $\gamma = 0$ , ( $m_g = m_0$ ), то всі допустимі рішення одночасно є й ефективними. Тобто, відбір множини ефективних рішень, з точки зору звуження вибору й зменшення невизначеності, нічого не дає.

Розглянемо приклад узгодження колективної експертної оцінки за методом Парето.

**Приклад 2.** П'ять експертів оцінили (проранжували) 17 підприємств за рівнем фінансової стійкості. Кращому підприємству відповідає менший ранг й навпаки, табл. 1.

Таблиця 1

Результати ранжувань підприємств експертами

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Експерт 5
Підприємство 1	5	3	6	3	10
Підприємство 2	8	7	7	7	5
Підприємство 3	10	2	3	2	9
Підприємство 4	6	10	8	10	7
Підприємство 5	1	5	2	5	2
Підприємство 6	12	16	16	16	16
Підприємство 7	15	6	10	6	13
Підприємство 8	7	15	15	15	11
Підприємство 9	9	14	9	14	6
Підприємство 10	11	1	5	1	4
Підприємство 11	4	13	12	13	8
Підприємство 12	2	12	4	12	3
Підприємство 13	17	9	14	9	15
Підприємство 14	16	17	17	17	17
Підприємство 15	13	4	13	4	14
Підприємство 16	3	8	1	8	1
Підприємство 17	14	11	11	11	12

Для знаходження множини Парето, скористаємось методом прямого перебору:

– обираємо і-е підприємство й послідовно порівнюємо його зі всіма іншими;

– якщо і-е підприємство за оцінкою хоча б одного експерта є кращим за j-е підприємство, то j-е підприємство не може бути ефективним й виключається з множини ефективних рішень.

Таке порівняння слід провести для всіх пар підприємств, табл. 2.

Таблиця 2

Результати прямого перебору й ефективні рішення першої групи

	1*	2	3*	4	5*	6	7	8	9	10*	11	12	13	14	15	16*	17
1						1	1	1					1	1	1		1
2						1			1				1	1			1
3						1	1						1	1	1		1
4						1		1						1			1
5		1		1		1	1	1	1		1	1	1	1			1
6														1			
7													1	1			
8						1								1			
9						1								1			
10						1	1						1	1	1		1
11						1		1						1			
12						1		1	1		1			1			
13																	
14																	
15													1	1			
16				1		1		1	1		1		1	1			1
17														1			

Якщо і-е підприємство (по горизонталі) за оцінками всіх експертів є кращим за j-е підприємство (по вертикалі), то відповідна комірка таблиці 2 вважається зайнятою. Тоді, до множини Парето будуть належати лише ті підприємства, стовпці яких не містять зайнятих комірок. В нашому випадку, це підприємства №1, №3, №5, №10 та №16.

Для пошуку множини Парето другої групи, видалимо з таблиці 2 ефективні підприємства першої групи. Тоді, матриця парних порівнянь набуває вигляду, табл. 3.

Таблиця 3

Результати прямого перебору й ефективні рішення другої групи

	2*	4*	6	7*	8	9	11	12*	13	14	15*	17
2			1			1			1	1		1
4			1		1					1		1
6										1		
7									1	1		

8			1							1		
9			1							1		
11			1		1					1		
12			1		1	1	1			1		
13												
14												
15									1	1		
17										1		

Таким чином, множина Парето другої групи включає до свого складу підприємства: №2, №4, №7, №12 та №15.

Видаляємо з табл. 3 рядки та стовпці, які належать підприємствам з другої множини ефективних рішень. В результаті отримуємо табл. 4.

Таблиця 4

Результати прямого перебору й ефективні рішення третьої групи

	6	8	9*	11*	13*	14	17*
6						1	
8	1					1	
9	1					1	
11	1	1				1	
13							
14							
17						1	

Тобто, множина Парето третьої групи включає до свого складу підприємства: №9, №11, №13 та №17.

Видаляємо їх з табл. 4 й отримуємо наступну матрицю парних порівнянь, табл. 5.

Таблиця 5

Результати прямого перебору й ефективні рішення четвертої групи

	6	8*	14
6			1
8	1		1
14			

Множина Парето четвертої групи підприємств включає до свого складу лише підприємство №8.

Таблиця 6

Результати прямого перебору й ефективні рішення п'ятої групи

	6*	14
6		1
14		

По аналогії, множина Парето п'ятої групи включає до свого складу підприємство №6. Тоді, останнє підприємство №14 – це множина Парето шостої групи.

Отже, процедура послідовного парного порівняння за методом Парето приводить до наступних результатів:

$$(1, 3, 5, 10, 16) \succ (2, 4, 7, 12, 15) \succ (9, 11, 13, 17) \succ (8) \succ (6) \succ (14)$$

### Метод середніх арифметичних рангів

Поряд із методом Парето, узгоджену групову оцінку можна було знайти іншим методом, середніх арифметичних рангів. Це найбільш поширений та технічно простий метод, який дозволяє отримувати достатньо точні результати.

Метод середніх арифметичних рангів складається з етапів:

– експерти надають результати власних ранжувань об'єктів оцінки у вигляді, як було показано в табл. 1;

– за кожним рядком таблиці зведених оцінок (табл. 1) обчислюється середній ранг за формулою середньої арифметичної простої. Якщо відомими є вагові коефіцієнти рівнів компетентності експертів, то середній ранг обчислюється за формулою середньої арифметичної зваженої;

– на основі усереднених рангів виконується остаточне ранжування рішень, де меншому рангу відповідає краща оцінка.

Таблиця 7

Метод середніх арифметичних рангів

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Експерт 5	Середній ранг	Ранг	Парето
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Підпр. 1	5	3	6	3	10	5,4	5	I
Підпр. 2	8	7	7	7	5	6,8	7	II
Підпр. 3	10	2	3	2	9	5,2	4	I
Підпр. 4	6	10	8	10	7	8,2	8	II
Підпр. 5	1	5	2	5	2	3	1	I
Підпр. 6	12	16	16	16	16	15,2	16	V
Підпр. 7	15	6	10	6	13	10	10	II
Підпр. 8	7	15	15	15	11	12,6	14	IV
Підпр. 9	9	14	9	14	6	10,4	12	III
Підпр. 10	11	1	5	1	4	4,4	3	I
Підпр. 11	4	13	12	13	8	10	10	III
Підпр. 12	2	12	4	12	3	6,6	6	II
Підпр. 13	17	9	14	9	15	12,8	15	III
Підпр. 14	16	17	17	17	17	16,8	17	VI
Підпр. 15	13	4	13	4	14	9,6	9	II
Підпр. 16	3	8	1	8	1	4,2	2	I
Підпр. 17	14	11	11	11	12	11,8	13	III

Колонка (8) табл. 7 отримана на основі даних колонки (7) й містить результати узагальненого ранжування підприємств за методом середніх арифметичних рангів.

В колонці (9) наведені множини ефективних рішень за методом Парето, отримані з даних Прикладу №2.

На практиці, для зниження ризиків, рекомендовано використовувати обидва методи.

### Оцінка узгодженості суджень експертів

Рівень довіри до результатів узгодженої позицій експертів оцінюється за допомогою дисперсійного коефіцієнта конкордації  $W$ . Для його розрахунку введемо умовні позначення. Нехай, матриця ранжувань експертів представлена у вигляді:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1d} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2d} \\ \dots & \dots & r_{is} & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{md} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Де  $m$  – кількість рішень, за якими виконується експертна оцінка;  $d$  – кількість експертів;  $r_{is}$  – ранг  $i$ -ого рішення, що був привласнений  $s$ -им експертом.

Тоді, розрахунок дисперсійного коефіцієнта конкордації  $W$  здійснюється за формулами:

$$W = \frac{12}{d^2(m^3 - m)} \times S, \quad (3)$$

$$S = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s=1}^d r_{is} - \bar{r} \right)^2, \quad (4)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^d r_{is}, \quad (5)$$

**Зауваження:** індивідуальні експертні оцінки не повинні містити пов'язаних (однакових) рангів.

Дисперсійний коефіцієнт конкордації змінюється в межах  $0 \leq W \leq 1$ . Якщо  $W=1$ , то всі індивідуальні ранжування експертів є подібними між собою, тобто, між їхніми оцінками спостерігається максимальний рівень узгодженості та навпаки. Для інтерпретації його значень використовується наступна шкала:

$W \in [0; 0,3]$  – рівень узгодженості оцінок експертів є дуже слабким;

$W \in [0,3; 0,5)$  – слабкий;

$W \in [0,5; 0,7)$  – помірний;

$W \in [0,7; 0,9)$  – високий;

$W \in [0,9; 1]$  – дуже високий.

Висока неузгодженість експертних оцінок ( $W < 0,5$ ) може свідчити про низький рівень компетентності окремих членів групи, або низьку поінформованість щодо даного питання. В такому випадку, після додаткового вивчення проблемної ситуації, експертне опитування необхідно повторити.

**Приклад 3.** Розрахувати дисперсійний коефіцієнт конкордації за даними приладу 2 й оцінити міру узгодженості думок експертів.

1. Спочатку знаходимо  $\bar{r}$ :

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^d r_{is} = \frac{1}{17} \times 765 = 45, \quad (6)$$

2. Далі обчислюємо S:

Таблиця 8

Розрахунок квадратів відхилень

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Експерт 5	Сума рангів	(Сума рангів – $\bar{r}$ ) <sup>2</sup>
Підпр. 1	5	3	6	3	10	27	$= (27 - 45)^2 = 324$
Підпр. 2	8	7	7	7	5	34	$= (34 - 45)^2 = 121$
Підпр. 3	10	2	3	2	9	26	$= (26 - 45)^2 = 361$
Підпр. 4	6	10	8	10	7	41	16
Підпр. 5	1	5	2	5	2	15	900
Підпр. 6	12	16	16	16	16	76	961
Підпр. 7	15	6	10	6	13	50	25
Підпр. 8	7	15	15	15	11	63	324
Підпр. 9	9	14	9	14	6	52	49
Підпр. 10	11	1	5	1	4	22	529
Підпр. 11	4	13	12	13	8	50	25
Підпр. 12	2	12	4	12	3	33	144
Підпр. 13	17	9	14	9	15	64	361
Підпр. 14	16	17	17	17	17	84	1521
Підпр. 15	13	4	13	4	14	48	9
Підпр. 16	3	8	1	8	1	21	576
Підпр. 17	14	11	11	11	12	59	196
						S =	6442

3. Розраховуємо значення дисперсійного коефіцієнту конкордації:

$$W = \frac{12}{d^2(m^3 - m)} \times S = \frac{12}{5^2 \times (17^3 - 17)} \times 6442 = 0,6316, \quad (7)$$

Як бачимо, оцінки експертів мають помірний рівень узгодженості. А отже, ми можемо довіряти результатам попередніх розрахунків.



## ТЕМА: РЯДИ ДИНАМІКИ ТА ЇХ АНАЛІЗ

1. Визначення ряду динаміки. Середній рівень та варіація часового ряду
2. Стаціонарні часові ряди
3. Нестационарні часові ряди. Адитивна та мультиплікативна моделі часових рядів
4. Оцінка надійності прогнозів

*Як зазначалось раніше, до формалізованих методів прогнозування належать: методи простої екстраполяції, адаптивного прогнозування та економіко-математичного моделювання. Почнемо з методів простої екстраполяції. Однак, будь-яке прогнозування кількісними методами розпочинається з аналізу вхідних даних. Не всі дані можна використовувати для прогнозування. Для цього вони повинні задовольняти певним критеріям.*

### **1. Визначення ряду динаміки. Середній рівень та варіація часового ряду**

*Суспільні явища безперервно змінюються. Протягом певного часу – місяць за місяцем, рік за роком змінюється чисельність населення, обсяг та структура суспільного виробництва, рівень продуктивності праці тощо. Аналогічні процеси відбуваються й на підприємствах. Тому, кількісні методи прогнозування працюють з рядами динаміки (часовими рядами).*

**Часовий ряд (ряд динаміки)** – це послідовність значень показника в часі, яка характеризує зміну того чи іншого соціально-економічного явища. Кожен елемент часового ряду називається рівнем ряду.

Вивчаємий показник може бути **неперервним** (наприклад, зміна температури повітря), або **дискретним** (наприклад, динаміка заробітної плати). Абсолютна більшість економічної інформації є дискретною. Тому, при прогнозуванні будемо працювати з дискретними часовими рядами.

Введемо умовні позначення. Нехай:  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – рівні часового ряду, протягом  $n$  періодів. Такий часовий ряд будемо позначати  $\{Y_n\}$ . Кожний рівень ряду характеризується номером періоду й відповідним значенням досліджуваного показника.

За ознакою часу, ряди динаміки можуть бути моментними й інтервальними. Часовий ряд є **моментним**, якщо значення його рівнів вимірюються на конкретну дату (наприклад, вартість основних виробничих фондів). Часовий ряд є **інтервальним**, якщо значення його рівнів утворюються шляхом агрегування (підсумовування) за певний період (наприклад, обсяг виробленої продукції).

При обчисленні варіації часового ряду, для оцінки його придатності до прогнозування, необхідно розраховувати його середній рівень. Методика розрахунку середнього рівня залежить від того, чи є часовий ряд моментним, чи інтервальним.

Для моментних рядів середню величину визначають за формулами середньої хронологічної простої, або зваженої.

– якщо проміжки часу між датами рівні – середня хронологічна проста:

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_n}{n-1}, \quad (1)$$

– якщо проміжки часу між датами нерівні – середня хронологічна зважена:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_t f_t}{\sum f_t}, \quad \text{де } \bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t}{2}, \quad (2)$$

Де  $y_t, t = 1 \dots n$  – рівні ряду на момент часу  $t$ ;

$\bar{y}_t$  – проміжна середня на момент часу  $t$ ;

$f_t$  – тривалість проміжку часу між двома спостереженнями,  $(t-1)$  та  $t$ .

Для інтервальних рядів (рівних і нерівних інтервалів) середню величину визначають за формулою середньої арифметичної простої:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}, \quad (3)$$

Де  $n$  – загальна тривалість всього досліджуємого періоду.

**Приклад 1.** Вартість основних виробничих фондів протягом півріччя становила, табл. 1:

Таблица 1

Динаміка вартості основних виробничих фондів

Дата	Вартість, млн. грн.
01.01.2022	150,0
01.02.2022	165,1
01.03.2022	160,3
01.04.2022	155,8
01.05.2022	163,0
01.06.2022	170,0

Розрахувати їхню середню вартість (середній рівень динамічного ряду):

$$\bar{y} = \frac{\frac{150.0}{2} + 165.1 + 160.3 + 155.8 + 163.0 + \frac{170.0}{2}}{6-1} = 160.84 \text{ млн. грн.}$$

**Приклад 2.** Вартість основних виробничих фондів протягом півріччя наведена в таблиці нижче, табл. 2. Розрахувати їхню середню вартість.

Таблиця 2

## Динаміка вартості основних виробничих фондів

Дата	Вартість, млн. грн.
01.01.2022	150,0
01.03.2022	165,1
01.07.2022	160,3
01.08.2022	155,8
01.11.2022	163,0
01.01.2023	170,0

Оскільки проміжки часу між вимірюваннями не рівні, обчислюємо проміжні середні:

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{150,0 + 165,1}{2} = 157,55 \text{ млн. грн.};$$

$$\bar{y}_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{165,1 + 160,3}{2} = 162,7 \text{ млн. грн.};$$

$$\bar{y}_4 = \frac{y_3 + y_4}{2} = \frac{160,3 + 155,8}{2} = 158,05 \text{ млн. грн.};$$

$$\bar{y}_5 = \frac{y_4 + y_5}{2} = \frac{155,8 + 163,0}{2} = 159,4 \text{ млн. грн.};$$

$$\bar{y}_6 = \frac{y_5 + y_6}{2} = \frac{163,0 + 170,0}{2} = 166,5 \text{ млн. грн.};$$

Відповідно, середньорічна вартість дорівнює:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i f_i}{\sum f_i} = \frac{157,55 * 2 + 162,7 * 4 + 158,05 * 1 + 159,4 * 3 + 166,5 * 2}{12} = 161,26 \text{ млн. грн.}$$

**Приклад 3.** Обсяг випуску продукції протягом року становив, табл. 3:

Таблиця 3

## Динаміка випуску продукції

Дата	Вартість, млн. грн.
01.01 – 31.03	240,0
01.04 – 31.05	195,0
01.06 – 30.09	244,8
01.10 – 30.11	149,5
01.12 – 31.12	88,6

Розрахувати середньомісячний випуск продукції.

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{240,0 + 195,0 + 244,8 + 149,5 + 88,6}{12} = 76,5 \text{ млн. грн.}$$

**Приклад 4.** (САМОСТІЙНО) На заготівельному пункті за станом на 1 жовтня було 200 голів великої рогатої худоби. Рух поголів'я протягом місяця відображено в табл. 4:

Таблиця 4

Динаміка руху поголів'я великої рогатої худоби

Дата	Надійшло голів	Вибуло голів
4 жовтня	–	170
10 жовтня	102	–
17 жовтня	40	100
25 жовтня	148	–
27 жовтня	–	165

Обчислити середньомісячне поголів'я худоби на заготівельному пункті (з 1 жовтня по 1 листопада).

Вище зазначалось, що придатність вхідного динамічного ряду до прогнозування визначається на основі варіації його рівнів. Варіація, тобто коливання індивідуальних значень ознаки в межах вивчаемого динамічного ряду є його властивістю.

*Наприклад, урожайність сільськогосподарської культури залежить від якості ґрунту та способів його обробки, якості насіння, кількості внесених добрив, метеорологічних умов і інших випадкових факторів. Сумісна їхня дія призводить до коливань урожайності в околиці середнього рівня. Причому, в одних сукупностях індивідуальні значення ознаки значно відхиляються від центру розподілу, в інших – тісно групуються навколо нього.*

Чим меншою є варіація, тим сукупність більш однорідна. А отже, тим надійнішими є характеристики центру розподілу (середні величини), рис. 1.

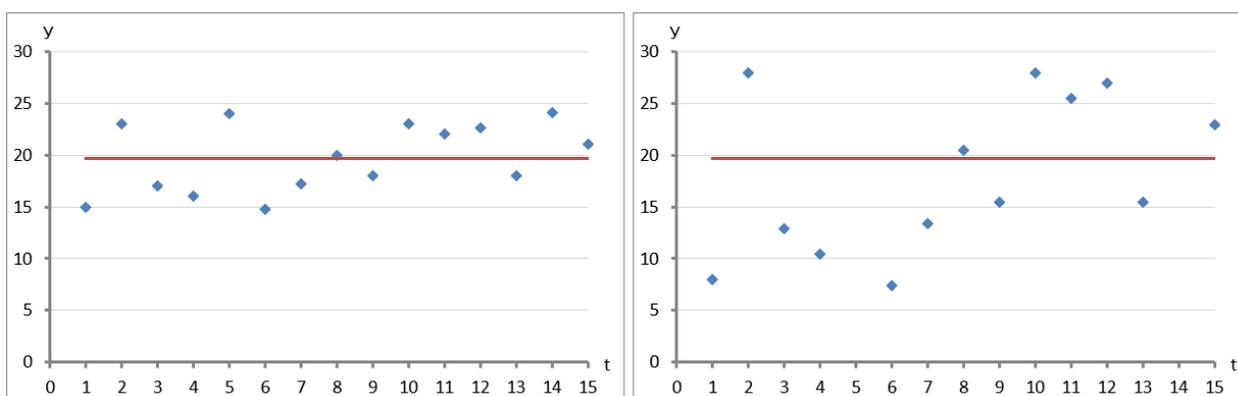


Рис. 1. Порівняння варіації ряду динаміки (зліва – менша, справа – більша)

Таким чином, виникає потреба оцінити не лише середній рівень динамічного ряду, але й ступінь його варіації. Для цього використовуються показники: дисперсії, середньоквадратичного відхилення та квадратичного коефіцієнта варіації.

1. Дисперсія – це середнє значення квадрату відхилень варіюючої ознаки від її середнього рівня, формула (4).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}, \quad (4)$$

2. Середньоквадратичне відхилення – це корінь квадратний з дисперсії, формула (5).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad (5)$$

Воно вимірює силу взаємодії випадкових факторів. Чим меншим є середньоквадратичне відхилення, тим краще середній рівень характеризує досліджуваний динамічний ряд, тобто, дію головних факторів.

3. Квадратичний коефіцієнт варіації – це відношення абсолютної характеристики варіації до центру розподілу, формула (6).

$$K_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{y}} \times 100\%, \quad (6)$$

Необхідність розрахунку даного показника пояснюється на рис. 2.

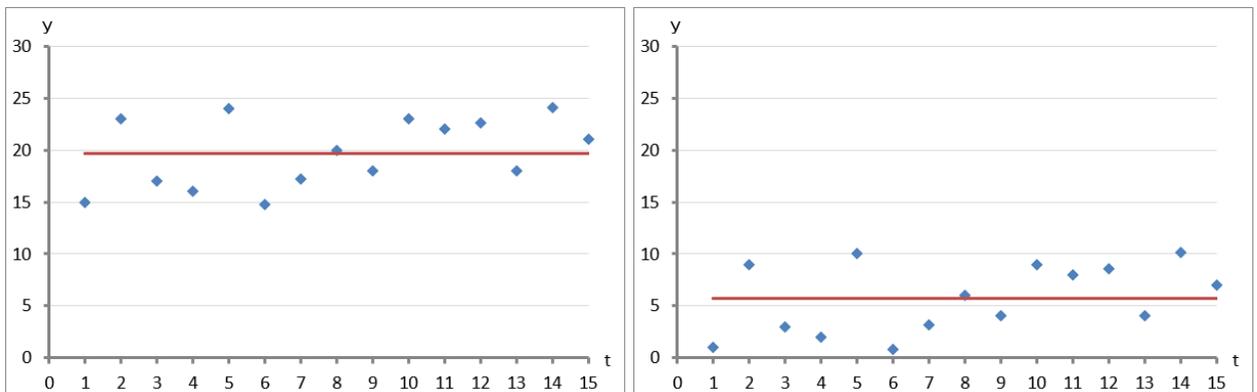


Рис. 2. Різниця у середньому рівні динамічних рядів за однакового рівня середньоквадратичного відхилення

На рис. 2 обидва динамічні ряди мають однакові абсолютні відхилення індивідуальних рівнів ряду від середнього значення. Тобто, дисперсія та середньоквадратичне відхилення в обох випадках дорівнюють один одному.

Різниця полягає в середньому рівні: на прикладі справа він набагато нижчий. Який варіант є кращим для підприємства, якщо показник  $Y$  – це динаміка місячних обсягів прибутку?

Приклад зліва є кращим, тому що зона збитковості для підприємства знаходиться далеко від середньомісячного прибутку. І тому, такий рівень варіації не загрожує збитками.

З іншої сторони, на прикладі справа у підприємства дуже великий ризик отримати збиток в будь-який з місяців, хоча середній рівень прибутковості все ще є додатнім. Тобто, той самий абсолютний рівень варіації цільового показника вже є неприйнятним через його низький середній рівень. Квадратичний коефіцієнт варіації, формула (6), враховує цей фактор.

Якщо  $K_{\sigma} \leq 33,3\%$ , то часовий ряд вважається однорідним й може використовуватись для подальшого прогнозування. Якщо ж  $K_{\sigma} \geq 40,0\%$ , то говорять про великі коливання рівнів ряду, а отже, побудований на їх основі прогноз не буде мати належної точності.

Поряд з варіацією, наявний часовий ряд повинний бути оцінений на достатність обсягу вхідних даних. Для цього, мінімально необхідна тривалість часового ряду буде розраховуватись за формулою (7).

$$n_{\min} = \frac{K_{\sigma}^2 * t_{\text{табл.ч}}^2}{m^2}, \quad (7)$$

Де  $m$  – показник, що відображає допустимий рівень похибки,  $0,05 - 0,08$  (5% - 8%);

$t_{\text{табл.ч}}(n-1, P)$  – коефіцієнт Ст'юдента, що знаходиться з довідника. Залежить від параметрів:  $n$  – кількість рівнів динамічного ряду;  $P$  – рівень довірчої вірогідності ( $P = 1 - m$ ).

Дані часового ряду можуть бути використані для подальшого прогнозування лише тоді, якщо виконуються обидві умови одночасно: ( $K_{\sigma} \leq 33,3\%$ ) та ( $n \geq n_{\min}$ ).

В протилежному випадку, статистичні дані не є однорідними, тобто, підпадають під значний вплив випадкових факторів, або їхній обсяг є недостатнім для побудови прогнозу. В будь-якому випадку, кількість періодів упередження (прогнозних рівнів часового ряду) не може перевищувати  $\frac{n}{3}$ .

Якщо вхідні дані представлені моментним часовим рядом з нерівними проміжками часу між вимірюваннями, тоді формула дисперсії (4) обчислюється за середньою зваженою:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2 f_i}{\sum f_i}, \quad \text{де } \bar{y}_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}, \quad (8)$$

Де  $\bar{y}_i$  – проміжна середня величина;

$f_i$  – тривалість часу між  $i$ -им та  $(i-1)$ -им вимірюванням

**Приклад 5.** Провести аналіз часового ряду на однорідність та достатність обсягу за даними рис. 2 (зліва) за рівнем довірчої вірогідності у 95% та 90% й зробити висновки про його придатність до прогнозування, табл. 5.

## Аналіз часового ряду

t	Y <sub>i</sub>	(Y <sub>i</sub> - Y <sub>середн</sub> ) <sup>2</sup>
1	15,0	22,2
2	23,0	10,8
3	17,0	7,4
4	16,0	13,8
5	24,0	18,4
6	14,8	24,1
7	17,2	6,3
8	20,0	0,1
9	18,0	2,9
10	23,0	10,8
11	22,0	5,2
12	22,6	8,3
13	18,0	2,9
14	24,1	19,2
15	21,0	1,7
Сума		154,2

Перші дві колонки таблиці 5 містять вхідні дані. На їх основі був обчислений середньомісячний прибуток  $Y_{\text{середн}} = 19,7$  (млн. грн.). Третя колонка таблиці використовується для розрахунку показника дисперсії:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{154,2}{15} = 10,2812$$

Тоді, середньоквадратичне відхилення буде дорівнювати:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{10,2812} = 3,2064$$

Відповідно, квадратичний коефіцієнт варіації приймає значення:

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma}{\bar{y}} = \frac{3,2064}{19,7} = 0,1627 \text{ (або 16,27\%)}$$

Як бачимо, за критерієм однорідності вхідні дані задовольняють необхідній умові ( $K_{\sigma} \leq 33,3\%$ ). Далі перевіримо вхідні дані на достатність обсягу з рівнем довірчої вірогідності у 95%:

$$n_{\min} = \frac{K_{\sigma}^2 \times t_{\text{табл}}^2}{m^2} = \frac{0,1627^2 \times 2,1448^2}{0,05^2} = 48,5$$

Отже, за даного рівня варіації рівнів часового ряду, їхній мінімальний обсяг з довірчою вірогідністю у 95%, повинний складати 49 періодів.

Знизимо рівень довірчої вірогідності до 90%:

$$n_{min} = \frac{K_{\sigma}^2 \times t_{табл}^2}{m^2} = \frac{0.1627^2 \times 1,7613^2}{0.1^2} = 8.2$$

З довірчою вірогідністю у 90%, мінімальна кількість спостережень складає 9 періодів.

## 2. Стаціонарні часові ряди

Розглянуті статистичні показники середнього рівня та дисперсії тісно пов'язані зі стаціонарністю часових рядів. Стаціонарний часовий ряд повинний відповідати наступним умовам:

1. Математичне очікування (середній рівень часового ряду) є постійною величиною й з часом не змінюється;

2. Дисперсія рівнів часового ряду також є постійною величиною й з часом не змінюється;

3. Відсутність, або слабка автокореляція між рівнями часового ряду. Вимога про відсутність автокореляції означає відсутність узгодженості коливань рівнів часового ряду між різними проміжками часу. Дана умова унеможливорює наявність сезонних, або циклічних коливань.

Приклади стаціонарного та нестаціонарних часових рядів наведені на рис. 3. Розглянемо їх більш детально.

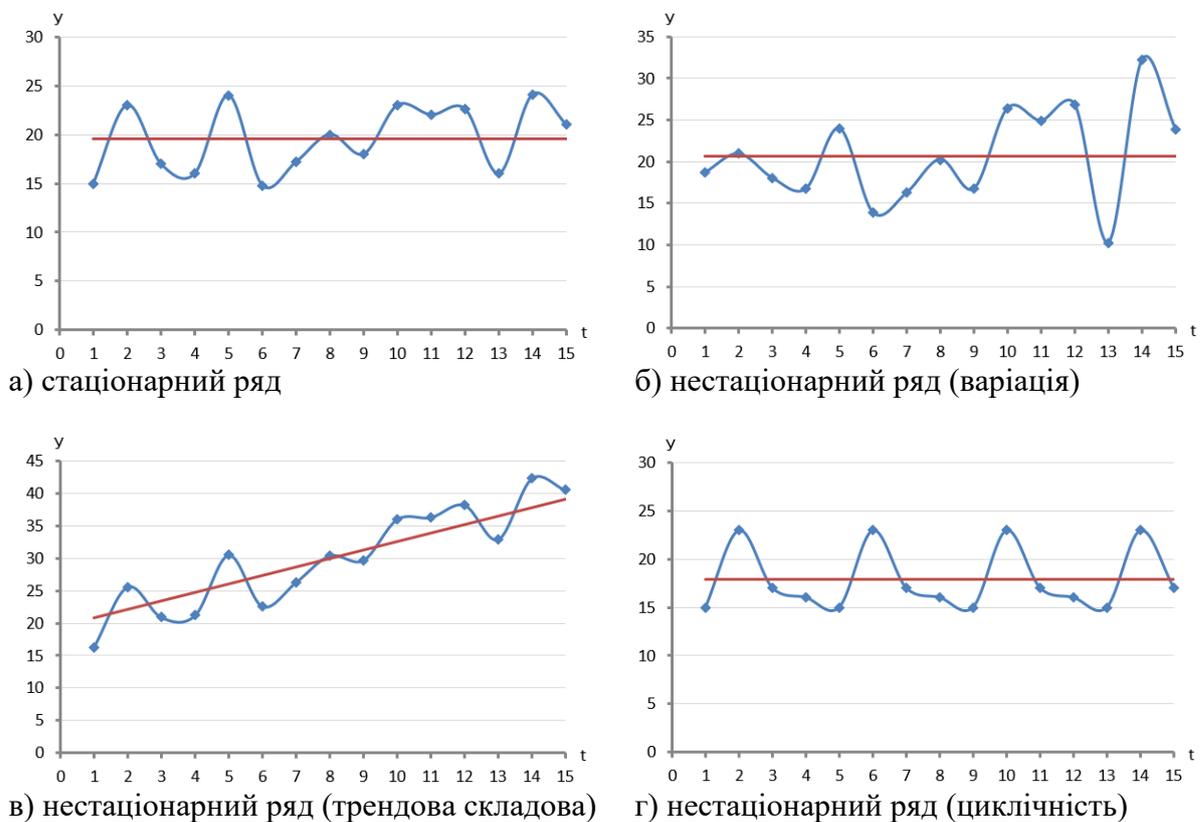


Рис. 3. Приклади стаціонарного та не стаціонарних часових рядів

а) стаціонарний ряд має сталий середній рівень, постійну варіацію ознаки (дисперсію), а поведінка рівнів ряду є випадковою й не містить сезонних, або циклічних коливань;

б) нестаціонарний ряд – хоча середній рівень ряду залишається сталим, але дисперсія рівнів ряду не є постійною й з часом зростає;

в) нестаціонарний ряд – замість сталого середнього рівня, даний ряд містить ярко виражену трендову складову;

г) нестаціонарний ряд – середній рівень та дисперсія протягом часу залишаються сталими, але ряд характеризується наявністю автокореляції через циклічність динаміки цільового показника.

Щодо показників математичного очікування та дисперсії, вони вже розглядалися вище. Зупинимось більш детально на автокореляції.

Автокореляція – це статистичний показник, який вимірює рівень узгодженості коливань в межах одного часового ряду, за різні проміжки часу.

Економічним змістом автокореляції у прогнозуванні є те, наскільки поточні значення рівнів часового ряду залежать від попередніх значень цього ж ряду динаміки:

– додатна автокореляція означає, що зростання досліджуваного показника в минулому супроводжується його зростанням й в поточний період, а падіння – поточним зниженням;

– від’ємна автокореляція свідчить про зворотний зв’язок між поточною динамікою показника й минулою;

– слабка автокореляція, або її відсутність є ознакою стаціонарного часового ряду й означає, що нинішня динаміка показника ніяким чином не пов’язана з його динамікою у минулому.

Автокореляція вимірюється за допомогою коефіцієнта коваріації, який розраховується за формулою:

$$Cov(y_t; y_{t+\Delta}) = \frac{\sum[(y_{t,i} - \bar{y}_t) \times (y_{t+\Delta,i} - \bar{y}_{t+\Delta})]}{n - 1}, \quad (9)$$

Де  $y_t, \bar{y}_t$  – відповідно, відрізок часового ряду з початком відліку в період  $t$  й тривалістю  $n$  та його середній рівень;  $y_{t+\Delta}, \bar{y}_{t+\Delta}$  – відповідно, відрізок часового ряду з початком відліку в період  $(t+\Delta)$  й тривалістю  $n$  та його середній рівень;  $y_{t,i}, y_{t+\Delta,i}$  – відповідно,  $i$ -ий рівень часового ряду з початком відліку в період  $t$  та  $(t+\Delta)$ .

Додатна коваріація ( $Cov(y_t; y_{t+\Delta}) > 0$ ) означає додатну автокореляцію, або узгодженість коливань зміщених на  $\Delta$  відрізків часового ряду. Від’ємна коваріація ( $Cov(y_t; y_{t+\Delta}) < 0$ ) означає від’ємну автокореляцію. Значення коваріації, близьке до нуля ( $Cov(y_t; y_{t+\Delta}) \approx 0$ ) означає відсутність узгоджених коливань між ними.

Зі зростанням  $\Delta$ , у стаціонарному часовому ряді коваріація наближається до нуля.

Недоліком коефіцієнта коваріації є його безрозмірність. Його розрахункове значення залежить від розмірності рівнів часового ряду й знаходиться в діапазоні  $(-\infty < Cov < +\infty)$ .

Коефіцієнт кореляції Пірсона нормалізує коваріацію й приводить її значення до відрізка  $[-1; +1]$ , формула (10).

$$Corr(y_t; y_{t+\Delta}) = \frac{Cov(y_t; y_{t+\Delta})}{\sigma(y_t) \times \sigma(y_{t+\Delta})}, \quad (10)$$

Де  $\sigma(y_t)$  – середнє квадратичне відхилення на відрізку часового ряду з початком відліку в період  $t$  й тривалістю  $n$ ;  $\sigma(y_{t+\Delta})$  – середнє квадратичне відхилення на відрізку часового ряду з початком відліку в період  $(t+\Delta)$  й тривалістю  $n$ .

Градація значень коефіцієнта кореляції:

–  $Corr \in [-1; -0,7)$ , або  $Corr \in (+0,7; +1]$  – сильна зворотна, або пряма лінійна залежність;

–  $Corr \in [-0,7; -0,3)$ , або  $Corr \in (+0,3; +0,7]$  – середня зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок існує, але він менш сильний;

–  $Corr \in [-0,3; -0,1)$ , або  $Corr \in (+0,1; +0,3]$  – слабка зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок слабкий;

–  $Corr \in [-0,1; +0,1]$  – дуже слабка, або відсутня лінійна залежність.

–  $Corr \rightarrow 0$  – кореляція відсутня, лінійного статистичного взаємозв'язку між змінними не спостерігається.

Функція  $f(\Delta) = Corr(y_t; y_{t+\Delta})$  називається автокорреляційною функцією. Для стаціонарного часового ряду зі зростанням  $\Delta$ , вона наближається до нуля.

Також, відомим статистичним тестом на стаціонарність часового ряду є тест Дікі-Фуллера.

Найпростішим методом прогнозування у випадку стаціонарного часового ряду є **метод середнього рівня ряду**. В даному випадку, прогнозне значення показника дорівнює середньому значенню рівнів ряду в минулому, формула (11).

$$y_{n+k} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y}, \quad (11)$$

Де  $y_{n+k}$  – прогнозне значення показника для  $k$ -ого періоду.

Побудова будь-якого прогнозу пов'язана з розрахунком довірчих інтервалів. А саме, в яких проміжках буде приймати значення прогнозний показник, із заданою вірогідністю. Якщо стаціонарний ряд має нормальний

розподіл, то для оцінки довірчих інтервалів можна використовувати правило трьох сигм, рис. 4.

**Зауваження.** Не кожний стаціонарний ряд може мати нормальний розподіл.

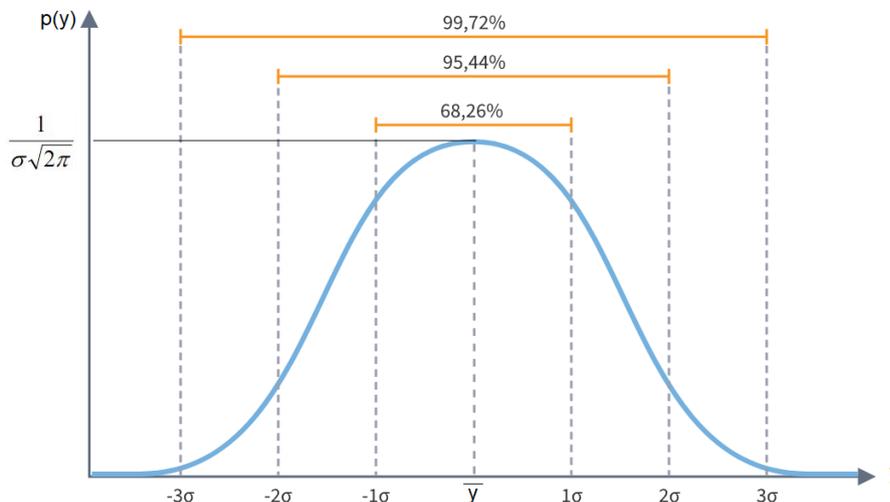


Рис. 4. Правило трьох сигм

Припустимо, що дані розподілені нормально. Тоді, згідно правила трьох сигм:

- з вірогідністю у 68,26% випадкова величина (прогнознний рівень часового ряду) прийме значення в діапазоні:  $\bar{y} - \sigma \leq \bar{y} \leq \bar{y} + \sigma$ ;
- з вірогідністю у 95,44% прогнознний рівень часового ряду прийме значення в діапазоні:  $\bar{y} - 2\sigma \leq \bar{y} \leq \bar{y} + 2\sigma$ ;
- з вірогідністю у 99,72% прогнознний рівень часового ряду прийме значення в діапазоні:  $\bar{y} - 3\sigma \leq \bar{y} \leq \bar{y} + 3\sigma$ .

До інших методів прогнозування стаціонарних часових рядів відносять метод ковзного середнього, авторегресій, а також моделі їхнього поєднання: ARMA, ARIMA тощо.

### 3. Нестационарні часові ряди. Адитивна та мультиплікативна моделі часових рядів

Нерідко, нестационарний часовий ряд формується на основі декількох складових одночасно: трендової, сезонної, циклічної та випадкової складових. В такому випадку, прогнозування зводиться до послідовної декомпозиції (виділення) цих складових. Тоді, етапами дослідження таких нестационарних часових рядів є наступні:

**1. Побудова й аналіз графіку.** Аналіз часового ряду розпочинається з побудови й вивчення його графіку. Якщо нестационарність часового ряду є

очевидною, то перш за все, необхідно виділити нестационарну складову ряду. Процес виділення тренду та інших компонент ряду, що призводять до порушення стаціонарності, може проходити в декілька етапів. На кожному з цих етапів розглядається ряд залишків, отриманих в результаті вирахування з вхідного ряду обраної моделі тренду.

**2. Вибір моделі для часового ряду.** З аналізу графіку часового ряду нескладно помітити присутність **трендового компонента**. Як правило, для економічних показників типовим є повільне зростання чи падіння протягом тривалого періоду часу. Наявність трендів пояснюється інерційністю процесів через демографічні, технологічні, політичні та міжнародні зміни. Дія цих факторів є довготривалою, тому їх слід описувати за допомогою регресійного аналізу й підбору найбільш адекватних кривих.

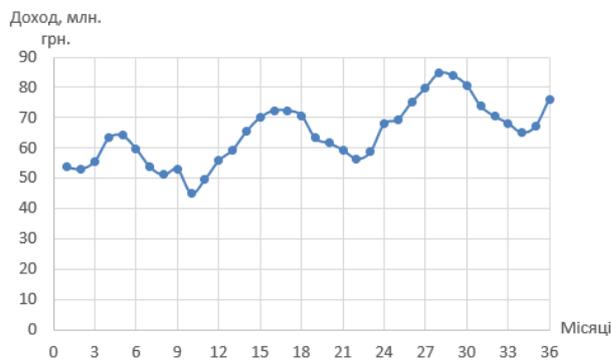
**Сезонний компонент** показує коливання навколо трендового компонента. Його наявність пояснюється сезонним характером виробництва та споживання певних видів продукції.

*Наприклад, у IV кварталі кожного року, перед Новим роком значно зростає споживання товарів. Головна ідея виділення сезонних коливань полягає у порівнянні даних за відповідні місяці попереднього року, а не за минулі періоди. Так, дані за грудень одного року необхідно порівнювати з даними грудня минулих років, а не з листопадом.*

**Циклічний компонент** описує всі циклічні коливання інших періодів, які не увійшли до складу сезонної компоненти. *Наприклад, коливання ділової активності протягом тижня, або добова веб-аналітика переглядів сайту.*

**Випадковий (залишковий) компонент** – це все те, що залишилось від часового ряду після виключення з нього трендової, циклічної та сезонної компоненти. *Слід зважати, що іноді легше одразу побудувати прогноз відносно динаміки всього часового ряду, ніж намагатися виділити кожний компонент окремо.* Модель вважається підбраною, якщо залишкова компонента ряду є випадковим процесом за типом «білого шуму».

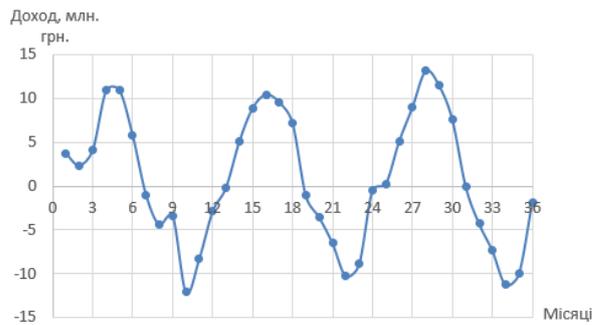
Вказаний процес послідовної декомпозиції складових вхідного часового ряду наведений на рис. 5.



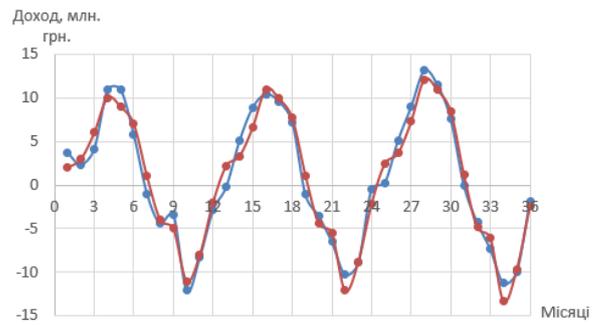
а) вхідний часовий ряд



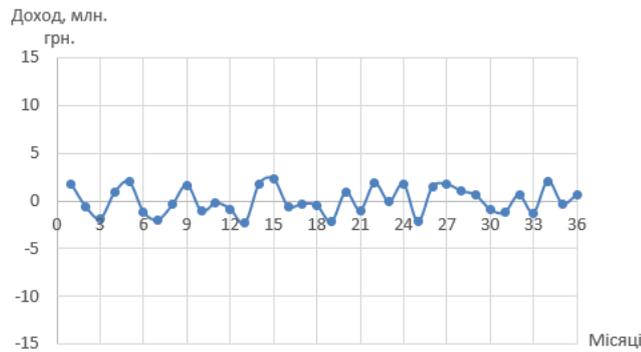
б) виділення трендової компоненти



в) неврахований залишок



г) виділення сезонної компоненти



д) неврахований залишок

Рис. 5. Декомпозиція вхідного часового ряду на трендову, сезонну та випадкову компоненти

На рис. 5(а) зображений вхідний часовий ряд. На його основі було виділено трендовий компонент у вигляді висхідної прямої, рис. 5(б). Далі були обчислені невраховані залишки, як різниця між рівнями вхідного часового ряду й трендового компоненту, рис. 5(в). З цих неврахованих залишків було виділено сезонний компонент, рис. 5(г). На рис. 5(д) показаний випадковий (залишковий) компонент.

**3. Прогнозування та перевірка адекватності прогнозу.** Після кожного етапу декомпозиції часового ряду відбувається прогнозування відповідної компоненти.

Аналіз залишкової компоненти дозволяє виконати оцінку адекватності побудованого прогнозу й обчислити для нього довірчі інтервали з заданою надійністю.

З математичної точки зору, декомпозиція вхідного часового ряду на складові може бути представлена адитивною чи мультиплікативною моделлю.

**Адитивна та мультиплікативна моделі часових рядів.** Будь-який часовий ряд можна представити як суму детермінованого ( $d_t$ ) та випадкового ( $r_t$ ) компонентів:

$$y_t = d_t + r_t, \quad \text{де } t = 1 \dots n, \quad (12)$$

В свою чергу, детермінований компонент складається трендового ( $tr_t$ ), сезонного ( $s_t$ ) та циклічного ( $c_t$ ) компонентів:

$$d_t = tr_t + s_t + c_t, \text{ де } t = 1 \dots n, \quad (13)$$

Таким чином, нестационарний часовий ряд можна розглядати як суму:

$$y_t = tr_t + s_t + c_t + r_t, \text{ де } t = 1 \dots n, \quad (14)$$

Такий вигляд часового ряду (14) отримав назву **адитивної моделі**.

Якщо замість реальних значень цих компонент використовувати їх логарифми, то отримаємо **мультиплікативну модель**:

$$\begin{aligned} \log(y_t) &= \log(tr_t) + \log(s_t) + \log(c_t) + \log(r_t) = \\ &= \log(tr_t \times s_t \times c_t \times r_t), \end{aligned} \quad (15)$$

Звідки отримуємо:

$$y_t = tr_t \times s_t \times c_t \times r_t, \text{ де } t = 1 \dots n, \quad (16)$$

При наявності трендового компонента ( $tr_t$ ), найбільш простими методами прогнозування є: метод середнього абсолютного приросту та середнього темпу зростання. Розглянемо їх більш детально.

**Метод середнього абсолютного приросту.** Прогнозний рівень економічного показника обчислюється у відповідності із середнім абсолютним приростом даної величини в минулому:

$$y_{n+k} = y_0 + \bar{\Delta} \times k, \text{ де } \bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta y_i}{n-1}, \text{ де } \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad (17)$$

Де  $y_{n+k}$  – прогнозне значення показника для k-ого періоду;  $y_0$  – базовий рівень екстраполяції;  $\bar{\Delta}$  – середній абсолютний приріст рівнів ряду; n – тривалість вхідного часового ряду (кількість періодів); k – номер періоду прогнозування.

Метод середнього абсолютного приросту застосовується у випадках, якщо досліджуваний показник має загальну лінійну тенденцію розвитку.

**Метод середнього темпу росту.** Прогнозний рівень економічного показника обчислюється у відповідності із середнім темпом зростання даної величини в минулому:

$$y_{n+k} = y_0 \times \bar{T}^k, \text{ де } \bar{T} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, \quad (18)$$

Де  $\bar{T}$  – середній темп зростання рівнів ряду.

Даний метод застосовується у випадках, якщо загальна тенденція ряду динаміки характеризується показовою, або експоненційною кривою.

Очевидно, що прогностні значення  $y_{n+k}$  будуть залежати від базового рівня екстраполяції  $y_0$ , або від того, в який бік він буде відхилятися від тренду. В якості базового рівня екстраполяції може обиратись останній рівень ряду, однак такий підхід може призвести до зміщення прогностної оцінки, рис. 6.

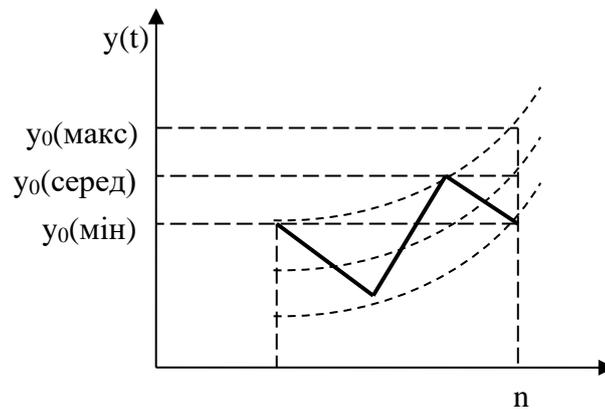


Рис. 6. Вибір базового рівня екстраполяції

Як бачимо, прийняття останнього рівня ряду в якості базового, призводить до зміщення прогностної оцінки в бік зменшення; передостанній рівень ряду в якості базового, буде необґрунтовано збільшувати прогностні значення показника. Тому, на практиці, в якості  $y_0$  рекомендується брати усереднене значення декількох останніх спостережень.

Розглянуті методи прогнозування є не лише найпростішими у застосуванні, але й самими наближеними. Тому, за точністю розрахунків, у більшості випадків вони поступаються іншим методам прогнозування.

#### 4. Оцінка надійності прогнозів

Точність та надійність прогнозів – це широко поширені в прогностичній літературі терміни. Їхній зміст, на перший погляд, є цілком очевидним. Але, при детальному розгляді є набагато складнішим, ніж здається спочатку.

Складність полягає в тому, що достовірно оцінити точність складеного прогнозу можна лише за розміром помилки прогнозування, або різниці між фактичним й прогностним значенням досліджуваного показника. Тобто, через деякий проміжок часу, коли майбутні фактичні дані будуть отримані.

На момент складання прогнозу можна оцінити лише рівень відповідності побудованої прогностної моделі ретроспективним даним, рис. 7. Вважається, що отримані ретроспективні помилки певною мірою характеризують точність побудованої прогностної моделі й є корисними при зіставленні декількох методів. В той же час, розмір цих помилок за ретроспективними даними не можна розглядати як остаточний доказ придатності, або непридатності конкретного методу прогнозування.

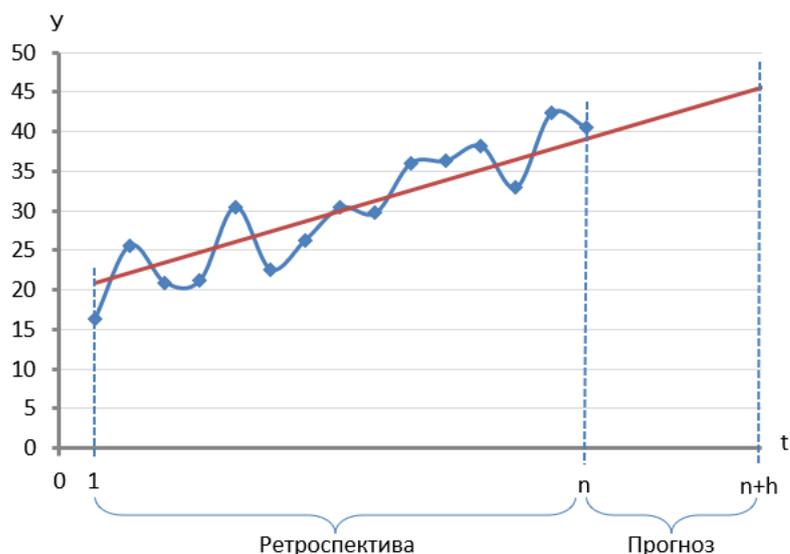


Рис. 7. Ретроспективні дані та прогноз

На рис. 7 ретроспективні дані охоплювали  $n$  періодів. Відповідно, тривалість прогнозу складала  $h$  періодів. Таким чином, оцінка надійності прогнозу розбивається на два етапи:

1. Ретроспективні дані з часовим інтервалом  $t \in [1; n]$ ;
2. Прогнозні дані з часовим інтервалом  $t \in [n+1; n+h]$ .

Розглянемо кожний з цих етапів більш детально.

1. На момент складання прогнозу рівень відповідності побудованої моделі ретроспективним даним протягом  $n$  періодів визначається за допомогою критерію Фішера, формула (19).

$$F_{\text{розр}} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{i,\text{розр}} - \overline{y_{\text{розр}}})^2}{m} \times \frac{n - m - 1}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{i,\text{розр}})^2}, \quad (19)$$

Де  $y_i$  – ретроспективний рівень часового ряду в  $i$ -ий період;  $y_{i,\text{розр}}$  – розрахункове значення ретроспективного рівня часового ряду в  $i$ -ий період часу, згідно побудованої прогнозної моделі;  $\overline{y_{\text{розр}}}$  – середнє значення розрахункових рівнів часового ряду за  $n$  періодів;  $m$  – кількість факторів, що впливають на розрахунковий показник.

При прогнозуванні, найчастіше єдиним фактором впливу на розрахунковий показник є час ( $m = 1$ ). Отримана прогнозна модель вважається адекватною ретроспективним даним, якщо  $F_{\text{розр}} > F_{\text{табл}}(P, m, n)$ .

Табличне значення  $F_{\text{табл}}$  можна розрахувати в Microsoft Excel за допомогою функції:

- =  $FINV(P; m; n-m-1)$  – для україномовної локалізації офісного пакету;
- =  $FRASPOBR(P; m; n-m-1)$  – для російськомовної локалізації.

Тут  $P$  – це допустимий рівень похибки. При  $P = 0,05$  рівень надійності складає 0,95, або 95%.

2. Даний етап виконується після завершення періоду часу  $(n+h)$  й отримання майбутніх фактичних даних досліджуваного показника. В математичній статистиці для оцінки точності прогнозів найчастіше використовуються наступні показники:

– середня абсолютна помилка прогнозування ( $MAE$ ):

$$MAE = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h |y_{fact,n+k} - y_{n+k}|, \quad (20)$$

Де  $y_{fact,n+k}$ ,  $y_{n+k}$  – відповідно, фактичне та прогнозне значення показника у майбутньому  $k$ -ому періоді;  $h$  – тривалість прогнозного періоду.

2. Дисперсія ( $MSE$ ) та середнє квадратичне відхилення ( $RMSE$ ) помилки прогнозування:

$$MSE = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^h (y_{fact,n+k} - y_{n+k})^2, \quad (21)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h (y_{fact,n+k} - y_{n+k})^2}, \quad (22)$$

Зазначені індикатори (20)-(22) вимірюють похибку прогнозу в абсолютних одиницях виміру й тому їхня величина залежить від розмірності досліджуваного показника, що є їх недоліком.

3. Середня абсолютна помилка прогнозування у відсотках ( $MAPE$ ):

$$MAPE = \frac{100\%}{h} \times \sum_{k=1}^h \left| \frac{y_{fact,n+k} - y_{n+k}}{y_{fact,n+k}} \right|, \quad (23)$$

4. Середнє квадратичне відхилення помилки прогнозування у відсотках ( $RMSPE$ ):

$$RMSPE = 100\% \times \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \left( \frac{y_{fact,n+k} - y_{n+k}}{y_{fact,n+k}} \right)^2}, \quad (24)$$

Останні два індикатори (23)-(24) вимірюються у відносних одиницях. Тому можна говорити про певний рівень адекватності прогнозу моделі на основі порівняння значень цих індикаторів з граничним рівнем, значення якого наведені в табл. 6.

Таблиця 6

Критерії оцінки точності прогнозу

MAPE, RMSPE	Точність прогнозу
Менше 10%	Висока
10% – 20%	Добра
20% – 40%	Задовільна
40% – 50%	Погана
Більше 50%	Незадовільна

Довірчий інтервал – це інтервал значень прогнозного показника, до якого він потрапить із певною ймовірністю, яка залежить від обраного рівня довіри. Довірчий інтервал обчислюється за формулою:

$$(y_{n+k} - t_{\text{табл}} S_{\text{пр}}) \leq y_{n+k} \leq (y_{n+k} + t_{\text{табл}} S_{\text{пр}}), \quad (25)$$

Де  $y_{n+k}$  – прогнозне значення показника у майбутньому  $k$ -ому періоді;  $t_{\text{табл}}$  – табличне значення коефіцієнта Ст'юдента;  $S_{\text{пр}}$  – середня квадратична похибка прогнозу.

Для розрахунку табличних значень коефіцієнта Ст'юдента, окрім статистичного довідника може використовуватись вбудована функція Excel:

$$= \text{СТ'ЮДРАСПОБР}(f; P)$$

Де  $f$  – кількість степенів свободи,  $f = (n - 1)$ ;  $P$  – допустимий рівень похибки.

Що стосується середньої квадратичної похибки прогнозу  $S_{\text{пр}}$ , її розрахунок базується на формі прогнозного тренду. Нехай, трендовий компонент має лінійний характер:

$$y_{n+k} = a_0 + a_1 k, \quad (26)$$

Де  $k$  – номер періоду прогнозування,  $k \in [1; h]$ .

Тоді, середня квадратична похибка прогнозу обчислюється як:

$$S_{\text{пр}} = S_y \times \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{(t_{n+k} - \bar{t})^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}}, \quad \text{де } \bar{t} = \frac{n+1}{2}, \quad (27)$$

Де  $S_y$  – середнє квадратичне відхилення фактичних спостережень від розрахункових на ретроспективному періоді;  $n$  – тривалість ретроспективного періоду;  $t_{n+k}$  – період часу на прогновному інтервалі, для якого

розраховується довірчий інтервал,  $t_{n+k} = n + k$ ;  $t_i$  –  $i$ -ий період часу на ретроспективному інтервалі,  $t_i = i$ ;  $\bar{t}$  – порядковий номер рівня часового ряду, що відповідає середині ретроспективного періоду.

Середнє квадратичне відхилення  $S_y$  розраховується за формулою:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{i,\text{розр}})^2}{n - m}}, \quad (28)$$

Де  $m$  – кількість оцінюваних параметрів регресії;  $y_i$  – ретроспективний рівень часового ряду в  $i$ -ий період;  $y_{i,\text{розр}}$  – розрахункове значення ретроспективного рівня часового ряду в  $i$ -ий період часу.

У випадку лінійної регресії (2) оцінюваними параметрами є  $a_0$  та  $a_1$ . Тому  $m = 2$ .

Таким чином, ширина довірчого інтервалу залежить від:

– допустимого рівня похибки, який впливає на  $t_{\text{табл}}$ . Чим вищим є дозволений рівень похибки, тим меншою є ширина довірчого інтервалу та навпаки;

– прогнозного періоду  $t_{n+k}$ . Зі збільшенням строку упередження  $k$ , ширина довірчого інтервалу теж збільшується;

– середнього квадратичного відхилення  $S_y$ . Або, наскільки добре побудована трендова компонента співпадає з ретроспективними даними. Зі збільшенням  $S_y$ , ширина довірчого інтервалу зростає та навпаки.

Для інших видів трендових компонент, відмінних від лінійної залежності (26), середня квадратична похибка прогнозу  $S_{\text{пр}}$  також розраховується за іншими формулами. Ці формули можуть бути знайдені в довідниках з математичної статистики.

Табличні значення коефіцієнта Ст'юдента

Кількість степенів свободи $f = n - 1$	Довірча вірогідність			
	0,90	0,95	0,99	0,999
1	6,3138	12,7062	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	5,8409	12,9240
4	2,1318	2,7764	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,7500	3,6460
40	1,6839	2,0211	2,7045	3,5510
60	1,6706	2,0003	2,6603	3,4602
$\infty$	1,6449	1,9600	2,5758	3,2905

## ТЕМА: ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ ФІНАНСОВИХ ЯВИЩ

1. Сутність та класифікація економіко-математичних методів та моделей прогнозування
2. Дискретні динамічні моделі у прогнозуванні
3. Неперервні динамічні моделі у прогнозуванні. Поняття детермінованого хаосу

### **1. Сутність та класифікація економіко-математичних методів та моделей прогнозування**

Наступною групою формалізованих методів є економіко-математичні методи та моделі прогнозування фінансових явищ. Іноді, складна структура економічних об'єктів дослідження та необхідність приймати конкретні управлінські рішення, з урахуванням багатофакторного впливу на всі складові таких систем, унеможлиблює застосування методів прогнозування, що виходять лише з інерційності економічних процесів.

Слід сказати, що високий рівень інтеграції в міжнародній торгівлі, на ринку ресурсів, розподілу праці та глобалізації бізнесу в останні роки призвів до зростання залежності розвитку національної економіки від впливу зовнішніх факторів. Вказані зміни мали безумовний вплив на господарську діяльність кожного підприємства. Так, лібералізація торгівлі з країнами Європейського Союзу не лише дозволила отримати доступ до зарубіжних ринків збуту продукції власного виробництва, але й суттєво посилила конкуренцію за споживача на внутрішньому ринку. Також, досвід глобальної фінансово-економічної кризи 2008 р., перманентні торгівельні війни, всесвітня пандемія 2020-2021 р., воєнні дії в Україні з 2022 р. та масова релокація бізнесу показали, що економіка України та окремі суб'єкти господарювання виявились надмірно чутливими до негативних змін зовнішньої кон'юнктури. Це, в свою чергу, приводить до неможливості застосування традиційних підходів до прогнозування, оскільки:

- стани рівноваги економічних систем різних рівнів постійно проявляють тенденцію до змін:
- в певні, не визначені проміжки часу, економічні системи демонструють можливість миттєвого переходу від одного рівноважного стану до іншого, що в термінах теорії катастроф мають назву катастрофи;
- в інші проміжки часу характер стану рівноваги може змінюватись зі стійкого на нестійкий та навпаки, тобто, в поведінці системи можуть бути присутні біфуркації.

В зазначених умовах, головний принцип пошукового прогнозування про те, що динаміка минулих періодів дає достатньо гарне наближення в оцінці майбутнього, не завжди себе виправдовує. Тому, ще одним напрямком досліджень у складі формалізованих методів, є економіко-математичне моделювання, до складу якого входять: методи системного аналізу,

економічної динаміки та теорії катастроф, штучного інтелекту та нейронних мереж, імітаційне моделювання тощо. Розглянемо їх більш детально.

Під економіко-математичною моделлю будемо розуміти математичний опис досліджуваного економічного об'єкта, або процесу з метою його дослідження та управління ним. Таким чином, модель – це його спрощене відображення, яке враховує основні властивості, внутрішню структуру, систему прямих та зворотних зв'язків, закономірності розвитку, існуючі обмеження, цільову функцію тощо.

Безпосередній процес створення моделі вивчається в рамках системного аналізу, що є науковим методом пізнання сутності та структурних взаємозв'язків між елементами досліджуваної системи. Методологічно, системний аналіз спирається на математичну статистику, дискретну математику, інформатику, теорію прийняття рішень тощо.

Будь-яка економічна система є динамічною, тобто, параметри її функціонування змінюються в часі. Причому, майбутній стан такої системи функціонально визначається її поточним станом за допомогою зворотних зв'язків. Математично, динамічні рівняння описуються системою диференціальних, або диференційно-різничних рівнянь. Перші відносяться до класу безперервних, другі – до дискретних. Даний напрямок наукових досліджень вивчається методами економічної динаміки та теорії катастроф. Безпосередній процес прогнозування полягає у відслідковуванні руху за фазовою траєкторією у наступній послідовності:

- визначення поточного стану економічної системи;
- визначення швидкості руху за кожною фазовою змінною в наступний період часу, на основі поточного стану;
- розрахунок нового стану системи.

Ще одним сучасним напрямком прогнозування, розвиток якого завдячується інформаційним технологіям, є штучний інтелект, експертні системи та нейронні мережі.

На першому етапі роботи з експертною системою, відбувається завантаження бази знань, що складається з фактів та правил. Правила, в свою чергу, в подальшому можуть використовуватись для отримання нових знань. Прогнозування діяльності підприємства, або макроекономічних показників відбувається на основі ситуаційного підходу в управлінні. Даний підхід виходить з того, що на основі накопиченого досвіду, кожна конкретна ситуація визначає свій оптимальний набір керуючих дій та подальший економічний розвиток. Використання експертних систем також є виправданим у випадку неповноти вхідних даних, або неможливості їх достовірної оцінки.

Нейромережеві технології, на відміну від традиційних методів прогнозування, також можуть використовуватись у випадках складних внутрішніх взаємозв'язків між елементами системи, коли лінійні та нелінійні регресії, або адаптивні методи не дають адекватного результату. Нейронна мережа визначеної структури спочатку проходить етап навчання на контрольній вибірці даних за спеціальними алгоритмами. Після його успішного завершення ми отримуємо можливість подавати на вхід мережі

різні набори початкових даних, або управлінських дій. На виході будемо отримувати прогностичні значення результуючих показників.

Зважаючи на присутність навчання та самонавчання в роботі експертних систем та нейронних мереж можна стверджувати, що їм також властиві ознаки адаптивності.

Ще однією групою методів, що були віднесені до складу економіко-математичного моделювання, є імітаційне моделювання. Як і раніше, економічна система, яку необхідно дослідити, представляється у вигляді аналітичної моделі. Далі, з нею проводиться серія експериментів з метою отримання інформації щодо її можливої поведінки. Імітаційна модель реалізується багаторазово й дозволяє обчислити вірогідності настання того чи іншого стану, з залежності від управлінських дій, або впливу зовнішніх факторів. Таким чином, за допомогою даного інструментарію можна приймати оптимальні рішення за умови їхньої багатократної реалізації, тобто, в системах масового обслуговування, які присутні в операційній діяльності багатьох підприємств.

## 2. Дискретні динамічні моделі у прогнозуванні

Усі системи класифікуються на статичні та динамічні:

– статична система припускає, що всі її входи та виходи задаються статично і незмінні;

– динамічна система – це система, для якої залежність між її входами і виходами визначається операторами з пам'яттю, тобто існує зв'язок з передісторією.

Прогнозування виходить з того, що ми працюємо з динамічними системами. Для динамічних систем визначають поняття інтегральних та фазових кривих (траєкторій). Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – множина змінних системи. Криву в  $(n+1)$  – вимірному просторі  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка описує зміну координат цієї системи в залежності від часу  $t$  називають інтегральною кривою.

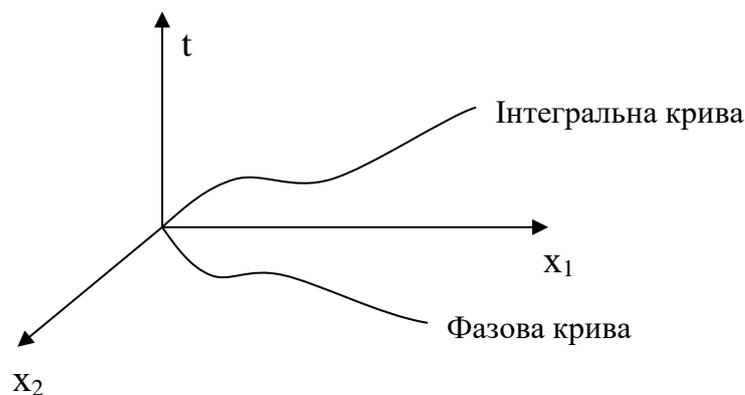


Рис. 1. Інтегральні та фазові криві

Фазова крива – це проекція інтегральної кривої на фазовий простір (простір координат).

При вивченні поведінки економічних систем з випадковими факторами, найбільший інтерес представляє не детальне вивчення поведінки кожної траєкторії окремо, а якісне дослідження системи – визначення характеру поведінки траєкторій усієї системи в цілому, в залежності від загальних властивостей системи. При цьому виділяють 2 напрямки аналізу:

- вивчення поведінки траєкторій системи при фіксованих значеннях параметрів; визначення характерів режимів, що встановлюються в системі. Для вирішення цієї задачі, увага приділяється вивченню особливих траєкторій системи (особових точок – станів рівноваги системи);

- вивчення подій, що відбуваються при зміні параметрів системи. Увага приділяється значенням тих параметрів, при зміні яких відбувається якісна перебудова фазового портрету системи.

Під точкою рівноваги розуміється такий стан, потрапивши в який, траєкторія розвитку динамічної системи вже не зможе залишити її без додаткового зовнішнього втручання. Відповідно, якщо траєкторія системи починається з точки рівноваги, то стан системи з часом не змінюється.

Розрізняють декілька типів поведінки одновимірних систем з наступними інтегральними кривими, рис. 2.

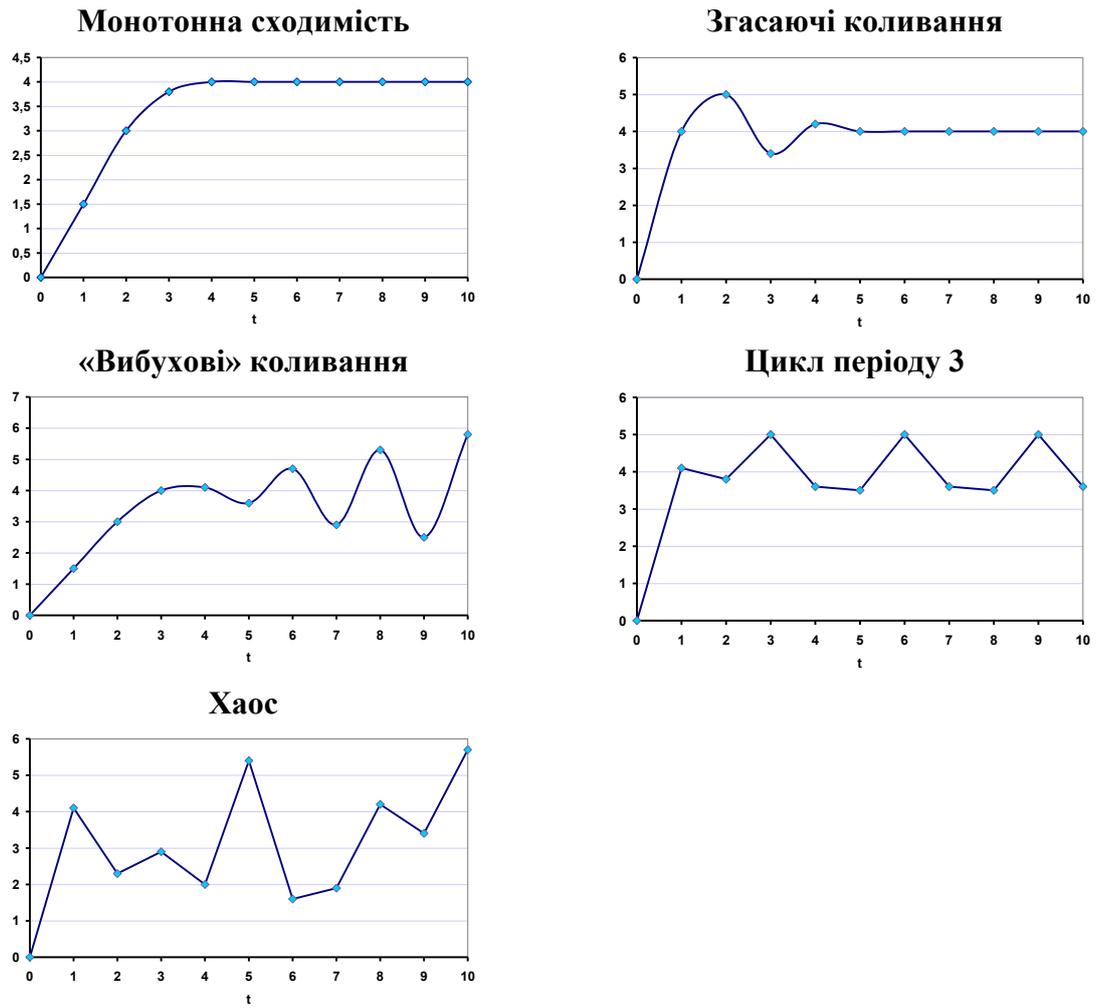


Рис. 2. Типи поведінки одновимірних систем

Дослідження стверджують, що спочатку в динамічних системах спостерігається монотонна сходимость чи згасаючі коливання до динамічної рівноваги (особової точки системи).

Моделювання такої ситуації не викликає труднощів, навіть при використанні статистичних методів. Подальший розвиток системи, як правило, приводить до виникнення біфуркації та переходу до кінцевих циклів великих періодів.

Застосування статистичних методів, в цьому випадку, досить ускладнено, не говорячи вже про можливість виникнення хаосу.

Якщо система є хаотичною, то ніякі спроби використання статистичних методів не дають задовільних результатів, у той час як економічна динаміка, дозволяє побудувати такий механізм керування, що спростить поведінку, зменшить амплітуду коливань та уможливить застосування методів прогнозування динаміки розвитку системи.

**Павутиноподібна модель ринкової рівноваги.** Припустимо, що пропозиція товару  $S$  на ринку реагує на зміну ціни  $p$  з лагом запізнювання в 1 період, у той час, як попит  $D$  визначається поточною ціною й обидві ці залежності лінійні:

$$D_t = a + bp_t \quad ; \quad S_t = a_1 + b_1 p_{t-1} \quad (1)$$

де  $D_t$  – попит на товар в момент часу  $t$ ;  
 $S_t$  – пропозиція товару в момент часу  $t$ ;  
 $p_t$  – ціна на товар в момент часу  $t$ ;  
 $a, b$  – коефіцієнти.

Пропозиція поводитьсь таким чином, тому що наведена модель відноситься до продукції, яка не виробляється миттєво – потрібний визначений проміжок часу. Вирішальним фактором є те, що виробники вважають, що ціна, встановлена на початку періоду, не змінюється протягом його і є основою для вибору обсягів виробництва в майбутньому.

В кожний період ринок встановлює таку ціну, за якої попит поглинає весь обсяг пропозиції, у такий спосіб:

$$D_t = S_t \quad (2)$$

Підставивши рівняння (1) у (2), будемо мати:

$$bp_t - b_1 p_{t-1} = a_1 - a \quad (3)$$

З рівняння (3) можна визначити ціну  $p$  у наступний момент часу на підставі її значення в попередній момент:

$$p_t = \frac{a_1 - a + b_1 p_{t-1}}{b} \quad (4)$$

Ці ж значення ціни можна одержати, знайшовши рішення різничного рівняння (3):

$$p_t = (p_0 - p_e) \left( \frac{b_1}{b} \right)^t + p_e \quad (5)$$

де  $p_e$  – рівноважна ціна, що встановлюється в системі та дорівнює:

$$p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1} \quad (6)$$

Звичайно графік попиту має від’ємний кут нахилу ( $b < 0$ ), а пропозиція – додатний ( $b_1 > 0$ ). Таким чином,  $b_1/b < 0$ , і ціна буде робити коливальні рухи навколо свого рівноважного значення  $p_e$ . Ці періодичні коливання можуть здійснюватися зі зростаючим, постійним чи зменшуючимся періодом, в залежності від співвідношення  $|b_1| \Leftrightarrow |b|$ , тобто, в залежності від того, чи перевершує кут нахилу кривої попиту кут нахилу кривої пропозиції.

Як видно з (5), умова стабільності, тобто умова, за якої ціна сходиться до стану рівноваги  $p_e$ , буде мати вигляд:

$$\left| \frac{b_1}{b} \right| < 1 \quad \text{тобто} \quad |b_1| < |b| \quad (7)$$

Графічно, описаний процес зображено на рис. 3:

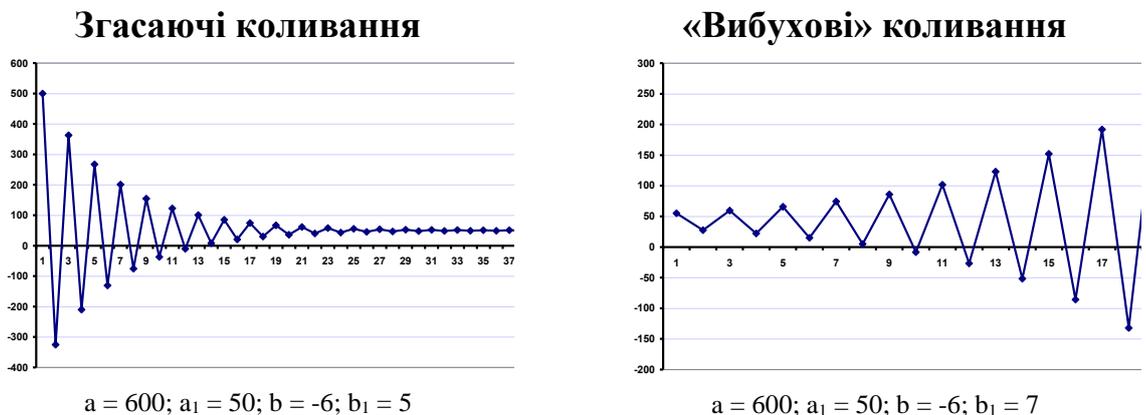


Рис. 3. Ринкова рівновага в павутиноподібній моделі

На рисунку 3 показана ситуація стійкого (ліворуч) та нестійкого (праворуч) стану рівноваги ринкової ціни.

### Модель зростання національного доходу, ефект мультиплікатора.

Нехай, національний дохід  $Y$  в момент часу  $t$  розподіляється на споживання  $C$  та на інвестиції  $I$ :

$$Y_t = C_t + I_t \quad (8)$$

Статистичні дослідження вказують, що обсяг споживання прямо пропорційний обсягу національного доходу, з лагом запізнювання в 1 період:

$$C_t = a + bY_{t-1} \quad a \geq 0 \quad 0 < b < 1 \quad (9)$$

де  $b$  – гранична схильність населення до споживання.

Припустимо, що обсяг інвестицій в економіку не залежить від національного доходу і змінюється з  $I_0$  у початковий момент часу, до  $I_0 + \Delta I$  для всіх наступних періодів:

$$I_t = I_0 + \Delta I \quad (10)$$

Підставляючи рівняння (9) та (10) у (8), одержуємо рівняння:

$$Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I \quad (11)$$

Рішенням різничного рівняння (11) є:

$$Y_t = A(b)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b} \quad (12)$$

Оскільки  $0 < b < 1$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(b)^t = 0$ , отже, рівноважний національний дохід дорівнює  $Y = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b}$ . У даному випадку умова  $0 < b < 1$  – це умова стабільності функціонування системи.

Як відомо з Кейнсіанської макроекономіки, у замкнутій системі збільшення інвестицій на величину  $\Delta I$  призводить, відповідно до ефекту мультиплікатора, до збільшення національного доходу на величину:

$$\Delta Y = \frac{1}{1 - b} \Delta I \quad (13)$$

В цьому випадку, якщо первісне значення величини рівноважного національного доходу було  $Y_0$ , то нове значення точки рівноваги складе:

$$Y_p = Y_0 + \frac{1}{1-b} \Delta I \quad (14)$$

Ця концепція відповідає отриманому рішенню (12). Нове рівноважне значення національного доходу  $Y_t = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1-b}$  та початкове  $Y_0 = \frac{a + I_0}{1-b}$  розрізняються на величину  $\Delta Y = \frac{1}{1-b} \Delta I$ .

Розглянутий випадок припускає, що інвестиції цілком автономні (не залежать від обсягу національного доходу), рівняння (10).

Нехай, обсяг інвестицій частково залежить від національного доходу (з лагом запізнювання в 1 період), відповідно до граничної схильності до інвестування  $h$ :

$$I_t = hY_{t-1} + I_0 + \Delta I \quad 0 < h < 1 \quad (15)$$

Тоді, рівняння (11) буде мати вигляд:

$$Y_t - (b + h)Y_{t-1} = a + I_0 + \Delta I \quad (16)$$

Рішенням різничного рівняння (16) є:

$$Y_t = A(b + h)^t + \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b - h} \quad (17)$$

Система буде прагнути до стану рівноваги  $Y_t = \frac{a + I_0 + \Delta I}{1 - b - h}$ , якщо виконується умова:

$$b + h < 1 \quad (18)$$

Умова стабільності (18) говорить про те, що гранична схильність до інвестування повинна бути меншою за граничну схильність до нагромадження  $(1-b)$ , тобто:  $h < 1 - b$ .

### **3. Неперервні динамічні моделі у прогнозуванні. Поняття детермінованого хаосу**

Хаотичні процеси в динамічних системах – одна з фундаментальних проблем досліджень економічних явищ. Якщо система динамічна, то вона є детермінованою. Тобто, її наступний стан залежить від початкового.

Детермінованість – це однозначний взаємозв'язок причини та наслідків: якщо задано деякий початковий стан системи в момент часу  $t_0$ , то він однозначно визначає стан системи в будь-який наступний момент часу  $t > t_0$ .

Тоді, як в таких системах можуть існувати хаотичні явища, що є повною протилежністю детермінованості й асоціюються з невизначеністю, непередбачуваністю та не відтворюваністю?

Можливість хаотичних процесів в динамічних детермінованих системах передбачав А. Пуанкаре: «У нестійких системах, незначна причина, що непомітна для спостереження за своєю малістю, викликає значну дію, яку неможливо передбачити». Розвиток ідей Пуанкаре призвів до створення фундаменту хаотичної динаміки. Було встановлено, що необхідною умовою виникнення хаосу в динамічних системах є розмірність фазового простору  $n > 2$ , тобто коли стан системи характеризується мінімум трьома змінними.

Розглянемо явище детермінованого хаосу на прикладі експерименту з броунівською часткою. Помістимо частку в момент часу  $t = t_0$  у розчин рідини й за допомогою мікроскопу почнемо фіксувати зміну її положення в часі, визначаючи координати частки через рівні інтервали  $\Delta t$ . Під дією випадкових поштовхів з боку навколишніх молекул, частка буде робити нерегулярні блукання, що характеризуються заплутаною траєкторією. Повторивши експеримент декілька разів, можна зробити наступні висновки:

- щоразу траєкторія поведінки системи складна та неперіодична й відрізняється від попередньої;
- будь-яка спроба однозначного повторення експерименту приводить до негативного результату.

Класичне явище руху броунівської частки, дає чіткі фізичні уявлення про хаос як непередбачуваний, випадковий процес. З іншої сторони, така система є повністю детермінованою, а неможливість повторення траєкторії руху броунівської частки пов'язана із неможливістю повторення початкових умов експерименту.

Таким чином, якщо враховувати можливість якої завгодно малої помилки, то детерміноване прогнозування стає неможливим – головною властивістю динамічних систем, що демонструють режим детермінованого хаосу, є чуттєва залежність режиму функціонування до яких завгодно малих змін початкових умов. Саме ця обставина веде до втрати детермінованої передбачуваності та необхідності вводити імовірнісні характеристики для опису динаміки таких систем.

Модель, яка демонструє явище детермінованого хаосу, описується наступною системою диференціальних рівнянь (система Лоренца):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x + y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (19)$$

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца привів до принципового результату: динамічні системи з детермінованим хаосом мають кінцевий горизонт прогнозування.

Побудова фазового портрета системи (19) у просторі  $xu$ ,  $xz$ ,  $uz$ , а також  $xuz$  дає результати, представлені на рис. 4, для наступних вхідних параметрів:  $r = 30$ ;  $b = 2,67$ ;  $\sigma = 10$ .

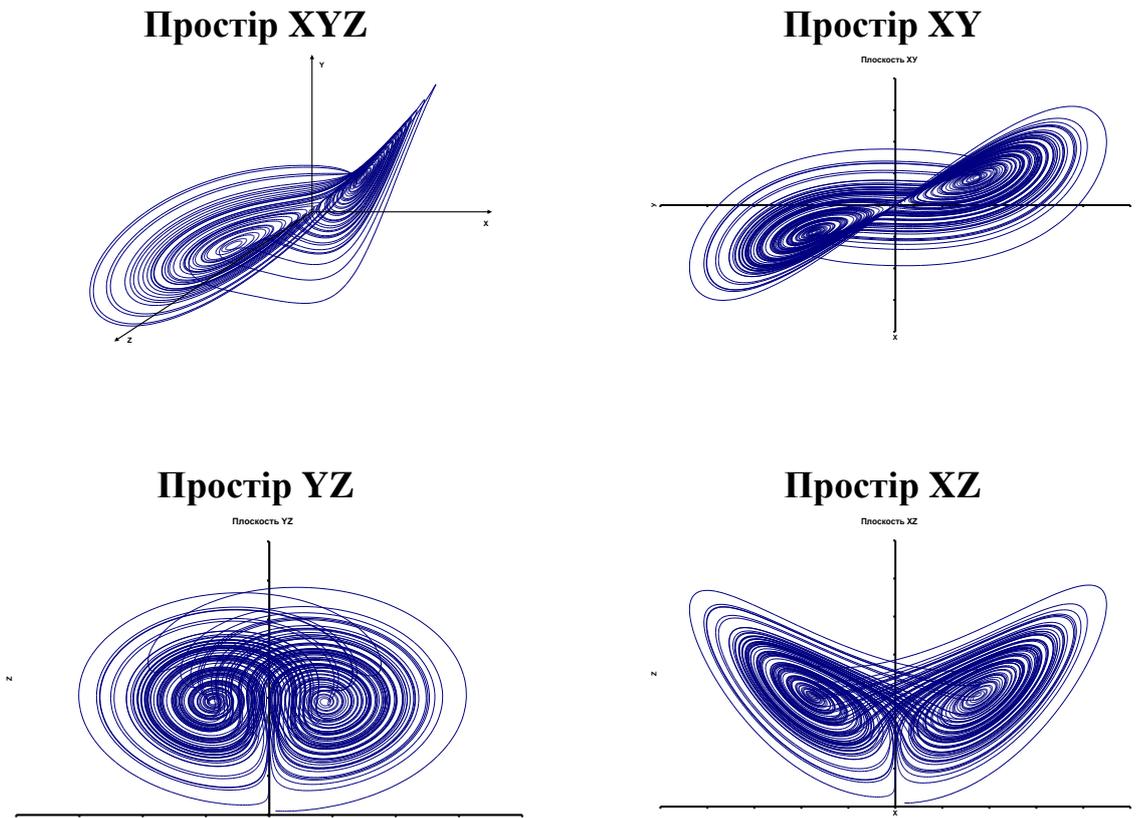


Рис. 4. Фазовий портрет аттрактору Лоренца на різних фазових просторах

Чутливість траєкторій системи до малих змін в початкових параметрах демонструє рис. 5.

На рис. 5 показана динаміка зміни параметра системи  $X$  у часі при невеликих змінах у початкових умовах ( $\Delta x_0 = 0,01$ ). Як видно, на деякому невеликому початковому проміжку часу траєкторії повторюють одна одну, при цьому, їхнє поведження нагадує хаотичне. Але, починаючи з деякого моменту часу, досліджувані траєкторії розходяться й повторень у поведженні системи не спостерігається. Таким чином, строк упередження прогнозу динаміки досліджуваного параметра  $X$  сильно залежить від того, наскільки точно визначений стан системи в початковий момент часу, що й потрібно було доказати.

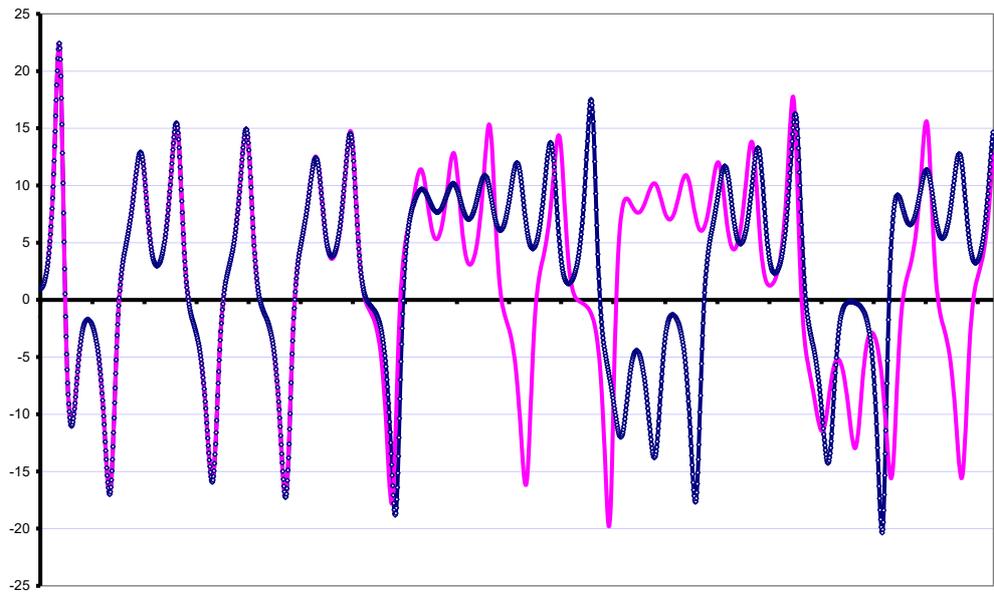


Рис. 5. Поведінка параметру системи  $X$  для різних початкових умов