Обчислювальний експеримент із розрахунку значень певного інтегралу

(Індивідуальне, самостійне завдання)

У цій роботі вивчається програмування класичних методів наближеного обчислення певних інтегралів:
метод прямокутників,
метод трапецій та
метод парабол (метод Сімпсона).

відразу подивитися завдання)

1. Квадратурні формули

а) Постановка задачі. Основна формула

Припустимо, що в точках $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, Розташованих на відрізку $[a, b]$, відомі значення $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_m = f(x_m)$ інтегрованої на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$.

потрібно виходячи з цих значень приблизно обчислити $\int_a^b f(x)\,dx$.

Для вирішення поставленого завдання приймемо крапки x_0 ..... x_m як вузли інтерполяції функції $f(x)$ та апроксимуємо її поліномом Лагранжа:

$$f(x) \approx L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \prod_{i \neq k} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} f(x_k). \tag{1}$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b L_m(x)\,dx + \Delta_m, \tag{2}$$

де Δ_m - Похибка наближеного методу.

Очевидно, виходячи з формули (1) отримуємо

$$\int_a^b L_m(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k),$$

(3)

де A_k - деякі постійні, що залежать тільки від x_0 .... x_m

Таким чином, формула (2.2) наближеного інтегрування набуває вигляду

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k) + \Delta_m .$$

(*)

Визначення 2.1. Формула (*), у якій коефіцієнти A_k залежать від вузлів $x_0, \; x_1, \; \dots, \; x_m$ (але не від $f(x)$), називається квадратурною наближеною формулою для вихідного інтегралу.

Теоретично поліномом Лагранжа $L_m(x)$ можна наблизити

функцію $f(x)$ як завгодно точно, якщо вона досить гладка,

а ступінь $L_m(x)$ досить велика. Отже, інтеграл за формулою (*) також можна, обчислити як завгодно точно. Однак із збільшенням 'ступеня m різко збільшується трудомісткість рахунку, тому застосовувати квадратурні формули (*) при великих m невигідно. Найбільш уживані випадки

$m = 0, 1, 2.$

а) Випадок $m=0$ **Постійна інтерполяція**

У цьому випадку точка $x_0 \in [a,b]$ є єдиною точкою інтерполяції, причому $f(x) \approx f(x_0)$ Відповідна квадратурна формула має вигляд

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a) + \Delta_0.$$

Зазвичай вважають $x_0 = a$ або $x_0 = \frac{1}{2}(a+b)$ (середина відрізка $[a, b]$). Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(a)(b-a) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)\,dx \approx$$

$$\approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a). \qquad (4)$$

Ці формули називаються формулами прямокутників.

б) Випадок $m=1$ **. Лінійна інтерполяція**

У цьому випадку $f(x)$ апроксимується лінійною функцією:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

Вважаючи $x_0=a$, $x_1=b$, отримуємо, зокрема, формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \qquad (5)$$

яка називається формулою трапецій.

<u>в) Випадок $m=2$. Параболічна інтерполяція</u>

У цьому випадку $f(x)$ апроксимується квадратичним тричленом:

$$f(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+$$

$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Покладемо $x_0 = a; \ x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b$.

Тоді підрахунок призводить до наближеної формули

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], \tag{6}$$

яка називається формулою парабол або формулою Сімпсона.

2. Оцінка похибки

Нехай відповідно до рівності (2) Δ_0, Δ_1 і Δ_2 - похибки формул (4), (5) та (6) відповідно.

Має місце така теорема.

Теорема 2.1.

I $(m = 0)$

Нехай $f(x) \in C^2[a,b]$. Тоді

$$|\Delta_0| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

II $(m = 1)$

Нехай $f(x) \in C^2[a, b]$.

Тоді

$$|\Delta_1| \le \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

III $(m=2)$

Нехай $f(x) \in C^4[a, b]$.

Тоді

$$|\Delta_2| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$$

Доказ теореми проведемо для випадку $m = 0$. Маємо

$$|\Delta_0| = \left| \int_a^b f(x)\,dx - f(x_0)(b-a) \right|, \tag{7}$$

де $x_0 = (a+b)/2$ - середина відрізка $[a, b]$.

Далі, за формулою Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,$$

де $\xi=\xi(x)$ - деяка точка між x_0 і x

Отже,

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(x_0)(b-a)+\int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2dx.$$

Порівнюючи цю формулу з формулою (7), отримуємо, що

$$|\Delta_0|\leq\left|\int_a^b f''(\xi)(x-x_0)^2/2\,dx\right|\leq\max_{x\in[a,b]}f''(\xi)\left|\int_a^b\frac{(x-x_0)^2}{2}dx\right|,$$

звідки, обчислюючи останній інтеграл, негайно приходимо до шуканої оцінки п.1 теореми.

З доказом оцінки похибки для випадків $m=1$ і $m=2$ можна ознайомитись [2].

Висновок. Отже, бачимо, що якщо відрізок $[a,b]$ малий, те й похибка наведених формул досить мала. При цьому найкращою по порядку ступеня є формула, що відповідає квадратичній інтерполяції функції $f(x)$.

Однак, якщо відрізок $[a,b]$ не є малим, то й похибки Δ_0, Δ_1 і Δ_2 також не малі, і, отже, (2.4) – (2.6) не дають хорошої точності.

У цьому випадку роблять так: відрізок $[a, b]$ розбивається у сумі досить малих відрізків, кожному з яких застосовується одна з наведених формул. Сума отриманих наближень дає наближену формулу для обчислення інтегралів по повному відрізку $[a, b]$. Перейдемо висновку цих формул.

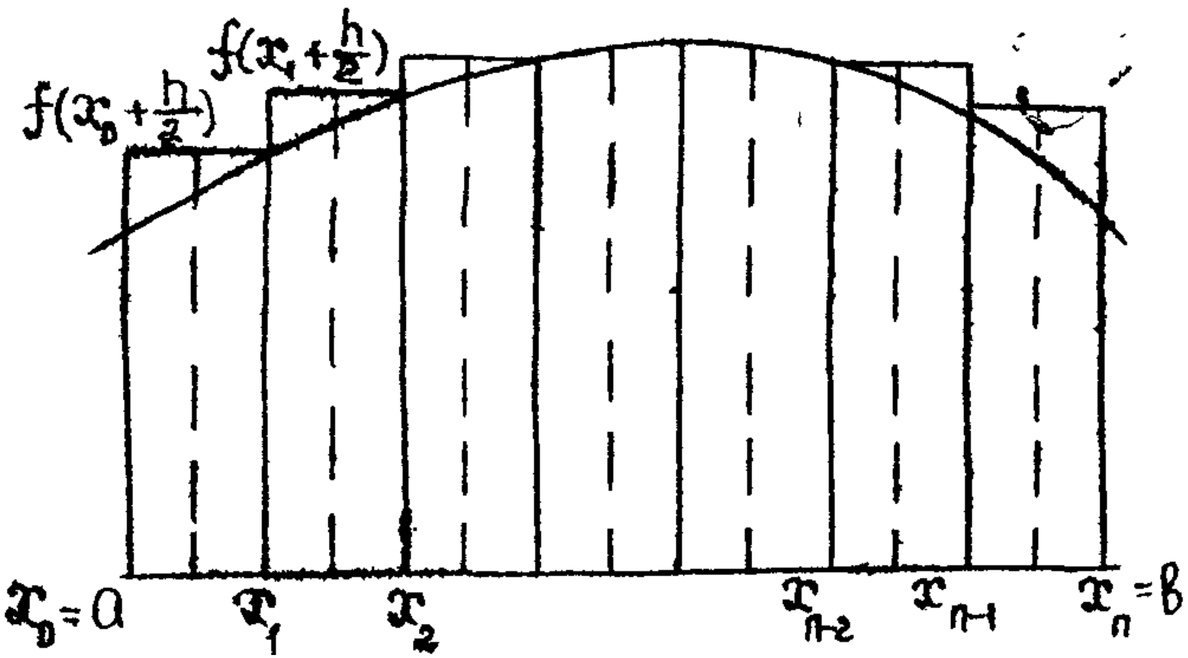
3. Складові квадратурні формули

а) Формула прямокутників

Нехай $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ - рівномірне розбиття відрізка $[a, b]$ з кроком h, тобто.

$$x_i = x_{i-1} + h, \quad i = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

На кожній ділянці $[x_{i-1}, x_i]$ покладемо $f(x) \approx f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$, апроксимуючи тим самим на повному відрізку $[a, b]$ функцію $f(x)$ шматково-постійною функцією (мал. 1).



Мал. 1. Складова формула прямокутників

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ і, отже, відповідно до формули прямокутників для кожного відрізка $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left[f(x_0 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2}) \right] h. \qquad (8)$$

(2.8) називається складовою формулою прямокутників для обчислення інтеграла на повному відрізку $[a, b]$

З'ясуємо похибку цієї формули. Як було встановлено у п.1 (теорема 2.1), на кожній окремій ділянці $[x_{i-1}, x_i]$ похибка Δ_{0i} формули прямокутників (2.4) задовольняє нерівності

$$|\Delta_{0i}| \le \frac{h^3}{24} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)|.$$

Отже, повна похибка Δ_0 (2.8) задовольняє нерівності

$$|\Delta_0| \le \sum_{i=1}^{n} |\Delta_{0i}| \le \frac{n h^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Оскільки $nh = b - a$, то остаточно

$$|\Delta_0| \le \frac{b-a}{24} h^2 \cdot \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \qquad (9)$$

Таким чином, формула прямокутників (2.8) має похибку порядку h^2, тобто.

$$\int_a^b f(x)dx = \left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right] h + O(h^2)$$

Зауваження. Часто як формулу прямокутників використовують формулу:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx [f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]h.$$

б) Формула трапецій

У цьому випадку на ділянці $[x_{i-1}, x_i]$ функцію $f(x)$ апроксимуємо лінійною функцією

$$f(x) \approx f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_i).$$

Тоді відповідно до формули трапецій (2.5) для ділянки $[x_{i-1}, x_i]$ маємо

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)].$$

Підсумовуючи ці наближення, отримуємо складову формулу трапецій

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1}))+f(x_n)].$$

Як і формула прямокутників, ця формула має порядок точності h^2 ; її похибка Δ_1 оцінюється нерівністю

$$|\Delta_1| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|. \qquad (10)$$

Висновок цієї нерівності такий самий, як і (9).

<u>в) Формула Сімпсона</u>

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на парне число $n=2m$ частин

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2m-1} < x_{2m} = b, \qquad h = \frac{b-a}{n}.$$

На кожній парі ділянок $[x_{i-1}, x_i]$,$[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1, 3, \ldots, 2m-1$. функцію $f(x)$ апроксимуємо поліномом Лагранжа другого порядку. Тоді відповідно до формули Сімпсона (6) для ділянок $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ маємо

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})].$$

Підсумовуючи формулу за всіма $i = 1, 3, \ldots, 2m-1$, отримуємо формулу Сімпсона для повного відрізка $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\{f(x_0) + 4[f(x_1) + \ldots + f(x_{2m-1})] + \quad + 2[f(x_2) + \ldots + f(x_{2m-2})] + f(x_{2m})\}.$$

(2.II)

Формула (2.11) має, як це випливає з теореми 2.1, порядок точності h^4. Підрахунок її похибки Δ_2 призводить до нерівності

$$|\Delta_2| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|. \tag{2.12}$$

***<u>Самостійно</u>*. Складати блок-схему алгоритму обчислення квадратур розглянутими методами.**

4. Правило Рунґе оцінки похибки

Як випливає з (9) і (10), оцінки похибок формул прямокутників і трапецій вимагають для застосування обчислення других похідних функції F(x).

Оцінка (12) для формули Сімпсона вимагає похідних четвертого порядку. Оскільки в практичних розрахунках часто функція досить складна або задана таблично, обчислення похідних стає важкою перешкодою. Тому на практиці застосовує теоретично не суворе, але досить просте правило Рунґе. Воно полягає у наступному.

Припустимо, що за підрахунку інтеграла I з кроком h похибка рахунку має вигляд Ch^k, де постійні $C > 0$ і $k > 0$ не залежать від h. Іншими словами, якщо через I_h позначити наближене значення інтегралу I при рахунку з кроком h, то

$$I = I_h + Ch^k. \qquad (2.13)$$

Зробимо тепер перерахунок інтегралу I з подвоєним кроком $2h$. В силу нашого припущення

$$I = I_{2h} + C(2h)^k. \qquad (2.14)$$

Порівнюючи (2.13) та (2.14), бачимо, що

$$I_{2h} - I_h = C(2^k - 1)h^k,$$

тобто.

$$I_{2h} - I_h = (2^k - 1)(I - I_h)$$

Звідси

$$I - I_h = (2^k - 1)^{-1}(I_{2h} - I_h).$$

Оскільки в процесі рахунку I_h і I_{2h} відомі, це дає оцінку похибки

$$|I - I_h| \leq (2^k - 1)^{-1}|I_{2h} - I_h|.$$

Зокрема, для формули Сімпсона

$k = 4$

і, отже,

$$|I - I_h| \leq \frac{1}{15} |I_{2h} - I_h|.$$

На закінчення зауважимо, що правило Рунге називають також правилом подвійного перерахунку.

Зауваження. Чи не строгість попереднього міркування в тому, що насправді (13) C залежить від h (Практично не дуже сильно).

5. Реалізація методів наближеного обчислення інтегралів

Для реалізації методів наближеного обчислення інтегралів зазвичай застосовують два способи.

Перший спосіб передбачає завдання під інтегральною функціональною залежністю $f(x)$ у вигляді підпрограми користувача. Він може бути рекомендований у разі аналітичного завдання $f(x)$ у вигляді деякого виразу алгебри (або алгоритму). У цьому випадку готується підпрограма-функція користувача (наприклад, $FUSER(X)$), що обчислює значення $f(x)$ у точці x. Безпосередньо, розрахунок інтеграла можна виконати в підпрограмі функції (наприклад, $IPR(A, B, N, FUSER)$. Розробивши програму IPR, що реалізує необхідний метод чисельного інтегрування, користувач організує зухвалу послідовність (кореневу програму) вирішення необхідної прикладної задачі.

Другий спосіб передбачає завдання підінтегральної функції як таблиці, значення якої попередньо розраховані. Користувач у програмній одиниці, що викликає підпрограму, - функцію розрахунку інтеграла (наприклад,

$IMPR(N,X,F)$ визначає значення двох масивів X_i і F_i Ці масиви суть значення x_i і $f(x_i)$ для заданого інтервалу $[a, b]$

N - - кількість ділянок розбиття інтервалу інтегрування.

При цьому слід пам'ятати, що розмірність масивів $X(I)$ і $F(I)$ має бути на одиницю більше значення N (див. рис.1), а перші елементи цих масивів визначаються як $X(1)=A$ і $F(1)=f(A)$

6. *Завдання*

Необхідно реалізувати обчислювальний експеримент із розрахунку значень певного інтегралу I (Див. п. 7) розглянутими вище методами.

Метою експерименту **<u>є складання таблиці</u>**, що відображає залежність відносних похибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3$ визначення значення залежно від вибраного числа N - кількості ділянок розбиття інтервалу інтегрування $[a, b]$. При цьому $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - відносні похибки, що визначаються за формулою

$$\frac{|I_* - I_i|}{|I_*|} \cdot 100\% \quad \text{при } I_* \neq 0.0$$

$$|I_* - I_i| \cdot 100\% \quad \text{при} \quad I_* \neq 0.0 \qquad (2.13)$$

де I_* - точне значення інтеграла (задано у постановці або знайдіть у будь-якому довіднику таблиці інтегралів).

I_i - наближене, розраховане за формулою прямокутників $(i = 1)$ за формулою трапецій $(i = 2)$, за формулою Сімпсона $(i = 3)$

Значення $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$, $\tilde{\varepsilon}_3$ визначаються аналогічно (2.13), але замість точного значення інтеграла I_* приймається наближене значення I , обчислене для $\tilde{N} = 2 * N$

Приклад оформлення таблиці:

Таблиця I

Обчислювальний експеримент з $F(X) = \ldots\ldots$

для інтервалу .... [.....]

параметри функції ....

N	h	ξ_1	ξ_2	ξ_3	$\tilde{\xi}_1$	$\tilde{\xi}_2$	$\tilde{\xi}_3$
200	...	...	...	...	...	...	...

2000	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
Nmax	...	...	...	...	...	...	...

Значення N_{max} рекомендується вибирати досить великим, наприклад 200 000, значення N – наприклад – 20, 200, 2000, 20000 і т.д. Якщо формулу, визначальну $f(x)$ (див. п. 7) входять параметри, їх значення слід узгодити з викладачем.

Слід використовувати систему програмування java чи C#.

7. Варіанти завдань

Примітка: дозволяється самостійно вибрати інтеграл до виконання завдання (обов'язково погодити з викладачем).

1. $$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

2. $$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x)^p} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \qquad 0 < p < 1$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}} \qquad -1 < p < 1$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{x^q + x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2q\cos\left(\frac{p}{q}\,\frac{\pi}{2}\right)} \qquad -q < p < q$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^q)^{1/q}} = \frac{\pi}{q\sin\frac{\pi}{q}} \qquad q > 1$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x^q)^{p/q}}\,dx = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}} \qquad 0 < p < q$

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

$$10.\ \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$11.\ \int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$12.\ \int_0^{\pi/2} \sin^2 mx\,dx = \frac{\pi}{4} \qquad m \geqslant 1$$

$$13.\ \int^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = 0$$

$$14.\ \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^p x\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}} \qquad p^2 < 1$$

$$15.\ \int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x} = 2 * 0.9159656$$

$$16.\ \int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

17. $$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 dx}{\sin^2 x} = \pi \ln 2$$

18. $$\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \qquad m > 1$$

19. $$\int_0^{\pi} \sin^m x \sin mx \, dx = \frac{\pi}{2^m} \sin \frac{\pi m}{2} \qquad m > 1$$

20. $$\int_0^{\pi} \sin^m x \cos mx \, dx = \frac{\pi}{2^m} \cos \frac{m\pi}{2} \qquad m > 1$$

21. $$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{matrix} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{matrix}$$

m n цілі

22. $$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{matrix} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \end{matrix}$$

m n цілі

$$23. \int_0^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \begin{matrix} 0, \\ 0, \\ \dfrac{2m}{m^2-n^2} \end{matrix}$$

m n цілі,

0 коли (m+n) парні

$2m/(m^2-n^2)$, коли (m+n) не парні

$$24. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x \, dx}{(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a^3 b} \qquad a \cdot b > 0$$

$$25. \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \pm 2ab \cos x + b^2} = \frac{\pi}{|a^2 - b^2|} \qquad a^2 \neq b^2$$

8 Контрольні питання

- Методи зберігання речових чисел в оперативній пам'яті.

- основні квадратурні формули. Графічна інтерпретація основних наближених методів чисельного інтегрування.

- Якісна залежність щодо похибки визначення чисельного значення інтеграла від кроку розбиття інтервалу інтегрування.

- приклади "класичних" помилок округлення речових даних при розрахунку арифметичних виразів.

- Основні правила передачі між програмними одиницями (в обраному реалізації програми чисельного експерименту) мовою програмування.

- Правила організації передачі імені функції як фактичний параметр зовнішньої процедури (підпрограми).

- Організація головної та допоміжних програмних одиниць у розробленій програмі виконання обчислювального експерименту.

- Структура, склад програмних одиниць, їх призначення та формальний опис.

- аналіз отриманих даних.

- основні особливості використаних чисельних методів. Способи їхньої програмної реалізації.