

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ІНЖЕНЕРНИЙ НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ІМ. Ю.М. ПОТЕБНИ  
ЗАПОРІЗЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

**В.В. Бирський, Є.К. Мержинський, В.В. Глушевський**

## **ПРОГНОЗУВАННЯ СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИЙ ПРОЦЕСІВ**

**практикум для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти  
спеціальності С1 «Економіка» освітньо-професійної програми  
«Інформаційна економіка»**

Затверджено  
вченою радою ЗНУ  
Протокол №\_ від \_\_\_\_\_

Запоріжжя  
2026

УДК 338.24

Бирський В.В., Мержинський Є.К., Глущевський В.В. Прогнозування соціально-економічних процесів: практикум для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності С1 «Економіка» освітньо-професійної програми «Інформаційна економіка». Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2026. 76 с.

Практикум містить практичні завдання з дисципліни «Прогнозування соціально-економічних процесів» та перелік рекомендованої літератури. Видання сприятиме формуванню практичних навичок використання економіко-математичного апарату й сучасних інформаційних технологій для засвоєння курсу.

Для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності С1 «Економіка» освітньо-професійної програми «Інформаційна економіка»

Рецензент:

*Л.Н. Сергєєва*, кандидат фізико-математичних наук, доктор економічних наук, професор, професор кафедри економіки і статистики Класичного приватного університету

Відповідальний за випуск:

*В.В. Бирський*, кандидат економічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційної економіки, підприємництва та фінансів ІННІ ім. Ю.М. Потебні ЗНУ

## ЗМІСТ

ВСТУП	4
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1 Побудова ліній тренду в MS Excel	6
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2 Методи оцінки узгодженості думок експертів у прогнозуванні	12
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3 Парний та множинний регресійний аналіз у прогнозуванні	22
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4 Адаптивні методи прогнозування	42
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5 Моделі економічної динаміки у прогнозуванні	54
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	74
ДОДАТКИ	75

## ВСТУП

Будь-яка господарська діяльність в ринкових умовах пов'язана з невизначеністю, а значить й ризиком. Для зниження міри невизначеності широкого застосування набули методи прогнозування, де можливий стан економічних об'єктів визначається на основі накопиченого досвіду та науково-обґрунтованих припущень. Тобто, отримання нових знань щодо найбільш ймовірного розвитку подій зменшує невизначеність та ризик.

Прогноз – це науково-обґрунтоване судження про можливі стани об'єкта в майбутньому та/або альтернативні шляхи терміни його досягнення. Тоді, прогнозування – це процес розробки економічних та фінансових прогнозів, заснований на відповідних наукових методах. За функціональною ознакою та цілями управління прогнози поділяються на:

– пошукові, які виходять з передумов про те, що внаслідок інерційності економічних процесів, наявні тенденції розвитку об'єкту дослідження зберігаються у короткостроковій, або середньостроковій перспективі. Такі прогнози дозволяють отримати уявлення про його найбільш ймовірний стан у майбутньому;

– нормативні, що визначають, яким чином та в які строки є можливість досягнути бажаного стану. Тобто, розробка нормативного прогнозу відбувається у зворотному напрямку – від цільових значень показників у майбутньому до теперішнього стану.

В курсі «Прогнозування соціально-економічних процесів» вивчаються економіко-математичні методи побудови пошукових прогнозів. В даному практикумі розглядається повний спектр сучасних формальних та неформальних методів прогнозування, з використанням інформаційного забезпечення, що є підґрунтям для формування системи знань та навичок у майбутніх фахівців зі спеціальності С1 «Економіка», які навчаються за освітньо-професійною програмою «Інформаційна економіка». Зокрема, увагу приділено особливостям практичного застосування як експертних методів прогнозування, так й

формалізованих. До складу останніх увійшли методи простої екстраполяції, або парного та множинного регресійного аналізу, адаптивні методи прогнозування, з урахуванням сезонної складової та методи економіко-математичного моделювання. Крім того, особливу увагу приділено інформаційному забезпеченню реалізації вказаних методів прогнозування за допомогою вбудованого функціоналу Microsoft Excel та Statistica.

Дисципліна «Прогнозування соціально-економічних процесів» належить до циклу обов'язкових освітніх компонентів згідно з освітньо-професійною програмою «Інформаційна економіка». Мета курсу полягає в формуванні теоретичних знань та практичних навичок з питань моделювання та прогнозування економічного й соціального розвитку країни. До основних завдань даної дисципліни належать:

- оволодіти теоретичними значеннями та інструментарієм побудови прогнозів фінансово-економічних явищ;
- зрозуміти принципи та функції прогнозування;
- дослідити основні методологічні засади прогнозування;
- засвоїти типологію та основні групи прогнозів;
- набути вмінь постановки і самостійного розв'язання задач прогнозування розвитку економічних об'єктів і процесів.

Практикум покликаний допомогти здобувачам вищої освіти засвоїти знання та набути практичних навичок з основних тем дисципліни «Прогнозування соціально-економічних процесів» в ході аудиторних занять, а також під час самостійної роботи, що сприятиме формуванню вміння приймати обґрунтовані управлінські рішення щодо економічних процесів, пов'язаних зі сферою їх майбутньої діяльності.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

### ПОБУДОВА ЛІНІЙ ТРЕНДУ В MS EXCEL

**Завдання №1.** На основі вхідних даних табл. 1.1 та засобами електронних таблиць Microsoft Excel, необхідно:

1. Побудувати діаграму розсіювання, де по осі ОХ позначити періоди, а по осі ОУ – відповідні обсяги виробництва продукції;
2. Додати на діаграму лінійний тренд. Вивести на діаграмі рівняння регресії та величину апроксимації  $R^2$ . Зробити прогноз цільового показника на два періоди наперед;
3. Виконати попередній етап для побудови всіх можливих ліній тренду (експоненційний, логарифмічний, поліноміальний та степеневий);
4. На основі порівняння відповідних показників  $R^2$  обрати найбільш адекватну лінію тренду й зробити висновки щодо результатів прогнозування.

Таблиця 1.1 – Динаміка виробництва продукції, тис. у.о.

Період (рік)	Обсяг виробництва, тис. у.о.
2006	= 558 + N
2007	597
2008	586
2009	= 750 + 2N
2010	886
2011	922
2012	920
2013	931
2014	983
2015	= 1070 – N
2016	1063
2017	1150
2018	1160
2019	= 1190 + N
2020	1138
2021	1209
2022	1171

Де N – порядковий номер студента по журналу

**Рекомендації до виконання.** Microsoft Excel містить у своєму складі інструментарій, за допомогою якого можна визначати наявність тренду в динаміці будь-якого показника та прогнозувати його розвиток на декілька періодів наперед. В завданні №1, періодом спостереження є рік. В загальному випадку, це можуть бути порядкові номери днів, тижнів, місяців чи кварталів. Чим тривалішою є база спостережень, тим точнішими будуть розрахунки.

1. Для побудови діаграми розсіювання, слід скопіювати вхідні дані на робочий аркуш Excel. Далі, виділяємо за заголовки вхідну таблицю, вкладка «Вставлення», «Точкова діаграма», як показано на рис. 1.1.

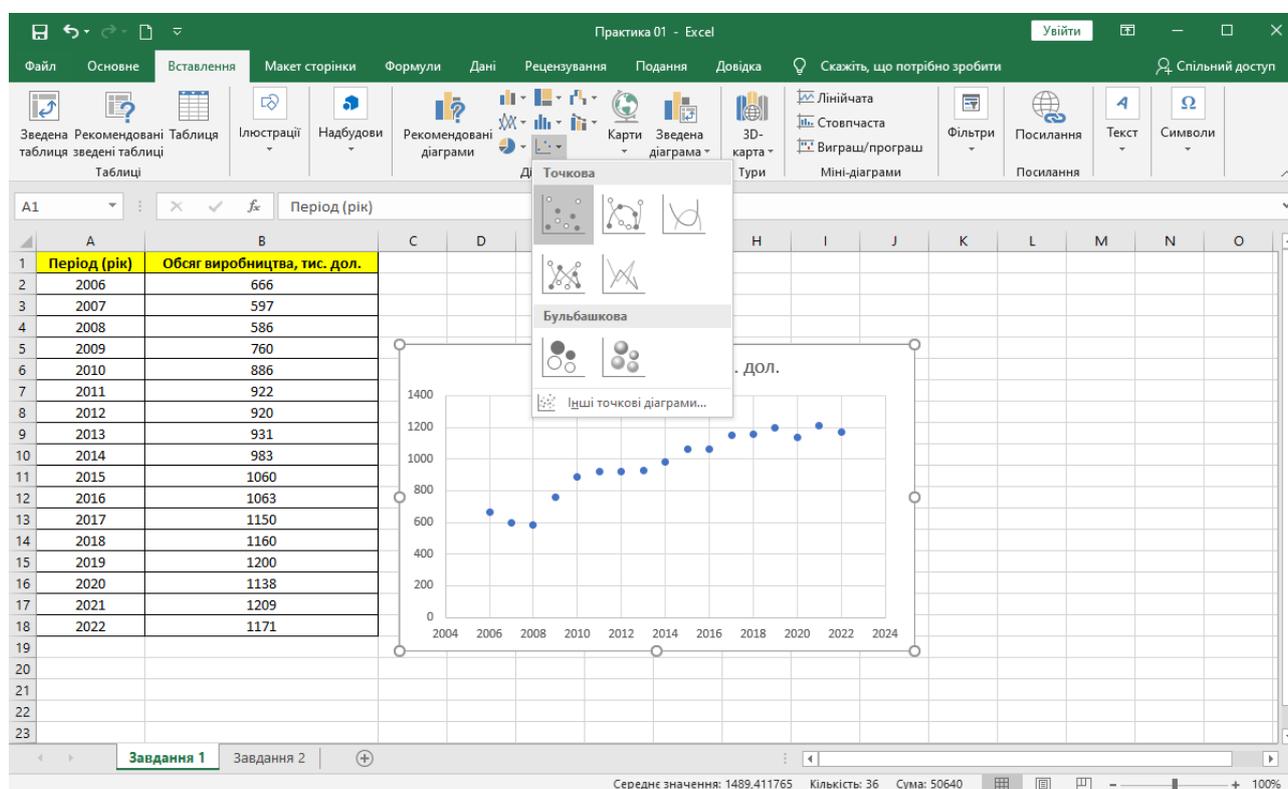


Рис. 1.1. Побудова діаграми розсіювання

2. Для додавання на діаграму лінійного тренду, клікаємо правою кнопкою миші на діаграмі по ряду динаміки та з контекстного меню обираємо «Додати лінію тренду». Далі, в панелі справа «Формат лінії тренду» обираємо лінійну залежність, рис. 1.2. Excel за замовчанням додав на графік лінійний тренд, який є максимально наближеним до наших вхідних даних.

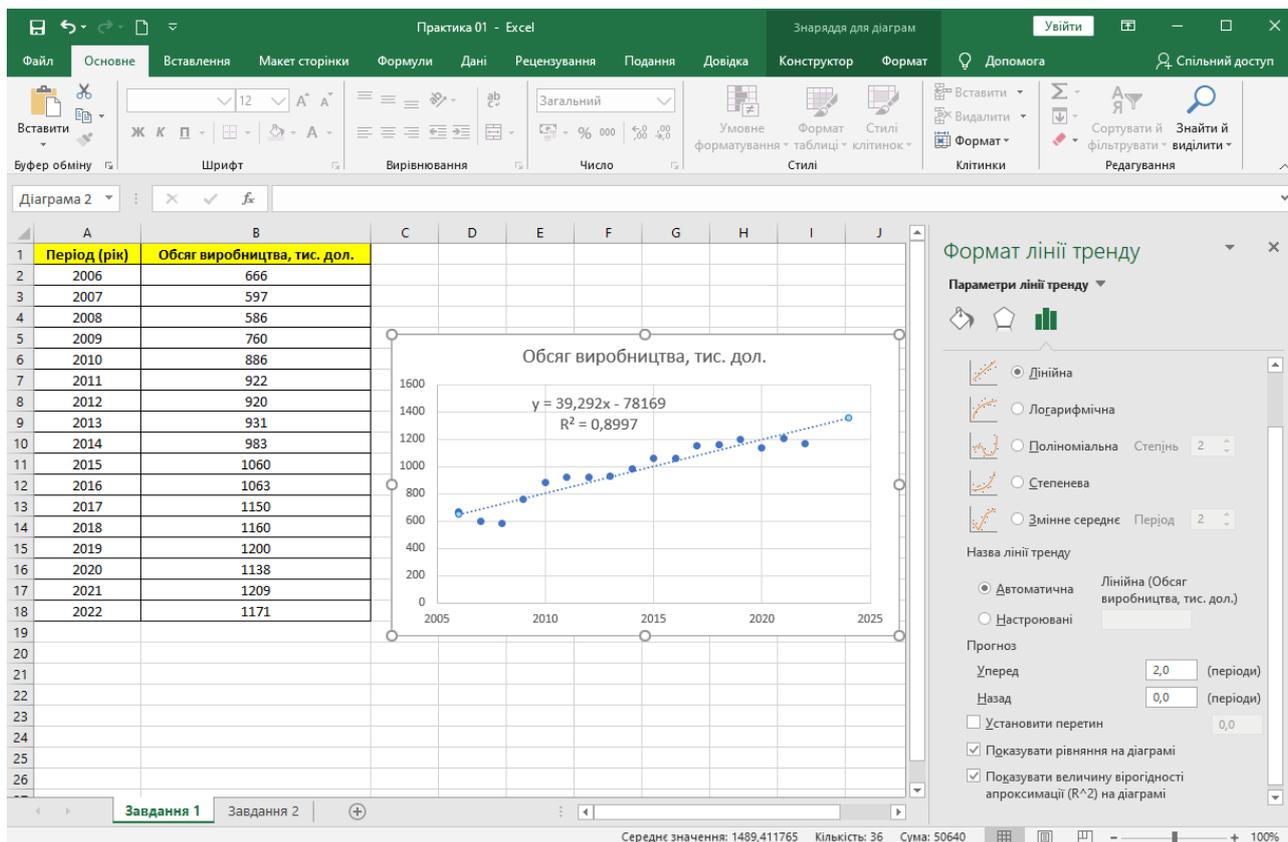


Рис. 1.2. Налаштування параметрів лінії тренду

В полі «Прогноз уперед» вказуємо 2 періоди. Нижче відмічаємо прапорці «Показувати рівняння на діаграмі» та «Показувати величину вірогідності апроксимації ( $R^2$ ) на діаграмі».

На діаграмі з'явилась функція  $y = -78169 + 39,292x$ , де  $x$  – період (рік),  $y$  – розрахунковий випуск продукції.

Нижче наведений показник  $R^2$ , який може приймати значення від 0 до 1. Чим ближче він до 1, тим краще побудований тренд відповідає вхідним даним й тим надійнішими є результати прогнозування. В нашому випадку  $R^2$  дорівнює 0,899. Це означає, що лінійний тренд на 89,9% пояснює річні коливання (дисперсію) обсягів виробництва.

В свою чергу, відхилення окремих спостережень від лінії тренду є неврахованими випадковими коливаннями. Тобто, це коливання (дисперсія), які наша побудована модель не може пояснити.

3. Аналогічним чином на окремих графіках слід побудувати експоненційний, логарифмічний, поліноміальний та степеневий тренди;

виконати прогнозування випуску продукції на два періоди наперед; вивести на кожній діаграмі відповідні рівняння регресії та величину апроксимації  $R^2$ .

4. Остаточні висновки щодо вибору найбільш оптимальної форми залежності слід робити на основі порівняння відповідних показників  $R^2$ , які повинні максимізуватись.

**Завдання №2.** На основі вхідних даних табл. 1.2 та засобами електронних таблиць Microsoft Excel, необхідно побудувати функцію попиту на товар, в залежності від ціни й спрогнозувати, яка ціна принесе підприємству максимальний дохід.

Таблиця 1.2 – Результати вибіркового опитування 20-ти споживачів щодо максимально прийнятної для них ціни товару

№	Максимально прийнятна ціна, грн.	№	Максимально прийнятна ціна, грн.
1	400	11	200
2	250	12	400
3	300	13	450
4	500	14	300
5	350	15	500
6	200	16	250
7	500	17	350
8	320	18	200
9	150	19	350
10	400	20	400

**Рекомендації до виконання.** Для відповіді на поставлені питання, необхідно:

1. Скопіювати вхідні дані на робочий аркуш Excel та здійснити їх упорядкування за зростанням ціни (колонка «В», рис. 1.3);

2. Провести групування вхідних даних за ціною (колонки «D:E», рис. 1.3). Для розрахунку значень в колонці «E» слід використовувати вбудовану функцію =ЧАСТОТА(). Для цього, в комірку «E2» слід ввести формулу:

=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10), або

=ЧАСТОТА(B2:B21;D2:D10).

Далі, починаючи з комірки «E2» слід виділити діапазон «E2:E10» й натиснути <F2>, <CTRL> + <SHIFT> + <ENTER>. Тим самим, виділений діапазон заповниться формулами масивів;

№	Максимально допустима ціна, грн.	Ціна, грн.	Кількість осіб	Попит (вибірка), осіб	Попит (генеральна сукупність), осіб	Ціна, грн.	Попит, осіб	Дохід, тис. грн.
1	400							
2	250							
3	300							
4	500							
5	350							
6	200							
7	500							
8	320							
9	150							
10	400							
11	200							
12	400							
13	450							
14	300							
15	500							
16	250							
17	350							
18	200							
19	350							
20	400							
21								
22								

Рис. 1.3. Вхідні та розрахункові дані для побудови функції попиту

3. Розрахувати попит на продукцію, колонка «F», на основі результатів групування, колонки «D:E». Відповідний розрахунок виконується у зворотному напрямку, від найвищої ціни до найнижчої:

- до комірки «F10» слід ввести формулу =E10;
- до комірки «F9» вводимо формулу =E9+F10. Це означає, що за нижчою ціною згодні придбати товар покупці, для яких вона є максимально допустимою та всі ті, хто був згодний його придбати за вищою ціною;
- комірку «F9» розтягуємо за правий нижній кут до комірки «F2».

4. Зважаючи, що обсяг вибірки склав 0,5% від всієї ємності ринку, обчислити загальний попит, колонка «G». Для цього, в комірку «G2» слід ввести формулу  $=F2/0,05$  й розтягнути її за правий нижній кут на діапазон «G2:G10».

Після виконання етапів (1)-(4), розрахункова таблиця «D2:G10» повинна містити формули, рис. 1.4.

	D	E	F	G
1	Ціна, грн.	Кількість осіб	Попит (вбірка), осіб	Попит (генеральна сукупність), осіб
2	150	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E2+F3	=F2/0,05
3	200	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E3+F4	=F3/0,05
4	250	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E4+F5	=F4/0,05
5	300	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E5+F6	=F5/0,05
6	320	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E6+F7	=F6/0,05
7	350	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E7+F8	=F7/0,05
8	400	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E8+F9	=F8/0,05
9	450	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E9+F10	=F9/0,05
10	500	=FREQUENCY(B2:B21;D2:D10)	=E10	=F10/0,05
11				

Рис. 1.4. Розрахункові формули для побудови функції попиту

5. Отримані значення колонок «D» та «G», рис. 1.4, представляють собою функцію попиту в табличному вигляді, де кожному значенню ціни товару відповідає чисельність споживачів, готових його придбати. На основі цих колонок слід побудувати діаграму розсіювання й визначити за показником апроксимації ( $R^2$ ) найкращу лінію тренду. Відобразити її рівняння на діаграмі;

6. Використовуючи отримане рівняння, обчислити в колонках «I:J» розрахунковий попит. Колонка «I» повинна містити ціну товару, від мінімального значення до максимального, з кроком у 10 грн.; колонка «J» – відповідний прогностичний обсяг продажів;

7. В колонці «K» обчислити прогностичний обсяг доходу, як результат множення попиту на ціну. Побудувати графік залежності доходу від ціни;

8. Спрогнозувати, яка ціна на товар принесе підприємству максимальний дохід. Зробити висновки.

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2**  
**МЕТОДИ ОЦІНКИ УЗГОДЖЕНОСТІ ДУМОК ЕКСПЕРТІВ У**  
**ПРОГНОЗУВАННІ**

**Завдання.** Кожний з 4х експертів провів оцінку підприємств за своїм напрямком. Для вибору варіанту завдань, кожний студент обирає 10 підприємств з табл. 2.1, починаючи зі свого номеру за журналом. Наприклад, 3 варіант обирає підприємства 3-12; 21 варіант обирає підприємства 21-25 та 1-5 й так далі.

Таблиця 2.1 – Результати експертних оцінок діяльності підприємств

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4
	Фінансова напруженість	Ліквідність	Обіговість активів	Рентабельність продажів, %
1	0,32	2,9	3,2	25,1
2	0,06	2,3	3,1	15,6
3	0,64	0,6	2,3	11,2
4	0,63	1,3	3,0	10,4
5	0,35	1,6	2,1	9,2
6	0,12	4,0	2,5	30,0
7	0,52	1,8	1,9	33,0
8	0,46	1,9	2,8	35,0
9	0,30	2,6	3,4	12,0
10	0,13	1,2	3,3	29,0
11	0,22	2,4	1,3	31,0
12	0,50	2,5	2,2	33,1
13	0,19	2,7	4,1	24,0
14	0,51	0,9	2,0	20,0
15	0,45	0,7	3,6	14,4
16	0,38	1,0	1,2	6,0
17	0,42	3,2	1,6	15,0
18	0,56	4,1	2,9	27,0
19	0,57	1,1	2,7	16,0
20	0,10	2,1	3,5	20,5
21	0,24	1,4	3,9	3,3
22	0,16	2,0	0,8	16,8
23	0,59	2,8	1,8	9,0
24	0,17	1,7	1,4	35,7
25	0,15	3,0	1,1	29,8
Напрямок оптимізації	Мінімум	Максимум	Максимум	Максимум

За результатами цієї оцінки необхідно спрогнозувати, в які підприємства доцільно вкладати інвестиції. Для цього:

1. Провести ранжування підприємств за індивідуальними оцінками експертів та з урахуванням напрямків оптимізації показників;
2. За результатами ранжувань провести класифікацію підприємств методом Парето;
3. Узагальнити оцінки експертів методом середніх арифметичних рангів;
4. Розрахувати дисперсійний коефіцієнт конкордації для оцінки узгодженості їх думок;
5. Зробити висновки, які підприємства є найбільш фінансово стійкими.

**Рекомендації до виконання.** Колективні методи прогнозування виходять з необхідності узгодження позицій експертів. Для вибору ефективних (найкращих) рішень з множини допустимих використовується метод оптимальності Парето. Однак, для його застосування, всі попередні експертні оцінки повинні бути проранжовані.

1. Скопіювати вхідні дані на робочий аркуш Excel, діапазон комірок «A1:E13», рис. 2.1. В колонках «F:I» виконується ранжування оцінок кожного експерта за допомогою вбудованої функції =РАНГ().

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Ранжування			
2	Підприємства	Фінансова напруженість	Ліквідність	Обіговість активів	Рентабельність продажів, %	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4
3	1	0,32	2,9	3,2	25,1	=RANK(B3;SB\$3:SB\$12;1)	1		
4	2	0,06	2,3	3,1	15,6	1	5		
5	3	0,64	0,6	2,3	11,2	10	10		
6	4	0,63	1,3	3,0	10,4	9	7		
7	5	0,35	1,6	2,1	9,2	6	6		
8	10	0,13	1,2	3,3	29,0	2	8		
9	11	0,22	2,4	1,3	31,0	4	4		
10	12	0,50	2,5	2,2	33,1	7	3		
11	13	0,19	2,7	4,1	24,0	3	2		
12	14	0,51	0,9	2,0	20,0	8	9		
13	Напрямок оптимізації	Мінімум	Максимум	Максимум	Максимум				
14									

Рис. 2.1. Ранжування експертних оцінок

Для цього, в комірку «F3» слід ввести формулу:

=RANK(B3;\$B\$3:\$B\$12;1), або

=РАНГ(B3;\$B\$3:\$B\$12;1).

Далі, за правий нижній кут розтягуємо дану формулу вниз на діапазон комірок «F3:F12». Найменший ранг відповідає кращому значенню показника фінансової напруженості й навпаки.

Перший аргумент функції =РАНГ() – це індивідуальна вхідна оцінка окремого підприємства, для якого необхідно розрахувати ранжоване значення; другий аргумент – це посилання на діапазон оцінок всіх підприємств; третій аргумент – напрямок оптимізації цільового показника. Якщо показник повинний мінімізуватись, то третій аргумент дорівнює 1; якщо максимізуватись, то 0. Враховуючи це, в комірку «G3» слід ввести наступну формулу й розтягнути її на діапазон «G3:G12»:

=RANK(C3;\$C\$3:\$C\$12;0), або

=РАНГ(C3;\$C\$3:\$C\$12;0).

Аналогічним чином в колонках «H» та «I» ранжуються оцінки двох останніх експертів.

2. Множиною ефективних рішень за критерієм Парето називаються такі, для яких при переході від одного рішення до іншого неможливо покращити оцінку одного експерта, не погіршивши оцінок інших експертів. Або, для рішення з множини ефективних не існує іншого рішення, яке є строго кращим за оцінками всіх експертів.

Наприклад, п'ять експертів оцінили (проранжували) 17 промислових підприємств регіону за рівнем фінансової стійкості, де кращому підприємству відповідає менший ранг й навпаки, табл. 2.2. Тоді, для знаходження множини Парето, скористаємось методом прямого перебору:

– обираємо і-е підприємство й послідовно порівнюємо його зі всіма іншими;

Таблиця 2.2 – Результати ранжувань підприємств експертами

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Експерт 5
1	5	3	6	3	10
2	8	7	7	7	5
3	10	2	3	2	9
4	6	10	8	10	7
5	1	5	2	5	2
6	12	16	16	16	16
7	15	6	10	6	13
8	7	15	15	15	11
9	9	14	9	14	6
10	11	1	5	1	4
11	4	13	12	13	8
12	2	12	4	12	3
13	17	9	14	9	15
14	16	17	17	17	17
15	13	4	13	4	14
16	3	8	1	8	1
17	14	11	11	11	12

– якщо  $i$ -е підприємство за оцінкою хоча б одного експерта є кращим за  $j$ -е підприємство, то  $j$ -е підприємство не може бути ефективним й виключається з множини ефективних рішень.

Таке порівняння слід провести для всіх пар підприємств, табл. 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати прямого перебору й ефективні рішення I групи

	1*	2	3*	4	5*	6	7	8	9	10*	11	12	13	14	15	16*	17
1						1	1	1					1	1	1		1
2						1			1				1	1			1
3						1	1						1	1	1		1
4						1		1						1			1
5		1		1		1	1	1	1		1	1	1	1			1
6														1			
7													1	1			
8						1								1			
9						1								1			
10						1	1						1	1	1		1
11						1		1						1			
12						1		1	1		1			1			
13																	
14																	
15													1	1			
16				1		1		1	1		1		1	1			1
17														1			

Якщо  $i$ -е підприємство (по горизонталі) за оцінками всіх експертів є кращим за  $j$ -е підприємство (по вертикалі), то відповідна комірка таблиці 2.3 вважається зайнятою. Тоді, до множини Парето будуть належати лише ті підприємства, стовпці яких не містять зайнятих комірок. В нашому випадку, це підприємства №1, №3, №5, №10 та №16.

Для пошуку множини Парето другої групи, видалимо з таблиці 2.3 ефективні підприємства першої групи. Тоді, залишкова матриця парних порівнянь набуває вигляду, табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Результати прямого перебору й ефективні рішення II групи

	2*	4*	6	7*	8	9	11	12*	13	14	15*	17
2			1			1			1	1		1
4			1		1					1		1
6										1		
7									1	1		
8			1							1		
9			1							1		
11			1		1					1		
12			1		1	1	1			1		
13												
14												
15									1	1		
17										1		

Таким чином, множина Парето другої групи включає до свого складу підприємства: №2, №4, №7, №12 та №15. Видаляємо з табл. 2.4 рядки та стовпці, які належать підприємствам з другої множини ефективних рішень. В результаті отримуємо табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Результати прямого перебору й ефективні рішення III групи

	6	8	9*	11*	13*	14	17*
6						1	
8	1					1	
9	1					1	
11	1	1				1	
13							
14							
17						1	

Тобто, множина Парето третьої групи включає до свого складу підприємства: №9, №11, №13 та №17. Видаляємо їх з табл. 2.5 й отримуємо наступну матрицю парних порівнянь, табл. 2.6.

Таблиця 2.6 – Результати прямого перебору й ефективні рішення IV групи

	6	8*	14
6			1
8	1		1
14			

Множина Парето четвертої групи підприємств включає до свого складу лише підприємство №8.

Таблиця 2.7 – Результати прямого перебору й ефективні рішення V групи

	6*	14
6		1
14		

По аналогії, множина Парето п'ятої групи включає до свого складу підприємство №6. Тоді, останнє підприємство №14 – це множина Парето шостої групи. Отже, процедура послідовного парного порівняння за методом Парето приводить до наступних результатів:

$$(1, 3, 5, 10, 16) \succsim (2, 4, 7, 12, 15) \succsim (9, 11, 13, 17) \succsim (8) \succsim (6) \succsim (14)$$

На основі вхідних даних, табл. 2.1, необхідно виконати відповідну процедуру парних порівнянь й упорядкувати підприємства за критерієм Парето.

3. Метод середніх арифметичних рангів. Поряд із методом Парето, узгоджену групову оцінку можна знайти методом середніх арифметичних рангів. Це найбільш поширений та технічно простий метод, який дозволяє отримувати достатньо точні результати.

Метод середніх арифметичних рангів складається з етапів:

– експерти надають результати власних ранжувань об'єктів оцінки у вигляді, як було показано в табл. 2.2;

– за кожним рядком таблиці зведених оцінок (табл. 2.2) обчислюється середній ранг за формулою середньої арифметичної простої. Якщо вагові коефіцієнти рівнів компетентності експертів є відомими, то середній ранг обчислюється за формулою середньої арифметичної зваженої;

– на основі усереднених рангів виконується остаточне ранжування рішень, де меншому рангу відповідає краща оцінка, табл. 2.8.

Таблиця 2.8 – Метод середніх арифметичних рангів

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Експерт 5	Середній ранг	Ранг	Парето
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	3	6	3	10	5,4	5	I
2	8	7	7	7	5	6,8	7	II
3	10	2	3	2	9	5,2	4	I
4	6	10	8	10	7	8,2	8	II
5	1	5	2	5	2	3	1	I
6	12	16	16	16	16	15,2	16	V
7	15	6	10	6	13	10	10	II
8	7	15	15	15	11	12,6	14	IV
9	9	14	9	14	6	10,4	12	III
10	11	1	5	1	4	4,4	3	I
11	4	13	12	13	8	10	10	III
12	2	12	4	12	3	6,6	6	II
13	17	9	14	9	15	12,8	15	III
14	16	17	17	17	17	16,8	17	VI
15	13	4	13	4	14	9,6	9	II
16	3	8	1	8	1	4,2	2	I
17	14	11	11	11	12	11,8	13	III

Колонка (8) табл. 2.8 отримана на основі даних колонки (7) й містить результати узагальненого ранжування підприємств за методом середніх арифметичних рангів. В колонці (9) наведені множини ефективних рішень за методом Парето, отримані з даних попереднього завдання. На практиці, для зниження ризиків прогнозування, рекомендовано використовувати обидва методи одночасно.

4. Оцінка узгодженості суджень експертів. Рівень довіри до результатів узгодженої позицій експертів оцінюється за допомогою дисперсійного

коефіцієнта конкордації  $W$ . Для його розрахунку введемо умовні позначення. Нехай, матриця ранжувань експертів представлена у вигляді:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1d} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2d} \\ \dots & \dots & r_{is} & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{md} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

Де  $m$  – кількість рішень, за якими виконується експертна оцінка;  $d$  – кількість експертів;  $r_{is}$  – ранг  $i$ -ого рішення, що був привласнений  $s$ -им експертом.

Тоді, розрахунок дисперсійного коефіцієнта конкордації  $W$  здійснюється за формулами:

$$W = \frac{12}{d^2(m^3 - m)} \times S, \quad (2.2)$$

$$S = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s=1}^d r_{is} - \bar{r} \right)^2, \quad (2.3)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^d r_{is}, \quad (2.4)$$

Зауваження: індивідуальні експертні оцінки не повинні містити пов'язаних (однакових) рангів.

Дисперсійний коефіцієнт конкордації змінюється в межах  $0 \leq W \leq 1$ . Якщо  $W=1$ , то всі індивідуальні ранжування експертів є подібними між собою, тобто, між їхніми оцінками спостерігається максимальний рівень узгодженості та навпаки. Для інтерпретації його значень використовується наступна шкала:

$W \in [0; 0,3]$  – рівень узгодженості оцінок експертів є дуже слабким;

$W \in [0,3; 0,5)$  – слабкий;

$W \in [0,5; 0,7)$  – помірний;

$W \in [0,7; 0,9)$  – високий;

$W \in [0,9; 1]$  – дуже високий.

Висока неузгодженість експертних оцінок ( $W < 0,5$ ) може свідчити про низький рівень компетентності окремих членів групи, або низьку поінформованість щодо даного питання. В такому випадку, після додаткового вивчення проблемної ситуації, експертне опитування необхідно повторити.

Розрахуємо дисперсійний коефіцієнт конкордації за даними табл. 2.2 й оцінимо міру узгодженості думок експертів.

Спочатку знаходимо  $\bar{r}$ :

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^d r_{is} = \frac{1}{17} \times 765 = 45, \quad (2.5)$$

Далі обчислюємо S, табл. 2.9.

Таблиця 2.9 – Розрахунок квадратів відхилень

Підприємства	Експерт 1	Експерт 2	Експерт 3	Експерт 4	Експерт 5	Сума рангів	$(\text{Сума рангів} - \bar{r})^2$
1	5	3	6	3	10	27	$= (27 - 45)^2 = 324$
1	8	7	7	7	5	34	$= (34 - 45)^2 = 121$
2	10	2	3	2	9	26	$= (26 - 45)^2 = 361$
3	6	10	8	10	7	41	16
4	1	5	2	5	2	15	900
5	12	16	16	16	16	76	961
6	15	6	10	6	13	50	25
7	7	15	15	15	11	63	324
8	9	14	9	14	6	52	49
9	11	1	5	1	4	22	529
10	4	13	12	13	8	50	25
11	2	12	4	12	3	33	144
12	17	9	14	9	15	64	361
13	16	17	17	17	17	84	1521
14	13	4	13	4	14	48	9
15	3	8	1	8	1	21	576
16	14	11	11	11	12	59	196
						S =	6442

Наостанок, розраховуємо значення дисперсійного коефіцієнту конкордації:

$$W = \frac{12}{d^2(m^3 - m)} \times S = \frac{12}{5^2 \times (17^3 - 17)} \times 6442 = 0,6316, \quad (2.6)$$

Як бачимо, оцінки експертів мають помірний рівень узгодженості. А отже, ми можемо довіряти результатам попередніх розрахунків.

5. На основі вхідних даних, табл. 2.1 та результатів класифікації підприємств методом Парето й середніх арифметичних рангів спрогнозувати, які з них є найменш ризикованими з точки зору зовнішніх інвесторів. Підтвердити, або спростувати зроблені висновки на основі аналізу узгодженості думок експертів за допомогою дисперсійного коефіцієнту конкордації.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

## ПАРНИЙ ТА МНОЖИННИЙ РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ У ПРОГНОЗУВАННІ

**Завдання №1.** В таблиці 3.1 наведені вхідні дані двох інтервальних часових рядів  $Y_1$  та  $Y_2$  й моментного часового ряду  $Y_3$ . На їх основі необхідно:

1. Побудувати діаграми розсіювання для часових рядів  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$ ;
  2. Оцінити часові ряди  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$  на однорідність, за допомогою квадратичного коефіцієнта варіації;
  3. Оцінити часові ряди  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$  за достатністю обсягу даних з рівнем довірчої вірогідності у 90% та 95%;
  4. Порівняти за обчисленими показниками часові ряди  $Y_1$  з  $Y_2$  та  $Y_1$  з  $Y_3$ .
- Зробити висновок про придатність вхідних даних до прогнозування.

Таблиця 3.1 – Вхідні дані часових рядів  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$ 

Період	$Y_1$	$Y_2$	Дата	$Y_3$
1	8,0	= 3,5 – N/10	01.07.2020	8,0
2	11,7	= 7,2 – N/10	01.08.2020	11,7
3	8,8	= 4,3 – N/10	01.11.2020	8,8
4	8,4	= 3,9 – N/10	01.12.2020	8,4
5	12,5	= 8,0 – N/10	01.01.2021	12,5
6	8,0	= 3,5 – N/10	01.03.2021	8,0
7	9,3	= 4,8 – N/10	01.06.2021	9,3
8	10,8	= 6,3 – N/10	01.09.2021	10,8
9	9,9	= 5,4 – N/10	01.10.2021	9,9
10	12,5	= 8,0 – N/10	01.12.2021	12,5
11	12,1	= 7,6 – N/10	01.01.2022	12,1
12	12,5	= 8,0 – N/10	01.02.2022	12,5
13	10,3	= 5,8 – N/10	01.06.2022	10,3
14	13,5	= 9,0 – N/10	01.07.2022	13,5
15	12,0	= 7,5 – N/10	01.08.2022	12,0
16	9,9	= 5,4 – N/10	01.09.2022	9,9
17	14,1	= 9,6 – N/10	01.10.2022	14,1
18	11,2	= 6,7 – N/10	01.11.2022	11,2
19	10,9	= 6,4 – N/10	01.01.2023	10,9
20	15	= 10,5 – N/10	01.02.2023	15
21	10,6	= 6,1 – N/10	01.03.2023	10,6
22	11,9	= 7,4 – N/10	01.04.2023	11,9
23	13,5	= 9,0 – N/10	01.10.2023	13,5
24	12,6	= 8,1 – N/10	01.11.2023	12,6

Де N – порядковий номер студента по журналу

**Рекомендації до виконання.** За ознакою часу, ряди динаміки можуть бути моментними, або інтервальними. Часовий ряд є моментним, якщо значення його рівнів вимірюються на конкретну дату (наприклад, вартість основних виробничих фондів на 1 січня). Часовий ряд є інтервальним, якщо значення його рівнів утворюються шляхом агрегування (підсумовування) за певний період (наприклад, обсяг виробленої продукції за січень).

При обчисленні варіації часового ряду, виникає необхідність розраховувати його математичне сподівання (середній рівень). Для моментних рядів середню величину визначають за формулами середньої хронологічної простої, або зваженої:

1. Якщо проміжки часу між датами рівні – середня хронологічна проста:

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1}, \quad (3.1)$$

Де  $y_t, t = 1 \dots n$  – рівні ряду на момент часу  $t$ ;  $n$  – кількість спостережень.

2. Якщо проміжки часу між датами нерівні – середня хронологічна зважена:

$$\bar{y} = \frac{\sum_t \bar{y}_t f_t}{\sum_t f_t}, \quad \text{де } \bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t}{2}, \quad (3.2)$$

Де  $y_t, t = 1 \dots n$  – рівні ряду на момент часу  $t$ ;  $\bar{y}_t$  – проміжна середня на момент часу  $t$ ;  $f_t$  – тривалість проміжку часу між спостереженнями  $y_{t-1}$  та  $y_t$ .

3. Для інтервальних рядів (рівних та нерівних інтервалів) середню величину визначають за формулою середньої арифметичної простої:

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n}, \quad (3.3)$$

Де  $n$  – загальна тривалість всього досліджуемого періоду.

Придатність часового ряду до прогнозування визначається на основі варіації його рівнів, тобто, коливань індивідуальних значень ознаки навколо математичного сподівання: чим меншою є варіація, тим сукупність є більш однорідною й тим надійнішими є характеристики центру розподілу.

Для вимірювання варіації рівнів часового ряду, використовуються показники: дисперсії, стандартного відхилення та квадратичного коефіцієнта варіації. Розглянемо методику їх розрахунку більш детально:

1. Дисперсія ( $\sigma^2$ ) – це середнє значення квадрату відхилень рівнів часового ряду від його середнього рівня, формула (3.4).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}{n}, \quad (3.4)$$

Якщо вхідні дані представлені моментним часовим рядом з нерівними проміжками часу між вимірюваннями, тоді формула дисперсії обчислюється за середньою зваженою (3.5):

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\bar{y}_t - \bar{y})^2 f_t}{\sum f_t}, \quad \text{де } \bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t}{2}, \quad (3.5)$$

Де  $\bar{y}_t$  – проміжна середня величина;  $f_t$  – тривалість проміжку часу між спостереженнями  $y_{t-1}$  та  $y_t$ .

2. Стандартне відхилення ( $\sigma$ ) – це корінь квадратний з дисперсії, формула (3.6).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad (3.6)$$

Стандартне відхилення вимірює вплив випадкових факторів на коливання рівнів часового ряду навколо математичного сподівання. Чим меншим є значення  $\sigma$ , тим краще середній рівень  $\bar{y}$  характеризує часовий ряд, тобто, дію головних факторів.

3. Квадратичний коефіцієнт варіації – це відношення стандартного відхилення до центру розподілу, формула (3.7).

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma}{\bar{y}} \times 100\%, \quad (3.8)$$

Якщо  $K_{\sigma} \leq 33,3\%$ , то часовий ряд вважається однорідним й може використовуватись для подальшого прогнозування. Якщо ж  $K_{\sigma} \geq 40,0\%$ , то говорять про значні коливання рівнів ряду, а отже, побудований на їх основі прогноз не буде мати належної точності.

Поряд з варіацією, наявний часовий ряд повинний бути оцінений на достатність обсягу вхідних даних. Для цього, мінімально необхідний обсяг часового ряду буде розраховуватись за формулою (3.9).

$$n_{\min} = \frac{K_{\sigma}^2 * t_{\text{таблич}}^2}{m^2}, \quad (3.9)$$

Де  $m$  – показник, що відображає допустимий рівень похибки й становить 0,05 – 0,1 (5% - 10%);  $t_{\text{таблич}}(n-1, P)$  – коефіцієнт Ст'юдента, що знаходиться з додатку А й залежить від параметрів:  $n$  – кількість рівнів часового ряду;  $P$  – рівень довірчої вірогідності ( $P = 1 - m$ ).

Дані часового ряду можуть бути використані для подальшого прогнозування лише тоді, якщо виконуються обидві умови одночасно: ( $K_{\sigma} \leq 33,3\%$ ) та ( $n \geq n_{\min}$ ).

В протилежному випадку, статистичні дані вважають неоднорідними. Тобто, коливання рівнів часового ряду підпадають під значний вплив випадкових факторів, або їхній обсяг є недостатнім для побудови прогнозу. В будь якому випадку, кількість періодів упередження (прогнозних рівнів часового ряду) не може перевищувати  $\frac{n}{3}$ .

**Завдання №2.** В результаті порівняння в завданні №1 часових рядів  $Y_1$  та  $Y_2$  за однорідністю й достатністю обсягів було з'ясовано, що часовий ряд  $Y_1$  є більш придатним для прогнозування. Тому, далі на його основі слід виконати наступні етапи:

1. Спрогнозувати динаміку часового ряду  $Y_1$  на наступні 5 періодів, методами середнього абсолютного приросту та середнього темпу зростання. В якості базового рівня прогнозування, взяти середнє значення трьох останніх спостережень;

2. На основі ретроспективних даних оцінити точність обох прогнозів за допомогою показників: *MAE*, *MSE*, *RMSE*, *MAPE* та *RMSPE*. Порівняти їх між собою;

3. Результати прогнозування показати на графіку. Зробити висновок про доцільність застосування методів середнього абсолютного приросту чи середнього темпу зростання для прогнозування вказаного часового ряду.

**Рекомендації до виконання.** Для відповіді на поставлені питання, необхідно:

При наявності ярко вираженого тренду в динаміці часового ряду, найбільш простими методами прогнозування є: метод середнього абсолютного приросту та середнього темпу зростання. Розглянемо їх більш детально.

1. Метод середнього абсолютного приросту. Прогнозний рівень економічного показника обчислюється у відповідності із середнім абсолютним приростом даної величини в минулому, формула (3.10).

$$y_{n+k} = y_0 + \bar{\Delta} \times k, \quad \text{де } \bar{\Delta} = \frac{\Delta y}{n-1} = \frac{y_n - y_1}{n-1}, \quad (3.10)$$

Де  $y_{n+k}$  – прогнозне значення показника для  $k$ -ого періоду;  $y_0$  – базовий рівень екстраполяції;  $\bar{\Delta}$  – середній абсолютний приріст рівнів ряду;  $n$  – тривалість вхідного часового ряду (кількість періодів);  $k$  – номер періоду прогнозування.

Метод середнього абсолютного приросту застосовується у випадках, якщо досліджуваний показник має загальну лінійну тенденцію розвитку.

2. Метод середнього темпу зростання. Прогнозний рівень економічного показника обчислюється у відповідності із середнім темпом зростання даної величини в минулому, формула (3.11).

$$y_{n+k} = y_0 \times \bar{T}^k, \quad \text{де } \bar{T} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}, \quad (3.11)$$

Де  $\bar{T}$  – середній темп зростання рівнів ряду.

Даний метод прогнозування застосовується у випадках, якщо загальна тенденція ряду динаміки характеризується показовою, або експоненційною кривою.

Очевидно, що прогнозні значення  $y_{n+k}$  будуть залежати від базового рівня екстраполяції  $y_0$ , або від того, в який бік він буде відхилятися від тренду. В якості базового рівня екстраполяції може обиратися останній, або передостанній рівень ряду, однак такий підхід може призвести до зміщення прогнозної оцінки, рис. 3.1.

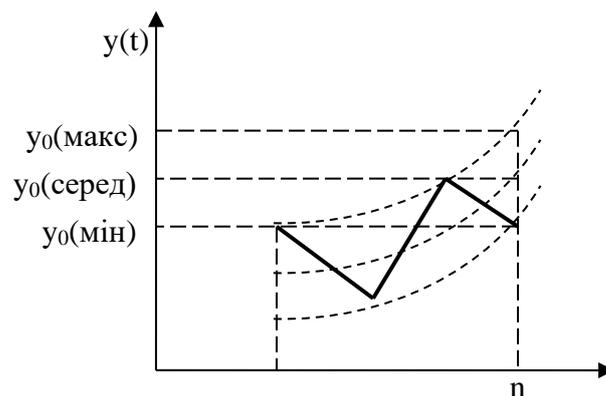


Рис. 3.1. Вибір базового рівня екстраполяції

Як бачимо з рис. 3.1, прийняття останнього рівня ряду в якості базового, призводить до зміщення прогнозної оцінки в бік зменшення; передостанній рівень ряду в якості базового, буде необґрунтовано збільшувати прогнозні

значення показника. Тому, на практиці, в якості  $y_0$  рекомендується брати усереднене значення декількох останніх спостережень. Тому, в якості базового рівня прогнозування будемо брати середнє значення трьох останніх спостережень.

Слід пам'ятати, що розглянуті методи прогнозування є не лише найпростішими у застосуванні, але й самими наближеними. Тому, за точністю розрахунків, у більшості випадків вони поступаються іншим методам прогнозування.

Далі, на основі ретроспективних даних необхідно оцінити точність обох прогнозів за допомогою показників:

1. Середня абсолютна помилка прогнозування (*MAE*):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_{fact,i} - y_i|, \quad (3.12)$$

Де  $y_{fact,i}$ ,  $y_i$  – відповідно, фактичне та розрахункове значення досліджуваного показника в  $i$ -ому періоді;  $n$  – тривалість вхідного часового ряду.

2. Дисперсія (*MSE*) та середнє квадратичне відхилення (*RMSE*) помилки прогнозування:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{fact,i} - y_i)^2, \quad (3.13)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{fact,i} - y_i)^2}, \quad (3.14)$$

Зазначені індикатори (3.12)-(3.14) вимірюють похибку прогнозу в абсолютних одиницях виміру й тому їхня величина залежить від розмірності досліджуваного показника, що є їхнім недоліком.

3. Середня абсолютна помилка прогнозування у відсотках (*MAPE*):

$$MAPE = \frac{100\%}{n} \times \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_{fact,i} - y_i}{y_{fact,i}} \right|, \quad (3.15)$$

4. Середнє квадратичне відхилення помилки прогнозування у відсотках (*RMSPE*):

$$RMSPE = 100\% \times \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_{fact,i} - y_i}{y_{fact,i}} \right)^2}, \quad (3.16)$$

Останні два індикатори (3.15)-(3.16) вимірюються у відносних одиницях. Тому, можна говорити про певний рівень адекватності прогнозної моделі на основі порівняння значень цих індикаторів з граничним рівнем, значення якого наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Критерії оцінки точності прогнозів

MAPE, RMSPE	Точність прогнозу
Менше 10%	Висока
10% – 20%	Добра
20% – 40%	Задовільна
40% – 50%	Погана
Більше 50%	Незадовільна

**Завдання №3.** На основі вхідних даних, додаток В та засобами візуального аналізу електронних таблиць Microsoft Excel, необхідно перевірити стаціонарність часових рядів  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$ . Для цього, виконати наступні етапи:

1. Побудувати графіки динаміки кожного часового ряду:  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$ ;
2. За допомогою ковзних середніх з інтервалом згладжування  $m = 20$ , побудувати графіки динаміки математичних сподівань та дисперсій для кожного часового ряду;

3. Побудувати графіки автокореляційних функцій кожного часового ряду й зробити висновки щодо їхньої стаціонарності.

**Рекомендації до виконання.** Стаціонарний часовий ряд повинний відповідати наступним умовам:

1. Математичне сподівання (середній рівень часового ряду) є постійною величиною й з часом не змінюється;

2. Дисперсія рівнів часового ряду також є постійною величиною й з часом не змінюється;

3. Відсутність, або слабка автокореляція між рівнями часового ряду. Вимога про відсутність автокореляції означає відсутність узгодженості коливань рівнів часового ряду між різними проміжками часу. Дана умова унеможлиблює наявність сезонних, або циклічних коливань.

Відповідно до вказаних умов, прогноз для стаціонарного часового ряду завжди буде дорівнювати його математичному сподіванню, або середньому рівню.

Розглянемо більш детально умову про відсутність автокореляції. Функція  $f(\Delta) = \text{Corr}(y_t; y_{t+\Delta})$  називається автокореляційною функцією, де  $\text{Corr}(y_t; y_{t+\Delta})$  – це коефіцієнт кореляції Пірсона між різними інтервалами одного й того самого часового ряду  $Y$ . Один з інтервалів починається з періоду  $t$ , а інший – з періоду  $(t+\Delta)$ . Для стаціонарного часового ряду зі зростанням  $\Delta$ , автокореляційна функція  $f(\Delta)$  наближається до нуля:

–  $\text{Corr} \in [-1; -0,7)$ , або  $\text{Corr} \in (+0,7; +1]$  – сильна зворотна, або пряма лінійна залежність;

–  $\text{Corr} \in [-0,7; -0,3)$ , або  $\text{Corr} \in (+0,3; +0,7]$  – середня зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок існує, але він менш сильний;

–  $\text{Corr} \in [-0,3; -0,1)$ , або  $\text{Corr} \in (+0,1; +0,3]$  – слабка зворотна, або пряма лінійна залежність. Зв'язок слабкий;

–  $\text{Corr} \in [-0,1; +0,1]$  – дуже слабка, або відсутня лінійна залежність.

–  $Corr \rightarrow 0$  – кореляція відсутня, лінійного статистичного взаємозв'язку між змінними не спостерігається.

При обчисленні автокореляційної функції, виходять з наступних рекомендацій щодо ширини інтервалів, які порівнюються між собою:

– для коротких часових рядів (до 100 спостережень) слід використовувати ширину інтервалу від 5 до 10;

– для часових рядів середньої довжини (100-500 спостережень) слід використовувати ширину інтервалу від 10 до 20;

– для довгих часових рядів (більше 500 спостережень) слід використовувати ширину інтервалу від 20 до 50.

В нашому випадку довжина часового ряду дорівнює 100 періодам, тому в якості ширини інтервалів при побудові кореляційної функції, прийmemo  $m = 20$ . Для перевірки умов стаціонарності часових рядів, будемо використовувати вбудовані функції Microsoft Excel. На рис. 3.1 показаний приклад аналізу часового ряду  $Y_1$ .

C21					
=AVERAGE(B2:B21)					
	A	B	C	D	E
1	Період	Часовий ряд $Y_1$	Середнє $Y_1$	Дисперсія $Y_1$	Автокореляція $Y_1$
2	1	54,47			
3	2	59,17			
4	3	62,09			
5	4	53,82			
6	5	49,69			
7	6	49,44			
8	7	64,47			
9	8	68,75			
10	9	74,50			
11	10	66,95			
12	11	60,73			
13	12	59,77			
14	13	74,15			
15	14	77,66			
16	15	83,94			
17	16	75,49			
18	17	67,25			
19	18	65,04			
20	19	80,48			
21	20	85,82	66,68	112,17	1,0000
22	21	90,94	68,51	130,80	0,7719

Рис. 3.1. Аналіз часового ряду  $Y_1$

В стовпцях А:В, рис. 3.1, розташовані вхідні дані часового ряду  $Y_1$ , які містять 100 спостережень, додаток В. Його динаміка наведена на рис. 3.2.

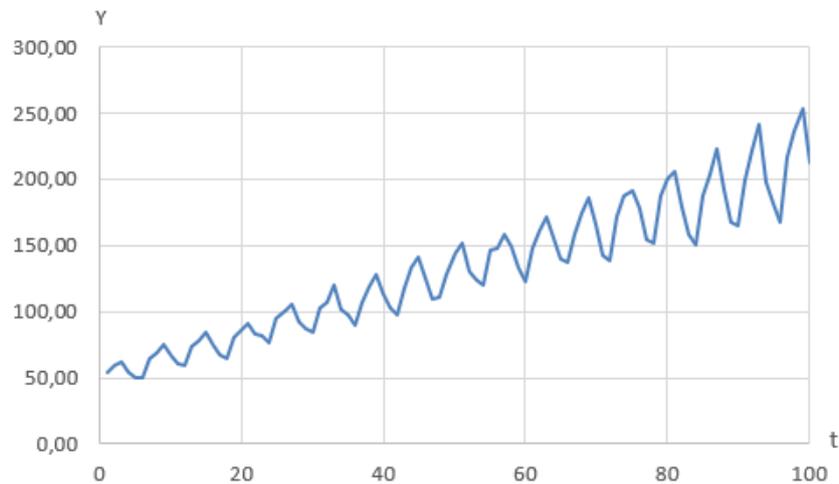


Рис. 3.2. Динаміка часового ряду  $Y_1$

З рис. 3.2 видно, що часовий ряд  $Y_1$  не відповідає жодному критерію стаціонарності:

- середній рівень ряду з часом має тенденцію до зростання;
- амплітуда коливань рівнів часового ряду, а отже й варіація навколо середнього рівня також з часом збільшуються. Відповідно, дисперсія повинна зростати;
- вхідний ряд містить циклічні коливання, а отже, умова про відсутність автокореляції також не задовольняється.

Перевіримо дані висновки за допомогою аналітичних й візуальних засобів Excel.

В колонці С, рис. 3.1, будемо обчислювати динаміку ковзної середньої з інтервалом згладжування  $m = 20$ . Для цього, в комірку С21 слід ввести формулу `=AVERAGE(B2:B21)`, або `=CPЗНАЧ(B2:B21)` й за правий нижній кут розтягнути її вниз до комірки С101. Відповідна динаміка ковзної середньої в графічному вигляді показана на рис. 3.3.

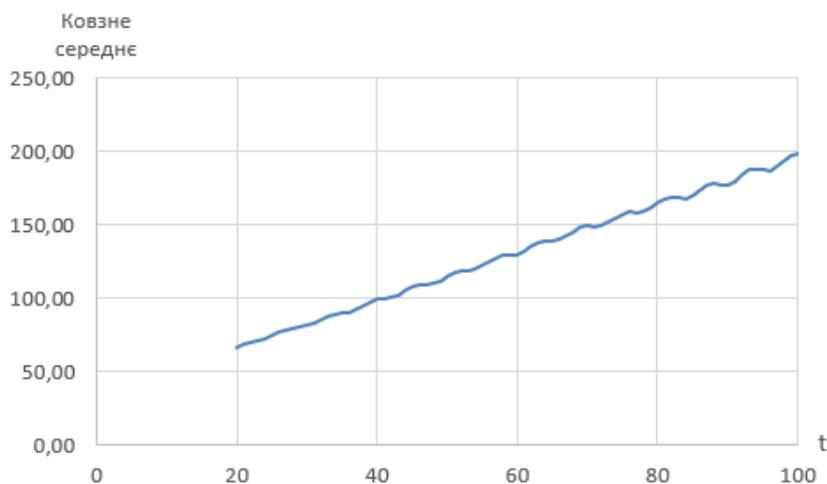


Рис. 3.3. Динаміка ковзної середньої часового ряду  $Y_1$

Отже, рис. 3.3 наочно демонструє, що середній рівень ряду з часом має тенденцію до зростання. Тобто, математичне сподівання не є постійною величиною й перша умова стаціонарності не виконується.

В колонці D, рис. 3.1, будемо обчислювати динаміку ковзної дисперсії з інтервалом згладжування  $m = 20$ . Для цього, в комірку D21 слід ввести формулу  $=\text{VAR.P}(B2:B21)$ , або  $=\text{ДИСП.Г}(B2:B21)$  й за правий нижній кут розтягнути її вниз до комірки D101. Відповідна динаміка ковзної дисперсії часового ряду  $Y_1$  показана на рис. 3.4.

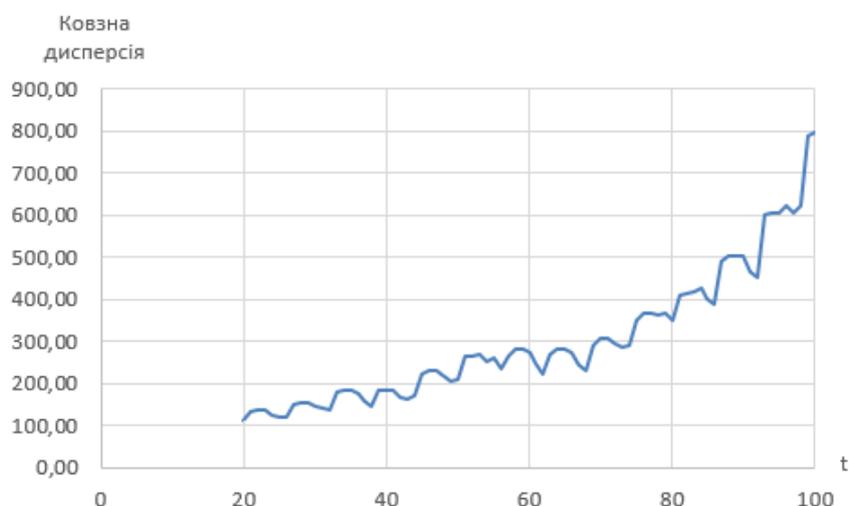


Рис. 3.4. Динаміка ковзної дисперсії часового ряду  $Y_1$

З рис. 3.4 видно, що дисперсія рівнів часового ряду не є постійною величиною й з часом зростає. Тобто, друга умова стаціонарності також не виконується.

В колонці E, рис. 3.1, будемо обчислювати значення автокореляційної функції з шириною інтервалів  $m = 20$ . Для цього, в комірку E21 слід ввести формулу `=CORREL($B$2:$B$21;B2:B21)`, або `=КОРРЕЛ($B$2:$B$21;B2:B21)` й за правий нижній кут розтягнути її вниз до комірки E101. Графік відповідної автокореляційної функції часового ряду  $Y_1$  показаний на рис. 3.5.

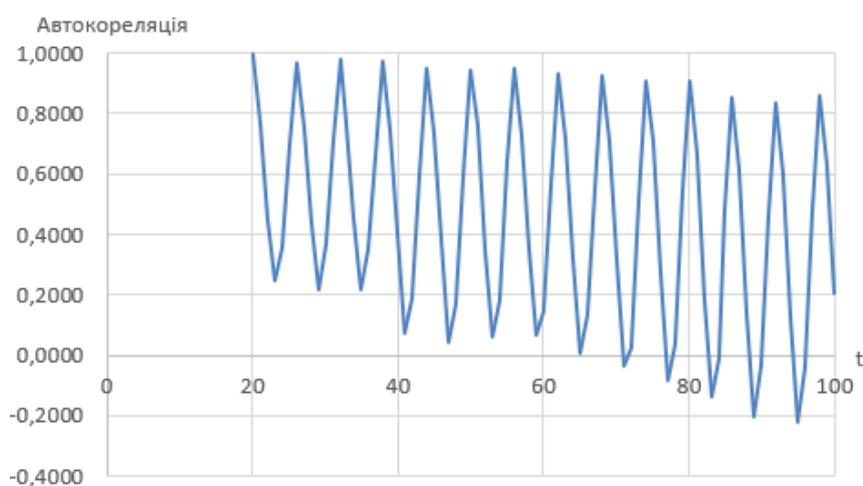


Рис. 3.5. Автокореляційна функція часового ряду  $Y_1$

Умова про відсутність автокореляції означає, що відповідний графік, рис. 3.5, з часом повинний наближатись до нуля, що не відповідає дійсності. Таким чином, часовий ряд  $Y_1$  не є стаціонарним: він має зростаючий тренд з циклічними коливаннями, амплітуда яких також збільшується.

Необхідно відтворити результати аналізу часового ряду  $Y_1$  й аналогічним чином дослідити умови стаціонарності для часових рядів  $Y_2$  та  $Y_3$ .

**Завдання №4.** Використовуючи статистичні дані за 15 років про валовий випуск продукції  $Y$ , динаміку виробничих фондів  $K$  та трудових ресурсів  $L$  промислового підприємства необхідно:

1. Спрогнозувати динаміку використання основних виробничих фондів  $K$  на наступні 3 періоди, використовуючи: лінійну, степеневу та параболічну залежність другого порядку. Обрати найбільш достовірну з них;

2. Спрогнозувати динаміку використання трудових ресурсів  $L$  на наступні 3 періоди, використовуючи: експоненційну, логарифмічну та гіперболічну залежності. Обрати найбільш достовірну з них;

3. Побудувати виробничу функцію залежності випуску продукції від використання основних виробничих фондів й трудових ресурсів у вигляді лінійної регресії ( $Y = a_0 + a_1K + a_2L$ ) та степеневі ( $Y = a_0K^{a_1}L^{a_2}$ ). Оцінити їхню достовірність за допомогою критерію Фішера.

4. На основі прогнозних значень  $K$  та  $L$  розрахувати прогнозне значення  $Y$ , використовуючи найбільш адекватну виробничу функцію, отриману вище.

5. Побудувати графіки досліджуваних показників  $K$ ,  $L$  та  $Y$  за вхідними та прогнозними даними. Додати на графіки розраховані трендові компоненти.

Таблиця 3.3 – Вхідні дані для побудови виробничої функції

Рік	Y	K	L
1	= 400 + N	311	92
2	485	305	100
3	490	348	122
4	= 560 – N	398	118
5	549	400	143
6	612	471	159
7	580	465	148
8	618	534	177
9	643	527	= 153 + N
10	685	544	200
11	717	586	238
12	769	592	266
13	= 856 – N	584	271
14	911	610	290
15	998	597	340

Де  $N$  – порядковий номер студента по журналу

**Рекомендації до виконання.** Достовірність всіх побудованих прогнозів в даному завданні будемо перевіряти за допомогою критерію Фішера, формула (3.17).

$$F_{\text{рознр}} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{i,\text{рознр}} - \overline{y_{\text{рознр}}})^2}{m} \times \frac{n - m - 1}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{i,\text{рознр}})^2}, \quad (3.17)$$

Де  $y_i$  – ретроспективний рівень часового ряду в  $i$ -ий період;  $y_{i,\text{рознр}}$  – розрахункове значення ретроспективного рівня часового ряду в  $i$ -ий період часу, згідно побудованої прогновної моделі;  $\overline{y_{\text{рознр}}}$  – середнє значення розрахункових рівнів часового ряду за  $n$  періодів;  $m$  – кількість факторів, що впливають на розрахунковий показник.

При прогнозуванні, найчастіше єдиним фактором впливу на розрахунковий показник є час ( $m = 1$ ). Дане твердження буде актуальним при прогнозуванні динаміки використання основних виробничих фондів  $K$  та трудових ресурсів  $L$ , завдання 4.1-4.2 (парний регресійний аналіз). При побудові виробничої функції  $Y = f(K, L)$ , завдання 4.3, кількість факторів  $m = 2$  (множинний регресійний аналіз).

Отримана прогнозна модель вважається адекватною ретроспективним даним, якщо  $F_{\text{рознр}} > F_{\text{табл}}(P, m, n)$ . Табличне значення  $F_{\text{табл}}$  можна розрахувати в Microsoft Excel за допомогою функції:

$$= \text{FINV}(P; m; n-m-1), \text{ або}$$

$$= \text{FPАСПОБР}(P; m; n-m-1).$$

Тут  $P$  – це допустимий рівень похибки. При  $P = 0,05$  рівень надійності складає 0,95, або 95%.

Прогнозування динаміки використання основних виробничих фондів  $K$  на наступні 3 періоди, згідно поставленого завдання, відбувається на основі лінійної, степеневі та параболічної залежностей другого порядку. Причому, побудована трендова компонента повинна максимально наближатись до ретроспективних рівнів вхідного часового ряду. Для вирішення даного завдання

використовується метод найменших квадратів. Розглянемо специфіку його застосування для вказаних трьох випадків.

1. Лінійна залежність  $y_{\text{розн}} = a_0 + a_1x$ . Невідомі параметри лінійної регресії  $a_0$  та  $a_1$  знаходяться за формулами:

$$a_0 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (3.18)$$

2. Степенева залежність  $y_{\text{розн}} = a_0 x^{a_1}$ . Шляхом послідовного логарифмування та заміни змінних, спочатку перетворюємо степеневу залежність до лінійного вигляду:

$$\ln(y_{\text{розн}}) = \ln(a_0 x^{a_1}), \text{ звідки отримуємо:}$$

$$\ln(y_{\text{розн}}) = \ln(a_0) + \ln(x^{a_1}) = \ln(a_0) + a_1 \times \ln(x).$$

Далі проводимо заміну змінних:

$$\ln(y_{\text{розн}}) = \hat{y};$$

$$\ln(a_0) = \hat{a}_0;$$

$$\ln(x) = \hat{x}.$$

Тоді остаточне рівняння набуває лінійного вигляду:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + a_1 \hat{x}.$$

Після знаходження методом найменших квадратів невідомих параметрів  $\hat{a}_0$  та  $a_1$ , необхідно розрахувати початкове  $a_0$ , згідно попередньої заміни:

$$a_0 = e^{\hat{a}_0}.$$

3. Парабола другого порядку  $y_{\text{розн}} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Введемо заміну змінних:  $x_1 = x^2$ . Тоді, рівняння параболи прийме вигляд:

$$y_{\text{розн}} = a_0 + a_1x + a_2x_1.$$

Як бачимо, початкова нелінійна залежність з однією змінною  $x$  перетворилась на лінійну залежність з двома змінними  $x$  та  $x_1$ . Тобто, маємо випадок множинної регресії, який буде розглядатись нижче.

Кожну з побудованих регресій слід перевірити на достовірність вхідним даним за допомогою критерію Фішера й обрати ту, де  $F_{\text{розн}}$  приймає найбільше значення.

Прогнозування динаміки використання трудових ресурсів  $L$  на наступні 3 періоди, згідно поставленого завдання, слід виконувати за допомогою експоненційної, логарифмічної та гіперболічної залежностей. Для застосування з цією метою методу найменших квадратів, спочатку слід перетворити вказані залежності до лінійного вигляду.

1. Експоненційна залежність  $y_{\text{розн}} = a_0 e^{a_1 x}$ . Перш ніж провести заміну змінних, виконаємо логарифмування лівої й правої частин нашого рівняння:

$$\ln(y_{\text{розн}}) = \ln(a_0 e^{a_1 x}), \text{ звідки отримуємо:}$$

$$\ln(y_{\text{розн}}) = \ln(a_0) + \ln(e^{a_1 x}) = \ln(a_0) + a_1 x \times \ln(e) = \ln(a_0) + a_1 x.$$

Далі проводимо заміну змінних:

$$\ln(y_{\text{розн}}) = \hat{y};$$

$$\ln(a_0) = \hat{a}_0.$$

Тоді остаточне рівняння набуває лінійного вигляду:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + a_1 x.$$

Після знаходження методом невідомих параметрів  $\hat{a}_0$  та  $a_1$ , необхідно розрахувати початкове  $a_0$ :

$$a_0 = e^{\hat{a}_0}.$$

2. Логарифмічна залежність  $y_{\text{розн}} = a_0 + a_1 \ln(x)$ . Введемо заміну змінних:

$$\ln(x) = \hat{x}.$$

Тоді, початкове рівняння знову приймає лінійну форму:

$$y_{\text{розн}} = a_0 + a_1 \hat{x}.$$

3. Гіперболічна залежність  $y_{\text{розн}} = a_0 + \frac{a_1}{x}$ . Введемо заміну змінних:

$$\frac{1}{x} = \hat{x}.$$

Тоді, початкове рівняння прийме лінійну форму:

$$y_{\text{розн}} = a_0 + a_1 \hat{x}.$$

Так само, з наведених залежностей слід обирати ту, яка надає найвищий рівень достовірності за критерієм Фішера, формула (3.17).

Наступним етапом нашого аналізу є побудова виробничої функції залежності випуску продукції  $Y$  від використання основних виробничих фондів  $K$  й трудових ресурсів  $L$  у вигляді лінійної та степеневі регресії. Маємо задачу з побудови множинної регресії, оскільки результативний показник залежить від двох факторів одночасно.

По аналогії з парним регресійним аналізом, метод найменших квадратів застосовується для визначення невідомих параметрів лише для множинної регресії лінійного типу. Тому, у випадку нелінійної залежності, вона по аналогії повинна спочатку бути приведена до лінійного вигляду шляхом алгебраїчних перетворень: заміни змінних та логарифмування.

Нехай, лінійна залежність має вигляд:

$$y_{\text{розр}} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad (3.19)$$

Де  $n$  – кількість факторів;  $b_0, b_1, \dots, b_n$  – невідомі параметри множинної регресії, які необхідно знайти.

Для того, щоб МНК повернув нам всі невідомі параметри, включаючи  $b_0$ , до складу регресії необхідно включити фіктивну змінну  $x_0=1$ . З урахуванням цього, рівняння (3.19) запишеться у вигляді:

$$y_{\text{розр}} = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad (3.20)$$

Представимо вхідні дані у матричному вигляді:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m0} & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Тоді, розрахунок невідомих параметрів рівняння (3.20) буде відбуватись шляхом наступних матричних перетворень:

$$B = [[X]^T[X]]^{-1}[X]^TY, \quad (3.21)$$

Параметри рівняння регресії (3.19) у Microsoft Excel також можна знайти за допомогою вбудованої функції =LINEAR( ), або =ЛИНЕЙН( ). Дана функція має наступні аргументи:

- I аргумент – вектор-стовпець відомих значень результативного показника Y;
- II аргумент – матриця відомих значень факторів X. Дана матриця **не повинна** містити колонку фіктивних змінних  $x_0=1$ ;
- III, IV аргументи – логічні параметри, повинні приймати значення «істина», або 1.

Після введення даної функції, виділити діапазон комірок, куди повинні повернутись розраховані значення. Розмірність цього діапазону  $5 \times (n + 1)$ . Далі слід натиснути <F2> та одночасно <CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>. Розраховані значення параметрів регресії, які необхідно було знайти, будуть розташовані у першому рядку, таблиця 3.4.

Таблиця 3.4 – Формат даних вбудованої функції =LINEAR( )

$b_n$	...	$b_2$	$b_1$	$b_0$
...	...	...	...	...
Фрозр				
...	...	...	...	...

У випадку степеневі множинної регресії, її також спочатку слід привести до лінійної форми. Нехай, необхідно побудувати регресію виду:

$$y_{\text{розр}} = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \times \dots \times x_n^{b_n}, \quad (3.22)$$

Після логарифмування даного рівняння, отримаємо:

$$\ln(y_{\text{розр}}) = \ln(b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} \times \dots \times x_n^{b_n}), \text{ звідки будемо мати}$$

$$\ln(y_{\text{розр}}) = \ln(b_0) + b_1 \ln(x_1) + b_2 \ln(x_2) + \dots + b_n \ln(x_n).$$

Дали виконуємо заміну змінних:

$$\ln(y_{\text{розр}}) = \hat{y};$$

$$\ln(b_0) = \hat{b}_0;$$

$$\ln(x_i) = \hat{x}_i.$$

Тоді остаточне рівняння набуває лінійного вигляду:

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + \dots + b_n \hat{x}_n.$$

Тепер, на основі вхідних даних  $\hat{y}$ ,  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$ , ...,  $\hat{x}_n$  за допомогою рівняння (3.21), або вбудованої функції =LINEAR( ) можна обчислити невідомі параметри регресії  $\hat{b}_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , ...,  $b_n$ .

Достовірність обох отриманих моделей, (3.19) та (3.21) також слід перевірити за допомогою критерію Фішера, формула (3.17) й візуалізувати результати прогнозування у вигляді відповідних діаграм.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

### АДАПТИВНІ МЕТОДИ ПРОГНОЗУВАННЯ

#### Завдання №1. Метод ковзних середніх.

На основі вхідних даних щодо динаміки щомісячних обсягів продажу продукції підприємства та за допомогою методу ковзних середніх, виконати наступні етапи:

1. Провести фільтрацію вхідних даних для інтервалів згладжування  $m = 2$  та  $m = 3$ ;
2. Для кожного з випадків фільтрації даних, зробити свій прогноз на наступний період. Показати його на графіку;
3. Порівняти отримані результати фільтрації даних та прогнозування для обох інтервалів згладжування, зробити висновки.

Вихідні дані для виконання роботи наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Вхідні дані для методу ковзних середніх

Період часу $t$	Обсяг продажів продукції $Y(t)$ , млн. грн.
1	4,6
2	9,8
3	$= 9,4 + 1,1 * N$
4	13,3
5	8,4
6	14,1
7	$= 17,2 + 0,9 * N$
8	15,6
9	13,5
10	15,6
11	20,4
12	22,6
13	$= 23,8 + 0,9 * N$

де  $N$  – порядковий номер студента по журналу

**Рекомендації до виконання.** Метод ковзних середніх – це метод короткострокового прогнозування, який заснований на процедурі згладжування (фільтрації) рівнів часового ряду. Згладжений часовий ряд має меншу варіацію,

тому краще відображає дію основних факторів. Просте ковзне середнє (*SMA*) розраховується за формулою (4.1).

$$SMA(t) = \frac{y(t - m + 1) + \dots + y(t - 1) + y(t)}{m}, \quad (4.1)$$

Де *SMA(t)* – просте ковзне середнє протягом періоду часу *t*; *m* – кількість інтервалів згладжування; *y(t)* – значення часового ряду протягом періоду часу *t*.

Тоді, прогноз на наступний (*t + 1*) період буде знаходитись, як:

$$Forecast(t + 1) = SMA(t), \quad (4.2)$$

Де *Forecast(t+1)* – прогнозне значення часового ряду *Y* на (*t + 1*) період.

Відповідно до наведеної вище формули (4.1), якщо інтервал згладжування *m = 3*, то просте ковзне середнє буде розраховуватись за формулою:

$$SMA(t) = \frac{y(t - 2) + y(t - 1) + y(t)}{3} = \frac{1}{3}y(t - 2) + \frac{1}{3}y(t - 1) + \frac{1}{3}y(t)$$

Як бачимо, при розрахунку простої ковзної середньої *SMA(t)*, кожний рівень часового ряду *y(t)* враховується з однаковим ваговим коефіцієнтом *1/m*. Таке «усереднення» рівнів часового ряду згладжує випадкові коливання вхідного показника.

В таблиці 4.2, для вхідного часового ряду *Y*, методом ковзних середніх були розраховані значення *SMA(t)*, з інтервалом згладжування *m = 3*.

Таблиця 4.2 – Приклад розрахунку простої ковзної середньої для *m = 3*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Y	4,6	9,8	9,4	13,3	8,4	14,1	17,2	15,6	13,5	15,6	20,4	22,6	23,8	–
SMA			7,9	10,8	10,4	11,9	13,2	15,6	15,4	14,9	16,5	19,5	22,3	22,3

Прогноз на наступний період, згідно формули (4.2), дорівнював останньому розрахованому значенню *SMA*. Графічно, вхідний та отриманий ряди динаміки мають вигляд, як показано на рис. 4.1.

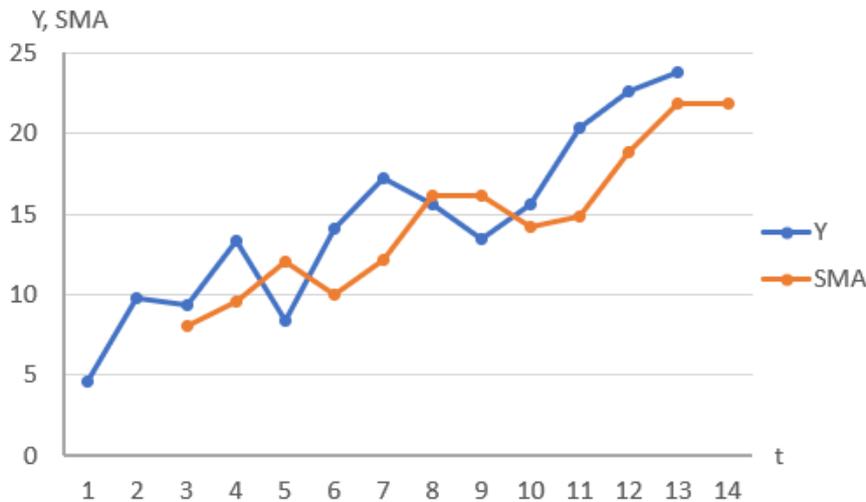


Рис. 4.1. Фільтрація рівнів часового ряду за методом ковзних середніх

Подальший розвиток методу ковзних середніх призводить до використання зважених ковзних середніх. Тобто, кожному рівню ряду, в межах інтервалу згладжування, відповідає певний індивідуальний ваговий коефіцієнт.

### Завдання №2. Метод простого експоненційного згладжування.

На основі вхідних даних щодо динаміки щомісячних обсягів продажу продукції підприємства та за допомогою методу експоненційного згладжування, виконати наступні етапи:

1. Провести процедуру простого експоненційного згладжування для параметру адаптації  $\alpha = 0,2$ ;
2. Розрахувати прогнозне значення обсягів продажу на наступний період, показати його на графіку;
3. Провести моделювання параметру адаптації  $\alpha$  в діапазоні  $(0; 0,3]$  з кроком 0,05 й проаналізувати відповідні зміни прогнозних обсягів випуску продукції.

Вихідні дані для виконання роботи наведено в таблиці 4.1.

**Рекомендації до виконання.** Метод експоненційного згладжування – це один з найбільш популярних методів прогнозування часових рядів. Як і метод ковзних середніх, він базується на припущенні, що майбутнє значення часового ряду залежить від його попередніх значень. Однак, на відміну від останнього, вагові коефіцієнти кожного попереднього рівня ряду, експоненційно зменшуються з часом.

Розрізняють декілька варіацій даного методу: просте експоненційне згладжування; подвійне, або потрійне експоненційне згладжування тощо. На практиці, найчастіше використовуються перші два методи.

Розглянемо просте експоненційне згладжування, формули якого мають вигляд:

$$\begin{aligned} EMA(0) &= y(1), \\ EMA(t) &= \alpha \times y(t) + (1 - \alpha) \times EMA(t - 1), \end{aligned} \quad (4.3)$$

Де  $EMA(t)$  – експоненційне ковзне середнє протягом періоду часу  $t$ ;  $y(t)$  – значення часового ряду протягом періоду часу  $t$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт згладжування (параметр адаптації),  $\alpha \in (0; 1]$ .

Тоді, прогноз на наступний  $(t + 1)$  період буде знаходитись, як:

$$Forecast(t + 1) = EMA(t), \quad (4.4)$$

Де  $Forecast(t+1)$  – прогнозне значення часового ряду  $Y$  на  $(t + 1)$  період.

Зазвичай, значення параметру згладжування  $\alpha$  обирається експериментальним шляхом й найчастіше належить інтервалу  $0,01 \dots 0,3$ . Також, для його обчислення, може використовуватись формула:

$$\alpha = \frac{2}{m + 1}, \quad (4.5)$$

Де  $m$  – кількість інтервалів згладжування.

Незважаючи на свою простоту, даний метод є достатньо ефективним й використовується для прогнозування часових рядів в різних сферах діяльності, зокрема фінансах, логістиці та інших. Однак, прогнозування за допомогою простого експоненційного згладжування може здійснюватися лише на 1 період наперед. Наступний метод буде позбавлений вказаного недоліку.

### **Завдання №3.** Метод подвійного експоненційного згладжування.

На основі вхідних даних щодо динаміки щомісячних обсягів продажу продукції підприємства та за допомогою методу експоненційного згладжування, виконати наступні етапи:

1. Провести процедуру подвійного експоненційного згладжування, обчисливши параметр адаптації  $\alpha$  за формулою (4.5);
2. Розрахувати прогнозні значення обсягів продажу на наступні три періоди, показати їх на графіку;
3. Порівняти результати прогнозування з тими, що були отримані за допомогою методу простого експоненційного згладжування.

Вихідні дані для виконання роботи наведено в таблиці 4.1.

**Рекомендації до виконання.** Метод подвійного експоненційного згладжування складається з наступних етапів:

1. Розрахунок значення параметру адаптації  $\alpha$  за формулою (4.5). Прийняти в даному прикладі кількість інтервалів згладжування  $m = 5$ .
2. На основі вхідних значень рівнів часового ряду  $y(t)$ , обчислюються параметри  $a_0$  та  $a_1$  лінійної регресії  $Y(t) = a_0 + a_1 t$ . Для цього можна використовувати вбудовану функцію Microsoft Excel `=ЛИНЕЙН()`, або `=LINEST()`.
3. Обчислені параметри лінійної регресії  $a_0$  та  $a_1$  використовуються для розрахунку початкових значень експоненційних середніх першого  $EMA^{[1]}(0)$  та другого  $EMA^{[2]}(0)$  порядку, формули (4.6).

$$EMA^{[1]}(0) = a_0 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} a_1; \quad EMA^{[2]}(0) = a_0 - \frac{2 \times (1 - \alpha)}{\alpha} a_1, \quad (4.6)$$

4. Обчислення експоненційної середньої першого порядку відбувається за формулою (4.7).

$$EMA^{[1]}(t) = \alpha \times y(t) + (1 - \alpha) \times EMA^{[1]}(t - 1), \quad (4.7)$$

Де  $EMA^{[1]}(t)$  – експоненційне ковзне середнє першого порядку протягом періоду часу  $t$ ;  $y(t)$  – значення часового ряду протягом періоду часу  $t$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт згладжування (параметр адаптації).

5. Обчислення експоненційної середньої другого порядку, для уточнення тенденції, формула (4.8).

$$EMA^{[2]}(t) = \alpha \times EMA^{[1]}(t) + (1 - \alpha) \times EMA^{[2]}(t - 1), \quad (4.8)$$

Де  $EMA^{[2]}(t)$  – експоненційне ковзне середнє другого порядку протягом періоду часу  $t$ .

6. На основі розрахованих експоненційних середніх  $EMA^{[1]}(t)$  та  $EMA^{[2]}(t)$  за останній період часу, обчислюються коефіцієнти  $b_0$  та  $b_1$ :

$$b_0 = 2EMA^{[1]} - EMA^{[2]}; \quad b_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \times (EMA^{[1]} - EMA^{[2]}), \quad (4.9)$$

Де  $EMA^{[1]}$ ,  $EMA^{[2]}$  – відповідно, значення експоненційних ковзних середніх першого та другого порядків, за останній період часу.

7. Прогнозування рівнів часового ряду виконується за формулою (4.10).

$$Y_{\text{розн}}(T) = b_0 + b_1 T, \quad (4.10)$$

Де  $T$  – номер періоду прогнозування ( $T = 1, 2, \dots$ ).

Не слід забувати, що хоча метод подвійного експоненційного згладжування дозволяє виконувати прогнозування на довільну кількість періодів наперед, однак, найбільш ефективним він є у випадку короткострокового прогнозування.

**Завдання №4.** Метод декомпозиції Хольта-Вінтерса при наявності сезонної складової.

На основі вхідних даних щодо динаміки щомісячної кількості переглядів веб-ресурсу за останні чотири роки та за допомогою методу Хольта-Вінтерса, виконати наступні етапи:

1. Побудувати прогноз переглядів веб-ресурсу на наступний рік за допомогою методу Хольта-Вінтерса, для наступних значень параметрів адаптації:  $\alpha = \beta = \gamma = 0,17$ ;
2. Результати прогнозування показати на графіку;
3. Провести моделювання параметрів адаптації  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  в діапазоні  $(0; 0,3]$  з кроком 0,05 й проаналізувати відповідні зміни прогнозованої кількості переглядів веб-ресурсу.

Вихідні дані для виконання роботи наведено в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Вхідні дані для методу Хольта-Вінтерса

Місяць	2020 рік	2021 рік	2022 рік	2023 рік
Січень	22467	51802	73724	60496
Лютий	26217	51647	66612	61032
Березень	33363	60089	76228	70400
Квітень	29093	61394	74576	75041
Травень	34523	76296	86318	86291
Червень	30767	67486	65759	76115
Липень	14342	31862	31968	42879
Серпень	17553	32387	30086	36962
Вересень	29823	50688	51802	58776
Жовтень	45786	71383	68960	81204
Листопад	53309	81973	72853	98339
Грудень	57896	82804	75019	116717

**Рекомендації до виконання.** Метод Хольта-Вінтерса включає розклад вхідного часового ряду на три основні компоненти: рівень (Level), тренд (Trend) та сезонність (Seasonality). Їхній економічний зміст показаний на рис. 4.2.

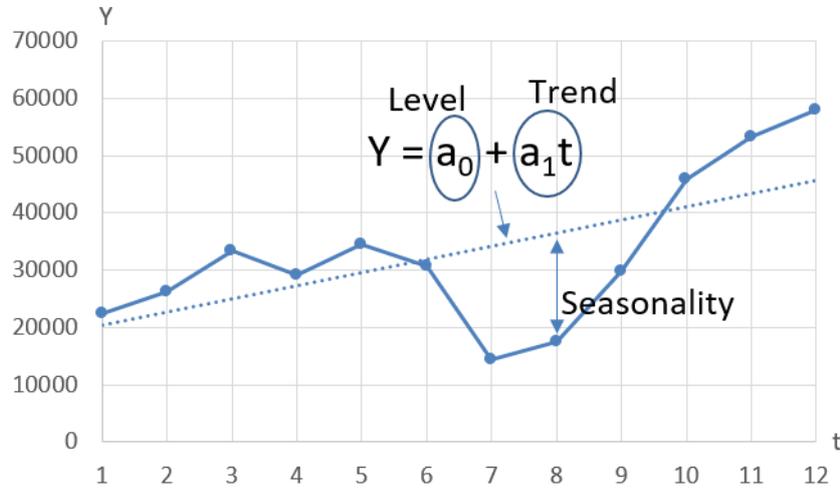


Рис. 4.2. Розклад вхідного часового ряду на основні компоненти за методом Хольта-Вінтерса

В нашому випадку, тривалість сезонного періоду становить  $m = 12$  місяців. Тому, вхідні дані за перші 12 місяців, або за весь 2020 рік використовуються для визначення початкових значень складових часового ряду: Level, Trend та Seasonality, колонки E:G, рис. 4.3.

Рік	Місяць	Перегляди веб-ресурсу	Level	Trend	Seasonal	
2020	1	Січень	22467	18000,45	2296,58	1,107
	2	Лютий	26217	18000,45	4593,17	1,160
	3	Березень	33363	18000,45	6889,75	1,340
	4	Квітень	29093	18000,45	9186,34	1,070
	5	Травень	34523	18000,45	11482,92	1,171
	6	Червень	30767	18000,45	13779,50	0,968
	7	Липень	14342	18000,45	16076,09	0,421
	8	Серпень	17553	18000,45	18372,67	0,483
	9	Вересень	29823	18000,45	20669,26	0,771
	10	Жовтень	45786	18000,45	22965,84	1,118
	11	Листопад	53309	18000,45	25262,42	1,232
	12	Грудень	57896	18000,45	27559,01	1,271

Рис. 4.3. Визначення вхідних значень складових часового ряду: Level, Trend та Seasonality

Для цього, на основі вхідних даних щодо переглядів веб-ресурсу протягом 2020 року, в комірках I9:J9 спочатку розраховуються параметри лінійного тренду  $a_0$  та  $a_1$ , з використанням вбудованої функції Microsoft Excel  $=ЛИНЕЙН()$ , або  $=LINEST()$ :

– в комірку I9 вводимо формулу:

$=ЛИНЕЙН(D2:D13;B2:B13;1;1)$ , або  $=LINEST(D2:D13;B2:B13;1;1)$ .

– виділяємо діапазон комірок I9:J9, починаючи з комірки I9 й натискаємо клавіші <F2>, <CTRL> + <SHIFT> + <ENTER>.

В результаті, в комірці J9 буде міститись розраховане значення  $a_0$ , а в комірці I9 – значення  $a_1$ . рис. 4.3. Далі, на їх основі обчислюються початкові значення складових часового ряду: Level, Trend та Seasonality, комірки E2:G13, рис. 4.4:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Рік	Місяць		Перегляди веб-ресурсу	Level	Trend	Seasonal
2	2020	1	Січень	22467	=\$J\$9	=\$I\$9*B2	=D2/(E2+F2)
3		2	Лютий	26217	=\$J\$9	=\$I\$9*B3	=D3/(E3+F3)
4		3	Березень	33363	=\$J\$9	=\$I\$9*B4	=D4/(E4+F4)
5		4	Квітень	29093	=\$J\$9	=\$I\$9*B5	=D5/(E5+F5)
6		5	Травень	34523	=\$J\$9	=\$I\$9*B6	=D6/(E6+F6)
7		6	Червень	30767	=\$J\$9	=\$I\$9*B7	=D7/(E7+F7)
8		7	Липень	14342	=\$J\$9	=\$I\$9*B8	=D8/(E8+F8)
9		8	Серпень	17553	=\$J\$9	=\$I\$9*B9	=D9/(E9+F9)
10		9	Вересень	29823	=\$J\$9	=\$I\$9*B10	=D10/(E10+F10)
11		10	Жовтень	45786	=\$J\$9	=\$I\$9*B11	=D11/(E11+F11)
12		11	Листопад	53309	=\$J\$9	=\$I\$9*B12	=D12/(E12+F12)
13		12	Грудень	57896	=\$J\$9	=\$I\$9*B13	=D13/(E13+F13)

Рис. 4.4. Формули для розрахунку вхідних значень складових часового ряду: Level, Trend та Seasonality

– початкове значення складової часового ряду Level на протязі всього 2020 р. буде дорівнювати знайденому параметру  $a_0$ , рис. 4.2. Тому, в комірках E2:E13 слід ввести формулу  $=J$9$ , рис. 4.4;

– економічним змістом складової часового ряду Trend, згідно рис. 4.2, є добуток  $a_{jt}$ . Тому, в комірку F2 слід ввести формулу  $=I\$9*B2$  й за правий нижній кут розтягнути її вниз до комірки F13;

– економічним змістом складової часового ряду Seasonality є індекс, що визначає співвідношення між фактичним значенням вхідного показника й його сукупною трендовою складовою (Level + Trend). Тому, до комірки G2 слід ввести формулу  $=D2/(E2+F2)$  й за правий нижній кут розтягнути її вниз до комірки G13.

Обчислені таким чином за даними 2020 р. вхідні значення складових часового ряду, рис. 4.4, є основою для розрахунку цих компонентів протягом 2021-2023 років. Відповідні формули (4.11)-(4.13) мають наступний вигляд:

1. Рівень (Level):

$$L_t = \alpha \times \frac{Y_t}{S_{t-m}} + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}), \quad (4.11)$$

Де  $m$  – тривалість сезонного періоду ( $m = 12$  місяців)

До комірки E14 слід ввести формулу  $=J\$2*D14/G2+(1-J\$2)*(E13+F13)$  й розтягнути її вниз до грудня 2023 р., комірка E49.

2. Тренд (Trend):

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta)T_{t-1}, \quad (4.12)$$

До комірки F14 слід ввести формулу  $=J\$3*(E14-E13)+(1-J\$3)*F13$  й так само розтягнути її вниз до грудня 2023 р., комірка F49.

3. Сезонність (Seasonality):

$$S_t = \gamma \times \frac{Y_t}{L_t} + (1 - \gamma)S_{t-m}, \quad (4.13)$$

До комірки G14 слід ввести формулу  $=J\$4*D14/E14+(1-J\$4)*G2$  й розтягнути її вниз до комірки G49.

У цих рівняннях використовуються наступні умовні позначення:  $Y_t$  – значення часового ряду в момент часу  $t$ ;  $L_t$  – рівень часового ряду в момент часу  $t$ ;  $T_t$  – тренд часового ряду в момент часу  $t$ ;  $S_t$  – індекс сезонності часового ряду в момент часу  $t$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – коефіцієнти згладжування, які визначають ваги спостережень, рівня, тренду та сезонності, відповідно.

Тоді, прогнозування цільового показника (Forecast) на  $h$  періодів наперед буде здійснюватися за формулою:

$$F_{t+h} = (L_t + hT_t) \times S_{t-m+h}, \quad (4.14)$$

Де  $h$  – порядковий номер періоду прогнозування (1, 2, ...)

Згідно формули (4.14), до комірки D50 слід ввести формулу  $=(E\$49+B50*F\$49)*G38$  й розтягнути її вниз до комірки D61, рис. 4.5.

D50		fx =(\$E\$49+B50*F\$49)*G38					
	A	B	C	D	E	F	G
38			Січень	60496	=SJS2*D38/G2	=SJS3*(E38-E3)	=SJS4*D38/E3
39			Лютий	61032	=SJS2*D39/G2	=SJS3*(E39-E3)	=SJS4*D39/E3
40			Березень	70400	=SJS2*D40/G2	=SJS3*(E40-E3)	=SJS4*D40/E4
41			Квітень	75041	=SJS2*D41/G2	=SJS3*(E41-E4)	=SJS4*D41/E4
42			Травень	86291	=SJS2*D42/G3	=SJS3*(E42-E4)	=SJS4*D42/E4
43			Червень	76115	=SJS2*D43/G3	=SJS3*(E43-E4)	=SJS4*D43/E4
44			Липень	42879	=SJS2*D44/G3	=SJS3*(E44-E4)	=SJS4*D44/E4
45			Серпень	36962	=SJS2*D45/G3	=SJS3*(E45-E4)	=SJS4*D45/E4
46			Вересень	58776	=SJS2*D46/G3	=SJS3*(E46-E4)	=SJS4*D46/E4
47			Жовтень	81204	=SJS2*D47/G3	=SJS3*(E47-E4)	=SJS4*D47/E4
48			Листопад	98339	=SJS2*D48/G3	=SJS3*(E48-E4)	=SJS4*D48/E4
49	2023		Грудень	116717	=SJS2*D49/G3	=SJS3*(E49-E4)	=SJS4*D49/E4
50		1	Січень	=(E\$49+B50*F\$49)*G38			
51		2	Лютий	=(E\$49+B51*F\$49)*G39			
52		3	Березень	=(E\$49+B52*F\$49)*G40			
53		4	Квітень	=(E\$49+B53*F\$49)*G41			
54		5	Травень	=(E\$49+B54*F\$49)*G42			
55		6	Червень	=(E\$49+B55*F\$49)*G43			
56		7	Липень	=(E\$49+B56*F\$49)*G44			
57		8	Серпень	=(E\$49+B57*F\$49)*G45			
58		9	Вересень	=(E\$49+B58*F\$49)*G46			
59		10	Жовтень	=(E\$49+B59*F\$49)*G47			
60		11	Листопад	=(E\$49+B60*F\$49)*G48			
61	2024	12	Грудень	=(E\$49+B61*F\$49)*G49			

Рис. 4.5. Розрахунок прогнозних значень (Forecast) переглядів веб-ресурсу

Тоді, динаміка вхідного часового ряду й його прогноз на наступний рік для  $\alpha = \beta = \gamma = 0,17$ , будуть мати вигляд, як показано на рис. 4.6.



Рис. 4.6. Прогноз переглядів веб-ресурсу на 2024 рік

Як видно з рис. 4.6, вхідні дані дійсно мають сезонний характер коливань, тривалістю в один рік. Далі, згідно пункту 3 завдання №4, необхідно самостійно провести моделювання параметрів адаптації  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  в діапазоні  $(0; 0,3]$  з кроком 0,05 й проаналізувати відповідні зміни в динаміці прогнозного показника.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

### МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ У ПРОГНОЗУВАННІ

**Завдання №1.** Павутиноподібна модель ринкової рівноваги.

Для заданих параметрів функції попиту та пропозиції спрогнозувати:

1. Рівноважну ціну  $p_e$ , що встановлюється в системі;
2. Динаміку зміни ціни з часом;
3. Динаміку зміни попиту та пропозиції з часом.

Динаміку зміни цін, попиту та пропозиції показати графічно. Зробити висновки з приводу стабільності системи.

Визначити умову бифуркації, коли тип поведінки ціни, попиту та пропозиції змінюється зі згасаючих коливань на вибухові, або навпаки. Вихідні дані для виконання роботи наведено в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Вхідні дані до павутиноподібної моделі ринкової рівноваги

Показник	Значення
a	$= 750 + N \cdot 20$
$a_1$	80
b	-25
$b_1$	$= 10 + N$
$P_0$ (ціна в початковий момент часу)	$= 100 - 3 \cdot N$

де  $N$  – порядковий номер студента по журналу

**Рекомендації до виконання.** Павутиноподібна модель ринкової рівноваги виходить з передумови про те, що пропозиція товару  $S$  на ринку реагує на зміну ціни  $p$  з лагом запізнення в 1 період. В той же час, попит  $D$  визначається поточною ціною на товар й обидві ці залежності в околиці рівноважної ціни можна представити в лінійному вигляді (5.1).

$$D(t) = a + bp(t); \quad S(t) = a_1 + b_1p(t - 1), \quad (5.1)$$

Де  $D(t)$ ,  $S(t)$  – відповідно, попит та пропозиція товару на ринку в період часу  $t$ ;  $p(t)$  – ціна товару в період часу  $t$ ;  $a$ ,  $b$  – вхідні параметри функції попиту;  $a_1$ ,  $b_1$  – вхідні параметри функції пропозиції.

Пропозиція товару на ринку поводитьсь таким чином, оскільки обсяг виробництва не може миттєво реагувати на попит. Для цього потрібний певний період часу, що в дискретних динамічних системах задається відповідним лагом запізнення. Також слід зважати на те, що протягом кожного періоду часу ринок встановлює на товари таку ціну, за якої попит поглинає весь обсяг пропозиції, тобто:

$$D(t) = S(t), \quad (5.2)$$

Далі, підставивши рівняння (5.1) до (5.2), будемо мати:

$$a + bp(t) = a_1 + b_1p(t - 1), \quad (5.3)$$

З отриманого рівняння (5.3) можна визначити ціну  $p$  в кожний наступний період часу, на підставі її значень в попередні періоди:

$$p(t) = \frac{a_1 - a + b_1p(t - 1)}{b}, \quad (5.4)$$

Рівноважна ціна на товар, що встановлюється в системі, буде дорівнювати:

$$p_e = \frac{a_1 - a}{b - b_1}, \quad (5.5)$$

Де  $p_e$  – рівноважна ціна на товар.

Ціна на товар  $p$  з часом буде робити коливальні рухи навколо свого рівноважного значення  $p_e$ . Ці періодичні коливання можуть здійснюватися з амплітудою, яка з часом буде зростати, зменшуватись, або залишатись незмінною.

Зазвичай, графік попиту має від'ємний кут нахилу ( $b < 0$ ), а графік пропозиції – додатний кут нахилу ( $b_1 > 0$ ). Тип поведінки нашої системи в околиці точки рівноваги залежить від співвідношення між  $|b_1| \Leftrightarrow |b|$ . Умовою стабільності системи є нерівність:

$$\left| \frac{b_1}{b} \right| < 1, \text{ або } |b_1| < |b| \quad (5.6)$$

Якщо нерівність (5.6) виконується, в околиці точки рівноваги в системі встановлюється режим згасаючих коливань. Якщо знак нерівності приймає протилежне значення – будемо мати вибухові коливання, як показано на рис. 5.1.

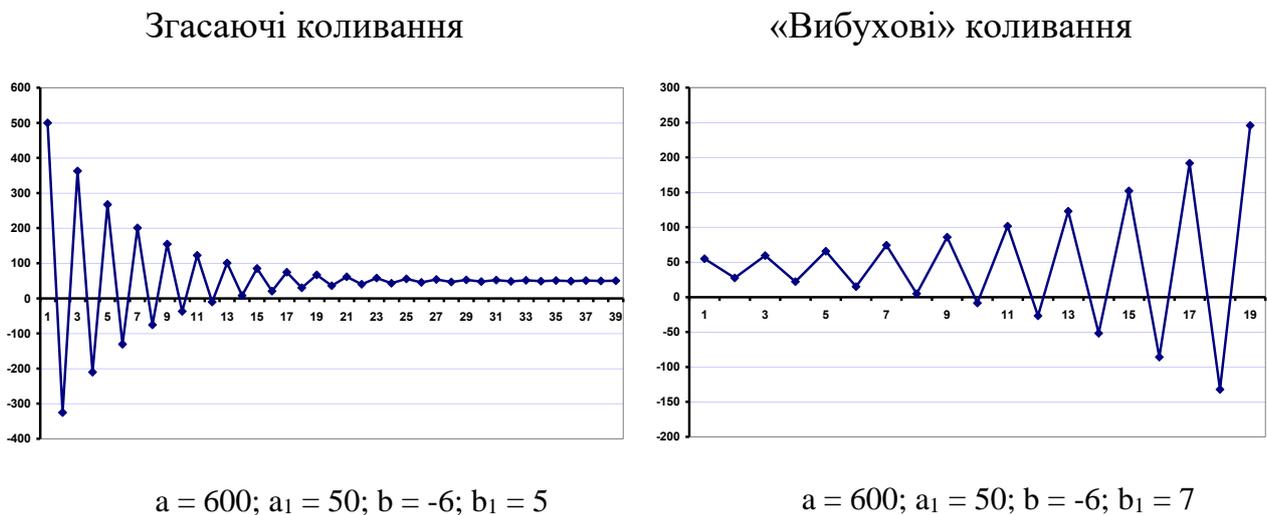


Рис. 5.1. Згасаючі та вибухові коливання ціни в околиці точки рівноваги, для різних вхідних параметрів

Якщо ж ліва та права частини нерівності (5.6) дорівнюють одна одній, то будемо мати циклічні коливання з постійною амплітудою. Аналогічні типи поведінки будуть притаманні й попиту та пропозиції.

**Завдання №2.** Модель зростання національного доходу. Ефект мультиплікатору.

На основі дискретної динамічної моделі зростання національного доходу, в середовищі Microsoft Excel, спрогнозувати:

1. Рівноважні значення національного доходу, що встановлюються в системі для всіх обсягів додаткових інвестицій  $\Delta I$ ;
2. Визначити величину мультиплікатора системи;
3. Показати, яким чином величина мультиплікатора впливає на приріст рівноважного національного доходу зі зростанням інвестицій;
4. Для всіх обсягів додаткових інвестицій  $\Delta I$  показати процес ітераційного наближення розрахункового значення національного доходу, від початкового стану  $Y(0)$  до його рівноважного значення; зазначений процес показати графічно.

Таблиця 5.2 – Вхідні дані до моделі зростання національного доходу

Показник	Значення
a	120
b	0,9
$I(0)$ – обсяг інвестицій у початковий період часу)	$= 220 + 10 * N$
$Y(0)$ – національний дохід у початковий період часу)	$= 5000 - 20 * N$
h	0,05
$\Delta I_1$	0
$\Delta I_2$	50
$\Delta I_3$	100

де N – порядковий номер студента по журналу

**Рекомендації до виконання.** Дискретна динамічна модель зростання національного доходу виходить з передумови про те, що національний дохід  $Y$  в кожний період часу  $t$  розподіляється на споживання  $C$  та на інвестиції  $I$ , рівняння (5.7).

$$Y(t) = C(t) + I(t), \quad (5.7)$$

Статистичні дослідження свідчать про те, що обсяг споживання є прямо пропорційним від обсягу національного доходу, з лагом запізнення в 1 період, рівняння (5.8).

$$C(t) = a + bY(t - 1), \quad \text{де } a \geq 0, \quad 0 < b < 1, \quad (5.8)$$

Де  $b$  – гранична схильність населення до споживання.

Нехай, обсяг інвестицій в економіку частково залежить від національного доходу, відповідно до граничної схильності до інвестування  $h$ . Причому, відповідні рішення приймаються інвесторами з лагом запізнювання в 1 період. Крім того, початковий обсяг інвестицій  $I(0)$  може змінюватись на  $\Delta I$  за рахунок зовнішніх джерел фінансування, формула (5.9).

$$I(t) = hY(t - 1) + I(0) + \Delta I, \quad \text{де } 0 < h < 1, \quad (5.9)$$

Підставляючи рівняння (5.8) та (5.9) до (5.7), одержуємо обсяг національного доходу в наступний період часу  $Y(t)$ , виходячи з його минулого обсягу  $Y(t - 1)$ , формула (5.10).

$$Y(t) = a + bY(t - 1) + hY(t - 1) + I(0) + \Delta I, \quad (5.10)$$

При цьому, обсяг рівноважного національного доходу  $Y_e$  та мультиплікатор системи  $M$ , відповідно, будуть становити:

$$Y_e = \frac{a + I(0) + \Delta I}{1 - b - h}, \quad M = \frac{1}{1 - b - h} \quad (5.11)$$

З Кейнсіанської макроекономіки відомо, що зі збільшенням інвестицій на величину  $\Delta I$ , зростання рівноважного національного доходу буде становити, рівняння (5.12).

$$\Delta Y_e = \frac{1}{1 - b - h} \times \Delta I = M \times \Delta I, \quad (5.12)$$

Система буде прагнути до стану рівноваги, якщо виконується умова стабільності  $b + h < 1$ . Тобто, гранична схильність до інвестування  $h$  повинна бути меншою за граничну схильність до нагромадження  $(1 - b)$ .

**Завдання №3.** Нелінійні динамічні системи. Явище детермінованого хаосу.

На основі системи Лоренца, показати явище детермінованого хаосу в динамічних системах. Для цього, в середовищі Microsoft Excel продемонструвати чутливість траєкторій системи  $X$ ,  $Y$  та  $Z$  до малих змін в їхніх початкових умовах.

**Рекомендації до виконання.** Можливість існування хаотичних процесів в динамічних системах – одна з фундаментальних проблем досліджень економічних явищ, оскільки виникає протиріччя: якщо система є динамічною, то вона є детермінованою. Тобто, майбутній стан такої системи в кожний наступний період часу  $(t+1)$ , повністю залежить від її попереднього стану  $t$ . Тоді, яким чином в таких динамічних системах можуть існувати хаотичні явища, якщо за своєю суттю вони є повною протилежністю детермінованості й асоціюються з невизначеністю, непередбачуваністю та не відтворюваністю?

Можливість хаотичних процесів в динамічних детермінованих системах передбачав А. Пуанкаре: «У нестійких системах, незначна причина, яка є непомітною для стороннього спостерігача за своєю малістю, може викликати значну дію, яку неможливо передбачити». Класичне дослідження руху броунівської частки дає уявлення про хаос, як непередбачуваний, випадковий процес. З іншої сторони, така система є повністю детермінованою, а неможливість повторення траєкторії руху броунівської частки пов'язана із неможливістю повного відтворення початкових умов експерименту.

Таким чином, якщо враховувати можливість якої завгодно малої похибки у визначенні початкового стану системи, то детерміноване прогнозування стає неможливим: головною властивістю динамічних систем, що демонструють режим детермінованого хаосу, є чутлива залежність режиму їхнього

функціонування до яких завгодно малих змін у початкових умовах. Саме ця обставина веде до втрати детермінованої передбачуваності та необхідності вводити ймовірнісні характеристики для опису динаміки таких систем. Динамічна система Лоренца, яка демонструє явище детермінованого хаосу, описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (5.13)$$

Для побудови фазових траєкторій даної неперервної динамічної системи в середовищі Microsoft Excel, її слід перетворити до дискретного типу. Тоді, значення змінних цієї системи  $x$ ,  $y$  та  $z$  в наступний період часу будуть розраховуватись, як:

$$\begin{cases} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -\sigma(x(t) - y(t)) \\ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = -x(t)z(t) + rx(t) - y(t) \\ \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t[-\sigma(x(t) - y(t))] \\ y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t[-x(t)z(t) + rx(t) - y(t)], \\ z(t + \Delta t) = z(t) + \Delta t[x(t)y(t) - bz(t)] \end{cases} \quad (5.14)$$

Комп'ютерний аналіз системи Лоренца призводить до принципового результату: динамічні системи з детермінованим хаосом мають кінцевий горизонт прогнозування.

Нехай, вхідні параметри отриманої дискретної системи (5.14) приймають значення:  $r = 19 + N$ ;  $b = 2,67$ ;  $\sigma = 10$ , де  $N$  – порядковий номер студента по журналу. Тоді, чутливість фазової траєкторії змінної цієї системи  $X$  до малих відхилень в початкових значеннях, демонструє рис. 5.2.

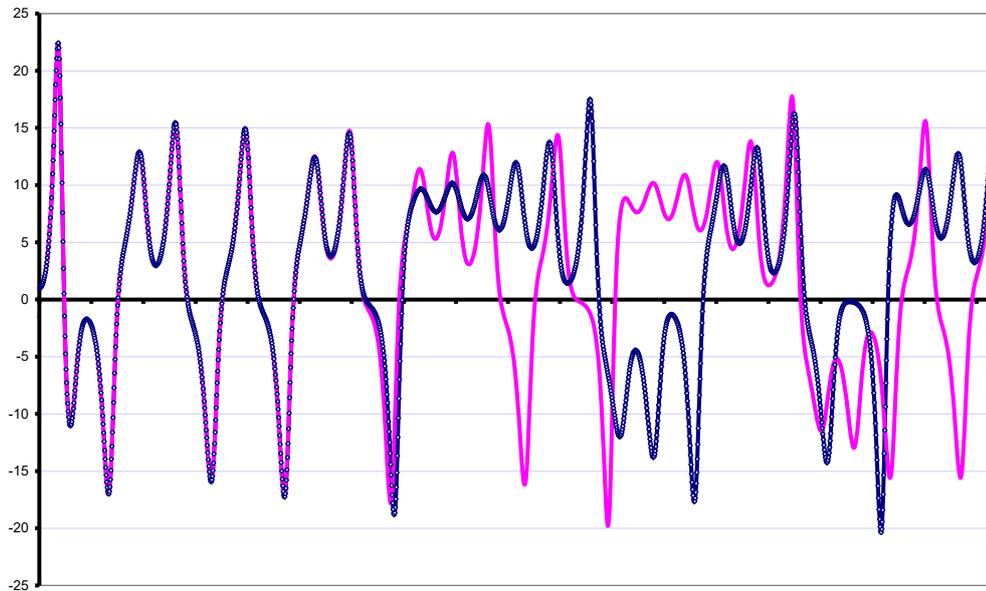


Рис. 5.2. Поведінка змінної системи  $X$  в часі для різних початкових умов

На рис. 5.2 наведена динаміка змінної системи  $X$  в часі при незначних відхиленнях у початкових умовах ( $\Delta x_0 = 0,01$ ). Як бачимо, на деякому невеликому початковому проміжку часу, обидві траєкторії повторюють одна одну. При цьому, поведіння цих траєкторій нагадує хаотичне. Але, починаючи з деякого моменту часу, досліджувані траєкторії розходяться й співпадінь в поведінні нашої системи більше не спостерігається. Таким чином, строк упередження прогнозу динаміки досліджуваної змінної  $X$  сильно залежить від того, наскільки точним було визначення стану системи в початковий період часу, що й потрібно було доказати.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Хорошун В.В., Науменко І.А. Прогнозування соціально-економічних процесів: навч.-метод. посібник для студентів ЗДІА галузі знань 05 Соціальні та поведінкові науки, спеціальності 051 Економіка, освітньо-кваліфікаційного рівня першого (бакалаврського). Запоріжжя : ЗДІА, 2018. 100 с.
2. Лепський М.А. Якісні методи соціального прогнозування: методологія, методика, практика : підруч. для вищ. навч. закл. Запоріжжя : КСК Альянс, 2016. 440 с.;
3. Прогнозування соціально-економічних процесів: конспект лекцій для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» напряму підготовки «Економічна кібернетика» /уклад. Олена Іванівна Макаренко. Запоріжжя : ЗНУ, 2014. 80 с. URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2014/06/0032443>;
4. Макаренко О.І., Дем'яненко Ю.В. Прогнозування соціально економічних процесів : метод. реком. та завдання до лаб. роб. для студ. освітньо кваліф. рівня «бакалавр» напр. підгот. «Економічна кібернетика». Запоріжжя : ЗНУ, 2013. 56 с. URL: <http://ebooks.znu.edu.ua/files/metodychky/2013/04/0030329.doc> ;
5. Лось В.О. Прогнозування соціально-економічних процесів : метод. вказ. до вик. лабор. робіт для студ. спец. «Економічна кібернетика» заочн. форм навч. Запоріжжя : ЗНУ, 2010. 64 с.;
6. Кулявець В.О. Прогнозування соціально-економічних процесів : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. рек. МОНУ. Київ : Кондор, 2012. 194 с.;
7. Касьяненко В. О., Старченко Л. В. Моделювання та прогнозування економічних процесів : навч. посібник рек. МОНУ. Суми : Університетська книга, 2016. 185 с.

## ДОДАТКИ

## Додаток А

Табличні значення коефіцієнта Ст'юдента

Кількість ступенів свободи $f = n - 1$	Довірча вірогідність			
	0,90	0,95	0,99	0,999
1	6,3138	12,7062	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	5,8409	12,9240
4	2,1318	2,7764	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,7500	3,6460
40	1,6839	2,0211	2,7045	3,5510
60	1,6706	2,0003	2,6603	3,4602
$\infty$	1,6449	1,9600	2,5758	3,2905

Вхідні часові ряди  $Y_1$ ,  $Y_2$  та  $Y_3$ 

t	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$
1	54,47	1,17	1,17
2	59,17	0,39	3,22
3	62,09	1,86	2,63
4	53,82	-0,15	0,34
5	49,69	-0,05	-2,11
6	49,44	-1,16	-1,35
7	64,47	1,93	1,95
8	68,75	-2,08	2,04
9	74,50	-0,26	-0,58
10	66,95	2,15	1,21
11	60,73	-1,63	-2,87
12	59,77	-1,00	-3,23
13	74,15	-0,07	-1,41
14	77,66	-0,10	-2,56
15	83,94	-1,20	-1,33
16	75,49	-0,95	-3,30
17	67,25	0,93	-3,12
18	65,04	-1,68	-4,97
19	80,48	-1,04	-5,31
20	85,82	-1,66	-5,09
21	90,94	-1,21	-8,34
22	82,81	0,27	-7,46
23	81,36	-0,67	-8,74
24	75,85	1,16	-5,91
25	94,47	-0,32	-8,72
26	100,17	-1,83	-9,16
27	105,69	-0,70	-10,14
28	92,39	-0,55	-11,36
29	87,27	0,24	-13,49
30	83,91	2,15	-9,18
31	102,63	-0,98	-8,57
32	106,73	1,79	-6,22
33	119,51	-0,99	-9,45
34	101,24	-1,39	-8,45
35	98,06	-1,76	-8,05
36	89,83	-0,85	-8,39
37	106,90	2,45	-8,14
38	118,23	0,69	-5,95
39	127,91	0,38	-6,50
40	113,23	-2,34	-9,78
41	103,18	2,38	-4,97
42	97,66	-1,90	-5,82

t	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$
43	117,97	1,63	-6,14
44	133,60	-1,13	-6,01
45	140,42	-1,79	-8,69
46	125,17	2,32	-8,36
47	110,03	-2,46	-12,04
48	110,13	-0,88	-12,62
49	127,79	0,05	-10,35
50	143,70	0,39	-11,34
51	151,67	-1,17	-11,59
52	131,03	-2,40	-14,65
53	124,21	1,23	-14,25
54	120,23	0,65	-12,16
55	146,17	1,49	-10,53
56	148,26	-0,26	-13,13
57	157,95	1,21	-10,12
58	148,73	1,61	-7,96
59	132,54	-1,33	-7,35
60	122,32	2,26	-6,63
61	148,31	-0,79	-7,45
62	161,40	-0,85	-8,02
63	171,42	2,46	-3,57
64	155,71	-2,47	-6,31
65	140,25	-2,19	-9,07
66	137,23	-0,15	-8,43
67	158,62	-2,10	-10,46
68	174,00	0,91	-8,95
69	185,71	-2,36	-11,50
70	165,58	0,73	-11,56
71	143,00	0,58	-10,37
72	138,05	-2,00	-10,19
73	171,89	-0,09	-9,37
74	187,39	0,57	-6,87
75	191,41	1,96	-3,71
76	177,75	-1,24	-6,42
77	154,14	2,33	-5,14
78	151,22	2,19	-0,94
79	187,10	0,54	2,02
80	199,81	-1,39	2,89
81	205,20	-2,08	0,68
82	179,49	-2,28	0,20
83	158,69	-1,78	-2,36
84	149,68	-1,51	-2,49

t	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$
85	186,80	1,20	-3,73
86	202,89	-1,10	-3,36
87	223,41	1,96	-2,00
88	191,91	1,94	-1,05
89	166,88	-1,01	-1,98
90	165,35	0,29	-3,20
91	199,52	-0,34	-3,46
92	221,87	-1,88	-3,52
93	241,46	2,03	-2,16
94	197,13	1,99	-2,41
95	181,80	-1,70	-6,57
96	167,74	0,43	-5,10
97	216,85	2,24	-4,39
98	236,59	2,21	-2,78
99	253,74	-0,27	-0,73
100	212,45	0,86	0,69