ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

С.М. Гребенюк, М.І. Клименко,
Н.М. Д'яченко, І.В. Красікова,
О.О. Тітова, В.В. Леонтьєва

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Частина 2

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

Запоріжжя
2013

УДК 517.9 (075.8)
ББК В51я73
Д50

Рецензенти:

Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету ім. Юрія Федьковича
М.М. Попов

Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного моделювання
Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара
В.І. Кузьменко

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-10197 від 17.06.2013)

Д50 Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної: частина 2: навч. посіб. /С.М. Гребенюк, М.І. Клименко, Н.М. Д’яченко та ін. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2013. – 499 с.

ISBN 978-966-599-443-5

Посібник призначений для студентів математичних факультетів. Він охоплює один із найважливіших розділів математичного аналізу – інтегральне числення функції однієї змінної та має на меті сприяти студентам у оволодінні теоретичним матеріалом розділу та практичними навичками при розв’язанні відповідних задач.

Цей посібник містить теоретичну частину, короткий нарис історії розвитку інтегрального числення, практикум із розв’язання задач, варіанти індивідуальних типових завдань із прикладами їх виконання, а також питання для самоконтролю і список рекомендованої літератури.

УДК 517.9 (075.8)
ББК В51я73

ISBN 978-966-599-443-5

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

До уваги читачів пропонується друга частина навчального посібника «Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної», призначеного для студентів математичних факультетів, зокрема тих, що навчаються за напрямами «Математика», «Прикладна математика», «Інформатика» та «Програмна інженерія». У цій частині висвітлюються основні поняття, ідеї та методи інтегрального числення функції однієї змінної, а також приклади їх застосування. При підборі матеріалу враховано основні сучасні тенденції розвитку математичного аналізу. Автори сподіваються, що студенти, які опанують навчальним матеріалом у межах, пропонованих посібником, матимуть надійну базу для подальшого успішного вивчення математичного аналізу та інших математичних дисциплін.

За своїми структурними елементами друга частина цього посібника відповідає його першій частині, де розглянуто основи диференціального числення функцій однієї змінної. Вона містить основні теоретичні відомості з інтегрального числення функції однієї змінної, короткий нарис із історії розвитку інтегрального числення, практикум із розв'язання задач за цим розділом математичного аналізу, варіанти індивідуальних типових завдань із прикладами їх розв'язання, а також питання для самоконтролю.

Основні теоретичні відомості щодо інтегрального числення функції однієї змінної наводяться першому розділі. Викладений тут матеріал охоплює поняття та властивості, пов'язані з невизначеним інтегралом та методи інтегрування основних класів елементарних функцій. Висвітлюються зміст визначеного інтеграла, його властивості та застосування. Розглянуто деякі наближені методи обчислення визначених інтегралів. Наведено базовий навчальний матеріал щодо невласних інтегралів, а також інтегралів Стілтьєса та функцій обмеженої варіації.

У другому розділі посібника досліджується ґенеза інтегрального числення від часів античності до сьогодення, характеризуються етапи його розвитку.

Типові приклади та задачі інтегрального числення функції однієї змінної розглянуто в практикумі, що міститься в третьому розділі посібника. Зміст та структура практикуму повністю відповідають теоретичному матеріалу, викладеному в першому розділі. Він орієнтований на формування у студентів необхідних вмінь та навичок, якими вони повинні оволодіти за підсумками вивчення цього розділу математичного аналізу, для успішного застосування його положень у практичній діяльності та подальшого ефективного вивчення дисципліни в цілому.

Вивчення курсу математичного аналізу, як і будь-якої іншої математичної дисципліни, неможливе без систематичного самостійного розв'язання задач. Саме процес активного осмислення навчального матеріалу при розв'язанні задач та вправ допомагає студенту сформувати адекватне уявлення про фундаментальні поняття математичного аналізу, для розуміння яких недостатньо загальних уявлень. Тому в четвертому розділі посібника наводиться велика кількість типових індивідуальних завдань, виконання яких дозволить студентам закріпити знання та вміння, набуті під час вивчення інтегрального числення функції однієї змінної. У цьому студентам допоможуть також наведені в посібнику приклади виконання типових завдань. П'ятий розділ посібника містить питання, вправи та задачі для самоконтролю, які сприятимуть осмисленому оволодінню основними методами інтегрального числення та формуванню навичок їх практичного застосування.

Автори сподіваються, що посібник стане дієвим засобом для успішного опанування студентами інтегральним численням функції однієї змінної та надасть суттєву допомогу викладачам у навчальному процесі.

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

§ 1. Первісна функції та невизначений інтеграл

1. Поняття первісної функції

В механіці ставиться задача: відтворити функцію шляху $S = S(t)$ матеріальної точки на деякому проміжку часу $[t_0, T]$, якщо є відомою функція модуля її миттєвої швидкості $v = v(t) = S'(t)$ на цьому проміжку.

Іншими словами, потрібно відтворити функцію за відомою її похідною.

Нехай множина X є інтервалом (a,b), півінтервалом $[a,b)$ або $(a,b]$, променем $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$ чи $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$ або числовою прямою $(-\infty,+\infty)$.

☝ 🗁**Означення 1.1.** Функцію $F(x)$ називають *первісною функції* $f(x)$ *на множині* X, якщо функція $F(x)$ диференційовна на X і виконується співвідношення $F'(x) = f(x)$.

Приклад 1.1. Наведемо приклади первісних деяких функцій.

1) Функція $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ на $(-1,1)$ є первісною для $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, оскільки $F'(x) = f(x)$.

2) Функція $F(x) = \cos x$ на $(-\infty,+\infty)$ є первісною для функції $f(x) = -\sin x$, оскільки $F'(x) = f(x)$.

Зауваження 1.1. Якщо $F(x)$ деяка первісна для $f(x)$ на (a,b), а $G(x) = F(x) + C, \quad C = const$, то

$$G'(x) = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Отже, $G(x)$ також є первісною для $f(x)$ на (a,b).

☝ **Теорема 1.1.** Якщо дві функції $F_1(x)$ і $F_2(x)$ – первісні функції $f(x)$ на множині X, то $F_1(x) = F_2(x) + C$ на X, де $C = const$.

Доведення. Маємо:

1) $F_1(x)$ – первісна для $f(x)$, тому (за означенням первісної) $F_1(x)$ – диференційовна на X;

2) аналогічно $F_2(x)$ – диференційовна на X;

3) за умовою і за означенням первісної $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ на X.

Отже, за наслідком із теореми про сталість диференційовної на множині X функції, що має на цій множині нульову похідну (див [**3**, с, 247; **4**, с. 268], ми отримаємо, що $F_1(x) = F_2(x) + C$, де $C = const$. ■

Наслідок 1.1. Якщо $F(x)$ деяка первісна для $f(x)$ на (a,b), то будь-яку іншу первісну $\Phi(x)$ можна подати у вигляді: $\Phi(x) = F(x) + C$, де $C = const$.

☝ 🗀**Означення 1.2.** Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на множині X називають *невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ *на множині* X і позначають

$$\int f(x)dx .$$

Символ «$\int$» читають як «інтеграл». Функцію $f(x)$ називають *підінтегральною*, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Якщо $F(x)$ – одна з первісних $f(x)$ на X, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Останнє співвідношення слід розуміти як рівність між двома множинами функцій.

Приклад 1.2. Наведемо приклади деяких невизначених інтегралів.

Із прикладу 1.1 випливає:

1) $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2} + C$ на $(-1;1)$, оскільки для $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ первісною є функція $F(x) = \sqrt{1-x^2}$.

2) $\int(-\sin x)dx = \cos x + C$ на $(-\infty;\infty)$, оскільки для $f(x) = -\sin x$ первісною є функція $F(x) = \cos x$.

☝ Основні властивості невизначеного інтеграла

$1^0 \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

$$\left.\begin{aligned} &2^0\ d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \\ &3^0\ \int dF(x) = F(x) + C \end{aligned}\right\}$$

(символ інтеграла і символ диференціала взаємно знищуються, якщо символ інтеграла стоїть перед символом диференціала і навпаки).

$$\left.\begin{aligned} &4^0\ \int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \\ &5^0\ \int[\alpha f(x)]dx = \alpha \int f(x)dx \end{aligned}\right\} \text{– властивості лінійності.}$$

Властивість 4^0 має місце в припущенні про існування первісних для функцій $f(x)$ і $g(x)$ на множині X, а в 5^0 – для функції $f(x)$ на X. За таких припущень існує первісна для функцій у лівих частинах цих властивостей.

Рівності у формулах властивостей лінійності є множинними рівностями. Оскільки $\int f(x)dx -$ це сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на множині X, що мають вигляд $F(x) + C_1$, а $\int g(x)dx -$ сукупність усіх первісних функції $g(x)$ (на тій же множині X) вигляду $G(x) + C_2$, то права частина властивості 4^0 являє собою множину функцій вигляду $F(x) \pm G(x) + C_1 \pm C_2$. Права частина властивості 5^0 – це множина всіх функцій вигляду $\alpha\left(F(x) + C\right)$. Кожен із елементів множин у обох частинах рівностей 4^0 і 5^0 визначений із точністю до сталої, отже, й ці рівності мають місце з точністю до сталої.

Доведення. Нехай $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$ на X.

1° Із означення первісної отримаємо:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x).$$

2° Зауважимо спочатку, що має місце формула, яка є наслідком означення первісної та формули диференціала функції:

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x) . \qquad (1.1)$$

Із означення невизначеного інтеграла маємо:

$$\int f(x)dx = F(x) + C ,$$

тоді з урахуванням (1.1) одержуємо:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d[F(x)+C] = \left(F'(x)+C'\right)dx = f(x)dx .$$

3° Безпосередньо з формули (1.1) отримаємо:

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C .$$

4° Оскільки

$$\left(F(x) \pm G(x)\right)' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x) ,$$

то $F(x) \pm G(x)$ – первісна для $f(x) \pm g(x)$ на X, тому рівність

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = F(x) \pm G(x) + C = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

є вірною з точністю до сталої.

Властивість 5° доведіть самостійно✍!■

Таблиця інтегралів

1) $\int 0 \cdot dx = C$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $\int 1 \cdot dx = x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

3) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $x \in (0;+\infty)$;

$\forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $x \in \mathbb{R}$;

$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$;

5) $\forall a > 0, a \neq 1$ $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $x \in \mathbb{R}$; 6) $\int e^x dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$; 8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на кожному з проміжків $\left(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на кожному з проміжків $\left(\pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

11) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$, $x \in \mathbb{R}$; 12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

13) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

14) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;

15) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$, $x \in \mathbb{R}$; 16) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$, $x \in (-1; 1)$;

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$, для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, а для знака плюс $x \in \mathbb{R}$;

18) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$ на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$.

Доведення. Похідна від правих частин, тобто первісних, повинна дорівнювати підінтегральній функції. Основна частина інтегралів цієї таблиці отримана як наслідок із таблиці похідних.

Розглянемо, як одержуються лише деякі з наведених у таблиці інтегралів:

4) $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$;

17) $\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|\right)' = \frac{\operatorname{sgn}\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right)}{\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right|} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 \pm 1}} \cdot 2x\right) =$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm 1}}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}$$

(для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$, а для знака плюс $x\in\mathbb{R}$);

18) $$\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}\cdot\operatorname{sgn}\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{1-x^2}$$

(на кожному з проміжків $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.). ■

Зауваження 1.2. Мають місце формули:

$\operatorname{arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ (ареа-синус) $x=\operatorname{sh}y$,	$\operatorname{arch}x=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$, $\lvert x\rvert\ge 1$ (ареа-косинус) $x=\operatorname{ch}y$,
$\operatorname{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $\lvert x\rvert<1$ (ареа-тангенс) $x=\operatorname{th}y$,	$\operatorname{arcth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $\lvert x\rvert>1$ (ареа-котангенс) $x=\operatorname{cth}y$.

Доведення. Розглянемо першу з наведених формул:

$$\operatorname{arsh}x=y\quad\Rightarrow\quad x=\operatorname{sh}y\quad\Rightarrow\quad x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}\quad\Rightarrow\quad e^y-e^{-y}-2x=0\quad\Rightarrow$$

$$e^{2y}-1-2xe^y=0\ \|\text{заміна: } z=e^y>0\,\|\ \Rightarrow\ z^2-1-2xz=0\ \ \|\frac{D}{4}=x^2+1\|\ \Rightarrow$$

$$z_{1,2}=x\pm\sqrt{x^2+1}=e^y\ \ \|\,z_1=x-\sqrt{x^2+1}<0\ \text{– зайвий корінь}\|\ \ \Rightarrow$$

$$z_2=e^y=x+\sqrt{x^2+1}\quad\Rightarrow\quad y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Інші формули вивести самостійно ✍!. ■

Зауваження 1.3.

1) Далі буде доведено, що невизначений інтеграл від неперервної функції існує.

2) Відомо, що всі похідні від елементарних функцій є елементарними функціями, однак первісні не від всіх елементарних функцій будуть елементарними функціями, тобто інтегрування не завжди можна провести в елементарних функціях.

☝	До *інтегралів, що «не беруться» в елементарних функціях,* належать
	1) *інтеграл Пуассона* (інтеграл помилок) $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ ($x \in \mathbb{R}$), що використовується в теорії ймовірностей, у статистичній фізиці, теорії теплопровідності й дифузії, 2) *інтеграли Френеля* $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$, $\int \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ ($x \in \mathbb{R}$), що використо-вуються в оптиці, 3) *інтегральний логарифм* $\int \frac{dx}{\ln x}$ ($x \in (0;+\infty)$), 4) *інтегральні косинус і синус* $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$)

2. Основні методи інтегрування

До основних методів інтегрування належать:

1) метод заміни (підстановки);

2) метод інтегрування частинами.

2.1. Інтегрування підстановкою

☝ **Теорема 1.2** *(інтегрування підстановкою).* Якщо функція $t = \varphi(x)$ визначена й диференційовна на множині X і має множину визначення $T = \varphi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

тоді на X функція $g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ має первісну, що дорівнює $G(\varphi(t))$, тобто

$$\boxed{\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C}$$

Доведення. Оскільки $\int g(t)dt = G(t) + C$ на множині T, то на цій множині $G'_t(t) = g(t)$. Тому при обчисленні похідної від складеної функції, зважаючи на те, що функція $t = \varphi(x)$ диференційовна на множині X, отримаємо на X:

$$\left(G\left[\varphi(x)\right]\right)' = G'_t\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x) = g\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x).$$

Отже, за означенням невизначеного інтеграла, матимемо на множині X :

$$G\left[\varphi(x)\right]dx = \int g\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx. \quad ■$$

Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$ на множині X, а функцію $f(x)$ можна подати у вигляді $f(x) = g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ та, крім того, інтеграл $\int g(t)dt$ на $T = \varphi(X)$ обчислюється нескладно, тоді під знаком інтеграла роблять заміну $t = \varphi(x)$ і застосовують зазначену формулу. Іноді зручно при обчисленні інтеграла функцію $\varphi(x)$ внести під знак диференціала, представивши підінтегральний вираз на X у вигляді $f(x)dx = g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x))$. Після цього стає зрозумілішою заміна $t = \varphi(x)$, а саме:

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\cdot d(\varphi(x)) = \left\|t = \varphi(x)\right\| = \int g(t)\cdot dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 1.3.

1) (№Д1777) $$\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x} = \left\|\begin{aligned} &t = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, \\ &dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x} \end{aligned}\right\| = 2\int t\,dt = t^2 + C =$$

$$= \operatorname{arctg}^2\sqrt{x} + C, \ x \in (0;+\infty).$$

2) $$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left\|\begin{aligned} t &= \ln x, \\ x &= e^t, \\ dx &= e^t dt \end{aligned}\right\| = \int \frac{e^t dt}{e^t\cdot t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C, \ x \in (0;+\infty).$$

Або, інакше:

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \left\|d(\ln x) = \frac{dx}{x}\right\| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x| + C \ \ (x \in (0;+\infty)).$$

У такому випадку говорять про внесення функції $\ln x$ під диференціал. Ця дія еквівалентна заміні $t = \ln x$, зазначеній вище.

Внесенням під диференціал функції x^2 можна обчислити наступний інтеграл.

3) $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \int \frac{\frac{1}{2}d\left(x^2\right)}{1+\left(x^2\right)^2}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$, $x \in \mathbb{R}$.

Має місце формула

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C}$$

Доведення. $\int f(ax+b)dx = \left\| \begin{array}{l} t = ax+b, \\ x = \frac{1}{a}(t-b), \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{array} \right\| = \int f(t)\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int f(t)dt =$

$$= \frac{1}{a}F(t)+C = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \quad \blacksquare$$

Приклад 1.4. Нехай $a > 0$.

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $x \in \mathbb{R}$.

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\cdot a\cdot \arcsin\frac{x}{a} + C = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $x \in (-a;a)$.

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \frac{1}{a}\cdot a\cdot \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| -$

$-\ln|a| + C = \left\| \begin{array}{l} \text{Позначення:} \\ c = C - \ln|a| \end{array} \right\| = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a)$, $(a;+\infty)$), а для знака плюс $x \in \mathbb{R}$.

4) $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a^2}\cdot a\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{a}}{1-\frac{x}{a}}\right|+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$ (на кожному з проміжків $(-\infty;-a)$, $(-a;a)$, $(a;+\infty)$).

5) $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\|\begin{array}{l} x=a\sin t,\quad \frac{x}{a}=\sin t,\quad -a\le x\le a,\quad dx=a\cos t\,dt,\\ t=\arcsin\frac{x}{a},\quad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2},\\ \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cos t \end{array}\right\|=$$

$$=\int a\cos t\cdot a\cos t dt=a^2\int\cos^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos 2t\right)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\left\|\begin{array}{l} t=\arcsin\frac{x}{a},\\ \sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\ \ (x\in[-a;a]).$$

6) $$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\left\|\begin{array}{l} x=a\,\mathrm{sh}\,t,\quad \frac{x}{a}=\mathrm{sh}\,t,\quad dx=a\,\mathrm{ch}\,t\,dt,\\ t=\mathrm{arsh}\frac{x}{a}=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln|a|,\\ \sqrt{x^2+a^2}=a\,\mathrm{ch}\,t \end{array}\right\|=$$

$$=\int a\,\mathrm{ch}\,t\cdot a\,\mathrm{ch}\,t dt=a^2\int\mathrm{ch}^2 t dt=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\mathrm{ch}\,2t\right)dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2t\right)+C=\left\|\begin{array}{l} t=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln|a|,\\ \sin 2t=2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t=2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2} \end{array}\right\|=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln|a|+\frac{1}{a^2}x\sqrt{x^2+a^2}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+C_1\ \left(C_1=C-\frac{a^2}{2}\ln|a|,\ x\in\mathbb{R}\right).$$

Інтеграл $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ за допомогою заміни $x=a\,\mathrm{ch}\,t$ для $x\geq a$ або заміни $x=-a\,\mathrm{ch}\,t$ для $x\leq -a$ і зауваження 1.2 обчислити самостійно ✍. ■

☝ **Розширена таблиця основних інтегралів.** Нехай $a>0$

№ пп	$\int f(x)dx = F(x)+C$	№ пп	$\int f(x)dx = F(x)+C$
1.	$\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\ \int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,$ $x\in(0;+\infty)$,		$\forall n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\ \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $x\in\mathbb{R}$,
	$\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}\ \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,	2.	$\int\frac{dx}{x-a}=\ln\|x-a\|+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,
3.	$\int e^x dx=e^x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	4.	$\forall a>0, a\neq 1\ \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C, x\in\mathbb{R}$,
5.	$\int\sin x dx=-\cos x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	6.	$\int\cos x dx=\sin x+C$, $x\in\mathbb{R}$,
7.	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C$ на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$,	8.	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x+C$ на кожному з проміжків $(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$,
9.	$\int\mathrm{sh}\,x dx=\mathrm{ch}\,x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	10.	$\int\mathrm{ch}\,x dx=\mathrm{sh}\,x+C$, $x\in\mathbb{R}$,
11.	$\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th}\,x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	12.	$\int\frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}=-\mathrm{cth}\,x+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,

13.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C, \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C, \end{cases}$ $x \in \mathbb{R}$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a}+C, \\ -\arccos\frac{x}{a}+C, \end{cases}$ $x \in (-1;1)$,
15.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,	16.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert+C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a)$, $(a;+\infty)$, а для знака плюс $x \in \mathbb{R}$),
17.	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$, $x \in [-a;a]$,		
18.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert+C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a]$, $[a;+\infty)$, а для знака плюс $x \in \mathbb{R}$).		

2.2. Інтегрування частинами

☝ **Теорема 1.3** *(інтегрування частинами).* Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X, тоді

1) із існування на X первісної функції $v(x)\,u'(x)$ випливає існування первісної функції $u(x)\,v'(x)$ на цій множині,

2) має місце формула

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx$$

або рівносильна їй –

$$\boxed{\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))}$$

Доведення. Оскільки функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X, то мають місце формули

$$d(uv) = vdu + udv \quad \Leftrightarrow \quad udv = d(uv) - vdu.$$

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності:

$$\int udv = \int \left(d(uv) - vdu \right).$$

За умовою, існує первісна функції $v(x)\,u'(x)$ на множині X, тому існує інтеграл

$$\int v(x)\,u'(x)\,dx = \int v(x)\,d\left(u(x)\right).$$

Із властивості 3^0 випливає, що

$$\int d(uv) = uv + C\ .$$

Отже, після застосування властивості 4^o отримаємо

$$\underset{\exists}{\int udv} \underset{\Leftarrow}{\overset{4^0}{=}} \underset{(\exists}{\int d(uv)} \underset{\wedge}{-} \underset{\exists)}{\int vdu} \overset{3^0}{=} uv - \int vdu\ .$$

Той факт, що $\exists\int udv$, означає існування первісної функції $u(x)\,v'(x)$. Теорему повністю доведено. ■

☝ Основні класи функцій, що інтегруються частинами

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
А.	$\int P_n(x) f(x) dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$P_n(x)$ – много-член, $\deg P_n = n$ [1]	$f(x) = \left[\begin{array}{l} \sin(bx), \\ \cos(bx), \\ e^{bx},\ a^{bx}, \\ \dfrac{1}{\cos^2(bx)}, \\ \dfrac{1}{\sin^2(bx)}, \\ \text{і т.п.} \end{array}\right]$	$u = P_n(x),$ $dv = f(x)dx.$	Формула інтегрування частинами застосо-вується n разів

[1] Позначення $\deg P(x)$ – це степінь многочлена $P(x)$.

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
Б.	$\int g(x)P_n[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\,\varphi[f(x)]dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$g(x)$ – дробово-лінійна функція, зокрема многочлен	$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \arcsin(bx), \\ \arccos(bx), \\ \mathrm{arctg}(bx), \\ \mathrm{arcctg}(bx), \\ \ln(bx),. \end{bmatrix}$ $P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$	$u = P_n[\varphi(x)]$, $dv = g(x)dx$, відповідно $u = \varphi[f(x)]$, $dv = g(x)dx$ (або методом підстановки $t = \varphi(x)$, відповідно $t = \varphi[f(x)]$)	У першому випадку інтегрувати частинами n разів
В.	$\int e^{ax}\cos bxdx,$ $\int e^{ax}\sin bxdx$ та інтеграли, що зводяться до них			Двічі $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$ $(dv = \sin bx\,dx)$ або двічі $u = \cos bx$ $(u = \sin bx)$, $dv = e^{ax}dx$	Двічі інтегрувати частинами. Див. приклад 1.5, 3)

Приклад 1.5.

1) Обчислимо інтеграл, що належать до класу А:

$$\int (2x^2+4)\sin^2 xdx = \int (x^2+2)(1-\cos 2x)dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \int (x^2+2)\cos 2xdx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x^2+2, & du = 2xdx, \\ dv = \cos 2xdx, & v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix} \right\| = \frac{x^3}{3} + 2x - \left[\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)\sin 2x - \int x\sin 2xdx \right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \sin 2xdx, & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right\| = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{2}\left(x^2+2\right)\sin 2x + \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \right.$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx\right)\Bigg) = \frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

2) Обчислимо інтеграл із класу Б (№Д1813):

$$\int x\cdot\operatorname{arctg}^2 x dx = \left\|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}^2 x, & du=\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx, \\ dv = x\,dx, & v=x^2/2 \end{matrix}\right\| = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-\int x^2\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx =0$$

$$= \left\|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x, & du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv=\dfrac{x^2}{1+x^2}dx, & v=\displaystyle\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x-\operatorname{arctg} x \end{matrix}\right\| =$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-\left(\operatorname{arctg} x\left(x-\operatorname{arctg} x\right)-\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}^2 x+\int\frac{1/2d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}-\int\operatorname{arctg} x\,d\left(\operatorname{arctg} x\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}^2 x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}^2 x-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

3) Позначимо $A=\int e^{ax}\cos bxdx$. Цей інтеграл потрібно двічі інтегрувати частинами, кожен раз уводячи споріднені заміни, тобто або кожен раз експоненційну функцію позначати через $u(x)$, а тригонометричну, помножену на dx, через $dv(x)$, або навпаки:

$$A=\int e^{ax}\cos bxdx = \left\|\begin{matrix} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx, \\ dv=\cos bxdx, & v=\dfrac{1}{b}\sin bx \end{matrix}\right\| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx=$$

$$= \left\|\begin{matrix} u=e^{ax}, & du=ae^{ax}dx, \\ dv=\sin bxdx, & v=-\dfrac{1}{b}\cos bx \end{matrix}\right\| = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-$$

$$-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx\right) = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}A\,.$$

Маємо: $A=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}A$, звідки одержимо

$$\boxed{A=\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)+C}$$

Аналогічно можна отримати (вивести самостійно ✍!)

$$\boxed{\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)+C}$$

4) Інші випадки

$$I=\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\left\|\begin{matrix} u=\sqrt{x^2\pm a^2}, & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}, \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right\|=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\frac{\left(x^2\pm a^2\mp a^2\right)dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=x\sqrt{x^2\pm a^2}-\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx\pm a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2\pm a^2}-I\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I=x\sqrt{x^2\pm a^2}-I\pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I=\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

Інтеграл типу $K_\lambda=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}$ **,** $\lambda\in\mathbb{N}$

$$K_\lambda=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\left(a^2+x^2-x^2\right)dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}\right]=\frac{1}{a^2}\left[K_{\lambda-1}-\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}\right]=$$

$$
=\left\|\begin{array}{ll}
u=x, & du=dx, \\
dv=\dfrac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda}}, & v=\displaystyle\int\frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda}}= \\
\multicolumn{2}{l}{=\left\|t=x^2+a^2\right\|=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{dt}{t^{\lambda}}=\frac{1}{2}\int t^{-\lambda}dt=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+a^2\right)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}=\frac{1}{2(1-\lambda)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}}
\end{array}\right\|=
$$

$$
=\frac{1}{a^2}\left[K_{\lambda-1}-\left(\frac{x}{2(1-\lambda)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}-\frac{1}{2(1-\lambda)}\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right)\right]=
$$

$$
=\frac{1}{a^2}\left[K_{\lambda-1}-\frac{x}{2(1-\lambda)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}+\frac{1}{2(1-\lambda)}K_{\lambda-1}\right].
$$

Отже, отримано рекурентну формулу

$$
\boxed{\begin{array}{c}
K_{\lambda}=\dfrac{1}{a^2}\left[\dfrac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}+\dfrac{x}{2(\lambda-1)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right], \\
\text{де } K_1=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\quad \lambda\in\mathbb{N}
\end{array}}
$$

3. Інтегрування раціональних функцій

Із курсу алгебри відомо, що будь-який многочлен із дійсними коефіцієнтами можна единим чином подати у вигляді добутку незвідних над полем дійсних чисел многочленів.

До *незвідних над полем дійсних чисел многочленів* належать многочлени вигляду

$$x-a\text{, або } x^2+px+q\text{, де } D=p^2-4q<0.$$

Тобто, якщо $\deg P(x)=n$, то

$$P(x)=A(x-a_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_s)^{\alpha_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{\lambda_r},$$

де

$$(a_i\neq a_j\ \wedge\ x^2+p_ix+q_i\not\equiv x^2+p_jx+q_j)\quad\forall i\neq j,$$

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)=n.$$

Причому, якщо множник має вигляд $(x-a_i)^{\alpha_i}$, то корінь a_i многочлена $P(x)$ має кратність α_i.

Розглянемо многочлен x^2+px+q, де $D=p^2-4q<0$. Встановимо властивості комплексних коренів цього многочлена і зв'язок між його коефіцієнтами й дійсною та уявною частинами коренів. Ці властивості нам знадобляться для доведенні леми 1.2.

Корені многочлена x^2+px+q, де $D=p^2-4q<0$ задовольняють співвідношення:

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{-p\pm i\sqrt{4q-p}}{2}\Rightarrow\left.\begin{cases}\operatorname{Re}x_1=\operatorname{Re}x_2=-\dfrac{p}{2},\\[2mm] \operatorname{Im}x_1=-\operatorname{Im}x_2=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow(a=x_1\Rightarrow x_2=\overline{a}).$$

Отже, незвідний многочлен другого степеня має комплексно спряжені корені a і $\overline{a}$. Якщо відомі комплексно спряжені корені, то за ними можна встановити многочлен другого степеня:

$$a=u+iv\quad(\overline{a}=u-iv),$$

$$u=-\frac{p}{2}\Rightarrow\underline{p=-2u},$$

$$v=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\Rightarrow v=\frac{\sqrt{4q-4u^2}}{2}\Rightarrow v=\sqrt{q-u^2}\Rightarrow\underline{q=u^2+v^2}.$$

Означення 1.3. Раціональним дробом називають функцію, що подається дробом, у чисельнику й знаменнику якого стоять многочлени, тобто

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени.

Якщо раціональний дріб має степінь чисельника меншу за степінь знаменника, то такий дріб називають *правильним*, у протилежному випадку – *неправильним*, тобто

$$\deg P(x)<\deg Q(x)\quad\Rightarrow R(x)\ \text{– правильний},$$

$$\deg P(x)\geq\deg Q(x)\quad\Rightarrow R(x)\ \text{– неправильний}.$$

Неправильний дріб можна записати у вигляді суми многочлену й правильного дробу, а саме:

$$R(x) = S(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ де } \deg P(x) < \deg Q(x).$$

Таке перетворення називають *виділенням цілої частини*.

До *простих раціональних дробів* відносяться раціональні дроби вигляду

$$☝ \boxed{\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} \;\text{ і }\; \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}},\;\; \alpha, \lambda \in \mathbb{N}}$$

Тут тричлен у знаменнику другого дробу незвідний, тобто його дискримінант від'ємний.

Лема 1.1. Якщо $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб і $Q(x)$ має корінь $a \in \mathbb{R}$ кратності n, тобто

$$Q(x) = (x-a)^n \varphi(x), \text{ де } \varphi(a) \neq 0,$$

тоді

$$\exists \psi(x) \text{ – многочлен} \wedge \exists k \in \mathbb{N} : \left(k \le n \;\wedge\; \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)} \right),$$

де $A = \dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$, а дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}$ є правильним.

Доведення. Розглянемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{P(x)}{(x-a)^n \varphi(x)} - \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{P(x) - A\cdot\varphi(x)}{(x-a)^n \cdot \varphi(x)}.$$

Дослідимо чисельник $P(x) - A\varphi(x)$:

$$\left(P(x) - A\varphi(x)\right)\Big|_{x=a} = \left(P(x) - \frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\varphi(x) \right)\Bigg|_{x=a} = P(a) - \frac{P(a)}{\varphi(a)}\cdot\varphi(a) = 0.$$

Висновок: $P(x) - A\varphi(x)$ – многочлен, що має корінь *a* деякої кратності *k*, крім того, $1 \le k \le n$. Тоді

$$\exists \psi(x) \text{ – многочлен} : P(x) - A\varphi(x) = (x-a)^k \psi(x),$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^k \psi(x)}{(x-a)^n \varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}.$$

Дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)}$ є правильним, оскільки його отримано після скорочення дробу $\dfrac{P(x)-A\cdot\varphi(x)}{Q(x)}$, для якого

$$\left.\begin{aligned}&\deg\varphi(x)<\deg Q(x),\\&\deg P(x)<\deg Q(x),\end{aligned}\right\}\Rightarrow \deg(P(x)-A\varphi(x))<\deg Q(x)\ .\blacksquare$$

Лема 1.2. Якщо $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб і $Q(x)$ має комплексно спряжені корені a і $\overline{a}$, де $a=u+iv$, кратності *n,* тобто

$$Q(x)=(x^2+px+q)^n\varphi(x)\text{, де } p=-2u,\ q=u^2+v^2,\ \varphi(a)\neq 0,\ \varphi(\overline{a})\neq 0\ ,$$

тоді

$$\exists\psi(x)\ \text{– многочлен}\ \wedge\exists k\in\mathbb{N}:$$

$$\left(k\le n\wedge\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\varphi(x)}\right),$$

де M і N – деякі дійсні числа, а дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\varphi(x)}$ – правильний.

Доведення. Розглянемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}=\frac{P(x)-(Mx+N)\cdot\varphi(x)}{(x^2+px+q)^n\varphi(x)}\ .$$

Знайдемо M і N такі, щоб $P(a)-(Ma+N)\varphi(a)=0$. Оскільки $a=u+iv$, то

$$P(a)-(Mu+iMv+N)\varphi(a)=0,$$

$$Mu+iMv+N=\frac{P(a)}{\varphi(a)}.$$

Оскільки $\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}=\operatorname{Re}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}+i\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}$, прирівняємо дійсні та уявні частини в останній рівності:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{Re}:\quad Mu+N=\operatorname{Re}\frac{P(a)}{\varphi(a)},\\&\operatorname{Im}:\quad Mv=\operatorname{Im}\frac{P(a)}{\varphi(a)}.\end{aligned}\right\}$$

Розв'язуємо отриману систему, маємо:

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{v}\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}, \\ N = \operatorname{Re}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)} - \dfrac{u}{v}\operatorname{Im}\dfrac{P(a)}{\varphi(a)}. \end{cases}$$

Висновок: $P(x)-(Mx+N)\varphi(x)$ – многочлен, у якого a і $\overline{a}$ виступають як корені деякої кратності *k.* Тому

$\exists\psi(x)$ – многочлен:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} = \frac{(x^2+px+q)^k\,\psi(x)}{(x^2+px+q)^n\,\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\,\varphi(x)}.$$

Доведення того, що дріб $\dfrac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{n-k}\,\varphi(x)}$ є правильним, здійснюється аналогічно доведенню в лемі 1.1. (Довести самостійно ✍!) ■

Почерговим застосуванням двох наведених лем доводиться наступна теорема.

☝ **Теорема 1.4.** Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним чином розкласти на суму простих раціональних дробів, тобто

$$\frac{P(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(s)}}{x-a_s} + \ldots + \frac{A_{\alpha_s}^{(s)}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_s}} +$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}} + \ldots +$$

$$+\frac{M_1^{(r)}x+N_1^{(r)}}{x^2+p_rx+q_r} + \ldots + \frac{M_{\lambda_r}^{(r)}x+N_{\lambda_r}^{(r)}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\lambda_r}}, \tag{1.2}$$

де $n<m$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)=m$.

Якщо дріб неправильний, то попередньо виділяють у ньому цілу частину.

Для того, щоб записати правильний раціональний дріб у вигляді суми простих дробів, діють таким *алгоритмом*:

Крок 1. Знаменник дробу розкладають на незвідні (над полем дійсних чисел) множники.

Крок 2. Дріб формально розкладають в суму простих дробів за формулою (1.2). При цьому записують у чисельниках усіх дробів невизначені коефіцієнти, для отримання значень яких використовують **метод невизначених коефіцієнтів**. Цей метод полягає в тому, що:

1) суму простих дробів розкладу зводять до спільного знаменника;

2) розглядаючи чисельники заданого й отриманого дробів, прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях змінної x;

3) одержують систему лінійних рівнянь, розв'язуючи яку, знаходять значення невизначених коефіцієнтів.

Прийом викреслювання. Застосуємо *лему 1.1* до правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменник якого $Q(x)$ має корінь $a \in \mathbb{R}$ кратності n, тобто

$$Q(x) = (x-a)^n \varphi(x), \text{ де } \varphi(a) \neq 0 .$$

Згідно з *лемою 1.1*, цей дріб можна представити у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{\psi(x)}{(x-a)^{n-k}\varphi(x)},$$

де $A = \frac{P(a)}{\varphi(a)}$, $1 \le k \le n$. Саме той факт, що $A = \frac{P(a)}{\varphi(a)}$, дозволяє отримати *прийом викреслювання* для обчислення невизначених коефіцієнтів. *Сутність цього прийому така*: коефіцієнт A визначається викреслюванням у знаменнику дробу $\frac{P(x)}{(x-a)^n\varphi(x)}$ незвідного множника $(x-a)^n$ і підстановкою в отриманий дріб замість x значення a.

Розглянемо *найпростіший випадок,* коли знаменник розкладається на незвідні множники вигляду

$$Q(x) = \alpha(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n),$$

а, відповідно, правильний раціональний дріб – на прості дроби вигляду

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x-a_n}.$$

У цьому випадку всі коефіцієнти A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ почергово знаходяться викреслюванням у знаменнику дробу

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}$$

відповідного незвідного множника $(x-a_i)$ й підстановкою в той вираз, що залишився:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-a_n)},$$

значення кореня a_i :

$$A_i=\frac{P(a_i)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdot\ldots\cdot(a_i-a_n)}.$$

☝ **Твердження 1.1.** Кожен із простих раціональних дробів інтегрується в елементарних функціях.

Доведення. Розглянемо прості раціональні дроби $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ і $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}$ у випадках, коли $\alpha=1, \alpha>1, \lambda=1, \lambda>1$ і покажемо в кожному з випадків інтегровність дробів у елементарних функціях.

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\cdot\ln|x-a|+C$.

2) $\int\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}dx=A\cdot\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=\frac{A}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}+C,\quad \alpha>1$.

Розглянемо інтеграл $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}dx$. Зробимо спочатку перетворення

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{(x^2+px+q)^{\lambda}}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^\lambda}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^\lambda}.$$

Перший із отриманих інтегралів знаходиться занесенням під диференціал, а другий – виділенням повного квадрату:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^\lambda}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right]^\lambda}.$$

Відповідь буде залежати від λ.

3) Якщо $\lambda=1$, то

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

4) Якщо $\lambda\neq 1$, то

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx=\frac{M}{2(\lambda-1)(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\right]^\lambda}.$$

Інтеграл в правій частині є інтегралом типу $K_\lambda=\int\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^\lambda}$ (див. п. 1.2 цього параграфу), де $t=x+\frac{p}{2}$, $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\frac{-D}{4}}$, який інтегрується в елементарних функціях. ■

Наслідком із останніх теореми і твердження є теорема 1.5.

☝ **Теорема 1.5.** Будь-яка раціональна функція інтегрується в елементарних функціях.

Далі ми будемо намагатися під знаком інтеграла зробити таку заміну, що зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції. Тоді, з урахуванням зазначеної теореми, можна буде стверджувати, що відповідна функція інтегрується в елементарних функціях.

Приклад 1.6. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2}.$$

Підінтегральний дріб є правильним, розкладемо його в суму простих:

$$\frac{x}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{\left(x-1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} =$$

$$= \frac{A(x-1)\left(x^2+4x+5\right) + B\left(x^2+4x+5\right) + (Cx+D)\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2}.$$

Коефіцієнти обчислюємо методом невизначених коефіцієнтів, тобто прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x в чисельниках першого й останнього дробу:

$$\begin{array}{c|c} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & 3A+B-2C+D=0, \\ x^1 & A+4B+C-2D=1, \\ x^0 & -5A+5B+D=0; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=1/25, \\ B=1/10, \\ C=-1/25, \\ D=-3/10. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо

$$I = \int \left(\frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{10\left(x-1\right)^2} - \frac{1}{50} \cdot \frac{2x+15}{x^2+4x+5} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{10(x-1)} - \frac{1}{50}\int \frac{(2x+4)+11}{x^2+4x+5}dx =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{10(x-1)} - \frac{1}{50}\int \frac{d(x^2+4x+5)}{x^2+4x+5} - \frac{11}{50}\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{10(x-1)} + \frac{1}{50}\ln(x-1)^2 - \frac{1}{50}\ln\left(x^2+4x+5\right) - \frac{11}{50}\operatorname{arctg}(x+2) + C =$$

$$= -\frac{1}{10(x-1)} + \frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+4x+5} - \frac{11}{50}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

4. Поняття про раціональну функцію двох змінних

🗀**Означення 1.4.** *Многочленом степеня* n *від двох аргументів* x *та* y називаюь функція вигляду:

$$P_n(x,y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{02}y^2+a_{11}xy+\ldots+$$
$$+\underbrace{a_{n0}x^n+a_{(n-1)1}x^{n-1}y+\ldots+a_{0n}y^n}_{n+1\text{ членів}},$$

де остання підкреслена група доданків містить хоча б один ненульовий коефіцієнт.

🗀**Означення 1.5.** *Раціональною функцією двох аргументів* x *та* y називають функція вигляду:

$$R(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{Q_m(x,y)},$$

де $P_n(x,y), Q_m(x,y)$ – многочлени від x, y степенів n, m відповідно.

Твердження 1.2. Якщо $R(x,y)-$раціональна функція двох аргументів $x, y,$ а функції $R_1(t), R_2(t), R_3(t)-$раціональні функції змінної t, то $R\big(R_1(t), R_2(t)\big)\cdot R_3(t)$ є раціональною функцією змінної t.

Дійсно, це твердження випливає з того, що сума, різниця, добуток, частка раціональних дробів є раціональним дробом. ■

5. Інтегрування деяких тригонометричних функцій універсальною тригонометричною підстановкою

Розглянемо інтеграл $\boxed{\int R(\sin x,\cos x)dx}$

Наша мета – підібрати заміну, яка дозволяє звести цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Розглянемо *універсальну тригонометричну підстановку*:

$$\boxed{☝\ t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x\in(-\pi,\pi)}$$

Тоді

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = 2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt,$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dt = \int R\left(\underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{R_1(t)}, \underbrace{\frac{1-t^2}{1+t^2}}_{R_2(t)}\right)\cdot\underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{R_3(t)}dt = \int R\big(R_1(t), R_2(t)\big)\cdot R_3(t)\,dt.$$

Застосовуючи *твердження 1.2*, отримаємо, що підінтегральний вираз є раціональною функцією, яка інтегрується в елементарних функціях (*за теоремою 1.5*).

Приклад 1.7 (№Д2025). Обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \left\|\begin{matrix} t = tg\frac{x}{2}, \\ -\pi < x < \pi \end{matrix}\right\| = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{2\cdot\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int\frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$= \int\frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int\frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\underline{t^2 + \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}} - \frac{1}{9} + \frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{9}}\right)^2} = \frac{3}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\left(t+\frac{1}{3}\right)\cdot 3}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$$

6. Інтегрування дробово-лінійних ірраціональностей

🗀**Означення 1.6.** *Дробово-лінійною ірраціональністю* називають функцію вигляду $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}$, де $a, b, c, h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $ah - bc \neq 0$.

Інтеграл $\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+h}}\right)dx}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою заміни

$$\boxed{☝\ t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}}$$

Із заміни отримаємо

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+h}; \quad x\left(a - ct^n\right) = ht^n - b; \quad x = \frac{b - ht^n}{ct^n - a};$$

$$dx = \frac{-hnt^{n-1}(ct^n - a) - cnt^{n-1}(b - ht^n)}{(ct^n - a)^2}dt = \frac{nt^{n-1}(ah - bc)}{(ct^n - a)^2}dt .$$

Отже,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)dx = \int R\left(\underbrace{\frac{b - ht^n}{ct^n - a}}_{R_1(t)}, \underbrace{t}_{R_2(t)}\right) \cdot \underbrace{\frac{nt^{n-1}(ah - bc)}{(ct^n - a)^2}}_{R_3(t)}dt .$$

Застосовуючи *твердження 1.2*, отримаємо, що підінтегральний вираз є раціональною функцією, яка інтегрується в елементарних функціях (*за теоремою 1.5*).

Приклад 1.8 (№Д1932). Обчислимо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{1}{(x+1)(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left\|\begin{matrix} t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}, & dx = \dfrac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}, \\ x = \dfrac{1+t^3}{t^3-1} & \end{matrix}\right\| =$$

$$= \int \frac{t}{\left(\dfrac{1+t^3}{t^3-1}+1\right)\left(\dfrac{1+t^3}{t^3-1}-1\right)} \cdot \frac{-6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2} = -\frac{3}{2}\int dt = -\frac{3}{2}t + C = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C .$$

7. Інтегрування квадратичних ірраціональностей підстановками Ейлера

🗁**Означення 1.7.** *Квадратичною ірраціональністю* називають функцію вигляду $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Універсальними підстановками, що зводять інтеграли типу $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$ до інтегралів від раціональних функцій, є підстановки Ейлера. Розглянемо їх.

Випадок I: тричлен ax^2+bx+c має один кратний корінь. Тоді $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x-x_0\right)^2} = \sqrt{a}\cdot\left|x-x_0\right|$ не є ірраціональністю, тому функція $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ є раціональною.

Випадок II: $\underline{D<0 \wedge a>0}$. Тоді $ax^2+bx+c>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Якщо $\left(D<0\wedge a<0\right)\Rightarrow ax^2+bx+c<0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \nexists\sqrt{ax^2+bx+c}\in\mathbb{R}$.

Нехай $\underline{D<0\wedge a>0}$, тоді

$\boxed{t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm x\sqrt{a}}$ – *перша підстановка Ейлера.*

Знак «+» або «–» обирається, виходячи зі зручності, що випливає із умови конкретної задачі. Із заміни отримаємо:

$$t\mp x\sqrt{a}=\sqrt{ax^2+bx+c},$$

$$t^2\mp 2tx\sqrt{a}+x^2a=x^2a+bx+c,\quad x\left(b\pm 2t\sqrt{a}\right)=t^2-c,$$

$$x=\frac{t^2-c}{b\pm 2t\sqrt{a}};$$

$$dx=\frac{2t\left(b\pm 2t\sqrt{a}\right)\mp 2\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{\left(b\pm 2\sqrt{a}t\right)^2}dt=\frac{\pm 2\sqrt{a}t^2+2bt\pm 2c\sqrt{a}}{\left(b\pm 2\sqrt{a}t\right)^2}dt;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\mp\frac{t^2-c}{b\pm2\sqrt{a}t}\sqrt{a}=\frac{\pm\sqrt{a}t^2+bt\pm c\sqrt{a}}{b\pm2t\sqrt{a}}.$$

Отже,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\underbrace{\frac{t^2-c}{b\pm2t\sqrt{a}}}_{R_1},\underbrace{\frac{\pm t^2\sqrt{a}+bt\pm c\sqrt{a}}{b\pm2t\sqrt{a}}}_{R_2}\right)\cdot\underbrace{\frac{2\left(\pm t^2\sqrt{a}+bt\pm c\sqrt{a}\right)}{\left(b\pm2t\sqrt{a}\right)^2}}_{R_3}dt\,.$$

Застосовуючи *твердження 1.2*, отримаємо, що підінтегральний вираз є раціональною функцією, яка інтегрується в елементарних функціях.

У випадку II, враховуючи, що $\underline{\left(D<0\wedge a>0\right)\Leftrightarrow\left(D<0\wedge c>0\right)}$ (доведіть це ✍!), можна зробити іншу заміну:

$\boxed{t=\sqrt{ax^2+bx+c}\ \pm\sqrt{c}}$ *– друга підстановка Ейлера.*

Доведіть самостійно ✍, що ця заміна зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок III: $\underline{D>0,\ x_1,x_2 - \text{корені}}$, тобто

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

Тоді

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\left|x-x_1\right|\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\,,$$

а підінтегральна функція

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x,\left|x-x_1\right|\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\right)=R_1\left(x,\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}\right)$$

містить дробово-лінійну ірраціональність. Тому заміною, яка зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції, буде

$$t=\sqrt{\frac{a\left(x-x_2\right)}{x-x_1}}.$$

Вона еквівалентна:

$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)}$ – *третя підстановка Ейлера.*

Зауважимо, що остання заміна дає:

$$x=\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}, \qquad dx=\frac{2ta\left(x_2-x_1\right)}{\left(a-t^2\right)^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}-x_1\right)=\frac{at\left(x_2-x_1\right)}{a-t^2},$$

$$\int R\left(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2},\frac{at\left(x_2-x_1\right)}{a-t^2}\right)\cdot\frac{2at\left(x_2-x_1\right)}{\left(a-t^2\right)^2}dt\,.$$

☝ *Висновок:*

Інтегрування квадратичних ірраціональностей $\boxed{\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx}$

здійснюється *підстановками Ейлера*, які у цьому випадку є універсальними.

Перша підстановка Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t$, якщо $a>0$;

друга підстановка Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt$, якщо $c>0$;

третя підстановка Ейлера: $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$.

Приклад 1.9. (№Д1966). Обчислимо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left\|\begin{array}{l} D<0\Rightarrow\sqrt{x^2+x+1}+x=t, \\ x^2+x+1=x^2+t^2-2xt, \qquad x=\dfrac{t^2-1}{1+2t}, \\ dx=\dfrac{2t\left(1+2t\right)-2\left(t^2-1\right)}{\left(1+2t\right)^2}dt=\dfrac{2t^2+2t+2}{\left(1+2t\right)^2}dt \end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}dt=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=2\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right)dt=\left\|\begin{matrix}A=1,\\ B=-\frac{3}{2},\\ C=-\frac{3}{2}\end{matrix}\right\|=$$

$$=2\int\frac{dt}{t}+2\int\frac{-\frac{3}{2}dt}{1+2t}+2\int\frac{-\frac{3}{2}dt}{(1+2t)^2}=2\ln|t|-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln|1+2t|-3\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{1+2t}+C=$$

$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x}+C.$$

8. Інтегрування квадратичних ірраціональностей іншими методами. Підстановка Абеля

При інтегруванні квадратичних ірраціональностей заміни Ейлера є універсальними. Однак недоліком цих замін у окремих випадках є громіздкість раціональних функцій, до яких вони зводять підінтегральну функцію. Тому виникає потреба у вивченні інших методів інтегрування квадратичних ірраціональностей.

Уведемо позначення: $y=ax^2+bx+c,\ Y=\sqrt{y}$, тоді

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R(x,Y).$$

Спочатку покажемо, як звести інтегрування цієї функції до інтегралів типів I, II та III. Це здійснюється за таким алгоритмом:

Крок 1. Всі вирази вигляду Y^2 під знаком функції $R(x,Y)$ замінимо на відповідний тричлен ax^2+bx+c, тоді функція $R(x,y)$ набуде вигляду

$$R(x,y)=\frac{P_1(x)+P_2(x)\sqrt{y}}{P_3(x)+P_4(x)\sqrt{y}}.$$

Крок 2. Помножимо чисельник та знаменник на $P_3(x)-P_4(x)\sqrt{y}$. Після цієї дії замінимо знову $Y^2=y$ на ax^2+bx+c. Це призведе до того, що функція $R(x,Y)$ перетвориться на суму

$$R(x,Y)=\underbrace{R_1(x)}_{\substack{\text{інтегрується}\\ \text{в елементарних}\\ \text{функціях}}}+R_2(x)\sqrt{y}\,.$$

Поставимо питання: як далі інтегрувати $R_2(x)\sqrt{y}$ без замін Ейлера?

Крок 3. Робимо перетворення:

$$R_2(x)\sqrt{y}=R_2(x)\frac{y}{\sqrt{y}}=\underbrace{R_2(x)\,y}_{R^*(x)}\frac{1}{\sqrt{y}}=R^*(x)\frac{1}{\sqrt{y}}\,.$$

Крок 3.1. Якщо дріб $R^*(x)-$ неправильний, то виділимо цілу частину, отримаємо:

$$R^*(x)=\underbrace{P(x)}_{\substack{\text{многочлен}\\ \text{степені } n}}+\underbrace{R^{**}(x)}_{\substack{\text{правильний}\\ \text{дріб}}},$$

$$\frac{R^*(x)}{\sqrt{y}}=\frac{P(x)}{\sqrt{y}}+\frac{R^{**}(x)}{\sqrt{y}}\,.$$

Крок 3.2. Якщо дріб $R^*(x)-$ правильний, тоді переходимо до наступного кроку.

Крок 4. Правильний дріб $R^*(x)$ або $R^{**}(x)$ розкладаємо на прості дроби $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ і $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}$. Тоді функція $\frac{R^{**}(x)}{\sqrt{y}}$ перетвориться на лінійну комбінацію функцій

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{y}} \text{ і } \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\lambda\cdot\sqrt{y}}\,.$$

Після реалізації зазначеного алгоритму інтегрування функції $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ звелося до інтегрування раціонального дробу і лінійної комбінації інтегралів таких трьох типів:

інтеграл типу I: $\int\frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx$, *де* $\deg P(x)=n$, *інтеграл типу II:* $\int \frac{A}{(x-\alpha)^k \cdot \sqrt{y}} dx,\ k \in \mathbb{N};$

інтеграл типу III: $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+pq+q\right)^{\lambda} \cdot \sqrt{y}} dx,\ \lambda \in \mathbb{N}.$

Подальшою **метою** буде доведення того, що:

1) інтеграл типу I знаходиться поданням його сумою

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{y}} dx = Q(x)\sqrt{y} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{y}},$$

де $Q(x)-$ многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що $\deg Q(x) = n-1$, а $\lambda -$ невизначений коефіцієнт;

2) інтеграл типу II знаходиться за допомогою заміни $t = \frac{1}{x-\alpha}$;

3) інтеграл типу III знаходиться за допомогою заміни Абеля та інших.

8.1. *Інтеграл типу* I*:* $\boxed{I_1 = \int \frac{P(x)}{\sqrt{y}}\ dx \text{, де } \deg P(x) = n}$

Спочатку розглянемо інтеграл $V_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{y}}$ і знайдемо рекурентну формулу щодо його обчислення.

Якщо $m = 0$, то

$$V_0 = \int \frac{x^0 dx}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Цей інтеграл знаходиться таким чином. Виділимо повний квадрат у квадратному тричлені ax^2+bx+c:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\underline{x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

При інтегруванні V_0 можливі такі чотири випадки.

Випадок 1

$$\left.\begin{matrix} D>0, \\ a>0, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C.$$

Випадок 2

$$\left.\begin{matrix} D<0, \\ a>0, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-D}}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C.$$

Випадок 3

$\left.\begin{matrix} D<0, \\ a<0, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax^2+bx+c<0\ \forall x\in\mathbb{R}$ – цей випадок не входить до множини визначення квадратичної ірраціональності, тому є неможливим.

Випадок 4

$$\left.\begin{matrix} D>0, \\ a<0, \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax^2+bx+c=-a\left(\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)2a}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

Нехай тепер $m\geq 1$. Мета: довести, що інтеграл V_m ($m\in\mathbb{N}$) можна послідовно звести до інтеграла V_0.

По-перше, розглянемо похідну від виразу $x^{m-1}\sqrt{y}$:

$$\left(x^{m-1}\sqrt{y}\right)' = (m-1)x^{m-2}\sqrt{y} + x^{m-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}y' =$$

$$= (m-1)x^{m-2}\sqrt{y} + x^{m-1}\frac{1}{2\sqrt{y}}(2ax+b) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[2(m-1)x^{m-2}\left(ax^2+bx+c\right) + x^{m-1}(2ax+b)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[x^m(2am-2a+2a) + x^{m-1}(2mb-2b+b) + x^{m-2}(2mc-2c)\right] =$$

$$= \frac{ma}{\sqrt{y}}x^m + \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)b}{\sqrt{y}}x^{m-1} + \frac{(m-1)c}{\sqrt{y}}x^{m-2},$$

тобто

$$\left(x^{m-1}\sqrt{y}\right)' = \frac{ma}{\sqrt{y}}x^m + \frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)b}{\sqrt{y}}x^{m-1} + \frac{(m-1)c}{\sqrt{y}}x^{m-2}.$$

По-друге, проінтегруємо останнє співвідношення, пам'ятаючи, що $V_m = \int \frac{x^m dx}{\sqrt{y}}$:

$$x^{m-1}\sqrt{y} = maV_m + \left(m-\frac{1}{2}\right)b\cdot V_{m-1} + (m-1)c\cdot V_{m-2}. \quad (1.3)$$

Нехай $m=1$, тоді із співвідношення (1.3) отримаємо

$$\sqrt{y} = aV_1 + \frac{bV_0}{2},$$

тобто

$$V_1 = \frac{\sqrt{y}}{a} - \frac{b}{2a}V_0. \quad (1.4)$$

Якщо в співвідношенні (1.3) покласти $m=2$, то одержимо:

$$x\sqrt{y} = 2aV_2 + \frac{3b}{2}V_1 + cV_0,$$

$$2aV_2 = x\sqrt{y} - \frac{3b}{2}\frac{\sqrt{y}}{a} + \frac{3b}{2}\frac{b}{2a}V_0 + cV_0,$$

$$V_2 = \sqrt{y}\left(\frac{x}{2a} - \frac{3b}{4a^2}\right) + V_0\left(\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{c}{2a}\right),$$

$$V_2 = \sqrt{y}\left(\alpha x + \beta\right) + \lambda V_0, \qquad (1.5)$$

де α і β – коефіцієнти, що залежать від a, b, c (випишіть цю залежність ✍**!).**

Покажемо за допомогою принципу математичної індукції, що V_m виражається через V_0 за формулою

$$V_m = \sqrt{y}P_{m-1}\left(x\right) + \lambda_m V_0. \qquad (1.6)$$

Рівності (1.4) і (1.5) підтверджують здійсненність (1.6) при $m = 1$ і $m = 2$ відповідно.

Припустимо, що рівність (1.6) є вірною для усіх m від 1 до n, тоді із (1.3) маємо

$$V_{n+1} = \frac{1}{(n+1)a}\left(x^n\sqrt{y} - \left(n + \frac{1}{2}\right)b \cdot V_n + nc \cdot V_{n-1}\right) \overset{(2.6)}{=}$$

$$= \frac{1}{(n+1)a}\left(x^n\sqrt{y} - \left(n + \frac{1}{2}\right)b \cdot \left(\sqrt{y}P_{n-1}\left(x\right) + \lambda_n V_0\right) + nc \cdot \left(\sqrt{y}P_{n-2}\left(x\right) + \lambda_{n-1}V_0\right)\right) =$$

$$= \sqrt{y} \cdot \underbrace{\frac{1}{(n+1)a}\left(x^n - \left(n + \frac{1}{2}\right)b \cdot P_{n-1}\left(x\right) + nc \cdot P_{n-2}\left(x\right)\right)}_{P_n^*(x)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)a}\left(nc \cdot \lambda_{n-1} - \left(n + \frac{1}{2}\right)b \cdot \lambda_n\right)}_{\lambda_n^*} \cdot V_0 = \sqrt{y} \cdot P_n^*\left(x\right) + \lambda_n^* \cdot V_0.$$

Отже, оскільки інтеграл $\int \frac{P\left(x\right)}{\sqrt{y}}dx$ є лінійною комбінацією інтегралів $V_0, V_1, ..., V_n$, то завдяки (1.6) цей інтеграл можна представити у вигляді:

$$☝ \boxed{\int \frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx = Q(x)\sqrt{y} + \lambda \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{y}}}_{V_0}} \tag{1.7}$$

Тут $\begin{cases} \deg P(x) = n, \\ \deg Q(x) = n-1. \end{cases}$

Як визначити коефіцієнти многочлена $Q(x)$ і значення λ? Для цього спочатку формально інтеграл $\int \frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx$ подають у вигляді (1.7), де многочлен $Q(x)$ записують із невизначеними коефіцієнтами, так само й коефіцієнт λ вважають невизначеним. Ці невизначені коефіцієнти знаходять за наступним алгоритмом:

1) диференціюють обидві частини (1.7):

$$\frac{P(x)}{\sqrt{y}} = Q'(x)\sqrt{y} + Q(x)\frac{1}{2\sqrt{y}}(2ax+b) + \lambda\frac{1}{\sqrt{y}};$$

2) потім обидві частини отриманої рівності помножують на $\sqrt{y} = \sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$P(x) = Q'(x)\cdot \underbrace{y}_{ax^2+bx+c} + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + \lambda; \tag{1.8}$$

3) застосовують метод невизначених коефіцієнтів для пошуку невизначених коефіцієнтів.

Чи буде відповідна система відносно шуканих коефіцієнтів мати єдиний розв'язок? Для відповіді на це питання обчислимо степені обох частин рівності (1.8):

$$\deg P(x) = n;$$

$$\left.\begin{aligned} &\deg Q'(x) = n-2, \\ &\deg y = 2, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \deg Q'(x)\,y = n;$$

$$\left.\begin{aligned}&\deg Q(x) = n-1,\\ &\deg(2ax+b) = 1,\end{aligned}\right\} \Rightarrow \deg Q(x)(2ax+b) = n.$$

Отже, обидві частини мають степінь n, тому кількість рівнянь відносно коефіцієнтів при однакових степенях дорівнює $n+1$. Кількість невідомих (невизначених коефіцієнтів) дорівнює $n+1$, де n – це кількість невизначених коефіцієнтів у многочлена $Q(x)$ і ще одне невідоме – це коефіцієнт λ.

Таким чином, інтеграл типу I знаходиться поданням його сумою

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{y}}dx = Q(x)\sqrt{y} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{y}},$$

де $Q(x)-$ *многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що* $\deg Q(x) = n-1$, *а* $\lambda-$ *невизначений коефіцієнт.*

8.2. *Інтеграл типу* II:

$$\boxed{I_2 = \int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{y}},\ \ k\in\mathbb{N}}$$

Припустимо, що $x > \alpha$. Зробимо заміну: ☝ $\boxed{t = \dfrac{1}{x-\alpha} > 0}$. Після чого отримаємо:

$$x = \frac{1+\alpha t}{t} \Rightarrow dx = \frac{-dt}{t^2};$$

$$ax^2+bx+c = \frac{a\left(1+2\alpha t+(\alpha t)^2\right)}{t^2} + \frac{b+\alpha bt}{t} + c =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(t^2\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)+t\left(2a\alpha+b\right)+a\right), \quad t>0;$$

$$I_2 = \int\frac{dx}{(x-\alpha)^k\cdot\sqrt{y}} = -\int\frac{t^k\cdot t\cdot dt}{t^2\cdot\sqrt{t^2\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)+t\left(2a\alpha+b\right)+a}} =$$

$$= -\int\frac{t^{k-1}\cdot dt}{\sqrt{t^2\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)+t\left(2\alpha a+b\right)+a}}.$$

Можливі такі випадки:

Випадок 1. Якщо число α не є коренем тричлена $ax^2 + xb + c$, тоді приходимо до інтеграла типу I.

Випадок 2. Число $\alpha -$ корінь тричлена $ax^2 + xb + c$, тоді ($\beta = 2\alpha a + b$)

$$I_2 = -\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{t\beta + a}} = -\int t^{k-1} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{\beta t + a}}}_{\substack{\text{дробово-лінійна} \\ \text{ірраціональність}}} dt .$$

Дробово-лінійна ірраціональність в цьому випадку інтегрується підстановкою $z = \sqrt{\dfrac{1}{\beta t + a}}$.

Отже, інтеграл типу II знаходиться за допомогою заміни $t = \dfrac{1}{x - \alpha}$.

8.3. *Інтеграл типу* III: $\boxed{I_3 = \int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda} \sqrt{y}} dx,\ \lambda \in \mathbb{N}}$

Випадок III.1*:* $\boxed{x^2 + px + q = ax^2 + bx + c = y,\ D = p^2 - 4q < 0}$

У цьому випадку з точністю до сталої

$$I_3 = \int \frac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}} dx .$$

Представимо чисельник сумою:

$$Mx + N = \frac{M}{2}\left(2x + p\right) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right),$$

тоді

$$I_3 = \frac{M}{2} \underbrace{\int \frac{\left(2x + p\right) dx}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}}}_{I_{3,1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \underbrace{\int \frac{dx}{\left(x^2 + px + q\right)^{\lambda + \frac{1}{2}}}}_{I_{3,2}} .$$

Обчислимо перший із інтегралів:

$$I_{3,1}=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}=\left\|t=x^2+px+q\right\|=$$

$$=\int\frac{dt}{t^{\lambda+\frac{1}{2}}}=-\frac{t^{-\lambda+\frac{1}{2}}}{\lambda-\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}+C.$$

Другий інтеграл $I_{3,2}$ обчислимо за допомогою

заміни Абеля ☝ $\boxed{t=\left(\sqrt{y}\right)'=\left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'=\frac{2x+p}{2\sqrt{y}}}\Rightarrow$

1) $2t\sqrt{y}=2x+p,$

$$2dx=2dt\sqrt{y}+2t\left(\sqrt{y}\right)'dx\Rightarrow dx=\sqrt{y}dt+t^2dx,$$

$$dx\left(1-t^2\right)=\sqrt{y}dt,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{dt}{1-t^2}; \qquad (1.9)$$

2) $2t\sqrt{y}=2x+p$,

$$4t^2y=4x^2+4px+p^2 . \qquad (1.10)$$

Рівність $y=x^2+px+q$ помножимо на 4 й віднімемо від неї (1.10):

$$-\left.\begin{aligned}4y&=4x^2+4px+4q,\\4t^2y&=4x^2+4px+p^2,\end{aligned}\right\}$$

$$-4t^2y+4y=-p^2+4q.$$

$$4y\left(1-t^2\right)=-p^2+4q=-D,$$

$$y=\frac{-D}{4}\cdot\frac{1}{(1-t^2)},$$

$$y^{\lambda}=\left(\frac{-D}{4}\right)^{\lambda}\cdot\frac{1}{\left(1-t^2\right)^{\lambda}}. \qquad (1.11)$$

Підставимо (1.9) і (1.11) в $I_{3.2}$:

$$I_{3,2}=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}=\int\frac{\left(1-t^2\right)^{\lambda}dt}{\left(1-t^2\right)\left(\frac{-D}{4}\right)^{\lambda}}=\left(\frac{4}{-D}\right)^{\lambda}\int\left(1-t^2\right)^{\lambda-1}dt\,,$$

$$\lambda\in\mathbb{N}\,. \quad (1.12)$$

Підінтегральна функція є многочленом. Тому *доведено інтегровність* $I_{3.2}$ *в елементарних функціях, а разом із цим і інтегровність у елементарних функціях інтеграла типу III у випадку* III.1.

Випадок III.2*:* $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{p'}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q'}\right)=a\left(x^2+p'x+q'\right)$ і

$$\boxed{x^2+px+q\not\equiv x^2+p'x+q'}$$

Можливі такі два випадки:

III.2.1) $p\neq p'$,

III.2.2) $p=p'$.

Розглянемо <u>III.2.1) $p\neq p'$</u>.

Мета: привести інтеграл III до вигляду $\int\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$. Для цього зробимо заміну $x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$, так підібравши коефіцієнти, щоб після підстановки її в обидва квадратні тричлени, коефіцієнти при t стали дорівнювати нулю. Зробимо відповідну підстановку:

$$x^2+px+q=\left(\frac{\mu t+\nu}{t+1}\right)^2+p\frac{\mu t+\nu}{t+1}+q=$$

$$=\frac{t^2\left(\mu^2+p\mu+q\right)+t\left(2\mu\nu+p\mu+p\nu+2q\right)+\left(\nu^2+p\nu+q\right)}{\left(t+1\right)^2}.$$

Для другого тричлена $x^2+p'x+q'$ підстановка дасть аналогічний результат. Коефіцієнти при t повинні дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{cases} 2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q = 0, \\ 2\mu\nu + p'(\mu+\nu) + 2q' = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu\nu = \dfrac{p'q - q'p}{p - p'}, \\ \mu + \nu = -2\dfrac{q - q'}{p - p'}; \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu, \nu$ – за теоремою Вієта є коренями рівняння

$$(p - p')u^2 + 2(q - q')u + (p'q - q'p) = 0 .$$

Якщо $D > 0$, то існує розв'язок цього рівняння. Доведемо, що $D > 0$:

$$D = 4(q - q')^2 - 4(p'q - q'p)(p - p') \overset{?}{>} 0,$$

$$D = 4\left(q^2 - 2qq' + q'^2 - pp'q + p^2q' + p'^2q - pp'q'\right) =$$

$$= (2q + 2q' - pp')^2 - (pp')^2 - 16qq' + 4p'^2q + 4p^2q' =$$

$$= \left(2(q + q') - pp'\right)^2 + p'^2\left(4q - p^2\right) - 4q'\left(4q - p^2\right) =$$

$$= \left(2(q + q') - pp'\right)^2 - \left(4q - p^2\right)\left(4q' - p'^2\right).$$

Для завершення доведення покажемо, що

$$\left(2(q + q') - pp'\right)^2 > \left(4q - p^2\right)\left(4q' - p'^2\right). \tag{1.13}$$

1) Оскільки $x^2 + px + q$ незвідний, то $4q - p^2 > 0 \Rightarrow 4q > p^2 \Rightarrow q > 0$.

2) Оскільки $x^2 + p'x + q'$ незвідний, то $4q' - p'^2 > 0 \Rightarrow 4q' > p'^2 \Rightarrow q' > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{4q'}_{\oplus} > \underbrace{p'^2}_{\oplus}, \\ \underbrace{4q}_{\oplus} > \underbrace{p^2}_{\oplus}, \end{array}\right\} \Rightarrow \text{//перемножимо//} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16qq' > (pp')^2 . \tag{1.14}$$

За нерівністю Коші

$$q + q' \geq 2\sqrt{qq'} . \tag{1.15}$$

Із (1.14) і (1.15) отримаємо:

$$2(q + q') \geq 4\sqrt{qq'} > |pp'| \Rightarrow 2(q + q') > pp' .$$

Остання нерівність і нерівності (1.14) і (1.15) дають змогу зробити першу з наступних оцінок ланцюга оцінювань:

$$\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2 \geq \left(4\sqrt{qq'}-pp'\right)^2 = 16qq'-8\sqrt{qq'}\,pp'+\left(pp'\right)^2 =$$

$$=\left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right)+4qp'^2+4q'p^2-8pp'\sqrt{qq'} =$$

$$=\left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right)+\underbrace{\left(2p'\sqrt{q}-2p\sqrt{q'}\right)^2}_{\geq 0} \geq \left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right).$$

1) Якщо $q \neq q' \Rightarrow q+q' > 2\sqrt{qq'} \Rightarrow$ перший знак «$\geq$» стане «>».

2) Якщо $q = q' \Rightarrow$ перший знак «$\geq$» тим же і залишиться, а другий стане «>», оскільки, за припущенням $p \neq p'$.

Отже, $\left(2\left(q+q'\right)-pp'\right)^2 > \left(4q-p^2\right)\left(4q'-p'^2\right)$, що й відповідає нерівності (1.13).

Висновок: можна знайти такі μ, ν, для яких інтеграл III зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^\lambda \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$ у випадку $p \neq p'$.

Розглянемо III.2.2) $p = p'$. Зробимо заміну: $x = t - \frac{p}{2}$, тоді

$$x^2+px+q = t^2 - tp + \frac{p^2}{4} + pt - \frac{p^2}{2} + q = t^2 - \frac{p^2}{4} + q,$$

$$x^2 + p'x + q' = t^2 - \frac{p^2}{4} + q'.$$

Це зводить інтеграл III.2 до інтеграла вигляду $\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^\lambda \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$ у випадку $p = p'$.

Тепер розглянемо методи інтегрування інтеграла вигляду

$$\boxed{\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^\lambda \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt,\ \lambda \in \mathbb{N}}$$

Правильний раціональний дріб $\dfrac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^\lambda}$ розкладаємо на прості, після чого доведеться обчислити інтеграл вигляду $\displaystyle\int \frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^k \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\int \frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^k \sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt = \frac{A}{\alpha}\underbrace{\int \frac{\alpha\, t\, dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k \sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,3}} + B\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k \sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,4}} .$$

1) $$I_{3,3} = \int \frac{\alpha\, t\, dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k \sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \left\| \begin{array}{ll} u=\sqrt{\alpha t^2+\beta}, & u^2=\alpha t^2+\beta, \\ t=\sqrt{\dfrac{u^2-\beta}{\alpha}}, & 2udu = 2\alpha\, t\, dt, \\ & \alpha tdt = udu \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{udu}{\left(\dfrac{1}{\alpha}u^2-\dfrac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)^k u} = \int \frac{du}{\left(\dfrac{1}{\alpha}u^2-\dfrac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)^k}$$ – раціональна функція.

2) $$I_{3,4} = \int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^k \sqrt{\alpha t^2+\beta}} =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} \underline{\text{Заміна Абеля}} & \\ u = \left(\sqrt{\alpha t^2+\beta}\right)' = \dfrac{2\alpha t}{2\sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \dfrac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}, & \\ u\sqrt{\alpha t^2+\beta} = \alpha t, & u^2\left(\alpha t^2+\beta\right) = \alpha^2 t^2, \\ du\sqrt{\alpha t^2+\beta} + u\cdot udt = \alpha dt, & t^2 = \dfrac{u^2\beta}{\left(\alpha^2-u^2\alpha\right)}, \\ \dfrac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \dfrac{du}{\alpha-u^2}, & t^2+\gamma = \dfrac{u^2\beta+\gamma\alpha^2-\gamma\alpha u^2}{\alpha\left(\alpha-u^2\right)} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{\left(\alpha^k\left(\alpha-u^2\right)^k\right)du}{\left(\alpha-u^2\right)\left(\left(\beta-\alpha\gamma\right)u^2+\alpha^2\gamma\right)^k} = \int \frac{\alpha^k\left(\alpha-u^2\right)^{k-1}du}{\left(\left(\beta-\alpha\gamma\right)u^2+\alpha^2\gamma\right)^k} .$$

Підінтегральна функція є раціональною, яка інтегрується в елементарних функціях (*за теоремою 1.5*).

Отже, інтеграл типу III знаходиться за допомогою зазначених вище методів.

Зробимо **висновок** щодо інтеграла випадку III.

Інтеграл типу III. $\boxed{I_3 = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda}\sqrt{y}}dx\,,\quad \lambda \in \mathbb{N}}$

Випадок III.1*:* $x^2+px+q = ax^2+bx+c = y\,,\ D = p^2-4q<0\,.$

$$I_3 = \frac{M}{2}\underbrace{\int \frac{(2x+p)\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}}_{I_{3,1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}}}_{I_{3,2}}:$$

$$I_{3.1} = -\frac{1}{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+px+q\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}}+C;$$

$$I_{3,2} = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^{\lambda+\frac{1}{2}}} = \left\| \begin{array}{l} \text{Заміна Абеля:} \\ t = \left(\sqrt{y}\right)' = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)' = \dfrac{2x+p}{2\sqrt{y}} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)^{\lambda} dt}{\left(1-t^2\right)\left(\frac{-D}{4}\right)^{\lambda}} = \left(\frac{4}{-D}\right)^{\lambda}\int \left(1-t^2\right)^{\lambda-1}dt,\quad \lambda \in \mathbb{N}.$$

Випадок III. 2*:* $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\underbrace{\frac{b}{a}}_{p'}x+\underbrace{\frac{c}{a}}_{q'}\right) = a\left(x^2+p'x+q'\right)$ і

$x^2+px+q \not\equiv x^2+p'x+q'$ розпадається на такі два випадки.

<u>III.2.1) $p \neq p'$</u> Тут вводиться заміна $x = \frac{\mu t+\nu}{t+1}$ з таким підбором коефіцієнтів, щоб після підстановки її в обидва квадратних тричлени, коефіцієнти при t обернулися в нуль. Після цього інтегрування зводиться до інтеграла вигляду $\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt$.

III.2.2) $p = p'$ Заміна $x = t - \frac{p}{2}$ зводить інтеграл III.2 до інтеграла вигляду

$$\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\,dt\ .$$

Інтеграл вигляду $\boxed{\int \frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\,dt,\ \lambda \in \mathbb{N}}$

Правильний раціональний дріб $\frac{P(t)}{\left(t^2+\gamma\right)^{\lambda}}$ розкладаємо на прості. Інтегрування зводиться до інтегралів такого вигляду

$$\int \frac{At+B}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}\,dt = \frac{A}{\alpha}\underbrace{\int \frac{\alpha t\,dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,3}} + B\underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}}}_{I_{3,4}}:$$

$$I_{3,3} = \int \frac{\alpha t dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \left\| \text{Заміна } u = \sqrt{\alpha t^2+\beta} \right\|;$$

$$I_{3,4} = \int \frac{dt}{\left(t^2+\gamma\right)^{k}\sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \left\| \begin{array}{l} \text{Заміна Абеля} \\ u = \left(\sqrt{\alpha t^2+\beta}\right)' = \dfrac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}} \end{array} \right\|.$$

Тепер проілюструємо методи обчислення інтегралів типу I, II і III, що містять квадратичну ірраціональність, на прикладах.

Приклад 1.10

1.10.1. *Інтеграл типу* I. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

Представимо цей інтеграл у вигляді суми

$$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left(Ax+B\right)\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\ .$$

Продиференціюємо останню рівність:

$$\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = A\sqrt{x^2+2x+2} + \left(Ax+B\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}},$$

помножимо обидві частини на $\sqrt{x^2+2x+2}$:

$$x^2-x+1=A\left(x^2+2x+2\right)+\left(Ax+B\right)\left(x+1\right)+\lambda,$$

застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 2A=1, \\ x^1 & 2A+A+B=-1, \\ x^0 & 2A+B+\lambda=1; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2}, \\ B=-1-\dfrac{3}{2}=\dfrac{-5}{2}, \\ \lambda=1-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Звідки отримаємо

$$\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

1.10.2. *Інтеграл типу* II. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^3\sqrt{x^2-2x-1}}\quad [\mathbf{6}].$$

Цей інтеграл обчислимо за допомогою заміни $t=\dfrac{1}{x-1}$:

$$\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^3\sqrt{x^2-2x-1}}=\left\|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x-1}>0,\quad x=\dfrac{1}{t}+1>1,\quad dx=-\dfrac{1}{t^2}dt, \\ \sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{t}+1\right)^2-2\left(\dfrac{1}{t}+1\right)-1}=\dfrac{\sqrt{1-2t^2}}{t} \end{array}\right\|=$$

$$\int\frac{t^3\cdot\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)dt\cdot t}{\sqrt{1-2t^2}}=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-2t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{-2t^2+1-1}{\sqrt{1-2t^2}}dt=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{\sqrt{1-2t^2}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-\left(t\sqrt{2}\right)^2}dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-\left(t\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2t^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{t\sqrt{2}}{1}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t\sqrt{2}}{1}+C=\frac{t}{4}\sqrt{1-2t^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}t+C=$$

$$=\frac{1}{4(x-1)}\sqrt{1-\frac{2}{(x-1)^2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C=\frac{\sqrt{x^2-2x-1}}{4\left(x-1\right)^2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x-1}+C.$$

1.10.3 *Інтеграл типу* III. *Випадок* III.1. Обчислити інтеграл

$$\int\frac{dx}{\left(2x^2-x+2\right)^{\frac{7}{2}}} \quad [\mathbf{6}].$$

Застосуємо формулу (1.12), яка була отримана за допомогою заміни Абеля:

$$\int\frac{dx}{\left(2x^2-x+2\right)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}}\int\frac{dx}{\left(x^2-\frac{x}{2}+1\right)^3\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\lambda=3,\quad p=-\dfrac{1}{2},\quad q=1,\quad D=\dfrac{1}{4}-4=-\dfrac{15}{4}.\\ \text{Заміна Абеля:}\quad t=\left(\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}\right)'=\dfrac{2x-\dfrac{1}{2}}{2\sqrt{x^2-\dfrac{x}{2}+1}}\end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{4}{-D}\right)^{\lambda}\int\left(1-t^2\right)^{\lambda-1}dt\right\|=\frac{1}{2^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{4\cdot 4}{15}\right)^3\int\left(1-t^2\right)^2dt=\frac{2^{12}}{2^{\frac{7}{2}}\cdot 15^3}\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=$$

$$=\frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 15^3}\left(t-2\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)+C=$$

$$=\frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 15^3}\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^3+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^5\right)+C.$$

1.10.4. *Інтеграл типу* III. *Випадок* III.2. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x+3}{\left(x^2 - x + 1\right)\sqrt{x^2 + x + 1}}\, dx$ [**6**].

Заміна: $x = \frac{\mu t + \nu}{t+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 \pm x + 1 = \left(\frac{\mu t + \nu}{t+1}\right)^2 \pm \left(\frac{\mu t + \nu}{t+1}\right) + 1 =$$

$$= \frac{t^2\left(\mu^2 \pm \mu^2 + 1\right) + t\left(2\mu\nu \pm \mu \pm \nu + 2\right) + \left(\nu^2 \pm \nu + 1\right)}{\left(t+1\right)^2}.$$

Прирівнюємо до нуля коефіцієнти при t:

$$\begin{cases} 2\mu\nu + \mu + \nu + 2 = 0, \\ 2\mu\nu - \mu - \nu + 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\left(\mu + \nu\right) = 0, \\ 4\mu\nu + 4 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -\nu, \\ \mu^2 = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \pm 1 \\ \nu = \mp 1 \end{cases}.$$

Нехай $\mu = 1, \nu = -1$, тоді

$$x = \frac{t-1}{t+1} \Rightarrow dx = \frac{2dt}{\left(t+1\right)^2},$$

$$x^2 + x + 1 = \frac{3t^2 + 1}{\left(t+1\right)^2}, \quad x^2 - x + 1 = \frac{t^2 + 3}{\left(t+1\right)^2};$$

$$I = \int \frac{\left(\frac{t-1}{t+1} + 3\right)\frac{2}{\left(t+1\right)^2}}{\frac{t^2+3}{\left(t+1\right)^2}\sqrt{\frac{3t^2+1}{\left(t+1\right)^2}}}\, dt = 2\int \frac{4t+2}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}\, dt =$$

$$= 8 \cdot \underbrace{\int \frac{t\, dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}}_{1^{\times}\left(\text{заміна}\left[u = \sqrt{t^2+3}\right]\right)} + 4 \cdot \underbrace{\int \frac{dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}}}_{2^{\times}\left(\text{заміна}\left[u = \left(\sqrt{t^2+3}\right)' = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}\right]\right)} =$$

$$= \sqrt{8} \cdot \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2} \cdot \left|1-x\right|} + \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{2} \cdot (1+x)}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{2} \cdot (1+x)} \right| + C.$$

Детальніше зупинимось на обчисленні двох виділених інтегралів:

1$^{\times}$) $\displaystyle\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}} = \left\| \begin{array}{l} u=\sqrt{3t^2+1}, \\ u^2=3t^2+1, \\ u\,du=3tdt, \\ t^2=\frac{1}{3}\left(u^2-1\right) \end{array} \right\| = \int \frac{u\,du}{u\left(u^2+8\right)} = \int \frac{du}{u^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{2\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3t^2+1}{8}} + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+1}{8}} + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\cdot|1-x|} + C.$$

2$^{\times}$) $\displaystyle\int \frac{dt}{\left(t^2+3\right)\sqrt{3t^2+1}} =$

$$= \left\| \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{u=\left(\sqrt{3t^2+1}\right)'=\dfrac{3t}{\sqrt{3t^2+1}} - \text{заміна Абеля},} \\ 3t=u\sqrt{3t^2+1}, & u\sqrt{3t^2+1}=3t, \\ du\sqrt{3t^2+1}+u\cdot udt=3dt, & 3u^2t^2+u^2=9t^2, \\ dt\left(3-u^2\right)=du\sqrt{3t^2+1}, & t^2=\dfrac{u^2}{3\left(3-u^2\right)}, \\ \dfrac{dt}{\sqrt{3t^2+1}}=\dfrac{du}{3-u^2}, & t^2+3=\dfrac{27-8u^2}{3\left(3-u^2\right)} \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{3du\left(3-u^2\right)}{\left(3-u^2\right)\left(27-8u^2\right)} = \int \frac{3du}{27-8u^2} = \int \frac{3du}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}u\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u} \right| + C = \left\| u=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}},\ t=\frac{1+x}{1-x} \right\| =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}\cdot(1+x)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}\cdot(1+x)} \right| + C.$$

9. Інтегрування біноміальних диференціалів

Біноміальними називають *диференціали* вигляду $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де $m,n,p\in\mathbb{Q},\quad a,b\in\mathbb{R}$. Розглянемо інтеграл від біноміального диференціала:

$$\boxed{\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx}$$

Випадок перший: $p\in\mathbb{Z}$. Найменший спільний знаменник дробів m,n позначимо через λ, тобто $m=\dfrac{\alpha}{\lambda};\quad n=\dfrac{\beta}{\lambda}$. Заміна: $t=\sqrt[\lambda]{x}$ приводить до

$$x^m=t^{\alpha},\quad x^n=t^{\beta},$$

$$x=t^{\lambda}\Rightarrow dx=\lambda t^{\lambda-1}dt.$$

Звідси

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int t^{\alpha}\left(a+bt^{\beta}\right)^p\lambda t^{\lambda-1}dt\quad\left(\alpha,\beta,p,\lambda\in\mathbb{Z}\right).$$

Отже, $\boxed{\text{заміна}\quad t=\sqrt[\lambda]{x}}$ зводить біноміальний диференціал в цьому випадку до інтеграла від раціональної функції.

Перед тим, як перейти до розгляду наступних випадків, зробимо допоміжну заміну $z=x^n$. Тоді

$$x^m=z^{\frac{m}{n}},\quad x=\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz\,,$$

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int z^{\frac{m}{n}}\left(a+bz\right)^p\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz=\frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}\left(a+bz\right)^p dz=$$

$$=\left\|q=\frac{m+1}{n}-1\right\|=\frac{1}{n}\int z^q\left(a+bz\right)^p dz.$$

Можливі два випадки $\left|\begin{array}{l}\to p+q\in\mathbb{Z},\\ \to q\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Випадок другий: $q\in\mathbb{Z}$. Нехай $\nu-$знаменник дробу p, тобто $p=\dfrac{\alpha}{\nu},\quad \alpha\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$\int\left(a+bz\right)^p z^q dz=\int\sqrt[\nu]{\left(a+bz\right)^{\alpha}}z^q dz=\int R\left(z,\sqrt[\nu]{a+bz}\right)dz\,.$$

Підінтегральна функція містить дробово-лінійну ірраціональність, тому $\boxed{\text{заміна } t=\sqrt[\nu]{a+bz}}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок третій: $p+q\in\mathbb{Z}$. Нехай $\nu-$знаменник дробу p, тобто $p=\dfrac{\alpha}{\nu},\quad \alpha\in\mathbb{Z}$. Тому підінтегральна функція має вигляд

$$(a+bz)^p z^q=\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}=\sqrt[\nu]{\left(\frac{a+bz}{z}\right)^{\alpha}}z^{p+q}=R\left(z,\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right),$$

і вона містить дробово-лінійну ірраціональність, тому заміна $t=\sqrt[\nu]{\dfrac{a+bz}{z}}$, або те саме $\boxed{t=\sqrt[\nu]{az^{-1}+b}}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Зауваження 1.4. Ще *І. Ньютону* було відомо, яким чином звести інтеграл від біноміального диференціала до інтеграла від раціональної функції, але не було відомо, що <u>тільки в зазначених трьох випадках</u> можливо здійснити таке зведення. Цей факт довів *П.Л.Чебишев* в середині 19 ст.

☝ <u>*Підсумок*</u>: інтегрування біноміального диференціала за допомогою замін І. Ньютона–П.Л. Чебишева:

випадок перший:	$\underline{\underline{p\in\mathbb{Z}}}$, λ – спільний знаменник дробів m,n, тоді	заміна $t=\sqrt[\lambda]{x}$
випадок другий:	$q\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{n}-1\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\underline{\underline{\dfrac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}}}$, $\nu-$знаменник дробу p, тоді заміни $z=x^n$ і $t=\sqrt[\nu]{a+bz}$, тобто	$t=\sqrt[\nu]{a+bx^n}$
випадок третій:	$p+q\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left(\dfrac{m+1}{n}+p-1\right)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\underline{\underline{\dfrac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}}}$ $\nu-$ знаменник дробу p, тоді заміни $z=x^n$ і $t=\sqrt[\nu]{az^{-1}+b}$, тобто	$t=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$

Приклад 1.11 (№Д1988). Обчислити інтеграл

$$I=\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}}=\int x^{-3}\left(1+x^{-1}\right)^{\frac{-1}{5}}dx.$$

Маємо:

$$\left.\begin{aligned}&m=-3, n=-1,\\&p=-\frac{1}{5},\\&a=1, b=1,\end{aligned}\right\}\Rightarrow p\notin\mathbb{Z},\ \frac{m+1}{n}=\frac{-3+1}{-1}=2\in\mathbb{Z}\Rightarrow$$

випадок другий, $\nu=5$. Зробимо заміну: $t=\sqrt[5]{1+x^{-1}}$. Отримаємо:

$$t^5=1+x^{-1},$$

$$x=\frac{1}{t^5-1}\Rightarrow dx=\frac{-5t^4}{\left(t^5-1\right)^2}dt,$$

$$I=\int\left(t^5-1\right)^3\frac{1}{t}\frac{-5t^4}{\left(t^5-1\right)^2}dt=-5\int t^3\left(t^5-1\right)dt=-5\frac{t^9}{9}+5\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=-\frac{5}{9}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^9}+\frac{5}{4}\sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}+C.$$

10. Інтегрування деяких тригонометричних функцій без використання універсальної тригонометричної підстановки

Розглянемо $R\left(\sin x,\cos x\right)$. Позначимо $u=\sin x; v=\cos x$, тоді будемо розглядати $R\left(u,v\right)$.

Спочатку зробимо деякі зауваження і допоміжні викладки. Нехай $R\left(-u,v\right)=R\left(u,v\right)$, тобто функція $R\left(u,v\right)$ є парною відносно змінної u. У цьому випадку

$$R\left(u,v\right)=R_1\left(u^2,v\right),$$

тобто $R\left(u,v\right)$ містить лише парні степені u.

Якщо $R\left(-u,v\right)=-R\left(u,v\right)$ (тобто функція є непарною відносно u), тоді розглянемо $\dfrac{R\left(u,v\right)}{u}$ і отримаємо:

$$\frac{R(-u,v)}{-u}=\frac{R(u,v)}{u}.$$

Тобто, функція $\dfrac{R(u,v)}{u}$ є парною за змінною u. Тому

$$\frac{R(u,v)}{u}=R_1\left(u^2,v\right)\Rightarrow R(u,v)=uR_1\left(u^2,v\right).$$

Тепер перейдемо до безпосередніх викладок.

Випадок перший: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ – функція непарна відносно $\sin x$, тоді з попередніх міркувань маємо:

$$R(\sin x,\cos x)dx=R_1\left(\sin^2 x,\cos x\right)\sin x dx=-R_1\left(\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x},\cos x\right)d(\cos x)=$$

$$=-R_1\left(1-\cos^2 x,\cos x\right)d(\cos x).$$

Отже, заміна $t=\cos x$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок другий: $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ є аналогічним першому, тому заміна $t=\sin x$ буде зводити цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

Випадок третій: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$*,* тобто $R(-u,-v)=R(u,v)$. Зробимо перетворення

$$R(u,v)=R\left(\frac{u}{v}v,v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},v\right).$$

Оскільки $R(-u,-v)=R(u,v)$, отримаємо

$$R^*\left(\frac{u}{v},v\right)=R^*\left(\frac{-u}{-v},-v\right)=R^*\left(\frac{u}{v},-v\right),$$

Отже, функція $R^*\left(\dfrac{u}{v},v\right)$ є парною за другою змінною, тому

$$R^*\left(\frac{u}{v},v\right)=R_1^*\left(\frac{u}{v},v^2\right)=R_1^*\left(\frac{\sin x}{\cos x},\cos^2 x\right)=R_1^*\left(\operatorname{tg} x,\ \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right).$$

Під знаком інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ введемо заміну $t = tg\ x$ і отримаємо

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1^*\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) dx = \left(1+t^2\right) dx, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right\| = \int R_1^*\left(\underbrace{t}_{R_{1,1}}, \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{R_{1,2}}\right) \underbrace{\frac{1}{1+t^2}}_{R_{1,3}} dt\ .$$

Підінтегральна функція, згідно з *твердженням 1.2*, є раціональною. Отже, заміна $t = \operatorname{tg} x$ у третьому випадку зводить заданий інтеграл до інтеграла від раціональної функції.

☝ *Висновок.* У випадках, коли підінтегральна функція є раціональною функцією відносно $\sin x$ і $\cos x$, доцільно використовувати такі заміни:

Випадок перший: $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \cos x$.
Випадок другий: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \sin x$.
***Випадок третій*:** $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ заміна $t = \operatorname{tg} x$

Приклад 1.12. Підінтегральна функція в інтегралі $\int \dfrac{\sin^3 x dx}{2\cos x + \sin^2 x + 2}$ є непарною відносно синуса, тому зручно застосовувати першу з наведених замін

$$I = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2\cos x + \sin^2 x + 2} = \left\| \begin{array}{l} t = \cos x. \\ dt = -\sin x\, dx, \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \\ \quad = 1 - t^2 \end{array} \right\| = \int \frac{-(1-t^2)dt}{2t + (1-t^2) + 2} =$$

$$= \int \frac{(t^2-1)dt}{-t^2+2t+3} = -\int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)(t-3)} dt = -\int \frac{t-1}{t-3} dt = -\int \frac{(t-3)+2}{t-3} dt =$$

$$= -\int \left(1 + \frac{2}{t-3}\right) dt = -t - 2\ln|t-3| + C = -\cos x - 2\ln(\cos x - 3) + C\ .$$

Інтеграл вигляду $\boxed{\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx,\ \textbf{де}\ \mu, \nu \in Q,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}$

Уведемо заміну $z = \sin^2 x$, тоді

$$\sin x = z^{\frac{1}{2}}; \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - z} = (1 - z)^{\frac{1}{2}},$$

$$x = \arcsin\left(z^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{z}\sqrt{1 - z}} dz = \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

звідки

$$\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx = \int z^{\frac{\nu}{2}} (1 - z)^{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} \int z^{\frac{\nu - 1}{2}} (1 - z)^{\frac{\mu - 1}{2}} dz .$$

Отже, якщо $\frac{\nu - 1}{2} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{\mu - 1}{2} \in \mathbb{Q}$, тоді заданий інтеграл зведено до біноміального диференціала:

$$p = \frac{\mu - 1}{2};\ n = 1; m = \frac{\nu - 1}{2};\ q = \frac{m + 1}{n} - 1 = \frac{\frac{\nu - 1}{2} + 1}{1} - 1 = \frac{\nu - 1}{2} \Rightarrow$$

$$q = \frac{\nu - 1}{2};\ p + q = \frac{\mu + \nu}{2} - 1.$$

Таким чином, інтеграл $\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx$, де $\mu, \nu \in \mathbb{Q},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

☝ зводиться до інтеграла від раціональної функції, якщо

I. $p = \frac{\mu - 1}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mu - \textit{непарне}$,

II. $q = \frac{\nu - 1}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \nu - \textit{непарне}$,

III. $p + q = \frac{\mu + \nu}{2} - 1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \mu + \nu - \textit{парне}$.

Зазначене відповідає загальному випадку. Зупинимося на окремих випадках, що зустрічаються найчастіше.

$$\mu,\nu\in\mathbb{Z}\left|\begin{array}{l}\to \text{а)}\ \ \mu\vee\nu-\text{непарне},\\ \to \text{б)}\ \ \mu\wedge\nu-\text{парні},\\ \to \text{в)}\ \ \mu,\nu\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}-\text{парні}.\end{array}\right.$$

а) $\underline{\mu\vee\nu-\text{непарне}}$.

Якщо $\mu=2n+1$ – непарне, тоді робиться заміна $t=\cos x$, оскільки

$$\int\sin^{2n+1}x\cos^{\mu}xdx=\int\sin^{2n}x\cos^{\mu}x\underbrace{\sin xdx}_{-d(\cos x)}=-\int\left(\sin^2 x\right)^n\cos^{\mu}xd(\cos x)=$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)^n\cos^{\mu}xd(\cos x)=\left\|t=\cos x\right\|=-\int\left(1-t^2\right)^n t^{\mu}dt,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Якщо ν – непарне, аналогічно, робиться заміна $t=\sin x$.

б) Якщо $\underline{\mu\wedge\nu-\text{парні}}$, тоді підінтегральна функція є раціональною функцією двох змінних $u=\sin x, v=\cos x$, яка задовольняє рівність

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x).$$

Це відповідає випадку третьому для інтеграла $\int R(\sin x,\cos x)dx$. Тобто робимо заміну $t=\operatorname{tg}x$.

в) Випадок в) є частковим підвипадком б). Однак інтегрування тут можна здійснювати в інший спосіб.

Якщо $\mu,\nu\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}-\text{парні}$, то $\mu=2n,\ \nu=2m$, $n,m\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Застосовуємо формули:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\qquad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}. \tag{1.16}$$

Якщо $\mu\ge\nu$, то

$$\sin^{2n}x\cos^{2m}x=\left(\sin x\cos x\right)^{2m}\left(\sin x\right)^{2(n-m)}=\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m}.$$

Якщо $\nu>\mu$, то $\sin^{2n}x\cos^{2m}x=\left(\dfrac{\sin 2x}{2}\right)^{2n}\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m-n}$. Після розкриття дужок отримаємо вираз вигляду:

$$\sum_{\nu',\mu'}C_{\nu',\mu'}\sin^{\nu'}2x\cos^{\mu'}2x, \tag{1.17}$$

де $\nu'+\mu'\le n+m=\dfrac{\nu+\mu}{2}$. Тобто після такої дії степінь знизилась удвічі. Потім доданки суми (1.17) інтегруються так:

1) якщо показник степені однієї з тригонометричних функцій непарний, то інтегрують, як у випадку а), внесенням під диференціал, результатом чого є інтегрування многочлена;

2) якщо обидва показника степеня парні, то інтегруємо за допомогою формул (1.16), в результаті чого степінь знижується ще вдвічі.

За потреби описані дії повторюємо.

Приклад 1.13. Обчислити такі інтеграли.

1.13.1. $\int\sqrt{\sin x}\cos^3 xdx=\int\sqrt{\sin x}(1-\sin^2 x)\,d(\sin x)=\left\|t=\sin x\right\|=$

$$=\int t^{\frac{1}{2}}\left(1-t^2\right)dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}-\frac{2}{7}\sin^3 x\sqrt{\sin x}+C\ .$$

1.13.2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

Тут $\left.\begin{array}{l}\nu=-4,\\ \mu=-2,\end{array}\right\}\Rightarrow t=\operatorname{tg}x$, тому

$$\int\frac{1}{\sin^4 x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{d(\operatorname{tg}x)}=\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\sin^4 x}=\left\|\begin{array}{l}\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{1+tg^2x}=\dfrac{\operatorname{tg}^2x}{1+tg^2x},\\ \sin^4 x=\dfrac{\operatorname{tg}^4x}{\left(1+tg^2x\right)^2}=\dfrac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2dt}{\left(t\right)^4}=\int\frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}+2\int\frac{dt}{t^2}+\int dt=$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-3}x+2\cdot\left(-1\right)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}x}+\operatorname{tg}x+C=\operatorname{tg}x-\frac{2}{\operatorname{tg}x}-\frac{1}{3\operatorname{tg}^3x}+C\ .$$

1.13.3. $\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\int\left(\sin x\cos x\right)^2\cos^2 xdx=$

$$=\int\frac{1}{4}\left(\sin 2x\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right)dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{2}\sin^2 2x\cdot d\left(\underbrace{\sin 2x}_{=t}\right)=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4xdx+$$

$$+\frac{1}{16}\int t^2dt=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

11. Інтегрування деяких гіперболічних функцій

Розглянемо функції вигляду $R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)$, $\operatorname{sh}^{\nu}x\cdot\operatorname{ch}^{\mu}x$, де $\mu,\nu\in\mathbb{Q}$, $x>0$. Інтегрування таких функцій здійснюється за допомогою тих же правил, що і для звичайних тригонометричних функцій.

1) У випадку $\int R(\operatorname{sh}x,\operatorname{ch}x)\,dx$ універсальними є заміни $t=\operatorname{th}\frac{x}{2}$ або $t=e^x$, тоді для першої заміни матимемо $dx=\frac{2dt}{1-t^2}$, $\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$, а для другої – $dx=\frac{dt}{t}$, $\operatorname{sh}x=\frac{t^2-1}{t}$, $\operatorname{ch}x=\frac{t^2+1}{t}$. Зауважимо, що застосування другої із запропонованих замін приводить до многочленів нижчого степеня, ніж першої, тобто друга заміна може бути більш зручною для обчислення інтеграла.

2) У загальному випадку $\int\operatorname{sh}^{\nu}x\cdot\operatorname{ch}^{\mu}x\,dx$, де $\mu,\nu\in\mathbb{Q}$, $x>0$ робимо заміну $z=\operatorname{sh}^2x$, звідки

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1\Rightarrow\operatorname{ch}x=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2x}=\sqrt{1+z}=(1+z)^{\frac{1}{2}},\quad \operatorname{sh}x=z^{\frac{1}{2}},$$

$$dz=2\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{ch}xdx=2z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{\frac{1}{2}}dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}dz,$$

$$\int\operatorname{sh}^{\nu}x\cdot\operatorname{ch}^{\mu}xdx=\frac{1}{2}\int z^{\frac{\nu-1}{2}}(1+z)^{\frac{\mu-1}{2}}dz$$

Тому (див. попередній пункт) заданий інтеграл можна звести до інтеграла від раціональної функції лише у трьох випадках:

- ν – непарне,
- μ – непарне,
- $\nu+\mu$ – парне

за допомогою замін, аналогічних тригонометричним.

§ 2. Визначений інтеграл

1. Один підхід до задачі про площу

Означення 1.8. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і невід'ємна на відрізку $[a,b]$. Плоску фігуру D, що обмежена на декартовій площині графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис, відрізками прямих $x = a$, $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 1.1).

Поки що будемо спиратися на інтуїтивне розуміння площі криволінійної трапеції. Математично обґрунтоване поняття площі буде надано в §3 п. 1 цього розділу.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Побудуємо прямокутники з основами на відрізках розбиття $[x_{k-1}, x_k]$ і висотою $f(x_{k-1})$ для всіх $k = \overline{1,n}$. Об'єднання таких прямокутників утворює східчасту фігуру (рис. 1.2).

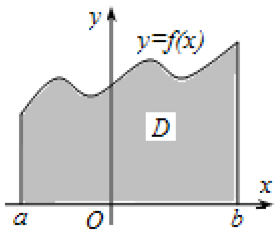


Рис. 1.1.

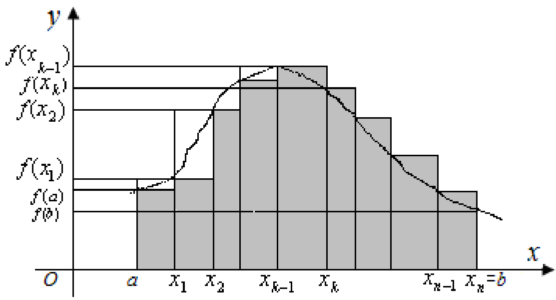


Рис. 1.2.

Якщо довжини усіх відрізків розбиття дуже малі, то площа східчастої фігури стає дуже близькою до площі криволінійної трапеції D, тобто

$$S(D) \approx \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1}\right)\left(x_k - x_{k-1}\right).$$

Далі буде доведено, що похибка цієї наближеної рівності не перебільшує будь-якого заданого наперед числа, якщо усі одночасно відрізки розбиття вибирати достатньо малими. Також буде доведено, що при прямуванні всіх довжин відрізків розбиття до нуля, границя суми в правій частині дорівнюватиме так званому визначеному інтеграла Рімана $\int_a^b f(x)dx$. Звідки буде зроблено висновок про виконання такої рівності

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx .$$

Оскільки визначений інтеграл Рімана є границею сум площ прямокутників, із яких утворюється східчаста фігура, то знак інтеграла « $\int$ » зобов'язаний своєму походженню від знака «S», що відповідає першій літері латинського слова «Summa».

2. Означення й умови існування визначеного інтеграла

Введемо поняття визначеного інтеграла. Нехай функція $f(x)$ задана на $[a,b]$, розглянемо *розбиття* відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{k-1} < x_k < ... < x_{n-1} < x_n = b ,$$

позначимо розбиття $R = \{x_k\}$. Оберемо довільним чином точки $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k = \overline{1,n}$, назвемо їх *проміжними точками* і позначимо через $P = \{\alpha_k\}$ множину проміжних точок.

Інтегральною сумою Рімана функції $f(x)$ *на відрізку* $[a,b]$*, яка відповідає розбиттю* R *та вибору проміжних точок* P, називають суму вигляду

$$\sigma = \sigma(f, R, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k ,$$

тут $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Введемо величину $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}}(x_k - x_{k-1})$, яку називають *діаметром розбиття*.

Геометричний зміст інтегральної суми Рімана $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ **для невід'ємної неперервної на** $[a,b]$ **функції** $f(x)$**.** Значення $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ відповідає площі прямокутника, що є складовою східчастої фігури, зображеної на рис. 1.3. Значення площі усієї східчастої фігури дорівнює значенню інтегральної суми $\sigma = \sigma(f, P, R)$.

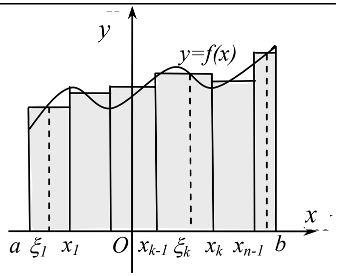


Рис. 1.3.

☝ 🗀**Означення 1.9** *(на мові* $\varepsilon - \delta$*)***.** Число I називають *границею інтегральних сум* $\sigma(f, R, P)$ *при* $d \to 0$ і позначають $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma(f, R, P)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta > 0$, що <u>для будь-якого розбиття</u> $R = \{x_k\}$ відрізка $[a,b]$ з умовою $d < \delta$ <u>незалежно від вибору проміжних точок</u> $P = \{\alpha_k\}$ виконується нерівність $|I - \sigma(f, R, P)| < \varepsilon$. Тобто

$$I = \lim_{d \to 0} \sigma(f, R, P) \overset{def}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \ R = \{x_k\} \ \forall \ P = \{\alpha_k\} \quad d < \delta \Rightarrow |I - \sigma(f, R, P)| < \varepsilon,$$

Якщо таке число I існує, то функція $f(x)$ називають *інтегровною за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення границі I – *визначеним інтегралом Рімана.*

Позначення: $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Число a називають нижньою межею інтегрування, а b – верхньою.

Введемо поняття інтегровної функції та інтеграла Рімана на мові послідовностей. Кожному натуральному номеру $n \in \mathbb{N}$ поставимо у відповідність розбиття R_n відрізка $[a,b]$ на *n* частин і множину P_n проміжних точок, що йому відповідає. Таким чином утвориться послідовність розбиттів

$\{R_n\}$, а разом із нею й послідовність діаметрів $\{d_n\}$ і проміжних точок $\{P_n\}$. Їм буде відповідати послідовність інтегральних сум $\sigma_n = \sigma_n(f, R_n, P_n)$.

🗁**Означення 1.10** *(на мові послідовностей)***.** Якщо для будь-якої послідовності розбиттів $\{R_n\}$ і для будь-якого вибору послідовності проміжних точок $\{P_n\}$ із того, що послідовність діаметрів розбиттів $\{d_n\}$ прямує до нуля, випливає, що послідовність інтегральних сум прямує до числа I, яке не залежить ні від $\{R_n\}$, ні від $\{P_n\}$, тобто

$$\forall\{R_n\}\forall\{P_n\} \quad d_n \to 0 \Rightarrow \sigma_n \to I,$$

то функцію $f(x)$ називають *інтегровною за Ріманом* на відрізку $[a,b]$, а значення I – *визначеним інтегралом Рімана*.

Позначення x змінної під знаком інтеграла можна замінити на будь-яке інше, тобто виконується рівність:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du .$$

Приклад 1.14. Дослідити функції на інтегровність. У разі їх інтегровності обчислити визначений інтеграл.

1) $f(x) = C = const$.

Нехай $\{x_k\}$– розбиття відрізка $[a,b]$, а $\{\alpha_k\}$ – проміжні точки цього розбиття, тоді інтегральна сума має вигляд

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = C(b-a) .$$

Тоді $\lim\limits_{d\to 0}\sigma = C(b-a) \Rightarrow f(x) = const$ – інтегровна на $[a,b]$, а $\int_a^b Cdx = C(b-a)$.

2) Розглянемо функцію Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. Доведемо, що вона неінтегровна на будь-якому відрізку $[a,b]$.

Нехай $R = \{x_k\}$ – розбиття відрізка $[a,b]$,

$$\{\alpha'_k\} : \alpha'_k \in \mathbb{Q} \bigcap [x_{k-1}, x_k],$$

$$\{\alpha''_k\} : \alpha''_k \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \bigcap [x_{k-1}, x_k],$$

тоді

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha'_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a > 0 \Rightarrow \lim_{d \to 0} \sigma' = b - a,$$

$$\sigma'' = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha''_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0 \Rightarrow \lim_{d \to 0} \sigma'' = 0.$$

Отже, границя інтегральних сум залежить від вибору проміжних точок, тому функція Діріхле неінтегровна за Ріманом.

☝ **Твердження 1.3** (*необхідна умова інтегровності функції на відрізку*). Якщо функція інтегровна на відрізку $[a,b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Припустимо супротивне: функція $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, однак не є обмеженою. Розглянемо $\{x_k\}$ – довільне розбиття $[a,b]$. В розбитті оберемо відрізок, на якому вона необмежена,

$\Rightarrow \exists k_0 \in \{1,...,n\} :$ $f(x)$ – необмежена на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$.

Позначимо $\sigma_1 = \sum_{k \neq k_0} f(\alpha_k) \Delta x_k$, тоді

$$\forall M > 0 \ \exists \alpha_{k_0} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}] : \ \left| f(\alpha_{k_0}) \right| \geq \frac{|\sigma_1| + M}{\Delta x_{k_0}}.$$

Таким чином, можна зробити таку оцінку інтегральної суми

$$|\sigma(f, R, P)| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \Delta x_k \right| = \left| \sum_{k \neq k_0} f(\alpha_k) \Delta x_k + f(\alpha_{k_0}) \cdot \Delta x_{k_0} \right| = \left| \sigma_1 + f(\alpha_{k_0}) \cdot \Delta x_{k_0} \right| \geq$$

$$\geq \left| f(\alpha_{k_0}) \right| \cdot \Delta x_{k_0} - |\sigma_1| \geq \frac{|\sigma_1| + M}{\Delta x_{k_0}} \cdot \Delta x_{k_0} - |\sigma_1| = M.$$

Отже,

$$\forall M > 0 \ \exists \ P : \sigma(f, R, P) > M,$$

тобто $\nexists \lim\limits_{d\to 0}\sigma(f,R,P)<\infty \Rightarrow \nexists\int\limits_a^b f(x)dx$ і $f(x)$ – не інтегровна на $[a,b]$. Отримано суперечність з умовою. Теорему доведено. ■

3. Верхня та нижня інтегральні суми Дарбу

☝ 🗀**Означення 1.11.** Нехай $f(x)$ – обмежена функція, визначена на $[a,b]$ та на відрізку $[a,b]$ задане розбиття:

$$R=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}.$$

Введемо позначення:

$$m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x); \qquad M_k=\sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Суми вигляду

$$\underline{S}=\underline{S}(f,R)=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot\Delta x_k; \qquad \overline{S}=\overline{S}(f,R)=\sum_{k=1}^{n} M_k\cdot\Delta x_k$$

називають відповідно *нижньою й верхньою інтегральними сумами Дарбу*.

☝ **Геометричний зміст верхніх і нижніх сум Дарбу.**

Нижня інтегральна сума Дарбу для невід'ємної неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$ – це площа східчастої фігури, що вписана в криволінійну трапецію, а верхня інтегральна сума – це площа східчастої фігури, що описана навколо неї (рис. 1.4).

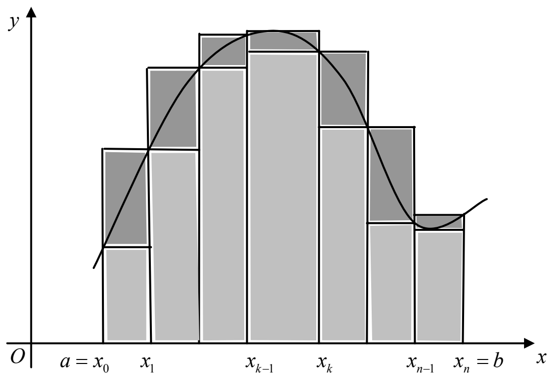


Рис. 1.4.

<u>Зафіксуємо розбиття</u> $R=\{x_k\}$. Оскільки

$$m_k \le f(x) \le M_k \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_h],$$

то для довільних проміжних точок $P=\{\alpha_k\}$, $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k=\overline{1,n}$ виконується умова $m_k \le f(\alpha_k) \le M_k \ \ \forall k=\overline{1,n}$, тому має місце наступна нерівність для інтегральних сум $\sigma=\sigma(f,R,P)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$:

$$\boxed{☝\ \underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P) \le \overline{S}(f,R) \quad \forall P.} \qquad (1.18)$$

Розглянемо нижню суму Дарбу $\underline{S}(f,R)$ неперервної на $[a,b]$ функції $f(x)$. Ця функція неперервна на кожному відрізку розбиття, тому, за другою теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.188; **4**, с.176],

$$\forall k \in \{1,2,...,n\}\ \exists \alpha'_k \in [x_{k-1}, x_k] : m_k = f(\alpha'_k).$$

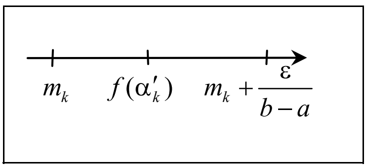
Тоді $\underline{S}(f,R)=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha'_k)\Delta x_k = \sigma(f,R,\{\alpha'_k\})$. Тобто існує такий набір проміжних точок $\{\alpha'_k\}$, що інтегральна сума, яка йому відповідає, дорівнює заданій нижній сумі Дарбу. Аналогічний результат можна отримати для верхньої суми.

Висновок: для неперервної функції на $[a,b]$ як верхня, так і нижня інтегральні суми Дарбу збігаються з однією з інтегральних сум Рімана.

Нехай функція $f(x)$ не є неперервною на $[a,b]$. За означенням точної нижньої межі,

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \alpha'_k \in [x_{k-1}, x_k]:$$

$$m_k \le f(\alpha'_k) \le m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$



Помножимо останню нерівність на Δx_k та підсумуємо всі нерівності за k від 1 до n, тоді отримаємо

$$\underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P') \le \underline{S}(f,R) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot \Delta x_k \ \Rightarrow \underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P') \le \underline{S}(f,R)+\varepsilon.$$

Отже,

$\forall\varepsilon > 0\ \forall R\ \exists P' = \{\alpha'_k\}$:

$\underline{S}(f,R) \le \sigma(f,R,P') \le \underline{S}(f,R) + \varepsilon$.

$$\underline{S}(f,R) \quad \sigma(f,R,P') \quad \underline{S}(f,R)+\varepsilon$$

За означенням точної нижньої межі, отримане означає, що $\underline{S}(f,R) = \inf\limits_P \sigma(f,R,P)$. Аналогічно для верхньої суми $\overline{S}(f,R) = \sup\limits_P \sigma(f,R,P)$

Висновок: для фіксованого розбиття $R = \{x_k\}$

1) значення суми Дарбу можна з будь-якою точністю наблизити деякою інтегральною сумою Рімана;

2) $\boxed{\underline{S}(f,R) = \inf\limits_P \sigma(f,R,P)\,,\quad \overline{S}(f,R) = \sup\limits_P \sigma(f,R,P)}$; (1.19)

Властивості інтегральних сум Дарбу

Властивість 1. Для $\sigma = \sigma(f,R,P) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ виконується

$$\boxed{\underline{S}(f,R) = \inf_P \sigma(f,R,P) \le \sigma(f,R,P) \le \sup_P \sigma(f,R,P) = \overline{S}(f,R) \quad \forall R}$$

Доведення. Ця властивість є безпосереднім наслідком отриманих вище формул (1.18) і (1.19). ■

Властивість 2. Додавання до точок розбиття додаткових точок приводить до того, що нижня сума Дарбу не зменшується, а верхня – не збільшується.

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна розглянути лише одну додаткову точку розбиття.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Нехай } R = \{x_k\} \text{ – розбиття,}\\ x' \text{ – додаткова точка,}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{нове розбиття } \{x_k\} \bigcup \{x'\} = \{x'_k\}\,.$$

Позначимо через k_0 той номер відрізка розбиття, в який потрапила додаткова точка x', тобто $x_{k_0-1} < x' < x_{k_0}$ (див. рис.1.5), тоді

$$\underline{S}' = \underline{S}(f,R') = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x'_k = \sum_{k<k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) +$$

$$+m'_{k_0} \cdot (x' - x_{k_0-1}) + m''_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x') + \sum_{k>k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}),$$

де $m'_{k_0} = \inf\limits_{[x_{k_0-1},x']} f(x), \quad m''_{k_0} = \inf\limits_{[x',x_{k_0}]} f(x)$. Тоді

$$m'_{k_0} = \inf_{[x_{k_0-1},x']} f(x) \geq \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0},$$

$$m''_{k_0} = \inf_{[x',x_{k_0}]} f(x) \geq \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0},$$

$$\underline{S}' \geq \sum_{k \neq k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) +$$

$$+ \underbrace{m_{k_0} \cdot (x' - x_{k_0-1}) + m_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x')}_{= m_{k_0} \cdot (x_{k_0} - x_{k_0-1})} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = \underline{S}.$$

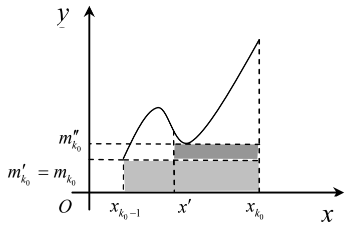


Рис. 1.5.

Для верхньої суми доведення аналогічне. ■

Якщо розбиття R_1 утворюється із розбиття R додаванням до нього додаткових точок, то говорять, що розбиття R_1 є *подрібненням* розбиття R .

Властивість 3. Будь-яка нижня інтегральна сума Дарбу не більше за верхню інтегральну суму, навіть для різних розбиттів:

$$\underline{S}_1 = \underline{S}(f, R_1) \leq \overline{S_2} = \overline{S}(f, R_2) \quad \forall R_1 = \{x_k^{(1)}\},\, R_2 = \{x_i^{(2)}\}\,.$$

Доведення. Введемо до розгляду розбиття $R_3 = R_1 \bigcup R_2$ і інтегральні суми Дарбу, що йому відповідають: $\underline{S}_3$ *і* $\overline{S}_3$. Розбиття R_3 є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, тому згідно з *властивістю 2* і нерівністю (1.19), маємо

$$\underline{S}_1 \leq \underline{S}_3 \leq \overline{S}_3 \leq \overline{S_2}\,. \ ■$$

Наслідок 1.2. Множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f, R)\}_R$ обмежена зверху, а множина $\{\overline{S} = \overline{S}(f, R)\}_R$ обмежена знизу.

Дійсно, згідно з *властивістю 3*, множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f, R)\}_R$ обмежена зверху будь-якою фіксованою верхньою сумою Дарбу, а множина $\{\overline{S} = \overline{S}(f, R)\}_R$ обмежена знизу будь-якою фіксованою нижньою сумою. ■

Наслідок 1.3. $\boxed{\begin{array}{l} \exists \sup\limits_R \{\underline{S}(f,R)\} = I_* - \textit{нижній інтеграл Дарбу}, \\ \exists \inf\limits_R \{\overline{S}(f,R)\} = I^* - \textit{верхній інтеграл Дарбу}. \end{array}}$

Властивість 4. $\underline{S} = \underline{S}(f, R_1) \leq I_* \leq I^* \leq \overline{S} = \overline{S}(f, R_2) \quad \forall R_1, R_2\,.$

Доведення. Нерівності $\underline{S} \le I_*$ і $I^* \le \overline{S}$ випливають із *наслідку 1.3.* Доведемо, що $I_* \le I^*$.

Як зазначалося в *наслідку 1.2*, множина верхніх сум $\{\overline{S} = \overline{S}(f,R)\}_R$ обмежена знизу будь-якою нижньою інтегральною сумою Дарбу $\underline{S}$, тому $\underline{S}$ є нижньою межею множини $\{\overline{S} = \overline{S}(f,R)\}_R$. Оскільки $\inf\limits_R \{\overline{S}(f,R)\}$ – найбільша серед нижніх меж, то

$$\inf_R \{\overline{S}(f,R)\} \ge \underline{S} \;\Rightarrow\; I^* \ge \underline{S}.$$

Отже,

$$\underline{S} \le I^* \quad \forall \underline{S} \in \{\underline{S} = \underline{S}(f,R)\}_R .$$

Звідси випливає, що

$$\sup_R \{\underline{S}(f,R)\} \le I^* \;\Rightarrow\; I_* \le I^* .$$

Всі нерівності властивості доведено. ■

Властивість 5.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Нехай } M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x);\\
R = \{x_k\} - \text{розбиття відрізка } [a;b] \text{ з діаметром } d;\\
\text{розбиття } R' = \{x'_k\} \text{ отримано з розбиття } R \text{ дода-}\\
\text{ванням } l \text{ точок,}\\
\overline{S} = \overline{S}(f,R),\ \underline{S} = \underline{S}(f,R),\ \overline{S}' = \overline{S}(f,R'),\ \underline{S}' = \underline{S}(f,R');
\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}
\underline{S}' - \underline{S} \le (M-m)\, l\, d;\\
\overline{S} - \overline{S}' \le (M-m)\, l\, d.
\end{array}$$

Доведення. Нехай спочатку розбиття R' відрізняється від розбиття R лише однією додатковою точкою x', що потрапляє всередину k_0-го відрізка розбиття R. Застосовуємо ті самі позначення, що й при доведенні властивості 2:

$$m'_{k_0} = \inf_{[x_{k_0-1}, x']} f(x),\; m''_{k_0} = \inf_{[x', x_{k_0}]} f(x),\; \inf_{[x_{k_0-1}, x_{k_0}]} f(x) = m_{k_0} .$$

Отримаємо:

$$\underline{S} = \sum_{k \ne k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + m_{k_0} \cdot \left(x_{k_0} - x_{k_0-1}\right);$$

$$\underline{S}' = \sum_{k\neq k_0} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + m'_{k_0} \cdot \left(x' - x_{k_0-1}\right) + m''_{k_0} \cdot \left(x_{k_0} - x'\right);$$

$$\underline{S}' - \underline{S} = \left[m'_{k_0} \cdot \left(x' - x_{k_0-1}\right) + m''_{k_0} \cdot \left(x_{k_0} - x'\right)\right] - m_{k_0} \cdot \left(x_{k_0} - x_{k_0-1}\right) \le$$

$$\le \left[M \cdot \left(x' - x_{k_0-1}\right) + M \cdot \left(x_{k_0} - x'\right)\right] - m \cdot \left(x_{k_0} - x_{k_0-1}\right) = (M-m)\cdot\left(x_{k_0} - x_{k_0-1}\right) \le (M-m)\cdot d.$$

Якщо додаткових точок розбиття буде l, тоді $\underline{S'} - \underline{S} \le (M-m)\, l\, d$.

Доведення нерівності для верхніх сум здійснюється аналогічно. ■

4. Критерії Дарбу інтегровності функцій за Ріманом

В класичних підручниках із математичного аналізу немає поділу різних формулювань критерію Дарбу за назвами чи номерами. Тут ми введемо нумерацію цих формулювань, щоб надалі зручно було на них посилатися.

Основна лема Дарбу. Верхній інтеграл Дарбу обмеженої на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ дорівнює границі верхніх сум Дарбу при прямуванні до нуля діаметра розбиття $\mathrm{I}^* = \lim\limits_{d\to 0} \overline{S}(R)$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall R : \quad d < \delta \Rightarrow \left|\overline{S}(R) - \mathrm{I}^*\right| < \varepsilon .$$

Аналогічно для нижнього інтеграла: $\mathrm{I}_* = \lim\limits_{d\to 0} \underline{S}(R)$.

Доведення здійснимо для верхнього інтеграла. Якщо функція $f(x) = c = const$ на відрізку $[a;b]$, то $\overline{S}(R) = c\cdot(b-a) = \mathrm{I}^*$ $\forall R$. Тому $\lim\limits_{d\to 0} \overline{S}(R) = \mathrm{I}^* = c\cdot(b-a)$. Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ не є сталою і $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x),\ m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$.

Оскільки $\mathrm{I}^* = \inf\limits_{R} \{\overline{S}(R)\}$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R^* = \{x_k^*\}_{k=0}^{l} : \quad \mathrm{I}^* \le \overline{S}(R^*) < \mathrm{I}^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

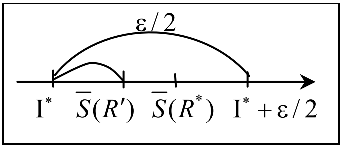
Нехай $R = \{x_k\}$ – довільне розбиття відрізка $[a;b]$ з діаметром $d < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2l\,(M-m)}$.

Розглянемо розбиття $R' = \{x'_k\} = R \bigcup R^*$, яке утворюється з точок розбиття R і не більш ніж із l додаткових точок розбиття R^*. За *властивістю 5 сум Дарбу*,

$$\overline{S}(R)-\overline{S}(R')\le (M-m)\cdot l\cdot d<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Маємо:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{а) } \mathrm{I}^*=\inf\limits_R\{\overline{S}(R)\}\ \Rightarrow\ \mathrm{I}^*\le\overline{S}(R')\,;\\
\text{б) розбиття } R' \text{ є подрібненням}\\
\text{розбиття } R^* \ \Rightarrow\ \overline{S}(R')\le\overline{S}(R^*)\\
(\textit{властивість 2 сум Дарбу});\\
\text{в) } \mathrm{I}^*\le\overline{S}(R^*)<\mathrm{I}^*+\dfrac{\varepsilon}{2}\,;
\end{array}\right\}\Rightarrow$$



і $\overline{S}(R')-\mathrm{I}^*<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Оскільки $\overline{S}(R')-\mathrm{I}^*<\dfrac{\varepsilon}{2}$ і $\overline{S}(R)-\overline{S}(R')<\dfrac{\varepsilon}{2}$, то

$$\left|\overline{S}(R)-\mathrm{I}^*\right|\le\left|\overline{S}(R)-\overline{S}(R')\right|+\left|\overline{S}(R')-\mathrm{I}^*\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ при } \delta=\frac{\varepsilon}{2\,l\,(M-m)} \text{ отримано: } \forall R:\quad d<\delta\Rightarrow\left|\overline{S}(R)-\mathrm{I}^*\right|<\varepsilon\,.\ \blacksquare$$

☝ **Теорема 1.6** *(перший критерій Дарбу інтегровності функції)***.** Для того, щоб обмежена функція $f(x)$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб $\lim\limits_{d\to 0}\left(\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)\right)=0$. Тобто

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall R:\quad d<\delta\Rightarrow\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon\,.$$

Доведення. *Необхідність.* $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$ $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow\exists\,\mathrm{I}\in\mathbb{R}:\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\forall R\ \ \forall P:\ d<\delta\Rightarrow\left|\mathrm{I}-\sigma(f,R,P)\right|<\varepsilon\,.$$

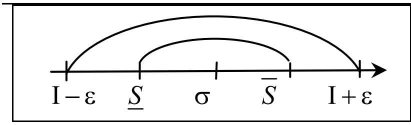
Зафіксуємо розбиття R з діаметром $d<\delta$, тоді матимемо

$$\mathrm{I}-\varepsilon<\sigma(f,R,P)<\mathrm{I}+\varepsilon\quad\forall P\,.$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Із (1.19) } \underline{S}=\inf\limits_P\sigma(f,R,P)\,,\\
\mathrm{I}-\varepsilon<\sigma=\sigma(f,R,P)\,,
\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \mathrm{I}-\varepsilon\le\underline{S}\,.$$

Аналогічно $\overline{S}\le\mathrm{I}+\varepsilon$.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Із (1.18) } \underline{S}\le\sigma\le\overline{S}\,,\\
\mathrm{I}-\varepsilon\le\underline{S}\,,\quad \overline{S}\le\mathrm{I}+\varepsilon\,,
\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \mathrm{I}-\varepsilon\le\underline{S}\le\sigma\le\overline{S}\le I+\varepsilon\,.$$



Тому $\forall \varepsilon > 0\ \forall R:\ d < \delta \Rightarrow \overline{S} - \underline{S} \le 2\varepsilon$.

Це означає, що $\lim\limits_{d\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0$.

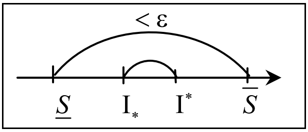
Достатність.

$$\lim_{d\to 0}(\overline{S} - \underline{S}) = 0 \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall R: \quad d < \delta \Rightarrow \overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R) < \varepsilon .$$

Зафіксуємо розбиття R з діаметром $d < \delta$, позначимо

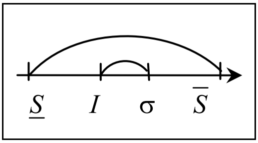
$$\overline{S} = \overline{S}(f,R), \quad \underline{S} = \underline{S}(f,R) .$$

За *властивістю 4*



$\underline{S} \le \mathrm{I}_* \le \mathrm{I}^* \le \overline{S}$,

тому $\forall \varepsilon > 0\ \ \mathrm{I}^* - \mathrm{I}_* < \varepsilon$. Звідки $\mathrm{I}^* = \mathrm{I}_* = \mathrm{I}$.



$$\left.\begin{array}{l} \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon , \\ \underline{S} \le \mathrm{I} \le \overline{S} \text{ (із доведення)}, \\ \underline{S} \le \sigma \le \overline{S} \quad \forall P \\ (\textit{властивість 1}), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} |\mathrm{I} - \sigma| < \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall P . \end{array}$$

Отже, внаслідок довільності розбиття R, за означенням 1.8, $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. ■

Теорема 1.7 *(другий критерій Дарбу інтегровності функції на* $[a,b]$*).* Обмежена функція $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$ тоді й лише тоді, коли $\mathrm{I}_* = \mathrm{I}^*$.

Унаслідок основної леми Дарбу, другий критерій є іншою формою запису першого критерію Дарбу інтегровності функції. Пояснимо це.

За першим критерієм:

$$f(x) - \text{ інтегровна на } [a,b] \Leftrightarrow \lim_{d\to 0}\Big(\overline{S}(f,R) - \underline{S}(f,R)\Big) = 0 .$$

За основною лемою Дарбу, для обмеженої на $[a,b]$ функції $f(x)$ виконуються умови:

$$\exists \lim_{d\to 0} \overline{S}(R) = \mathrm{I}^* \ \wedge\ \exists \lim_{d\to 0} \underline{S}(R) = \mathrm{I}_* .$$

Із зазначеного випливає:

$$f(x) - \text{ інтегровна на } [a,b] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 0=\lim_{d\to 0}\left(\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)\right)=\underset{(\exists}{\lim_{d\to 0}\overline{S}(f,R)}\underset{\wedge}{-}\underset{\exists)}{\lim_{d\to 0}\underline{S}(f,R)}=\mathrm{I}^*-\mathrm{I}_*=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{I}_*=\mathrm{I}^*.$$

Твердження 1.4 *(перший модифікований критерій Дарбу інтігровності функції)***.** Для того, щоб обмежена функція $f(x)$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\quad \overline{S}(f,R^*)-\underline{S}(f,R^*)<\varepsilon .$$

Доведення. *Необхідність.* Оскільки $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, то, за першим критерієм Дарбу

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall R:\quad d<\delta\Rightarrow \overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon .$$

Оскільки нерівність $\overline{S}(f,R)-\underline{S}(f,R)<\varepsilon$ виконується для будь-якого розбиття з діаметром, меншим за δ, то за шукане R^* можна обрати будь-яке з них, звідки матимемо: $\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\quad \overline{S}(f,R^*)-\underline{S}(f,R^*)<\varepsilon$.

Достатність. Нехай виконується висловлювання

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\quad \overline{S}(f,R^*)-\underline{S}(f,R^*)<\varepsilon .$$

Позначимо $\overline{S}=\overline{S}(f,R^*),\quad \underline{S}=\underline{S}(f,R^*)$. За *властивістю 4*,

$$\underline{S}\le \mathrm{I}_*\le \mathrm{I}^*\le \overline{S},$$

тому $\forall\varepsilon>0\quad \mathrm{I}^*-\mathrm{I}_*<\varepsilon$. Звідки $\mathrm{I}^*=\mathrm{I}_*$. Отже, за другим критерієм Дарбу, $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. ■

Означення 1.12. Нехай $M=\sup\limits_A f(x)$, $m=\inf\limits_A f(x)$. *Коливанням функції на множині A* називають величину $\omega_A(f)=M-m$.

Через ω_k позначимо коливання функції на k-ому відрізку розбиття.

Теорема 1.8 *(третій критерій Дарбу інтегровності функції на $[a,b]$).* Обмежена функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$ тоді й лише тоді, коли $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0$, тобто

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall R:\quad d<\delta\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon .$$

Доведення. Оскільки

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k$$

і $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, що рівносильно (за першим критерієм Дарбу) співвідношенню $\lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$, то інтегровність функції $f(x)$ на $[a,b]$ еквівалентна здійсненню рівності:

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0\text{ . ■}$$

Твердження 1.4 *(третій модифікований критерій Дарбу інтегровності функції)*. Для того, щоб обмежена функція $f(x)$ була інтегровною на $[a,b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$\forall\varepsilon>0\ \exists R^*:\ \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\,.$$

Доведення здійснюється аналогічно доведенню третього критерію Дарбу як наслідок першого модифікованого критерію Дарбу. ■

5. Класи інтегровних за Ріманом функцій

☝ **Теорема 1.9.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то вона рівномірно неперервна на $[a,b]$ (теорема Кантора [**3**, с.192; **4**, с. 179]), тоді

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall R=\{x_k\}_{k=1}^{n}\ \ d<\delta\Rightarrow\omega_k<\frac{\varepsilon}{b-a}\forall k=\overline{1,n}\,.$$

Звідки

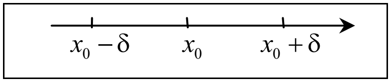
$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon\Rightarrow\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (за третім критерієм Дарбу) функція інтегровна на $[a,b]$. ■

🗁 **Означення 1.13.** Будемо казати, що точка x покривається інтервалом (α,β), якщо $x\in(\alpha,\beta)$.

Наприклад, точка x_0 покривається своїм δ-околом:

$x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.



Теорема 1.10. Якщо множина точок розриву обмеженої функції така, що $\forall \varepsilon > 0$ всі точки цієї множини покриваються скінченною кількістю інтервалів сумарної довжини, меншої за ε, то така функція є інтегровною на відрізку $[a,b]$.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Позначимо $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Позначимо через A множину усіх точок розриву функції $f(x)$. Покриємо усі точки цієї множини скінченною кількістю інтервалів $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ таких, що

$$\sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)} \quad \wedge \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k).$$

Множина $[a,b] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k)$ є об'єднанням скінченної кількості N відрізків, які назвемо *залишковими відрізками*. На кожному з них функція буде неперервною. Тому до кожного з цих залишкових відрізків застосуємо теорему Кантора. Отримаємо:

$$\forall i = \overline{1, N} \quad \exists \delta_i > 0 : \forall R_i = \left\{ x_k^{(i)} \right\}_k \quad d < \delta_i \Rightarrow \omega_k^{(i)} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \, \forall k.$$

Нехай $\delta = \min\limits_{i=\overline{1,N}} \delta_i$, тоді здійснимо розбиття кожного із залишкових відрізків з діаметрами $d < \delta$ і коливання функції на кожному із відрізків розбиття залишкової множини буде таким, що $\omega_j < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)} \forall j$.

Розглянемо $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k)$. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що інтервали $\{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^n$ взаємно не перетинаються. Включимо до об'єднання $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k)$ кінці інтервалів $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k=1}^n$, отримаємо скінченну кількість відрізків, що взаємно не перетинаються. Розіб'ємо кожен із них довільним чином на відрізки з діаметром $d < \delta$.

Подамо вираз $\sum_i \omega_i \Delta x_i$ у вигляді суми

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum{}^* \omega_i \Delta x_i + \sum{}^{**} \omega_i \Delta x_i ,$$

де

$\sum{}^* \omega_i \Delta x_i -$ сума, що відповідає залишковим відрізкам,

$\sum{}^{**} \omega_i \Delta x_i -$ сума , що відповідає відрізкам покриття множини A .

За побудовою

$$\sum{}^* \omega_i \Delta x_i < \sum{}^* \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum{}^* \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} ,$$

$$\sum{}^{**} \omega_i \Delta x_i < \sum{}^{**} (M-m) \Delta x_i \le (M-m) \cdot \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < (M-m) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M-m)} = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0$ знайдено таке $\delta > 0$, що для побудованого розбиття з діаметром $d < \delta$ виконується

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Тому, за третім модифікованим критерієм Дарбу, розглянута функція інтегровна на $[a,b]$. ■

☝ **Теорема 1.11.** Якщо обмежена функція $f(x)$ є кусково-неперервною на $[a,b]$, то вона інтегровна на $[a,b]$.

Доведення. Кусково-неперервна на відрізку функція $f(x)$ має скінченну кількість точок розриву на $[a,b]$. Нехай їх N штук. Кожну точку розриву покриємо інтервалом (α_k, β_k) довжини $\frac{\varepsilon}{2N}$. Тоді

$$\sum_k (\alpha_k, \beta_k) \le N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

отже, за *теоремою 1.10*, функція інтегровна. ■

Приклад 1.15. Дослідити функцію $f(x)=[x]$ (графік зображено на рис. 1.6) на інтегровність на відрізку $[a,b]$ (тут $[x]-$ ціла частина дійсного числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x).

Якщо $[b]-[a]\neq 0$, то точками розриву цієї функції на відрізку $[a,b]$ є точки

$$x_1=[a]+1, x_2=[a]+2,..., x_{[b]-[a]}=[b].$$

Якщо $[b]-[a]=0$, то на відрізку $[a,b]$ функція не має точок розриву. Отже, ця функція є кусково-неперервною на $[a,b]$, тому, *за теоремою 1.11*, – інтегровною.

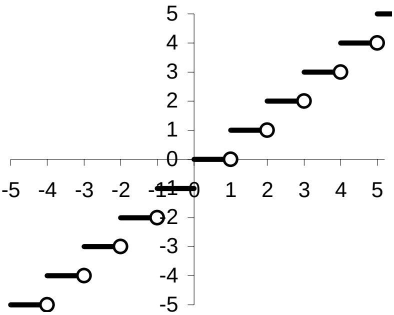


Рис. 1.6.

☝ **Теорема 1.12.** Якщо обмежена функція є нестрого монотонною на $[a,b]$, то вона інтегровна на $[a,b]$.

Доведення. Нехай $M=\sup\limits_{[a.b]} f(x)$, $m=\inf\limits_{[a.b]} f(x)$, тоді можливі два випадки.

Випадок перший: $M=m$, тоді $f(x)=const$, і це відповідає найпростішій інтегровній на $[a,b]$ функції.

Випадок другий: $M\neq m$ і $f(x)$ не спадає на $[a,b]$, тоді $M=f(b),\ m=f(a)$, крім того, на кожному відрізку розбиття $M_k=f(x_k),\quad m_k=f(x_{k-1})$.

Розглянемо розбиття з діаметром $d<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, тоді

$$\overline{S}-\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\underbrace{\Delta x_k}_{<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}}<$$

$$<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot[f(x_1)-f(x_0)+$$

$$+f(x_2)-f(x_1)+f(x_3)-f(x_2)+\ldots+f(x_n)-f(x_{n-1})]=\varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}-\underline{S})=0$, тому, за першим критерієм Дарбу, інтегровність доведено. ■

Приклад 1.16 *функції, інтегровної на* $[a,b]$*, що має нескінченну множину точок розриву.*

Розглянемо функцію $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases}$ на $[0,1]$.

1) Точки розриву функції:

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{x}=0,\\ x\in[0,1],\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N},\\ x\neq 0.\end{array}\right.$$

Отримали зчисленну множину точок розриву $A=\left\{0,\dfrac{1}{n},n\in\mathbb{N}\right\}$.

Доведемо, що A задовольняє умови теореми 1.10. Оскільки $\lim\limits_{n}\dfrac{1}{n}=0$, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in N:\forall n\geq n_0\quad \frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Отже, має місце включення: $\left(\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}\bigcup\{0\}\right)\subset\left(-\dfrac{\varepsilon}{4};\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$ (див. також рис.1.7). Тепер кожну точку множини $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{n_0-1}$ покриваємо інтервалом довжини, меншої за $\dfrac{\varepsilon}{2(n_0-1)}$. Тоді загальна довжина побудованих інтервалів у кількості n_0 штук (враховуючи перший окіл), буде меншою за $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

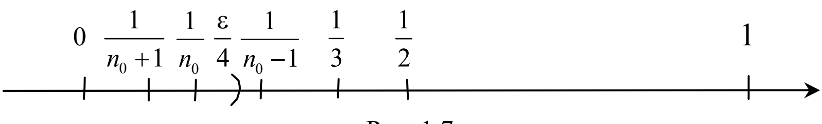


Рис. 1.7.

2) Оскільки $\forall x \in [0,1]\ -1 \le f(x) \le 1$, то функція обмежена на відрізку $[0,1]$.

Отже, функція інтегровна на $[0;1]$ і має нескінченну множину точок розриву.

6. Множина лебеґової і жорданової міри нуль. Критерій інтегровності Лебеґа

Означення 1.14. Множина *A має лебеґову міру нуль,* якщо всі її точки можна покрити не більш ніж зчисленною кількістю інтервалів з сумою довжин, меншою за ε, тобто

$$\mu A = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k \in \Im} :\ \bigcup_{k \in \Im} (\alpha_k, \beta_k) \supset A \wedge \sum_{k \in \Im} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon .$$

Тут $\mu -$ міра Лебеґа. У випадку, коли $\Im = \{1, 2, ..., n\}$ – скінченна індексна множина, то сума довжин інтервалів дорівнює

$$\sum_{k \in \Im} (\beta_k - \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon ,$$

а у випадку, коли $\Im$ – зчисленна індексна множина, то сума $\sum_{k \in \Im} (\beta_k - \alpha_k)$ не залежить від нумерації елементів множини $\Im$, тому можна вважати, що $\Im = \mathbb{N}$ і

$$\sum_{k \in \Im} (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon .$$

Означення 1.15. Множина A має *жорданову міру нуль,* якщо всі її точки можна покрити скінченною кількістю інтервалів із сумою довжин, меншою за ε, тобто

$$\eta\, A = 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \{(\alpha_k, \beta_k)\}_{k=1}^{n} :\ \bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k) \supset A \wedge \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon .$$

Тут $\eta -$ міра Жордана.

Із означень випливає, що будь-яка множина жорданової міри нуль має лебеґову міру нуль, тобто

$$\boxed{\eta\, A = 0 \Rightarrow \mu\, A = 0}$$

Теорему 1.10 можна переформулювати в термінах міри Жордана.

Теорема 1.10а. Якщо обмежена на $[a,b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку множину A точок розриву жорданової міри нуль, то така функція інтегровна на $[a,b]$.

Приклад 1.17

1.17.1. Будь-яка скінченна множина має нульову міру Жордана, а тому й Лебеґа. Цей факт доводиться так, як це було в доведенні теореми 1.11.

1.17.2. Множина $\mathrm{A} = \left\{0, \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ має нульову міру Жордана, а тому і Лебеґа. Це доводиться так, як у прикладі 1.16.

1.17.3. Доведемо, що будь-яка зчисленна множина має лебеґову міру нуль. Оскільки множина є зчисленною, то перенумеруємо її елементи: $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Покриємо кожну точку r_n окремо інтервалом (α_n, β_n) довжини, меншої за $\frac{\varepsilon}{2^n}$.

Тоді $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) < \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon$.

1.17.4. Розглянемо для ознайомлення **множину Кантора**. Її будують в такий спосіб. Відрізок $[0;1]$ ділимо на три рівні частини й відкидаємо точки середнього інтервалу $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Ті відрізки, що залишилися, ділимо кожний на три рівні частини і з кожного відкидаємо середній інтервал, тобто відкидаємо точки інтервалів $\left(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}\right)$ і $\left(\frac{7}{9}; \frac{8}{9}\right)$. Потім знову ті відрізки, що залишилися, ділимо на 3 частини й відкидаємо середні інтервали, тобто $\left(\frac{1}{27}; \frac{2}{27}\right)$, $\left(\frac{7}{27}; \frac{8}{27}\right)$, $\left(\frac{19}{27}; \frac{20}{27}\right)$, $\left(\frac{25}{27}; \frac{26}{27}\right)$. Процес продовжуємо до нескінченності. Об’єднання усіх відкинутих інтервалів задає *відкриту канторову* множину G:

$$G=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\bigcup\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\bigcup\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\bigcup\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\bigcup\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\bigcup\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\bigcup$$

$$\bigcup\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\bigcup\ldots,$$

а множина F, що в результаті залишилася – *замкнену канторову множину:* $F=[0;1]\setminus G$ (рис. 1.8).

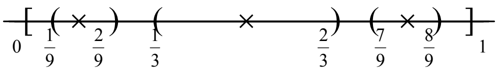


Рис. 1.8.

В курсі «Теорія міри та інтеграла» буде доведено, що замкнена канторова множина F має лебеґову міру нуль [**35**, с. 57].

Будемо говорити, що деяка властивість виконується *майже скрізь на множині* $M\subset\mathbb{R}$, якщо вона має місце у всіх точках M, окрім множини точок із M, яка має лебеґову міру нуль.

Мають місце логічні висловлювання:

$$\eta\,A=0\Rightarrow\mu\,A=0,$$
$$\mu\,A=0\not\Rightarrow\eta\,A=0.$$

Дамо пояснення останньому на прикладі.

1.17.5. Розглянемо множину $\mathbb{Q}\bigcap[0;1]$. Ця множина є зчисленною, тому $\mu\left(\mathbb{Q}\bigcap[0;1]\right)=0$. Доведемо, що множина $\mathbb{Q}\bigcap[0;1]$ не має жорданової міри нуль.

Припустимо супротивне:

$$\eta\,A=0\Rightarrow\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^{n}:\;\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)\supset A\wedge\sum_{k=1}^{n}(\beta_k-\alpha_k)<\varepsilon\,.$$

Довжина відрізка $[0;1]$ дорівнює 1, тому можна знайти відрізок $[c,d]$, що лежить усередині доповнення до побудованого покриття, тобто

$$\exists\,[c,d]\subset[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k):\quad d-c\neq0\,.$$

За лемою про наближення дійсних чисел раціональними [**3**, с.51], між будь-якими двома дійсними числами лежить хоча б одне раціональне число, тобто

$$\exists\, q \in (c, d) \bigcap \mathbb{Q}\,.$$

Отримане означає, що точка q залишилася не покритою інтервалами $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$. Отримана суперечність доводить той факт, що ця множина не має жорданової міри нуль.

Зауважимо, що будь-яка зчисленна і скінченна множини мають Лебеґову міру нуль, але не будь-яка зчисленна множина має жорданову міру нуль, тобто

A – скінченна $\Rightarrow$ $\eta\, A = 0 \Rightarrow \mu\, A = 0$,
A – зчисленна $\Rightarrow \mu\, A = 0$, а з приводу рівності $\eta\, A = 0$ нічого не можна стверджувати

☝ **Теорема 1.13** (*критерій Лебеґа інтегровності функції*). Для того, щоб функція $f(x)$ була інтегровною за Ріманом на $[a,b]$, необхідно й достатньо, щоб:

1) функція $f(x)$ була обмеженою на $[a,b]$;

2) множина A точок її розриву на $[a,b]$ мала лебеґову міру нуль, тобто $\mu A = 0$.

Доведення див. у [**3**, с. 406–409].

☝ **<u>ВИСНОВОК</u>. Класи інтегровних за Ріманом на $[a,b]$ функцій:**

1) неперервні,

2) обмежені монотонні,

3) обмежені, що мають множину A точок розриву, яка є:

   а) скінченною,

   б) зчисленною,

   в) іншого типу, коли $\eta\, A = 0$ або $\mu A = 0$

7. Властивості інтеграла Рімана

7.1. Група властивостей, що виражаються рівностями. Адитивність інтеграла Рімана ☝

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену в точці a скінченним значенням. Будемо за означенням вважати, що інтеграл Рімана від такої функції, взятий у межах від точки a до точки a, дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

Цю властивість слід вважати домовленістю.

1° Якщо $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, тоді:

1) вона інтегровна *на орієнтованому відрізку* $[b,a]$,

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2° *Властивість лінійності інтеграла*:

якщо $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні на $[a,b]$, тоді:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f(x) + \beta g(x) -$ інтегровна на $[a,b]$,

2) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

3° Якщо $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні на $[a,b]$, тоді $f(x) \cdot g(x)$ – інтегровна на відрізку $[a,b]$.

4° Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то вона інтегровна на будь-якому відрізку, що міститься в $[a,b]$.

5° Якщо $f(x)$ – інтегровна на $[a,c]$ і на $[c,b]$, де $a < c < b$, то

1) $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$,

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (*властивість адитивності інтеграла*).

Доведення властивостей

Доведення властивості 1°. За означенням відрізка $[a,b]$ повинна виконуватися нерівність $a \le b$. Визначимо орієнтований відрізок:

$$[b,a] \overset{def}{=} \{x \in \mathbb{R} : b \ge x \ge a\}.$$

Розглянемо розбиття орієнтованого відрізка:

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_{k-1} > x_k > \ldots > x_{n-1} > x_n = a,$$

тоді інтегральна сума, що відповідає йому, має вигляд:

$$\sigma_{[b,a]} = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) = \left\| \text{тут } x_{k-1} \ge \alpha_k \ge x_k \right\| = -\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1}) =$$

$$= -\sigma_{[a,b]} - \text{інтегральна сума для } f(x) \text{ на } [a,b] \text{ з розбиттям}$$

$$a = x_n < x_{n-1} < \ldots < x_k < x_{k-1} < \ldots < x_2 < x_1 < x_0 = b \Rightarrow$$

1) $\underset{\exists}{\lim_{d\to 0}\sigma_{[b,a]}} \underset{\Leftarrow}{=} -\underset{\exists}{\lim_{d\to 0}\sigma_{[a,b]}} \Rightarrow f(x) -$ інтегровна на $[b,a]$,

2) $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$. ■

Доведення властивості 2°. Розглянемо довільне розбиття $R = \{x_k\}$ відрізка $[a,b]$ і довільний набір проміжних точок $P = \{c_k\}$, пов'язаних з ним. Тоді

$$\sigma_{\alpha f + \beta g} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(c_k) + \beta g(c_k))\Delta x_k =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k = \alpha\sigma_f + \beta\sigma_g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\exists}{\lim_{d\to 0}(\alpha\sigma_f + \beta\sigma_g)} \underset{\Leftarrow}{=} \left(\underset{\exists}{\alpha\lim_{d\to 0}\sigma_f} \wedge \underset{\exists}{+\beta\lim_{d\to 0}\sigma_g} \right) \quad \Rightarrow$$

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f(x) + \beta g(x) -$ інтегровна на $[a,b]$,

2) $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$. ■

Зауваження 1.5. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, а $g(x)$ задана й обмежена на $[a,b]$, причому $f(x)$ і $g(x)$ відрізняються лише в точках скінченної множини, тоді $g(x)$ інтегровна на $[a,b]$ і

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Доведення. Розглянемо функцію $h(x) = f(x) - g(x)$ на відрізку $[a,b]$. Оскільки функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то вона обмежена на $[a,b]$. Функція $g(x)$ задана й обмежена на $[a,b]$ за умовою. Отже, $h(x)$ обмежена на відрізку $[a,b]$ й у всіх точках цього відрізка, окрім скінченної кількості, дорівнює нулю. Внаслідок *теореми 1.11*, функція $h(x)$ інтегровна й

$$\int_a^b h(x)\,dx = 0\,.$$

Застосовуючи *властивість лінійності визначеного інтеграла*, одержимо:

$$\underset{\exists}{\int_a^b g(x)\,dx} = \int_a^b \big(f(x) - h(x)\big)\,dx \underset{\Leftarrow}{=} \underset{(\exists}{\int_a^b f(x)\,dx} \underset{\wedge}{-} \underset{\exists)}{\int_a^b h(x)\,dx} = \int_a^b f(x)\,dx\,.\ \blacksquare$$

Доведення властивості 3° проведемо у два етапи.

Етап 1. Розглянемо інтегровну на $[a,b]$ функцію $h(x)$. Доведемо, що $h^2(x) -$ інтегровна на $[a,b]$. Для цього введемо позначення:

$$H = \sup_{[a,b]} h(x)\,,\ H_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} h(x); \quad h_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} h(x)\,,\ \alpha_k, \beta_k \in [x_{k-1}, x_k]\,,$$

$\omega_k(h)$, $\omega_k(h^2) -$ коливання функцій $h(x)$ і $h^2(x)$ на k-му відрізку розбиття.

Має місце нерівність:

$$\left|h^2(\alpha_k) - h^2(\beta_k)\right| = \left|h(\alpha_k) - h(\beta_k)\right| \cdot \left|h(\alpha_k) + h(\beta_k)\right| \le$$

$$\le \left|h(\alpha_k) - h(\beta_k)\right| \cdot \left(\left|h(\alpha_k)\right| + \left|h(\beta_k)\right|\right) \le$$

$$\le 2H \cdot \left|h(\alpha_k) - h(\beta_k)\right| \le 2H \cdot \sup_{\alpha_k, \beta_k \in [x_{k-1}, x_k]} \left|h(\alpha_k) - h(\beta_k)\right| = 2H \cdot \omega_k(h).$$

Звідки $\omega_k(h^2) \le 2H \cdot \omega_k(h)$. Тоді

$$0 \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \omega_k(h^2) \cdot \Delta x_k}_{\Downarrow\ 0} \le 2H \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega_k(h) \cdot \Delta x_k, \quad d \to 0$$

Тому, за третім критерієм Дарбу, $h^2(x)-$ інтегровна на $[a,b]$.

Етап 2. Оскільки $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні на $[a,b]$, то

$$f(x)\cdot g(x) = \underbrace{\frac{1}{4}\left[\underbrace{\underbrace{\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{інт.}}+\underbrace{g(x)}_{\text{інт.}}\Big)}_{\text{інт. } (2^o)}{}^2}_{\text{інт. (етап 1)}} - \underbrace{\underbrace{\Big(\underbrace{f(x)}_{\text{інт.}}-\underbrace{g(x)}_{\text{інт.}}\Big)}_{\text{інт. } (2^o)}{}^2}_{\text{інт. (етап 1)}}\right]}_{\text{інт. } (2^o)}. \ \blacksquare$$

Доведення властивості 4°. Функція інтегровна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ (за першим критерієм Дарбу)

$$\lim_{d\to 0}(\overline{S}_{[a,b]} - \underline{S}_{[a,b]}) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, R: \quad d < \delta \Rightarrow \overline{S}_{[a,b]} - \underline{S}_{[a,b]} < \varepsilon\,. \quad (1.23)$$

Розглянемо відрізок $[c,d] \subset [a,b]$, який лежить усередині відрізка $[a,b]$. Нехай R^*- довільне розбиття відрізка $[c,d]$ з діаметром, меншим за те δ, що знайдено в (1.23). Позначимо через R' те розбиття $[a,b]$, яке містить в собі R^* і має діаметр, менший за δ. Інтегральні суми, що відповідають R', будемо помічати штрихом. Матимемо:

1) внаслідок (1.23) $d(R') < \delta \Rightarrow \overline{S'}_{[a,b]} - \underline{S'}_{[a,b]} < \varepsilon$,

2) $\overline{S'}_{[a,b]} - \underline{S'}_{[a,b]} = \underbrace{\sum_{[a,c]} (M_k' - m_k')\Delta x_k}_{\ge 0} + \sum_{[c,d]} (M_k' - m_k')\Delta x_k +$

$$+ \underbrace{\sum_{[d,b]} (M_k' - m_k')\Delta x_k}_{\ge 0} < \varepsilon \Rightarrow \sum_{[c,d]} (M_k' - m_k')\Delta x_k < \varepsilon \ \Rightarrow\ \overline{S}_{[c,d]} - \underline{S}_{[c,d]} < \varepsilon\ .$$

Отже, отримано: $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, R^*: \quad d(R^*) < \delta \Rightarrow \overline{S}_{[c,d]} - \underline{S}_{[c,d]} < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{d\to 0}(\overline{S}_{[c,d]} - \underline{S}_{[c,d]}) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) -$ інтегровна на $[c,d]$ за першим критерієм Дарбу. ■

Доведення властивості 5°. Доведемо спочатку першу частину властивості.

1. Розглянемо довільне розбиття $R[a;b]$ відрізка $[a,b]$. Згідно з *властивістю 2 сум Дарбу*, додавання до точок розбиття додаткових точок призводить до того, що нижня сума Дарбу не зменшується. Тому нижня сума $\underline{S}\left(R[a;b]\right)$ для довільного розбиття $R[a;b]$ і нижня сума $\underline{S}\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)$ для розбиття $R[a;b]\bigcup\{c\}$, що містить точку c, пов'язані нерівністю

$$\underline{S}\left(R[a;b]\right) \le \underline{S}\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right).$$

Позначимо через $\underline{S}\left(\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)\bigcap[a;c]\right)$ суму тих доданків із $\underline{S}\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)$, що відповідають відрізкам із $[a;c]$, а через $\underline{S}\left(\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)\bigcap[c;b]\right)$ тих, що відповідають $[c;b]$. Тоді

$$\underline{S}\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right) = \underline{S}\left(\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)\bigcap[a;c]\right) + \underline{S}\left(\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)\bigcap[c;b]\right).$$

Із зазначеного вище й означення нижніх інтегралів Дарбу $I_*([a;c]) = \sup\limits_R\{\underline{S}(R[a;c])\}$ і $I_*([c;b]) = \sup\limits_R\{\underline{S}(R[c;b])\}$, матимемо:

$$\underline{S}\left(R[a;b]\right) \le \underline{S}\left(\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)\bigcap[a;c]\right) + \underline{S}\left(\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right)\bigcap[c;b]\right) \le$$

$$\le I_*([a;c]) + I_*([c;b])$$

Через довільність вибору розбиття $R[a;b]$ відрізка $[a,b]$ із останньої нерівності й означення нижнього інтеграла Дарбу $I_*([a;b])$ на відрізку $[a,b]$ отримаємо:

$$I_*([a;b]) \le I_*([a;c]) + I_*([c;b]).$$

2. Тепер розглянемо довільні розбиття $R[a;c]$ і $R[c;b]$ відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$ відповідно, тоді

$$\underline{S}\left(R[a;c]\right) + \underline{S}\left(R[c;b]\right) = \underline{S}\left(R[a;b]\bigcup\{c\}\right) \le I_*([a;b]).$$

Унаслідок довільності вибору розбиттів $R[a;c]$ і $R[c;b]$, одержимо:

$$I_*([a;c]) + I_*([c;b]) \le I_*([a;b]) .$$

3. Із нерівностей, отриманих в пунктах 1 і 2 , маємо:

$$I_*([a;c]) + I_*([c;b]) = I_*([a;b]) .$$

Аналогічну рівність можна довести для верхніх сум Дарбу. А саме:

$$I^*([a;c]) + I^*([c;b]) = I^*([a;b]) .$$

4. Оскільки функція інтегровна на кожному з відрізків $[a;c]$ і $[c;b]$, то, згідно з *другим критерієм Дарбу інтегровності функції* (теорема 1.7), нижній і верхній інтеграли на цих відрізках рівні, отже,

$$I_*([a;b]) = I_*([a;c]) + I_*([c;b]) = I^*([a;c]) + I^*([c;b]) = I^*([a;b]) .$$

Рівність $I_*([a;b]) = I^*([a;b])$ доводить інтегровність функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Першу частину властивості доведено.

<u>Доведемо тепер другу частину властивості</u>.

5. Згідно з першим критерієм Дарбу, з інтегровності функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ випливає, що $\lim\limits_{d\to 0}\left[\overline{S}\left(R[a;b]\right) - \underline{S}\left(R[a;b]\right)\right] = 0$. Окрім іншого, при доведенні достатності теореми 1.6 отримано: якщо для обмеженої функції має місце зазначена гранична рівність, тоді виконується співвідношення

$$I_*([a;b]) = I^*([a;b]) = \int_a^b f(x)dx .$$

Оскільки (за умовою) функція $f(x)$ інтегровна на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, то на цих відрізках мають місце аналогічні рівності:

$$I_*([a;c]) = I^*([a;c]) = \int_a^c f(x)\,dx , \quad I_*([c;b]) = I^*([c;b]) = \int_c^b f(x)\,dx .$$

6. Зі співвідношень пунктів 4 і 5 матимемо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Властивість доведено повністю. ■

Зауваження 1.6. Властивість адитивності

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

виконується також у випадку, коли $c \notin (a,b)$ у припущенні про існування інтеграла за найширшим відрізком.

Дійсно, у випадку інтегровності функції $f(x)$ на найширшому відрізку, за *властивістю 5°*, вона буде інтегровною на інших двох відрізках. Нехай найширшим буде відрізок $[a,c]$. Застосовуючи *властивість 5°* адитивності інтеграла та *властивість 1°* про інтеграл вздовж орієнтовного відрізка, матимемо:

$$\int_a^c f(x)dx \overset{5^o}{=} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \overset{1^o}{=} \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \quad \blacksquare$$

7.2. Група властивостей, що виражаються нерівностями. Теореми про середнє значення ☝

6° $\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ f(x) \ge 0 \ \forall\, x \in [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 .$

7° $\left.\begin{array}{l} f(x) \wedge g(x) - \text{інтегровні на}\,[a,b], \\ f(x) \le g(x) \ \forall\, x \in [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx .$

8° $\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ m \le f(x) \le M, \end{array}\right\} \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) .$

9° *Теорема про середнє значення*:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ m = \inf\limits_{[a,b]} f(x), \quad M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \beta \in [m,M] : \int_a^b f(x)\,dx = \beta(b-a) .$$

10° *Теорема про середнє значення у випадку неперервності підінтегральної функції*:

$$f(x) \ \text{– неперервна на} \ [a,b] \ \Rightarrow \exists\, c \in \ [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) .$$

🗁**Означення 1.16.** *Середнім значення* інтегровної на $[a,b]$ функції $f(x)$ називають значення величини

$$\beta = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

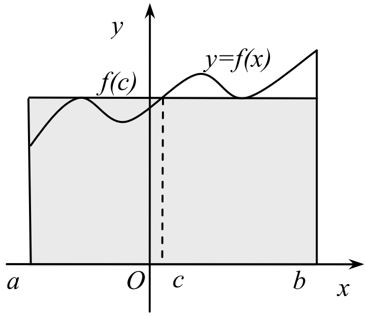


Рис. 1.9.

Геометричний зміст теореми про середнє. Якщо $f(x)$ невід'ємна і неперервна на $[a,b]$, тоді існує така точка c відрізка $[a,b]$, що площа криволінійної трапеції дорівнюватиме площі прямокутника зі сторонами довжини $f(c)$ і $b-a$ (рис. 1.9).

11° $$\left.\begin{array}{l} f(x)\wedge g(x) - \text{інтегровні на}\,[a,b], \\ g(x)\geq 0 \ \ \forall\, x\in[a,b], \\ m=\inf\limits_{[a,b]} f(x), \quad M=\sup\limits_{[a,b]} f(x), \end{array}\right\} \Rightarrow m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx.$$

12° *Узагальнена теорема про середнє значення:*

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\wedge g(x) - \text{інтегровні на}\,[a,b], \\ g(x)\ \text{не змінює знак на}\ [a,b], \\ m=\inf\limits_{[a,b]} f(x), \quad M=\sup\limits_{[a,b]} f(x), \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\beta\in[m,M]: \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

13° *Узагальнена теорема про середнє значення у випадку неперервності однієї з підінтегральних функцій*:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на}\,[a,b], \\ g(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ g(x)\ \text{не змінює знак на}\ [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in[a,b]: \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Зауважимо, що у формулюваннях властивостей 11°–13°, дуже важливим є припущення про сталість знака функції $g(x)$ на $[a,b]$.

14° *Друга теорема про середнє значення*:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ g(x)\ \text{монотонна на}\,[a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, c \in [a,b] : \int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \cdot \int_a^c f(x)\, dx + g(b) \cdot \int_c^b f(x)\, dx .$$

15° Якщо $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$, тоді

1) $|f(x)|$ – інтегровна на $[a,b]$,

2) $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Зауваження 1.7. Із інтегровності функції $|f(x)|$ на $[a,b]$ не завжди випливає інтегровність на $[a,b]$ *(навести приклад самостійно ✍!)*.

Доведення властивостей

6° Оскільки $f(x) \ge 0\ \ \forall x \in [a,b]$, то $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \Delta x_k \ge 0$ і внаслідок інтегровності функції на $[a,b]$

$$\exists \lim_{d \to 0} \sigma = \int_a^b f(x) dx \ge 0 . \ \blacksquare$$

7° $f(x) \wedge g(x) - \text{інтегровні на}\,[a,b] \overset{2^o}{\Rightarrow} \quad \varphi(x) = g(x) - f(x)$ інтегровна на $[a,b]$.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = g(x) - f(x) \ge 0\ \ \forall\, x \in [a,b], \\ \varphi(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \end{array}\right\} \overset{6^o}{\Rightarrow} \int_a^b \varphi(x) dx \ge 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \ge 0 . \ \blacksquare$$

8° Застосуємо 7°:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{інтегровна на}\,[a,b], \\ m \le f(x) \le M\ \ \forall\, x \in [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \int_a^b m dx \le \int_a^b f(x) dx \le \int_a^b M dx, \\ m \int_a^b dx = m(b-a), \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a). \ \blacksquare$$

9° Застосуємо 8°:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Leftrightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Нехай $\beta = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ m \le \beta \le M, \\ 2) \int_a^b f(x)dx = \beta(b-a). \end{cases}$ $\blacksquare$

10° Оскільки $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то, за другою теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.188; **4**, с.176],

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) = \min_{[a,b]} f(x); \quad M = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x).$$

Оскільки $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то, за *теоремою 1.9*, $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$. Застосуємо 9°:

$$\int_a^b f(x)dx = \beta(b-a), \tag{1.28}$$

тут $\beta \in [m,M] = \left[\min_{[a,b]} f(x); \max_{[a,b]} f(x)\right]$. За теоремою Коші, неперервна на $[a,b]$ функція набуває усіх своїх проміжних значень [**3**, с.184; **4**, с.171]:

$$\exists\, c \in [a,b] : \beta = f(c);$$

підставимо в (1.28), отримаємо

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \ \blacksquare$$

11° Із *властивості 3°* випливає, що внаслідок інтегровності на $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$, інтегровною на $[a,b]$ буде функція $f(x)\cdot g(x)$. Оскільки

$$\left.\begin{array}{l} m \le f(x) \le M \quad \forall\, x \in [a,b], \\ g(x) \ge 0 \quad \forall\, x \in [a,b], \end{array}\right\} \Rightarrow m\, g(x) \le f(x)\, g(x) \le M\, g(x)\ \forall\, x \in [a,b],$$

то, застосувавши 7°, одержимо:

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx \ . \ \blacksquare$$

Якщо в тих же припущеннях про інтегровність функцій $f(x)$ і $g(x)$ і про обмеженість функції $f(x)$ припустити недодатність функції $g(x)$ на $[a,b]$, то матиме місце така оцінка інтеграла :

$$M\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le m\int_a^b g(x)\,dx \ .$$

(Доведіть це самостійно ✍**!**

12^o Розглянемо випадок, коли функція $g(x)$ невід’ємна в усіх точках відрізка $[a;b]$. Виконуються всі припущення попередньої властивості і *властивості 6^o*, тому

$$\forall\ x\in[a,b]\ \ g(x)\ge 0 \overset{6^o}{\Rightarrow} \int_a^b g(x)\,dx \ge 0 \ \overset{11^o}{\Rightarrow} \quad m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=\beta} \le M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

У випадку недодатності функції $g(x)$ на $[a,b]$ має місце оцінка інтеграла, виписана після доведення властивості 11^o, тоді

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^b g(x)\,dx \ge 0 \text{ (властивість } 6^o\text{)}; \\ M\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le m\int_a^b g(x)\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow m \le \underbrace{\frac{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}}_{=\beta} \le M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \beta\int_a^b g(x)\,dx\,. \quad \blacksquare$$

13^o Доведення здійснюється аналогічно 10^o із застосуванням 12^o. Довести самостійно ✍**.** ■

14° Доведення другої теореми про середнє *вивчити самостійно* ✍, див. [**3**, с.385–388; **4**, с.117–120]. ■

15° Скористаємося інтегровністю $f(x)$ на $[a,b]$ і третім критерієм Дарбу:

$$\left.\begin{aligned} &|f(x')-f(x'')| \geq \big||f(x')|-|f(x'')|\big|, \\ &\omega_k^f = \sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]} |f(x')-f(x'')|, \\ &\omega_k^{|f|} = \sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]} \big||f(x')|-|f(x'')|\big|, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \omega_k^f \geq \omega_k^{|f|}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{|f|} \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{f} \cdot \Delta x_k \xrightarrow[d\to 0]{} 0.$$

Звідки й випливає інтегровність $|f(x)|$ на $[a,b]$.

Тепер перевіримо нерівність $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. Нехай $\sigma_f, \sigma_{|f|}$ – інтегральні суми функцій $f(x)$ і $|f(x)|$ на відрізку $[a,b]$, тоді

$$|\sigma_f| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\Delta x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\alpha_k)|\cdot\Delta x_k = \sigma_{|f|},$$

а після граничного переходу при $d \to 0$ отримаємо потрібну нерівність. ■

8. Визначений інтеграл як функція верхньої межі

Розглянемо інтегровну на відрізку $[a,b]$ функцію $f(x)$. Маємо:

$$a \leq x \leq b \Rightarrow f(x) - \text{інтегровна на } [a,x] \Rightarrow \exists \int_a^x f(t)dt.$$

$$\forall\, x \in [a,b] \xrightarrow{\Phi} \int_a^x f(t)dt - \text{значення єдине } \forall\, x; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{побудовано функцію на } [a,b]: \ \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Властивості функції $\Phi(x)$

Властивість 1

$f(x)$ – інтегровна на $[a,b] \Rightarrow \Phi(x)$ – неперервна на $[a,b]$.

Властивість 2

$f(x)$ – неперервна на $[a,b] \Rightarrow \exists\, \Phi'(x)$ в будь-якій точці $x \in [a,b]$, до того ж $\Phi'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

Доведення властивості 1. Нехай $x \in [a,b] \wedge h + x \in [a,b]$, тоді

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt; \ \Phi(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)dt;$$
$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

За теоремою про середнє (див. *властивість 9°*), $\exists \beta_{x,h}$ таке, що лежить поміж точною нижньою і верхньою межею функції $f(x)$ на відрізку, що сполучає точки x і $x+h$, для якого є вірною рівність

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = \beta_{x,h} \cdot (x+h-x) = \beta_{x,h} \cdot h.$$

Тоді

$$\lim_{h\to 0}\left(\Phi(x+h) - \Phi(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\beta_{x,h}}_{\text{обм.}} \cdot \underbrace{h}_{\text{н.м.}}\right) = 0 .$$

Отже, $\Phi(x)$ – неперервна в точці $x \in [a,b]$. ■

Доведення властивості 2. Скористаємося теоремою про середнє у випадку неперервності підінтегральної функції (див. *властивість 10°*): $\exists c_{x,h}$ таке, що лежить поміж x і $x+h$, для якого

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_{x,h}) \cdot h .$$

Тоді

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(c_{x,h})\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}f(c_{x,h})=\left\|\begin{array}{c} f(x)-\text{непер. в т. } x\\ x\leqslant c_{x,h}\leqslant x+h\\ \searrow \quad \underset{h\to 0}{\Downarrow} \quad \swarrow\\ x\end{array}\right\|=f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\Phi'(x)=f(x).\ \blacksquare$$

☝ **Наслідок 1.4.** Функція $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ є однією з первісних неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$.

☝ **Наслідок 1.5.** Неперервна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має первісну.

9. Основна теорема інтегрального числення. Формули заміни змінної та інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла

☝ **Теорема 1.14 (***основна теорема інтегрального числення, формула Ньютона-Лейбніца).* Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $F(x)$ – одна з її первісних, то має місце формула

$$\boxed{\int\limits_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b}$$

Доведення. Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, тоді, згідно з *наслідком 1.4*, функція $\Phi(x)$ – одна з первісних $f(x)$ на $[a,b]$. Якщо $F(x)$ – інша первісна, то $\exists C\in\mathbb{R}$: $F(x)=\Phi(x)+C$. Знайдемо значення сталої C:

$$\left.\begin{array}{l} F(a)=\Phi(a)+C,\\ \Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0,\end{array}\right\}\Rightarrow F(a)=0+C\Rightarrow C=F(a)\Rightarrow F(x)=\Phi(x)+F(a).$$

Отже,

$$F(b)=\Phi(b)+F(a)\Rightarrow \Phi(b)=F(b)-F(a),$$

й оскільки $\Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)dt$, то

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

Для неперервної функції $f(x)$ на $[a,b]$, за теоремою про середнє, формулою Ньютона-Лейбніца і *властивістю 1 функції* $\Phi(x)$, маємо:

$$\begin{array}{ccc} \int_a^b f(x)dx & = f(c)\cdot(b-a), & \text{де } a<c<b; \\ \| & \| & \\ F(b)-F(a) & = F'(c)\cdot(b-a). & \end{array}$$

Остання формула є формулою Лагранжа в диференціальному численні. Таким чином, установлено *зв'язок між теоремою про середнє в інтегральному численні й формулою Лагранжа – в диференціальному.*

☝ **Теорема 1.15** *(заміна змінної під знаком визначеного інтеграла).*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на } [a,b]; \\ x=\varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha,\beta]; \\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b, \\ \varphi[\alpha,\beta]=[a,b] \text{ (образ відрізка } [\alpha,\beta] \text{ співпадає з відрізком } [a,b]); \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

Доведення: $f(x)-$ неперервна на $[a,b] \Rightarrow$

1) $\exists \int_a^b f(x)\,dx$;

2) $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ – одна з первісних $f(x)$ на $[a,b]$ (*наслідок 1.4*).

Застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b)-\Phi(a).$$

Позначимо через Y образ відрізка $[a,b]$ під дією функції $f(x)$, тобто $Y=f[a,b]$. Перевіримо можливість застосування до функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ формули Ньютона-Лейбніца:

$\varphi(t)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta] \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \varphi'(t) \text{ – неперервна на } [\alpha,\beta], \\ f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \left|\overline{\underline{[\alpha,\beta] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{f} Y}}\right| \end{array}\right\} \Rightarrow f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) \text{ – неперервна на } [\alpha,\beta] \Rightarrow$$

до функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ можна застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца. Оскільки ця функція неперервна на $[\alpha,\beta]$, то вона на цьому відрізку має первісну, позначимо її $\Psi(t)$, тоді

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha).$$

Встановимо зв'язок між первісними $\Psi(t)$ і $\Phi(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi'(x) = f(x) \Rightarrow (\Phi(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \\ \Psi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t), \end{array}\right\} \Rightarrow (\Phi(\varphi(t)))' = \Psi'(t) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \Phi(\varphi(t)) + C.$$

Отже,

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \Psi(\beta) - \Psi(\alpha) = \Phi(\varphi(\beta)) + C - \Phi(\varphi(\alpha)) - C =$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)\,dx.\,. \blacksquare$$

Приклад 1.18. Обчислимо такий визначений інтеграл за допомогою формули заміни змінної:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\| \begin{array}{l} x = \sin t,\ \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|, \\ dx = \cos t\,dt;\ \ x = -1 \Rightarrow t = -\dfrac{\pi}{2},\ \ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\cdot\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

☝ **Теорема 1.16** *(формула інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла).* Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a,b]$, тоді виконуються формула:

$$\boxed{\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)}$$

Доведення. Оскільки $u(x)$ – диференційовна на $[a,b]$, то $u(x)$ неперервна на $[a,b]$, окрім того, $v'(x)$ неперервна на $[a,b]$ і $dv(x) = v'(x)dx$, тому, за *теоремою 1.9*,

$$\exists \int_a^b u(x)\cdot dv(x) = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx \ .$$

Аналогічно доводиться, що

$$\exists \int_a^b v(x)\cdot du(x) = \int_a^b v(x)\cdot u'(x)dx \ .$$

Крім того, обидві функції $u(x)\cdot v'(x)$ і $v(x)\cdot u'(x)$ мають первісні на $[a,b]$ (*наслідок 1.5*). Нехай $\varphi(x) = \int v(x)\ du(x)$. Оскільки виконується формула інтегрування частинами для невизначеного інтеграла

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) ,$$

то з урахуванням позначення маємо:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \varphi(x)$$

є первісною функції $u(x)v'(x)$.

Застосовуємо формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \big(u(x)v(x) - \varphi(x)\big)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \varphi(x)\Big|_a^b = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) \ . \ ■$$

Приклад 1.19 [6]. Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \ \ (n \in \mathbb{N})$.

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \left\| \begin{matrix} u = \sin^{n-1} x; & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= (-\cos x)\cdot \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\cos^2 x \sin^{n-2} x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx =$$

$$= (n-1)\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx}_{I_{n-2}} - (n-1)\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx}_{I_n}.$$

Звідки

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n;$$

$$n\cdot I_n = (n-1)I_{n-2};$$

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2};$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}; \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 .$$

Тоді

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\cdot I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2}\cdot\frac{2k-5}{2k-4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot 1.$$

Тут ми застосували означення подвійних факторіалів:

$$(2k-1)!! \overset{def}{=} 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2k-1), \quad (2k)!! \overset{def}{=} 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k).$$

тобто $n!!$ – це добуток натуральних чисел, що не перевищують n та однієї парності з ним. Наприклад $7!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 105$, а $8!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 = 384$.

Отже, отримано формулу:

☝ $$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \frac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}}$$

Виведемо формулу Валліса[1]. Задля цього проінтегруємо нерівність

$$\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$$

в межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$: $I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$. Підставляючи значення інтегралів, отримаємо:

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \le \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \le \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}.$$

Помножимо обидві частини останньої нерівності на $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$, одержимо:

$$\underbrace{\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2 (2k+1)}}_{a_n} \le \frac{\pi}{2} \le \underbrace{\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2 \cdot 2k}}_{b_n}.$$

Доведемо, що відстань між правою і лівою частинами останньої нерівності є нескінченно малою послідовністю. Введемо позначення:

$$a_n = \frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2 (2k+1)}; \quad b_n = \frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2 \cdot 2k},$$

тоді

$$\lim_n (b_n - a_n) = \lim_n \frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2} \cdot \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = \lim_n \underbrace{\frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2 (2k+1)}}_{\substack{a_n \\ 0 \le a_n \le \frac{\pi}{2} \\ \text{обм.}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{2k}_{\text{н.м.п.}}} = 0 \cdot$$

Тому $\lim_n a_n = \lim_n b_n = \frac{\pi}{2}$. Враховуючи позначення, одержимо:

$$\boxed{\lim_n \frac{\left[(2k)!!\right]^2}{\left[(2k-1)!!\right]^2} \cdot \frac{1}{(2k+1)} = \frac{\pi}{2} - \textit{формула Валліса}}$$

Формула Валліса має історичне значення як перша формула обчислення ірраціонального числа π через границю послідовності раціональних чисел. Цю

[1] **Валліс (Уолліс) Джон** (23.11.1616 – 28.10.1703) – англійський математик, один із засновників і перших членів Лондонського королівського товариства. Професор геометрії Оксфордського університету. Валліс – перший англійський математик, який почав займатися аналізом нескінченно малих. Його головна робота «Арифметика нескінченних» (1656) мала важливе місце в передісторії інтегрального числення.

формулу також застосовують в математичних дослідженнях, зокрема при виведенні формули Стірлінга (див. [**6**, с. 363 – 371]).

10. Інтегрування парних і непарних функцій

На практиці іноді потрібно буває проінтегрувати парну або непарну функцію в симетричних межах інтегрування. Саме такий випадок буде розглянуто нижче. Доведемо таке: якщо функція $f(x)-$ інтегровна на $[-a;a]$, то

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x)-\text{парна} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,\\ &f(x)-\text{непарна} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \end{aligned}}$$

Нехай задана функція – парна. Оскільки $f(x)-$ інтегровна на $[-a;a]$, то границя її інтегральних сум не залежить від способу розбиття та вибору проміжних точок. Розглянемо розбиття, що містить точку 0, а точки розбиття, розташовані справа й зліва від точки 0, симетричні відносно неї; тобто

$$-a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 0 < x_{m+1} < \ldots < x_{2m} = a\ ; \quad -x_k = x_{2m-k} \quad (\,k = \overline{0,m})\,.$$

За проміжні точки оберемо середини відрізків розбиття, тобто $\alpha_j = \frac{1}{2}\left(x_j + x_{j-1}\right)$ $(j = \overline{1,2m})$. Тоді $-\alpha_k = \alpha_{2m-k+1}$, а для парної функції $f(\alpha_k) = f(\alpha_{2m-k+1})$ $(k = \overline{1,m})$. В результаті одержимо інтегральну суму, для якої

$$\sigma_{[-a;a]} = \sum_{k=1}^{m} f\left(\alpha_k\right)\left(x_k - x_{k-1}\right) + \sum_{k=1}^{m} f\left(\alpha_{2m-k+1}\right)\left(x_{2m-(k-1)} - x_{2m-k}\right) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m} f\left(\alpha_{2m-k+1}\right)\left(x_{2m-k+1} - x_{2m-k}\right) = 2\sigma_{[0;a]}\,.$$

Оскільки функція $f(x)-$ інтегровна на $[-a;a]$, то, за *властивістю 4^o визначеного інтеграла*, ця функція інтегровна на $[0;a]$. Тому після граничного переходу при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, отримаємо:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \lim_{d\to 0}\sigma_{[-a;a]} = \lim_{d\to 0} 2\sigma_{[0;a]} = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,.$$

Відповідне співвідношення для інтеграла від непарної функції виводиться аналогічно.

§3. Застосування визначених інтегралів

1. Обчислення довжин ліній за допомогою інтегралів

Розглянемо на декартовій площині множину точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in\left[t_0,T\right], \tag{1.29}$$

де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервні на відрізку $\left[t_0,T\right]$. Кажуть, що таким чином утворюється *плоска крива*. Аргумент t функцій із (1.29) називають параметром.

🗁 **Означення 1.17.** Множину точок $\{M\}$ на декартовій площині, координати яких задовольняють рівнянням (1.29), називають *плоскою простою кривою* L, якщо кожній точці $M(x,y)$ із цієї множини відповідає єдине значення параметра $t\in\left[t_0,T\right]$. Тобто

$$\forall M\left(x,y\right)\in\{M\}\ \exists! t\in\left[t_0,T\right]:\ \ x=\varphi(t), y=\psi(t).$$

Те саме можна сформулювати в інший спосіб. Множину точок $\{M\}$ на декартовій площині, які задаються рівняннями (1.29), називають *плоскою простою кривою* L, якщо двом різним значенням параметра $t_1,t_2\in[t_0,T]$ відповідають дві різні точки площини $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$, координати яких задовольняють рівнянням (1.29). Тобто

$$\forall t_1,t_2\in(t_0,T) \quad t_1\neq t_2 \Rightarrow\ M_1(\varphi(t_1),\psi(t_1))\neq M_2(\varphi(t_2),\psi(t_2)).$$

При цьому кажуть, що «рівняння (1.29) визначають плоску просту криву» або «плоска проста крива є параметризованою рівняннями (1.29)». Зауважимо, що одна й та сама крива може бути параметризованою різними способами, тобто різними рівняннями типу (1.29).

Із означення випливає, що проста плоска крива не може мати самоперетинів.

🗁 **Означення 1.18.** Криву називають *простою зімкненою*, якщо двом значенням параметра $t = t_0$ і $t = T$ відповідає одна і та сама точка площини, а всім іншим різним значенням параметра $t_1, t_2 \in (t_0, T)$ відповідають дві різні точки площини $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, координати яких задовольняють рівнянням (1.29).

Приклад 1.20. Розглянемо множину точок площини, які задаються рівняннями

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (1.30)$$

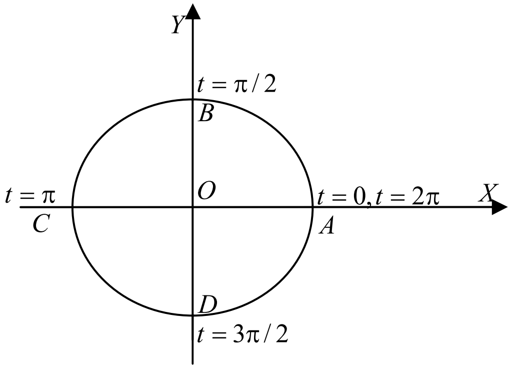


Рис. 1.10.

Систему (1.30) можна замінити еквівалентним рівнянням:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

яке визначає коло з центром в точці O(0,0) радіуса 1.

Крива L (коло), параметризована рівняннями (1.30), не є простою, оскільки точці A відповідають два різні значення параметра (див. рис. 1.10).

Якщо розглянути криву ABC, то параметризація

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

задає просту криву ABC. Аналогічно крива CDA з параметризацією

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

визначає просту криву (дугу). Таким чином, коло L розбито на дві прості плоскі криві. Крива, параметризована рівняннями (1.30), є простою зімкненою.

Позначимо через $\{t\}$ множину, що може бути однією з чотирьох таких множин:

$$\{t\} = \left| \begin{array}{l} [t_0, T], \\ (-\infty; +\infty), \\ (-\infty; a], \\ [a, +\infty). \end{array} \right.$$

🗁 **Означення 1.19.** Нехай крива L визначається рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ на $\{t\}$, причому множину $\{t\}$ можна подати у вигляді скінченного об'єднання відрізків $\{t\} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$, що не мають спільних внутрішніх точок, на кожному з яких крива, що задається цими рівняннями, є простою, то кажуть, що крива *є параметризовною*.

Задамо *відношення упорядкування на параметризовній кривій*. Будемо казати, що точка M_1 *передує* точці M_2 (позначення: $M_1 \prec M_2$) на простій кривій L, якщо відповідні значення параметрів t_1 і t_2, що задають точки M_1 і M_2, пов'язані нерівністю $t_1 < t_2$.

Якщо на кривій L задано відношення упорядкування, то кажуть, що на цій кривій задано *напрям оббігу кривої*. Пояснімо це.

Нехай рівняння

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$$

визначають криву L. Якщо крива є параметризовною, то:

1) спочатку розіб'ємо множину $\{t\}$ на відрізки, що взаємно не перетинаються і на яких крива є простою;

2) потім упорядкуємо значення параметра в порядку його зростання;

3) завдяки заданому на ній відношенню порядку отримаємо:

$$\begin{array}{ccccccccccc} t_0 & < & t_1 < \ldots < t_{i-1} & < & t_i < \ldots < t_{n-1} & < & t_n = T \\ \updownarrow & & \updownarrow \quad\quad \updownarrow & & \updownarrow \quad\quad \updownarrow & & \updownarrow \\ M_0 & \prec & M_1 \prec \ldots \prec M_{i-1} & \prec & M_i \prec \ldots \prec M_{n-1} & \prec & M_n \end{array}$$

утворення порядку (тут $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$).

Введемо поняття довжини кривої. Будемо вважати, що довжина ламаної є визначеним поняттям. Введемо позначення: $P_{[M_{i-1},M_i]} = P_i$ – довжина ланки ламаної, $P = \sum_{i=1}^{n} P_i$ – довжина ламаної, що сполучає точки-вузли

$$M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_{n-1}, M_n$$

(див. рис. 1.11). Якщо вузли ламаної належать кривій, то кажуть, що *ламана вписана в криву.*

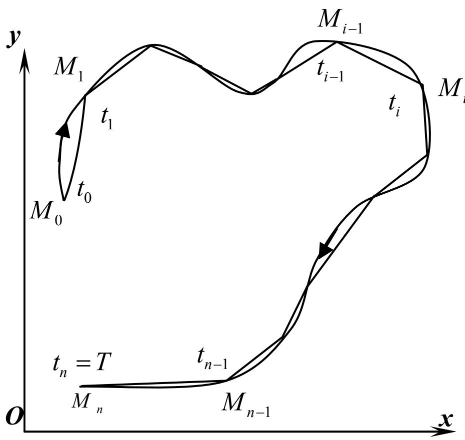


Рис. 1.11.

При додаванні точок розбиття параметра t і, відповідно, вузлів ламаної, довжина ламаної не зменшиться. Дійсно, додавання, наприклад, одного додаткового вузла ламаної, що відповідає новій точці розбиття значень параметра t, призводить до заміни однієї ланки ламаної двома іншими. Дві нові ланки й стара утворюють трикутник, тому сума довжин двох нових ланок не менша за довжину однієї старої. Оскільки інші ланки нової і старої ламаної не змінюються, то довжина нової ламаної не менша за довжину старої.

☝ 🗀**Означення 1.20.** Криву називають *спрямлюваною*, якщо довжини всіх ламаних, уписаних у криву, які відповідають різноманітним розбиттям відрізка $\left[t_0, T\right]$, утворюють множину, яка є обмеженою зверху. Значення величини $|L| = \sup\{P\}$ називють *довжиною кривої*.

Властивості спрямлюваних кривих

Властивість 1. Для спрямлюваної кривої її довжина не залежить від способу параметризації.

Доведення. Розглянемо дві параметризації за допомогою параметрів $t \in [a,b]$ і $s \in [\alpha,\beta]$. Тоді

$$\begin{array}{ccccccccccc} a=t_0 & < & t_1 <\ldots< & t_{i-1} & < & t_i <\ldots< & t_{n-1} & < & t_n=b \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ M_0 & \prec & M_1 \prec\ldots\prec & M_{i-1} & \prec & M_i \prec\ldots\prec & M_{n-1} & \prec & M_n \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ \alpha=s_0 & < & s_1 <\ldots< & s_{i-1} & < & s_i <\ldots< & s_{n-1} & < & s_n=\beta \end{array}$$

Тобто в різних параметризаціях отримаємо однакові ламані $\{P_t\}\equiv\{P_s\}$, тому

$$\sup\{P_t\}=\sup\{P_s\}\Rightarrow|L_t|=|L_s|.\ ■$$

Властивість 2. Якщо спрямлювана крива розбита скінченною кількістю точок $M_0, M_1, \ldots, M_n$ на скінченну кількість кривих, і, крім того, цим точкам відповідають значення параметра $a=t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$, то кожна з кривих, що сполучає точки M_{i-1}, M_i, є спрямлюваною, і, відповідно, довжина кривої дорівнює сумі довжин кривих, що її утворюють:

$$|L|=\sum_{i=1}^{n}\left|L_{(M_{i-1},M_i)}\right|.$$

Доведення вивчити *самостійно* ✍ [**3**, с.436–347]**!** ■

🗁 **Означення 1.21.** Функцію $f(x)$ називають *неперервно диференційовною на відрізку* $[a,b]$, якщо функція $f'(x)$ неперервна на інтервалі (a,b) й існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$ та $\lim\limits_{x\to b-0} f'(x)$.

🗁 **Означення 1.22.** Просту криву, параметризовану рівняннями $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,T]$ називають *простою гладкою кривою*, якщо функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неперервно диференційовні на $[t_0,T]$.

☝ **Теорема 1.17.** Проста гладка крива $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,T]$ є спрямлюваною, а її довжина $|L|$ обчислюється за формулою:

☝ $$\boxed{|L|=\int_{t_0}^{T}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt}$$

Доведення. Розглянемо точки на кривій $M_0, M_1, \ldots, M_n$, що відповідають розбиттю параметра $\{t\}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} t_0 & < & t_1 < \ldots < t_{i-1} & < & t_i < \ldots < t_{n-1} & < t_n = T \\ \updownarrow & & \updownarrow \quad\quad \updownarrow & & \updownarrow \quad\quad \updownarrow & \updownarrow \\ M_0 & \prec & M_1 \prec \ldots \prec M_{i-1} & \prec & M_i \prec \ldots \prec M_{n-1} & \prec M_n \end{array}$$

$M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$,

Тоді

$$|P| = \sum_{i=1}^{n} |P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} =$$

$$= \|\text{теорема Лагранжа [}\mathbf{3}\text{, с.245-246; }\mathbf{4}\text{, с.226-227]}\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)(t_i - t_{i-1})\right)^2} = \|\alpha_i, \beta_i \in [t_{i-1}, t_i]\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}\, \Delta t_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \cdot \underbrace{\left(\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)\right)^2} - \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}\right)}_{A_i}.$$

Оцінимо виділений вираз, який позначено через A_i:

$$|A_i| = \left| \frac{\left(\psi'(\beta_i)\right)^2 - \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}{\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)\right)^2} + \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\left(\psi'(\beta_i) - \psi'(\alpha_i)\right) \cdot \left(\psi'(\beta_i) + \psi'(\alpha_i)\right)}{\sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\beta_i)\right)^2} + \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}} \right| \le$$

$$\le |\psi'(\beta_i) - \psi'(\alpha_i)| \cdot \underbrace{\frac{\left(|\psi'(\beta_i)| + |\psi'(\alpha_i)|\right)}{\sqrt{(\varphi'(\alpha_i)^2 + (\psi'(\beta_i)^2)} + \sqrt{(\varphi'(\alpha_i)^2 + (\psi'(\alpha_i)^2)}}}_{=B_i};$$

$$\frac{|a| + |b|}{\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + a^2}} \le \frac{|a| + |b|}{\sqrt{b^2} + \sqrt{a^2}} = \frac{|a| + |b|}{|a| + |b|} = 1 \quad \Rightarrow \quad B_i \le 1 \, \forall i.$$

Таким чином,

$$\left|A_i\right| \le 1 \cdot \left|\psi'(\beta_i) - \psi'(\alpha_i)\right| \ \forall i .$$

Із геометричного змісту коливання функції на множині випливає $|\,\psi'(\beta_i) - \psi'(\alpha_i)\,| < \omega_i^{(\psi')} \quad \forall\{\beta_i\}, \forall\{\alpha_i\}$. Отже,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i \cdot A_i\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \Delta t \left|A_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \left|\psi'(\beta_i) - \psi'(\alpha_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(\psi')} \ \Delta t_i$$

Разом одержимо:

$$\forall R = \{t_i\} \, \exists\{\alpha_i\} \text{ (знайдено вище за формулою Лагранжа)}:$$

$$\left|P\right| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\varphi'(\alpha_i)\right)^2 + \left(\psi'(\alpha_i)\right)^2}\,\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i \cdot A_i\right); \quad \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta t_i \cdot A_i\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(\psi')} \ \Delta t_i .$$

Звідси

$$\forall R = \{t_i\} \, \exists\{\alpha_i\}: \quad \left|\left|P\right| - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2 + (\psi'(\alpha_i))^2}\,\Delta t_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(\psi')} \ \Delta t_i \ .$$

Маємо:

крива – проста гладка $\Rightarrow$ функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $\left[t_0, T\right]$ $\Rightarrow$ функція $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}$ – неперервна на $\left[t_0, T\right]$, $\Rightarrow$ (*за теоремою 1.9*) функція $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}$ – інтегровна на $\left[t_0, T\right]$.

Сума $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2 + (\psi'(\alpha_i))^2}\,\Delta t_i$ є інтегральною сумою функції $\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}$ на $\left[t_0, T\right]$, тому границя інтегральних сум не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок. Проміжні точки обираємо ті, що отримали вище, за теоремою Лагранжа.

Отже: $\lim\limits_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2 + (\psi'(\alpha_i))^2}\,\Delta t_i = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$.

Оскільки $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $\left[t_0, T\right]$, то з використанням *теореми 1.9* отримаємо, що $\psi'(t)$ – інтегровна на $\left[t_0, T\right]$. Унаслідок *третього критерію Дарбу інтегровності функції* (теореми 1.8),

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\ \Delta t_i = 0\,.$$

Таким чином,

$$0\le \lim_{d\to 0}\left||P|-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2+(\psi'(\alpha_i))^2}\,\Delta t_i\right|\le \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(\psi')}\ \Delta t_i \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 0\le\left|\lim_{d\to 0}|P|-\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt\right|\le 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \exists |L|=\sup\left\{|P|\right\}=\lim_{d\to 0}|P|=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.\ \blacksquare$$

Зауваження 1.8. Існують неспрямлювані криві. Розглянути самостійно ✍ відомий приклад [**3**, с. 462–467] неспрямлюваної зімкненої кривої**!**

Зауваження 1.9. Якщо крива є параметризованою рівняннями

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad t\in\left[t_0,T\right],$$

а функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $\left[t_0,T\right]$, то розіб’ємо її на прості ділянки $L_i=[M_{i-1},M_i]$ і застосуємо доведену теорему до кожної з них:

$$|L_i|=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Отримаємо суму інтегралів $\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$, потім застосуємо *властивість адитивності інтеграла*:

$$\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt\,,$$

одержимо, що загальна довжина кривої буде обчислена як $|L|=\sum_{i=1}^{n}|L_i|=\int_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$. Тобто *у випадку параметризовної кривої,* *де функції* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *– неперервно диференційовні на* $\left[t_0, T\right]$, *для обчислення її довжини використовується та сама формула, що й у останній теоремі*:

$$|L| = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt\,.$$

Іноді цю формулу записують інакше:

$$|L| = \int_{t_0}^{T} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\,.$$

З останньої формули легко знайти довжину кривої, що визначається **явно заданою**, неперервно диференційовною на $[a,b]$ функцією $y = f(x)$. Поклавши в цій формулі $t = x,\ \ y(t) = f(x)$, отримаємо

$$\boxed{|L| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad \text{або} \quad |L| = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}$$

Визначимо довжину дуги кривої, **заданої в полярній системі координат**, тобто $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, функція $\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$, тоді $\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ – параметризація кривої, $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Маємо:

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2 = \underline{(\rho')^2\cos^2\varphi} -$$

$$-2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \underline{\underline{\rho^2\sin^2\varphi}} + \underline{(\rho')^2\sin^2\varphi} + 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \underline{\underline{\rho^2\cos^2\varphi}} = \rho^2 + (\rho')^2.$$

Тому

$$\boxed{|L| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi}$$

Таким чином, ми отримали **формули довжини кривої** для різних випадків її задання. Наведемо їх у вигляді таблиці:

гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in[t_0, T]$ ($\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[t_0, T]$)	$\lvert L\rvert = \int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}\,dt = \int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt;$
гладка крива задана явно: $y=f(x)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$	$\lvert L\rvert=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx;$
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$	$\lvert L\rvert=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$

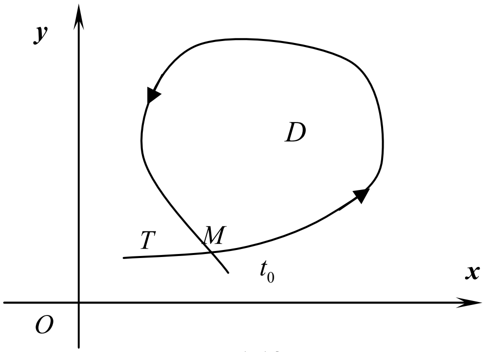


Рис. 1.12.

Зауваження 1.10. Нехай $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in\left[t_0, T\right]$ – зімкнена крива. Під *додатнім напрямом оббігу* параметрично заданої зімкненої кривої розуміють такий напрям, що при оббігу по кривій область, яку вона обмежує, залишається зліва. Це відповідає оббігу проти годинникової стрілки (див. рис. 1.12).

2. Диференціал дуги

Нехай $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t\in\left[t_0, T\right]$ – проста гладка крива, тоді $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $\left[t_0, T\right]$. Розбиття відрізка $\left[t_0, T\right]$:

$$t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_n=T\,.$$

Довжина дуги, що відповідає відрізкові розбиття $[t_{i-1}, t_i]$:

$$|L_i| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt\ .$$

Якщо $t \in [t_0, T]$, то $|L(t)| = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$ – інтеграл із змінною верхньою межею, підінтегральна функція є неперервною на $[t_0, T]$, тому, за *властивістю 2 інтеграла із змінної верхньою межею*, функція $|L(t)|$ – диференційовна на $[t_0, T]$, крім того, $|L(t)|' = \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}$. Звідси

$$d|L(t)| = \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt = \sqrt{(\varphi_t' dt)^2 + (\psi_t' dt)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ .$$

Зазвичай знак «$|...|$» опускають. Вираз

$$\boxed{dL(t) = \sqrt{(d(x))^2 + (d(y))^2}}$$

називають *диференціалом дуги*. Крім того,

$$dL(t_{i-1}) \approx L(t_i) - L(t_{i-1}) = L_{[t_i, t_{i-1}]} = |L_i|\,,$$

тому має місце наближена формула:

$$|L_i| \approx \sqrt{(d(x))^2 + (d(y))^2}\, \Delta t_i\ .$$

Випишемо також **формули для обчислення диференціала дуги**:

гладка крива задана параметрично $\left\| \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \right\|$:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt\ ;$$

гладка крива задана явно $\| y = f(x) \|$:

$$ds = \sqrt{1 + (y_x')^2}\, dx\ ;$$

гладка крива задана в полярній системі координат $\| \rho = \rho(\varphi) \|$:

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\, d\varphi$$

Розглянемо просторову просту параметризовану криву:

$$L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t\in\left[t_0, T\right], \\ z = z(t), \end{cases}$$

де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – функції, неперервно диференційовні на $\left[t_0, T\right]$. Тоді

$$\left|L^{(3)}\right| = \int_{t_0}^{T}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\,dt,$$

$$d(L^{(3)}) = \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

3. Обчислення площ за допомогою інтегралів

🗁 **Означення 1.23**. *Обмеженою множиною* на площині $\mathbb{R}^2$ називають множину на $\mathbb{R}^2$, яку можна помістити всередину деякого круга.

🗁 **Означення 1.24**. ε*-околом* точки (x_0, y_0) називають відкритий круг з центром в точці (x_0, y_0) радіуса ε, а саме:

$$B_\varepsilon\left(x_0, y_0\right) = \left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\right\}.$$

☝ 🗁**Означення 1.25**. Точку $M_0\left(x_{0,}y_0\right)$ називають *межовою точкою множини* $D\subset\mathbb{R}^2$, якщо в будь-якому її ε-околі містяться як точки, що належать множині D, так і точки, що їй не належать, тобто

$$\forall\varepsilon>0\left(B_\varepsilon\left(x_0, y_0\right)\bigcap D\neq\varnothing\wedge B_\varepsilon\left(x_0, y_0\right)\bigcap(\mathbb{R}^2\setminus D)\neq\varnothing\right).$$

🗁 **Означення 1.26**. Множину всіх межових точок множини D називають *межею* цієї множини (позначення: $\partial(D)=\Gamma$).

☝ 🗁**Означення 1.27**. Точку $M_0\left(x_{0,}y_0\right)$ називають *граничною точкою множини* D, якщо в будь-якому її ε-околі міститься нескінченна кількість точок, що належать області D, тобто

$$\forall\varepsilon>0\ B_\varepsilon\left(x_0, y_0\right)\cap D - \text{нескінченна множина.}$$

☝ 🗁**Означення 1.28**. Множину $D\subset\mathbb{R}^2$ називають *замкненою*, якщо вона містить усі свої граничні точки.

🗁 **Означення 1.29**. *Плоскою фігурою* або *областю* на площині $\mathbb{R}^2$ називають обмежену замкнену множину на площині.

Якщо область $D \subset \mathbb{R}^2$ являє собою множину, обмежену скінченною кількістю неперервних кривих, то її межею буде об'єднання кривих, що її обмежують. В загальному випадку межа області може мати дуже своєрідну форму. Наприклад, множина точок квадрату $[0,1]^2$ з раціональними координатами має межу, яка збігається з квадратом $[0,1]^2$.

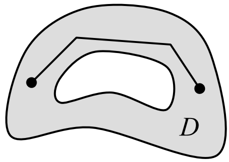


Рис. 1.13.

🗁 **Означення 1.30**. Множину $D \subset \mathbb{R}^2$ називають *зв'язною*, якщо будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка цілком належить множині D (див. рис. 1.13).

🗁 **Означення 1.31**. *Многокутною фігурою* або просто *многокутником* називають фігуру (не обов'язково зв'язну), обмежену скінченною кількістю замкнених ламаних.

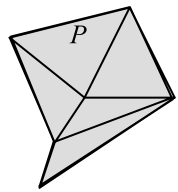


Рис. 1.14.

Площа многокутника P може бути знайдена шляхом підсумовування площ трикутників, на які він розбивається (рис. 1.14). Оскільки площу трикутника ми можемо обчислити, то будемо вважати, що площу многокутника ми завжди можемо визначити. Площу многокутника P будемо позначати $S(P)$.

Навколо фігури $D \subset \mathbb{R}^2$ можна описати многокутник *A*, тобто помістити фігуру *D* всередину многокутника *A*. Також можна вписати многокутник *B,* тобто помістити многокутник *B* всередину фігури *D* (рис. 1.15). Тоді $B \subset D \subset A$.

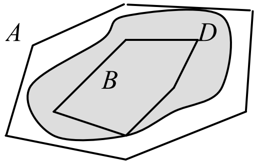


Рис. 1.15.

Розглянемо множини

$\tilde{\mathrm{A}} = \{A$ – описаний навколо D многокутник$\}$,

$\tilde{\mathrm{B}} = \{B$ – вписаний в D многокутник$\}$.

Множина $\{ S(A), A \in \tilde{\mathrm{A}} \}$ обмежена знизу будь-яким значенням $S(B), B \in \tilde{\mathrm{B}}$. Множина $\{ S(B), B \in \tilde{\mathrm{B}} \}$

обмежена зверху будь-яким значенням $S(A),\ A \in \tilde{A}$. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \inf\{S(A)\} = \underline{I} \ \text{– верхня площа } D, \\ \exists \sup\{S(B)\} = \overline{I} \ \text{– нижня площа } D \end{array}}$$

Оскільки $B \subset D \subset A$, то $S(B) \le S(A)$. За означенням точних меж

$$S(B) \le \overline{I}, \quad S(A) \ge \underline{I}\,.$$

Доведення того факту, що $\overline{I} \le \underline{I}$, здійснюється аналогічно доведенню нерівності $I_* \le I^*$ для верхнього й нижнього інтегралів Дарбу (див. *властивість 4* в §2, п. 3 цього розділу). Таким чином,

$$S(B) \le \overline{I} \le \underline{I} \le S(A)\,. \tag{1.31}$$

☝ 🗁 **Означення 1.32**. Плоску фігуру D називають *квадровною*, якщо $\overline{I} = \underline{I} = I$, а значення I називають *площею фігури* D і позначають $S(D)$.

☝ **Теорема 1.18** (*перший критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D є квадровною тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists A \in \tilde{A} \wedge \exists B \in \tilde{B}):\ \big(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon\big)\,.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай D – квадровна

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \overline{I} = \underline{I} = I. \\ \sup\{S(B)\} = \overline{I} \Leftrightarrow \underline{\underline{\forall \varepsilon > 0 \exists B \in \tilde{B}}} : \overline{I} - \dfrac{\varepsilon}{2} < S(B) \le \overline{I}; \\ \inf\{S(A)\} = \underline{I} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \underline{\underline{\exists A \in \tilde{A}}} : \underline{I} \le S(B) < \underline{I} + \dfrac{\varepsilon}{2}; \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ I - \frac{\varepsilon}{2} < S(B) \le I \le S(A) < I + \frac{\varepsilon}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{S(A) - S(B) < \varepsilon.}}$$

Окрім того, за побудовою $\underline{\underline{A \supset D \supset B}}$.

Розглянемо висловлювання, що утворюється з підкреслених:

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists A \in \tilde{A} \wedge \exists B \in \tilde{B}):\big(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon\big)\,.$$

Це й відповідає тому, що потрібно довести в цій частині.

Достатність.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Дано: } \forall\varepsilon>0\ (\exists A\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B\in\tilde{\mathrm{B}}): \\ \quad \left(A\supset D\supset B \quad \wedge \quad S(A)-S(B)<\varepsilon\right). \\ \text{Із } (1.31)\Rightarrow\ S(B)\le\overline{I}\le\underline{I}\le S(A). \end{array}\right\}\Rightarrow \quad \left(\underline{I}-\overline{I}<\varepsilon\ \forall\varepsilon>0\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow\quad \underline{I}=\overline{I}\quad\Rightarrow\ D-$ квадровна. ■

Теорема 1.18 а) (*узагальнений перший критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D є квадровною тоді й лише тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P \text{ і } Q-\text{квадровні фігури}:\left(P\supset D\supset Q \ \wedge\ S(P)-S(Q)<\varepsilon\right).$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $D-$ квадровна, тоді, за першим критерієм квадровності,

$$\forall\varepsilon>0\ (\exists A\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A\supset D\supset B \quad\wedge\quad S(A)-S(B)<\varepsilon\right).$$

Тому, якщо обрати $P=A$, а $Q=B$, то, зважаючи на квадровність многокутників, матимемо:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists P \text{ і } Q-\text{квадровні фігури}:\left(P\supset D\supset Q \quad\wedge\quad S(P)-S(Q)<\varepsilon\right).$$

Достатність. Нехай

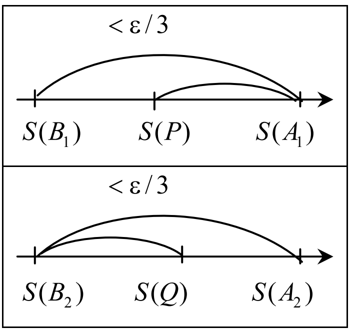
$$\forall\varepsilon>0\ \exists P \text{ і } Q-\text{квадровні фігури}:\left(P\supset D\supset Q \quad\wedge\quad S(P)-S(Q)<\varepsilon/3\right).$$

Оскільки P і $Q-$квадровні фігури, то, за першим критерієм квадровності,

$$\forall\varepsilon>0\ (\exists A_1\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B_1\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A_1\supset P\supset B_1 \quad\wedge\quad S(A_1)-S(B_1)<\varepsilon/3\right),$$

$$\forall\varepsilon>0\ (\exists A_2\in\tilde{\mathrm{A}}\wedge\exists B_2\in\tilde{\mathrm{B}}):\left(A_2\supset Q\supset B_2 \quad\wedge\quad S(A_2)-S(B_2)<\varepsilon/3\right).$$

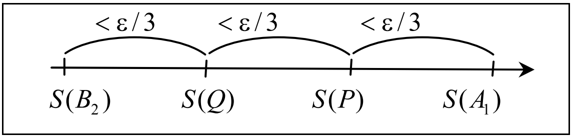
Тоді



$$\left.\begin{array}{l} S(A_1)\supset S(P)\supset S(B_1), \\ S(A_1)-S(B_1)<\varepsilon/3, \end{array}\right\}\Rightarrow S(A_1)-S(P)<\varepsilon/3,$$

$$\left.\begin{array}{l} S(A_2)\supset S(Q)\supset S(B_2), \\ S(Q)-S(B_2)<\varepsilon/3, \end{array}\right\}\Rightarrow S(Q)-S(B_2)<\varepsilon/3.$$

Звідки



$$\left.\begin{array}{l} A_1 \supset P \supset D \supset Q \supset B_2, \\ S(A_1) - S(P) < \varepsilon/3, \\ S(P) - S(Q) < \varepsilon/3, \\ S(Q) - S(B_2) < \varepsilon/3, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A_1 \supset D \supset B_2, \\ S(A_1) - S(B_2) < \varepsilon. \end{cases}$$

Отже, маємо:

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists A_1 \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B_2 \in \tilde{\mathrm{B}}) : \big(A_1 \supset D \supset B_2 \quad \wedge \quad S(A_1) - S(B_2) < \varepsilon\big),$$

це означає (за першим критерієм квадровності), що область D – квадровна. ■

🗁 **Означення 1.33.** Кажуть, що множина Г *має площу нуль* (тобто $S(\Gamma) = 0$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ – многокутник: } P \supset \Gamma \text{ (} P \text{ покриває } \Gamma) \wedge S(P) < \varepsilon .$$

☝ **Теорема 1.19** (*другий критерій квадровності плоскої фігури*). Фігура D – квадровна тоді й лише тоді, коли її межа має площу нуль, тобто $S(\partial(D)) = 0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай D – квадровна $\Rightarrow$ (перший критерій квадровності) $\underline{\forall \varepsilon > 0}\left(\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}\right) : A \supset D \supset B \quad \wedge \quad S(A) - S(B) < \varepsilon$.

Тоді:

$B \subset D \subset A \ \Rightarrow \ \partial D = \Gamma \subset (A \setminus B)$;

$\left(\underline{(A \setminus B) = \mathrm{P}} \ \wedge \ S(A) - S(B) < \varepsilon\right) \ \Rightarrow \ \underline{S(P)} = S(A \setminus B) = S(A) - S(B) \underline{< \varepsilon}$.

Підкреслена однією рискою частина утворює висловлювання:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ – многокутник: } (P \supset \Gamma \ \wedge S(P) < \varepsilon),$$

це і означає, що $S(\partial(D)) = 0$.

Достатність.

Нехай $\partial D = \Gamma :\ S(\Gamma) = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\forall \varepsilon > 0}}\, \exists P \supset \Gamma :\ S(\mathrm{P}) < \varepsilon$.

Многокутник $\underline{\underline{B \in \tilde{\mathrm{B}}}}$ утворюється як множина точок, що лежать в непокритій многокутником P області D, а многокутник $A \in \tilde{\mathrm{A}}$ – як $\underline{\underline{A = B \bigcup P}}$, тоді $A \supset D \supset B$, $A \setminus B = P$. Звідки маємо

$$S(P) = \underline{\underline{S(A) - S(B) < \varepsilon}} .$$

Підкреслена двома рисками частина утворює висловлювання:

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}} \right):\ \left(A \supset D \supset B\ \wedge\ S(A) - S(B) < \varepsilon \right),$$

це і означає, що D – квадровна область. ■

🗁 **Означення 1.34.** Точку $M_0\left(x_{0,} y_0\right)$ називають *внутрішньою точкою множини* D, якщо вона належить цій множині разом із деяким своїм околом, тобто

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon\left(x_0, y_0\right) \subset D .$$

Теорема 1.20 *(адитивність площ квадровних фігур).* Якщо $\left\{D_i\right\}_{i=1}^n$ – множина квадровних плоских фігур, що не мають спільних внутрішніх точок, тоді множина $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ є квадровною фігурою, крім того, $S(D) = \sum_{i=1}^n S(D_i)$.

Доведення провести *самостійно* ✍ [**3**, с.451–452]**!** ■

Теорема 1.21. Якщо $f(x)$ – неперервна функція, $f(x) \geq 0$ на $\left[a,b\right]$, тоді криволінійна трапеція (див. рис. 1.1)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

є квадровною фігурою.

Доведення. Оскільки $f(x)$ – неперервна функція на $\left[a,b\right]$, то за *теоремою 1.9* функція $f(x)$ – інтегровна на $\left[a,b\right]$, тоді, за першим критерієм Дарбу,

$$\Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0}\ \exists \delta > 0 \forall R = \{x_k\} : d < \delta \Rightarrow \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon .$$

Із геометричної інтерпретації сум Дарбу випливає, що $\overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$ – площа східчастої фігури, що містить у собі область D (див. рис. 1.4). Оберемо цією (східчастою) фігурою многокутник $A = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [0, M_k]$, тоді $\underline{A \in \tilde{\text{A}}}$, $\underline{A \supset D}$ і $\overline{S} = S(A)$. Аналогічно будуємо многокутник $\underline{B \subset D}$: $B = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [0, m_k]$, $S(B) = \underline{S}$, $\underline{B \in \tilde{\text{B}}}$. Тоді $\underline{S(A) - S(B) < \varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ із підкреслених висловлювань і першого критерію квадровності приходимо до висновку про те, що криволінійна трапеція D – квадровна фігура. ■

Наслідок 1.6. Графік неперервної невід'ємної на $[a, b]$ функції $f(x)$ є множиною площі нуль.

Доведення. Із доведення *теореми 1.20* випливає, що за многокутник, що покриває графік неперервної невід'ємної функції, можна обрати $P = A \setminus B$ (див. також рис. 1.4). В загальному випадку функції, що приймає значення різних знаків, за шуканий потрібно обрати многокутник

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \times [m_k, M_k].$$

Доведіть це ✍! ■

Теорема 1.22. Площа криволінійної трапеції D обчислюється за формулою

$$\boxed{S(D) = \int_a^b f(x)dx}$$

Доведення. Внаслідок попередньої теореми, криволінійна трапеція $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ – квадровна фігура, а із доведення цієї теореми випливає, що:

1) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R = \{x_k\} \;\; d < \delta \Rightarrow \overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$,

2) існують східчасті фігури A і B, для яких суми Дарбу дорівнюють $\overline{S} = S(A), \quad \underline{S} = S(B)$.

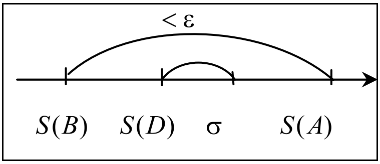
Тому

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R \quad d < \delta \; \Rightarrow \; \overline{S} - \underline{S} = S(A) - S(B) < \varepsilon .$$

За умовою $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, тому (*за теоремою 1.9*) інтегровна на $[a,b]$, тобто

$$\exists \int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sigma . \tag{1.32}$$

Зафіксуємо розбиття R з діаметром $d < \delta$. Оскільки із (1.18) $\forall P \;\; \underline{S} \le \sigma \le \overline{S}$ і (за доведенням) $\overline{S} = S(A), \quad \underline{S} = S(B)$, то $S(B) \le \sigma \le S(A)$. Крім того, D – квадровна фігура, тому (за означенням) $\overline{I} = \underline{I} = S(D)$ і $S(B) \le S(D) \le S(A)$. Отже, для будь-якого вибору проміжних точок, пов'язаних із розбиттям R, матимемо:



$$\left. \begin{aligned} & S(B) \le \sigma \le S(A) , \\ & S(B) \le S(D) \le S(A) , \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left| \sigma - S(D) \right| < \varepsilon .$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall R \;\; d < \delta \Rightarrow \left| \sigma - S(D) \right| < \varepsilon$ для будь-якого вибору проміжних точок. Це означає, що $\lim\limits_{d \to 0} \sigma = S(D)$. З урахуванням (1.32) отримаємо:

$$S(D) = \int_a^b f(x)dx . \; \blacksquare$$

☝ **Наслідок 1.7** *(геометричний зміст визначеного інтеграла Рімана)***.** Визначений інтеграл Рімана від неперервної невід'ємної на $\left[a,b\right]$ функції $f(x)$ дорівнює площі криволінійної трапеції D, утвореної графіком цієї функції, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$, тобто

$$\boxed{S(D) = \int_a^b f(x)dx}$$

Зауваження 1.11. У означенні криволінійної трапеції припускається невід'ємність функції. Якщо функція може приймати значення різних знаків, то потрібно область, яку вона обмежує, розбити на ділянки сталості знака функції, застосувати *властивість адитивності площі* й просумувати площі отриманих ділянок. Площу тієї ділянки, що відповідає від'ємним значенням функції, потрібно обчислювати, ставлячи перед інтегралом знак «–». Наприклад, у випадку функції, графік якої наведено на рис. 1.16, площа заштрихованої фігури дорівнює

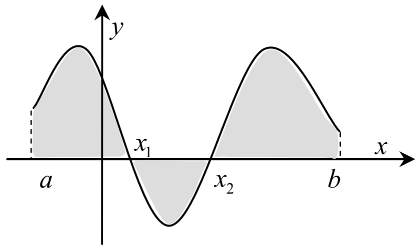


Рис. 1.16.

$$S(D)=\int\limits_a^{x_1} f(x)dx-\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\int\limits_{x_2}^{b} f(x)dx=\int\limits_a^b |\,f(x)\,|\,dx.$$

Зауваження 1.12. Площа плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, де $f_2(x)\le f_1(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ (рис. 1.17), обчислюється за формулою

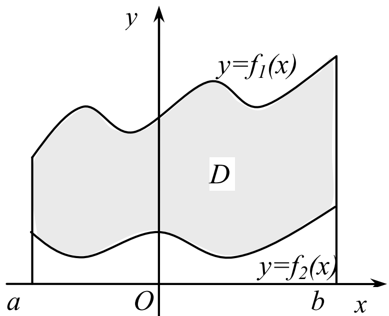


Рис. 1.17.

$$\boxed{S=\int\limits_a^b \big(f_1(x)-f_2(x)\big)dx\,.}$$

(*доведіть* ✍**!)**

Випадок полярних координат. Нехай φ – полярний кут, а ρ – полярна відстань, тоді $\rho\ge 0$,

$\rho=const=\rho_0$ – коло радіуса ρ_0,

$\varphi = const = \varphi_0$ – промінь, що виходить із початку координат і утворює кут φ_0 із полярною віссю.

Розглянемо функцію $\rho = R$ у полярній системі координат, графіком якої є коло. В декартовій системі координат ця функція представляється двома неперервними функціями $f_+(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ при $x \in [-R, R]$ і $f_-(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ при $x \in [-R, R]$. Тому коло є множиною площі нуль, а, за другим критерієм квадровності, круг – квадровна область.

Розглянемо круговий сектор, обмежений дугою кола $\rho = R$ і променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$. Дуга кола й похилі прямі мають площу нуль (доведіть це для похилих прямих ✍!), тому круговий сектор має межу площі нуль, отже, він є квадровною фігурою.

Скінченне об'єднання кругових секторів (за *властивістю адитивності*) утворює квадровну область.

Розглянемо область D в полярній системі координат, яка обмежена графіком неперервної функції $\rho = \rho(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$ і променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ (див. рис. 1.18):

$$D = \{(\rho, \varphi): \quad \alpha \le \varphi \le \beta \ \wedge \ 0 \le \rho \le \rho(\varphi)\}.$$

Таку область називають *криволінійним сектором*.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha, \beta]$ скінченною кількістю точок:

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta.$$

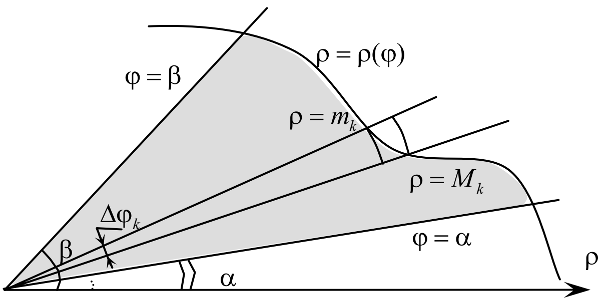


Рис.1.18.

Завдяки неперервності функції $\rho(\varphi)$ і другій теоремі Вейєрштрасса [**3**, с.188; **4**, с.176]

$$m_k = \inf_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi) = \min_{[\varphi_{k-1}, \varphi_k]} \rho(\varphi).$$

Крива $\rho = m_k$ є колом

радіусу m_k. Знайдемо площу кругового сектора, що утворюється променями $\varphi = \varphi_{k-1}$, $\varphi = \varphi_k$ і колом $\rho = m_k$:

$$S^{(k\}}_{\text{сектора}} = \frac{1}{2} \cdot m_k^2 \cdot \Delta\varphi_k \, .$$

Аналогічно зробимо після знаходження $M_k = \sup\limits_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]} \rho(\varphi) = \max\limits_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]} \rho(\varphi)$.

Утворимо фігури $B \subset D$ і $A \supset D$, повторивши зазначену процедуру для всіх $k = 1, 2, ..., n$. Ці фігури, як скінченне об'єднання кругових секторів, є квадровними областями. Завдяки *властивості адитивності*, площі фігур A і B виражаються формулами:

$$S(A) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot M_k{}^2 \Delta\varphi_k \, , \qquad S(B) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_k{}^2 \Delta\varphi_k \, ,$$

які є відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на $[\alpha,\beta]$. Ця функція є неперервною, тому, за *теоремою 1.9*, – інтегровною на $[\alpha,\beta]$. Отже,

1) різницю $S(A) - S(B)$ можна зробити як завгодно малою; застосовуючи узагальнений перший критерій квадровності, отримаємо квадровність області D;
2) $$\begin{array}{l} S(B) \le S(D) \le S(A) \\ \quad \searrow \quad \Downarrow \quad \swarrow \; d = \max\limits_k \Delta\varphi_k \to 0 \quad \Rightarrow \quad S(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \, . \\ \quad \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi \end{array}$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1.23. Криволінійний сектор OAB (рис. 1.19), обмежений графіком неперервної функції $\rho = \rho(\varphi)$ <u>в полярній системі координат</u> і двома півпрямими $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), є квадровною областю, площа якого дорівнює

$$\boxed{☝ \; S(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi}$$

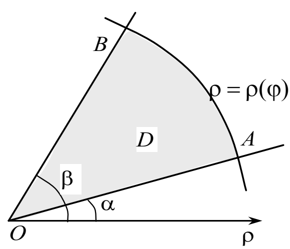


Рис. 1.19.

Зауваження 1.13. У випадку області, обмеженої зімкненою параметризовною кривою $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, параметризація якої задає додатний напрям обходу (див. *зауваження 1.10* і рис.1.12), площа області, яку вона обмежує, дорівнює

$$\boxed{S = -\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt}$$

(у припущенні, що $\varphi(t)$ неперервна, а $\psi(t)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$).

Виведення цієї формули виходить за межі тематики цього посібника.

4. Обчислення об'ємів тіл обертання.

Аналогічно плоскому випадку вводиться поняття тіла в $\mathbb{R}^3$.

Обмеженою множиною в просторі $\mathbb{R}^3$ називають множину, яку можна помістити всередину деякої кулі.

ε*-околом* точки (x_0, y_0, z_0) називають відкриту кулю з центром в цій точці радіуса ε, а саме:

$$B_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2\right\}.$$

Поняття межової, граничної і внутрішньої точки $M_0(x_{0,} y_0, z_0)$ області $D \subset \mathbb{R}^3$, межі цієї множини, замкненої множини в просторі $\mathbb{R}^3$ вводяться аналогічно плоскому випадку.

🗁 **Означення 1.35**. *Тілом* або *областю* в просторі $\mathbb{R}^3$ називають обмежену замкнену множину в просторі.

🗁 **Означення 1.36**. *Многогранною фігурою* або просто *многогранником* називають фігуру (не обов'язково зв'язну), обмежену в просторі скінченною кількістю многокутників.

Для обчислення об'єму многогранника P його можна розбити на скінченну кількість пірамід, в основі яких лежать трикутники, і просумувати їх об'єми. Тому будемо вважати, що об'єм многогранника ми завжди можемо визначити. Об'єм многогранника P будемо позначати $V(P)$.

Навколо тіла $D \subset \mathbb{R}^3$ можна описати многогранник *A*, тобто помістити тіло *D* всередину многогранника *A*. Також можна вписати многогранник *B,* тобто помістити многогранник *B* всередину тіла *D*. Тоді $B \subset D \subset A$.

Розглянемо множини

$\tilde{\mathrm{A}} = \{A$ – описаний навколо D многогранник$\}$,

$\tilde{\mathrm{B}} = \{B$ – вписаний в D многогранник$\}$.

Множина $\{V(A), A \in \tilde{\mathrm{A}}\}$ обмежена знизу будь-яким значенням $V(B), B \in \tilde{\mathrm{B}}$. Множина $\{V(B), B \in \tilde{\mathrm{B}}\}$ обмежена зверху будь-яким значенням $V(A), A \in \tilde{\mathrm{A}}$. Тому

$$\boxed{\begin{array}{l} \exists \inf\{V(A)\} = \underline{V} \text{ – верхній об'єм тіла } D, \\ \exists \sup\{V(B)\} = \overline{V} \text{ – нижній об'єм тіла } D \end{array}}$$

Аналогічно плоскому випадку для многогранників $A \in \tilde{\mathrm{A}}$ і $B \in \tilde{\mathrm{B}}$ та довільних тіл D в просторі (тут $B \subset D \subset A$), мають місце нерівності

$$V(B) \le \overline{V} \le \underline{V} \le V(A).$$

☝ 🗀**Означення 1.37**. Тіло D називають *кубовним*, якщо $\overline{V} = \underline{V} = V$, а значення V називають *об'ємом тіла* D і позначають $V(D)$.

☝ **Теорема 1.24** (*перший критерій кубовності тіла*). Тіло D є кубовним тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ (\exists A \in \tilde{\mathrm{A}} \wedge \exists B \in \tilde{\mathrm{B}}) : \left(A \supset D \supset B \quad \wedge \quad V(A) - V(B) < \varepsilon \right).$$

Доведення здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

Теорема 1.24 а) (*узагальнений перший критерій кубовності тіла*). Тіло D є кубовним тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ і } Q \text{ – кубовні тіла} : \left(P \supset D \supset Q \quad \wedge \quad V(P) - V(Q) < \varepsilon \right).$$

Доведення здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

🗁 **Означення 1.38**. Кажуть, що множина Γ *має об'єм нуль* (тобто $V(\Gamma) = 0$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P \text{ – многогранник: } P \supset \Gamma \ (P \text{ покриває } \Gamma) \wedge V(P) < \varepsilon .$$

Теорема 1.25 (*другий критерій кубовності тіла*). Фігура D – кубовна тоді й лише тоді, коли її межа має об'єм нуль, тобто $V(\partial(D)) = 0$.

Доведення. Здійснюється аналогічно плоскому випадку ■

Також має місце [**6**, с. 203] наступна теорема.

Теорема 1.26 *(адитивність об'ємів кубовних тіл).* Якщо $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ – множина кубовних тіл, що не мають спільних внутрішніх точок, тоді множина $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ є кубовним тілом, крім того $V(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(D_i)$.

🗁 **Означення 1.39**. *Циліндром* називають тіло, обмежене поверхнею, що має твірну, паралельну деякій осі, а також двома площинами α_1 і α_2, які перпендикулярні цій твірній.

Відстань між паралельними площинами α_1 і α_2 називають *висотою циліндра.* При перетині кожної з таких площин циліндричною поверхнею утворюється зімкнена крива на цій площині, яка обмежує плоску фігуру. Такі фігури на двох паралельних площинах рівні. Їх називають *основами циліндра*.

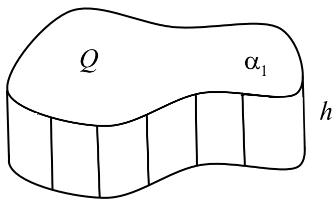


Рис. 1.20.

Теорема 1.27. Якщо основа $Q \subset \alpha_1$ циліндра E (див. рис. 1.20) є квадровною фігурою, то циліндр є кубовним тілом, причому $V(E) = S(Q) \cdot H$

Доведення. Нехай h – висота циліндра. Оскільки $Q \subset \alpha_1$ є квадровною фігурою, то

$$\underline{\forall \varepsilon > 0}\ \exists A \text{ і } B - \text{ многокутники на } \alpha_1 : \left(A \supset Q \supset B \ \wedge \ S(A) - S(B) < \varepsilon / h \right).$$

Розглянемо прямі призми $\underline{P_1}$ і $\underline{P_2}$ з основами A і B відповідно в площині α_1 і висотою h такі, що $\underline{P_1 \supset E \supset P_2}$. Тоді їх об'єми дорівнюють

$$V(P_1) = S(A)\cdot h, \quad V(P_2) = S(B)\cdot h\,,$$

а різниця об'ємів –

$$\underline{V(P_1) - V(P_2)} = (S(A) - S(B))\cdot h \underline{\leq} \frac{\varepsilon}{h}\cdot h = \underline{\varepsilon}\,.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \left(\exists P_1 \in \tilde{\text{A}} \wedge \exists P_2 \in \tilde{\text{B}}\right) : \left(P_1 \supset E \supset P_2 \wedge\ V(P_1) - V(P_2) < \varepsilon\right).$$

Це означає (за першим критерієм) кубовність циліндра E. Тому

$$\exists V(E) = \inf_{P_1 \supset E} V(P_1) = \inf_{A \supset Q} S(A)\cdot h\,.$$

За означенням площі квадровної фігури $S(Q) = \inf\limits_{A \supset Q} S(A)$. Таким чином, $V(E) = S(Q)\cdot h$. ■

🗁 **Означення 1.40**. Тіло називають *східчастим,* якщо воно є скінченним об'єднанням таких циліндрів, що верхня основа попереднього циліндра лежить в тій самій площині, що і нижня основа наступного (див. рис. 1.21).

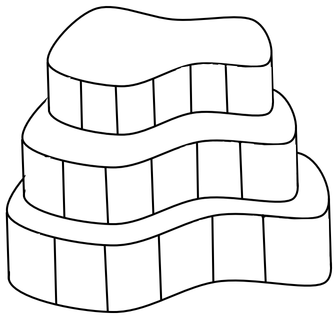


Рис. 1.21.

Наслідком останньої теореми про кубовність циліндра і властивості адитивності є такий

Наслідок 1.8. Східчасте тіло є кубовним, якщо кожен циліндр, що його утворює, має квадровну основу.

☝ **Теорема 1.28.** Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $\left[a, b\right]$) навколо осі Ox, то це тіло T є кубовним, а його об'єм дорівнює

$$\boxed{☝\ V_x = V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка [a,b]:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\ .$$

Оскільки $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.188; **4**, с.176]

$$M_k = \sup_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]} \rho(\varphi) == \max_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]} \rho(\varphi)\,, \quad m_k = \inf_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]} \rho(\varphi) = \min_{[\varphi_{k-1},\varphi_k]} \rho(\varphi)\ .$$

Утворимо східчасті фігури на площині xOy :

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \left[x_{k-1}, x_k\right] \times \left[0, M_k\right] \text{ і } B = \bigcup_{k=1}^{n} \left[x_{k-1}, x_k\right] \times \left[0, m_k\right],$$

тоді $A \supset D \supset B$. При обертанні навколо осі абсцис цих фігур утворюються східчасті тіла T_1 і T_2, причому $T_1 \supset T \supset T_2$. Циліндри, що утворюються при обертанні прямокутників $\left[x_{k-1}, x_k\right] \times \left[0, M_k\right]$ і $\left[x_{k-1}, x_k\right] \times \left[0, m_k\right]$, зображено на рис. 1.22. Кожне з цих східчастих тіл T_1 і T_2 утворюється з кругових циліндрів; круг – квадровна область на площині, тому східчасте тіло є кубовним (за *наслідком 1.8*).

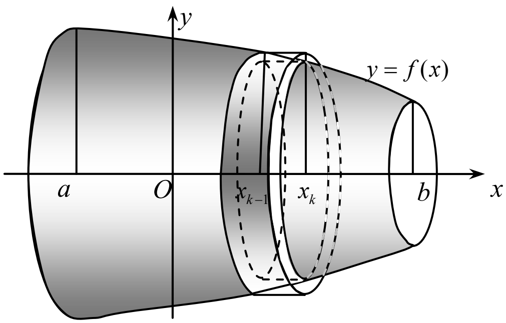


Рис. 1.22.

Об’єми утворених східчастих тіл

$$V(T_1) = \pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta x_k\ , \quad V(T_2) = \pi \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta x_k$$

є відповідно верхньою та нижньою сумами Дарбу для інтеграла $\pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Функція під знаком інтеграла є неперервною, тому за *теоремою 1.9* – інтегровною. Отже,

1) різницю $V(T_1)-V(T_2)$ можна зробити як завгодно малою; застосовуючи узагальнений перший критерій кубовності, отримаємо кубовність тіла T;

$$2)\quad \pi\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta x_k \le V(T) \le \pi\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta x_k$$

$$\searrow \qquad \Downarrow \qquad \swarrow \quad \text{при } d \to 0 \quad \blacksquare$$

$$\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Зауваження 1.14. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $0 \le f_2(x) \le f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (фігуру D див. на рис. 1.17), обчислюється за формулою (*доведіть* ✍**!)**

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b \left(f_1^2(x) - f_2^2(x) \right) dx}$$

Зауваження 1.15. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\},$$

де $f(x)$ – однозначна неперервна функція на $[a,b]$, дорівнює (*доведіть* ✍**!)**

$$\boxed{V_y = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)dx}$$

5. Площі поверхонь обертання

Розглянемо просту гладку, параметризовану рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T].$$

Тоді функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ є неперервно диференційовними на $[t_0, T]$, а крива є спрямлюваною (*за теоремою 1.17*). Крім того, припустимо, що

1° $\psi(t) \ge 0$ на $[t_0, T]$,

2° $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 \ne 0 \quad \forall t \in [t_0, T]$,

3° крива не має кратних точок, тому є простою кривою.

Розглянемо параметризацію довжиною дуги $s = S(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt, \quad t \in [t_0, T]$:

$$\begin{cases} x = \Phi(s), \\ y = \Psi(s), \end{cases} \quad s \in [0, |L|] \ ?$$

де $|L|$ – довжина усієї кривої.

Маємо:

1) $\psi(t)$ – неперервна на $[t_0, T]$;

2) $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$, тому за *властивістю 1 інтеграла із змінної верхньою межею* $s = S(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt$ – неперервна на $[t_0, T]$;

3) із припущення 3° випливає, що функція $s = S(t)$ є взаємно однозначною, а за побудовою цієї функції й припущенням 2°, вона є строго зростаючою на $[t_0, T]$; тому з теореми про неперервність оберненої функції (повторіть теорему [**3**, с. 161; **4**, с. 172]!) отримаємо існування й неперервність оберненої функції $t = S^{-1}(s)$ на $[0, |L|]$.

Звідси $\Psi(s) = \psi(S^{-1}(s))$ – неперервна на відрізку $[0, |L|]$ як складена.

Розглянемо розбиття кривої AB і розбиття множини значень параметру, що йому відповідає:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} A = M_0 & \prec & M_1 & \prec \ldots \prec & M_{i-1} & \prec & M_i & \prec \ldots \prec & M_{n-1} & \prec & M_n = B \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 = s_0 & < & s_1 & < \ldots < & s_{i-1} & < & s_i & < \ldots < & s_{n-1} & < & s_n = |L|. \end{array}$$

При сполученні точок M_i відрізками утвориться ламана (див. рис. 1.23).

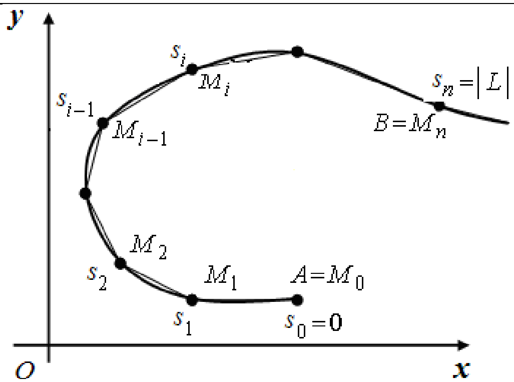


Рис. 1.23.

🗀**Означення 1.41.** *Площею поверхні обертання* ($P_{\text{поверхні}}$) будемо називати границю площ поверхонь, що утворені обертанням вписаних ламаних навколо осі Ox ($P_{\text{ламаної}}$) при прямуванні до нуля діаметра розбиття $d = \max\limits_i \Delta s_i \to 0$. Тобто

$$P_{\text{поверхні}} \overset{def}{=} \lim_{d \to 0} P_{\text{ламаної}}.$$

Позначення:

Δl_i – довжина прямолінійного відрізка $M_{i-1}M_i$;

Δs_i – довжина дуги кривої, що сполучає точки M_{i-1} *і* M_i;

$y_i = \Psi(s_i)$; $\quad y_{i-1} = \Psi(s_{i-1})$;

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = \Psi(s_i) - \Psi(s_{i-1})$.

Виведемо формулу для обчислення площі поверхні обертання ламаної навколо Ox. Маємо:

$$P_{\text{ламаної}} = \sum_{i=1}^{n} P_i,$$

де P_i – площа поверхні обертання відрізка $[M_{i-1}; M_i]$ навколо осі Ox, тобто P_i – площа поверхні зрізаного конуса. Тоді

$$P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta l_i = \pi \Delta l_i \left(y_i + y_i - \Delta y_i \right) = \pi \Delta l_i \left(2y_i - \Delta y_i \right);$$

$$P_{\text{ламаної}} = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, y_i - \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta l_i - \Delta s_i \right) y_i + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \, y_i - \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i .$$

Нехай

$$\alpha = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta l_i - \Delta s_i \right) y_i ; \quad \beta = \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i .$$

Доведемо, що $\lim\limits_{d \to 0} \alpha = \lim\limits_{d \to 0} \beta = 0$.

Розглянемо β:

$$\beta = \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \left[\Psi\left(s_i \right) - \Psi\left(s_{i-1} \right) \right] .$$

Із доведеного вище випливає, що $\Psi(s)$ – неперервна на відрізку $[0, |L|]$. Тому, за теоремою Кантора [**3**, с.192; **4**, с. 179], функція $\psi(s)$ – рівномірно неперервна на $[0, |L|]$, тобто

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 : \forall R = \{s_i\} : \; d = \max_i \left(s_i - s_{i-1} \right) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \, \Delta y_i \, \right| = \left| \Psi\left(s_i \right) - \Psi\left(s_{i-1} \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi |L|} .$$

Тоді

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \Delta y_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \left| \Delta y_i \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi |L|} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i}_{= |L_{\text{ламаної}}| \le |L|} \le \frac{\varepsilon}{2\pi |L|} \cdot |\, L \,| = \frac{\varepsilon}{2\pi} .$$

Отже,

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta_1 > 0 \; \forall R = \{s_i\} : \; d < \delta_1 \Rightarrow |\beta| < \pi \cdot \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Розглянемо $\alpha = 2\pi \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\Delta l_i - \Delta s_i \right) y_i$. Оскільки $\Psi(s)$ неперервна на $[0, |L|] \Rightarrow$ (за теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.188; **4**, с.176]) обмежена на $[0, |L|] \Rightarrow$

$$\exists\, K > 0:\ \left|\Psi(s)\right| = |y| \le K \quad \forall[0, |L|],$$

звідки

$$|\alpha| \le 2\pi\sum_{i=1}^{n}|\Delta l_i - \Delta s_i|\cdot y_i \le 2\pi K\cdot\sum_{i=1}^{n}(\Delta s_i - \Delta l_i) = 2\pi K\cdot\left(|L|_{\text{кривої}} - |L|_{\text{ламаної}}\right).$$

Оскільки крива є простою гладкою на $[0, |L|]$, то із доведення *теореми 1.17* випливає, що

$$|L|_{\text{кривої}} = \lim_{d\to 0}|L|_{\text{ламаної}} \Rightarrow$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0\ \forall R = \{s_i\}:\ d < \delta_2 \quad\Rightarrow\quad 0 \le |L|_{\text{кривої}} - |L|_{\text{ламаної}} < \frac{\varepsilon}{4\pi K},$$

звідки

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_2 > 0\ \forall R = \{s_i\}:\ d < \delta_2 \quad\Rightarrow\quad |\alpha| < 2\pi K\cdot\frac{\varepsilon}{4\pi K} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ при виборі діаметра розбиття меншим за $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} &P_{\text{ламаної}} = \alpha + 2\pi\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\, y_i - \beta;\\ &|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2};\quad |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left|P_{\text{ламаної}} - 2\pi\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i\, y_i\right| < \varepsilon,$$

тому

$$\lim_{d\to 0}P_{\text{ламаної}} = \lim_{d\to 0} 2\pi\sum_{i=1}^{n} y_i\,\Delta s_i.$$

Оскільки під знаком границі знаходиться сума, що є інтегральною сумою для функції $y = \psi(s)$ на відрізку $[0, |L|]$, то

$$\underline{P_{\text{поверхні}} = \lim_{d\to 0}P_{\text{ламаної}} = 2\pi\int_0^{|L|} y\, ds.}$$

Оскільки s – параметр довжини дуги кривої, то ds – диференціал дуги, тоді, скориставшись формулами обчислення диференціала дуги, отримаємо **формули для обчислення площ поверхонь обертання навколо осі абсцис** гладких кривих ($y \ge 0$) для різних випадків їх задання. Наведемо їх у вигляді таблиці:

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \lvert L \rvert]$ ($\Phi(s)$ і $\Psi(s)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[0, \lvert L \rvert]$, s – параметр довжини дуги)	$P_x = 2\pi \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$;
гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$ ($x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на відрізку $[t_0, T]$)	$P_x = 2\pi \cdot \int\limits_{t_0}^{T} y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt$;
гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диферентційовна на відрізку $[a, b]$	$P_x = 2\pi \cdot \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$;
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диферентційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$	$P_\rho = 2\pi \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\ \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\, d\varphi$.

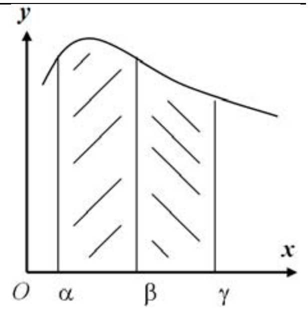
6. Схема застосування визначених інтегралів

Нехай необхідно знайти значення деякої величини Q , що залежить від $[a;b]$. Наприклад, як Q може бути $\lvert L \rvert, P_x, S$. Величина Q може бути геометричною, фізичною або іншою величиною.

Припущення на Q :

1) будь-якому відрізку $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ відповідає частина величини Q , тобто Q залежить від $[\alpha, \beta]$;
2) Q – адитивна функція відрізка, тобто

$$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in [a, b] \quad \alpha < \beta < \gamma \Rightarrow$$
$$Q_{[\alpha,\beta]} + Q_{[\beta,\gamma]} = Q_{[\alpha,\gamma]}.$$



$$S_{[\alpha,\beta]} + S_{[\beta,\gamma]} = S_{[\alpha,\gamma]}$$

Рис. 1.24.

На рис. 1.24 наочно показана властивість адитивності у випадку, коли Q є площею криволінійної трапеції.

Розглянемо $[x, x+\Delta x] \to \Delta Q$ – функцію відрізка $[x, x+\Delta x]$.

Мета: отримати наближену рівність $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$, де знак “$\approx$” слід розуміти так: ΔQ подається сумою, один із доданків якої $q(x)\cdot\Delta x$, а інші – нескінченно малі більш високого порядку мализни, ніж Δx . Тобто $q(x)\cdot\Delta x$ – головна лінійна частина величини ΔQ . Ось чому іноді замість ΔQ пишуть диференціал величини Q , тобто dQ .

Наприклад, при обчисленні площі поверхні обертання (див. попередній пункт) суму доданків, що відповідали i -му відрізку розбиття, можна обрати як ΔQ , тобто

$$\Delta Q = \Delta P_{\text{ламаної}} = 2\pi\cdot y(s)\cdot\Delta s + 2\pi\cdot\big(\Delta l - \Delta s\big)\cdot y(s) - \pi\cdot\Delta l\cdot\Delta y(s)\,.$$

Тоді ті доданки, що відповідали величинам α і β, – це $2\pi\cdot\big(\Delta l - \Delta s\big)\cdot y(s)$ і $\pi\cdot\Delta l\cdot\Delta y(s)$, відповідно, – мають більш високий порядок мализни, ніж Δs (доведіть це ✍!). Отже, $\Delta P_{\text{ламаної}} \approx 2\pi\cdot y(s)\cdot\Delta s$.

Схема застосування визначеного інтеграла

1) Розглянемо ΔQ, що відповідає $[x,\ x+\Delta x]$. Представляємо $\Delta Q \approx q(x)\cdot\Delta x$, де всі інші доданки величини ΔQ є нескінченно малими більш високого порядку мализни за Δx.
2) Якщо вважати, що за Δx виступають довжини відрізків розбиття Δx_i, то величині ΔQ буде відповідати ΔQ_i.
3) Якщо ми просумуємо ΔQ_i, то отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = Q_{[a,\,b]},$$

$$\sum_{i=1}^{n} q(x_i)\Delta x_i \approx Q_{[a,\,b]}.$$

4) Тоді після переходу до границі при $d \to 0$, одержимо точну рівність:

$$\int_a^b q(x)dx = Q_{[a,\,b]}.$$

Фактично, при застосування зазначеної схеми обмежуються першим пунктом схеми, після чого приходять до висновку про представлення величини $Q_{[a,\,b]}$ останнім інтегралом.

7. Статичні моменти й центр мас плоских кривих

Нехай на координатній площині задано систему матеріальних точок $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \ldots,$ $P_n(x_n, y_n)$ (рис.1.25) із відповідними масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Добутки $x_i m_i$ та $y_i m_i$ називають *статичними моментами матеріальної точки* P_i *відносно осей* Oy *та* Ox, а суми $\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ та $\sum_{i=1}^{n} y_i m_i$ – *статичними моментами заданої системи матеріальних точок відносно осей* Oy *та* Ox.

Центром мас системи матеріальних точок називають таку точку $(x_{ц.М.}, y_{ц.М.})$, що коли загальну масу системи помістити в неї, то отримаємо матеріальну точку, статичні моменти якої відносно осей Ox та Oy дорівнюватимуть статичним моментам даної системи.

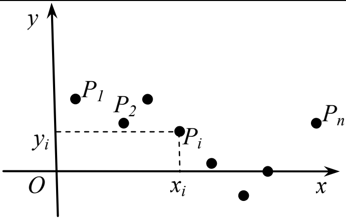


Рис. 1.25.

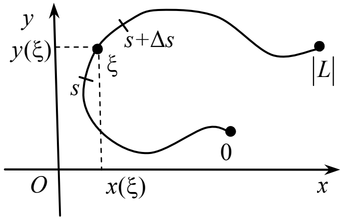


Рис. 1.26.

Якщо ж маси зосереджені не в окремих точках, а розташовані суцільно, заповнюючи криву або плоску фігуру, то в такому випадку для обчислення статичного моменту замість суми буде застосовано інтеграл.

Розглянемо матеріальну криву, тобто таку криву, вздовж якої розподілена деяка маса. Знайдемо її статичні моменти відносно координатних осей Ox та Oy (рис. 1.26). Позначимо їх відповідно K_x і K_y.

Нехай крива є однорідною, тобто її густина $\gamma = const$. Будемо вважати, що $\gamma = 1\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}}\right]$. Маса будь-якої ділянки кривої $[s, s+\Delta s]$ (s – параметр довжини дуги кривої) наближено дорівнює

$$\Delta m \approx \gamma \cdot \Delta s \ .$$

Тому після застосування зазначеної схеми отримаємо формулу для обчислення маси кривої:

$$m = \int_0^{|L|} \gamma\, ds = 1 \cdot \int_0^{|L|} ds = |L| \ .$$

В загальному випадку $\gamma(s) \neq const$, прийнявши $\Delta m \approx \gamma(\xi) \cdot \Delta s$, де ξ – довільно вибрана точка на $[s, s+\Delta s]$, отримаємо формулу

$$m = \int_0^{|L|} \gamma(s)\, ds \ .$$

Статичний момент ділянки однорідної кривої $[s, s+\Delta s]$ відносно осі абсцис наближено можна замінити на статичний момент точки s, що належить цій ділянці:

$$\Delta K_x \approx \Delta m \cdot y(s) = \Delta s \cdot y(s).$$

Тому після застосування зазначеної схеми отримаємо формулу для обчислення статичного моменту гладкої однорідної кривої відносно осі абсцис:

$$\boxed{K_x = \int_0^{|L|} y(s)\,ds}$$

Аналогічно, статичний момент такої кривої відносно осі ординат дорівнює

$$\boxed{K_y = \int_0^{|L|} x(s)\,ds}$$

В загальному випадку, коли $\gamma(s) \neq const$, використовується формула

$$\boxed{K_x = \int_0^{|L|} \gamma(s)\,y(s)\,ds, \quad K_y = \int_0^{|L|} \gamma(s)\,x(s)\,ds}$$

Оскільки s – параметр довжини дуги кривої, то ds – диференціал дуги, тоді, скориставшись формулами обчислення диференціала дуги, отримаємо **формули для обчислення статичних моментів плоских гладких однорідних кривих відносно осей координат**:

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \lvert L \rvert]$ (s – параметр довжини дуги)	$K_x = \int_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$, $K_y = \int_0^{\lvert L \rvert} x(s)\,ds$;
гладка крива, задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$	$K_x = \int_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$, $K_y = \int_{t_0}^{T} x(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt;$
гладка крива, задана явно: $y = f(x)$, $x \in [a,b]$	$K_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx,$ $K_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx;$

гладка крива, задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$	$K_\rho=\int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\,\sin\varphi\,\sqrt{\rho^2+(\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$

Центр мас матеріальної кривої означається аналогічно центру мас системи матеріальних точок.

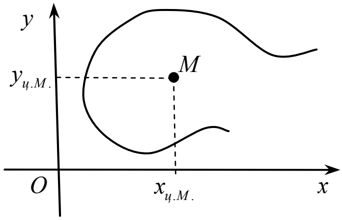


Рис. 1.27.

🗀**Означення 1.42**. *Центр мас кривої* – це точка $M(x_{ц.M.}, y_{ц.M.})$ на площині, в якій зосереджено масу, що дорівнює масі цієї кривої, а статичний момент цієї маси відносно Ox і Oy дорівнює статичному моменту цієї кривої відносно координатних осей (див. рис. 1.27).

За означенням і отриманими формулами маємо:

$$K_x^{(M)}=K_x^{(\text{кривої})};\quad K_y^{(M)}=K_y^{(\text{кривої})};$$

$$\left.\begin{array}{l} K_x^{(M)}=m_M\cdot y_M=m_{\text{кривої}}\cdot y_M\Rightarrow K_x^{ц.т.}=|L|\cdot y_{ц.M.} \\ K_x^{ц.т.}=K_x^{(\text{кривої})}=\int\limits_0^{|L|} y(s)\,ds \end{array}\right\}\Rightarrow |L|\cdot y_{ц.M.}=\int\limits_0^{|L|} y(s)\,ds\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow y_{ц.M.}=\frac{1}{|L|}\cdot\int\limits_0^{|L|} y(s)\,ds}.$$

Аналогічно

$$\boxed{x_{ц.M.}=\frac{1}{|L|}\cdot\int\limits_0^{|L|} x(s)\,ds}$$

В загальному випадку, коли густина маси кривої $\gamma(s)$ не є сталою, можна вивести формули

$$\boxed{x_{ц.M.}=\frac{\int\limits_0^{|L|}\gamma(s)\cdot x(s)\,ds}{\int\limits_0^{|L|}\gamma(s)\,ds},\quad y_{ц.M.}=\frac{\int\limits_0^{|L|}\gamma(s)\cdot y(s)\,ds}{\int\limits_0^{|L|}\gamma(s)\,ds}}$$

Оскільки s – параметр довжини дуги кривої, то **формули для обчислення координат центрів мас однорідних плоских гладких кривих** мають вигляд:

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, \lvert L \rvert]$ (s – параметр довжини дуги)	$x_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} x(s)\,ds$, $y_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$;
гладка крива, задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0, T]$	$x_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_{t_0}^{T} x(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$, $y_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_{t_0}^{T} y(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$;
гладка крива, задана явно: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$	$x_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$, $y_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$;
гладка крива, задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$	$x_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cos\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\,d\varphi$, $y_{ц.м.} = \dfrac{1}{\lvert L \rvert} \cdot \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho_\varphi')^2}\,d\varphi.$

Обидві частини рівності $\lvert L \rvert \cdot y_{ц.т.} = \int\limits_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$ помножимо на 2π,

одержимо

$\lvert L \rvert \cdot$	$2 \cdot \pi \cdot y_{ц.М.}$	$= \quad 2 \cdot \pi \cdot \int\limits_0^{\lvert L \rvert} y(s)\,ds$
– довжина кривої,	– довжина кола, що описує центр мас кривої,	– площа поверхні обертання кривої навколо осі абсцис при $y \geq 0$

Таким чином, отримано теорему.

Теорема 1.29 *(перша теорема Гюльдена*[1]*)***.** Площа поверхні обертання гладкої кривої навколо осі абсцис у випадку, коли крива не перетинає цієї осі, дорівнює довжині цієї кривої, помноженій на довжину кола, що описує центр мас кривої.

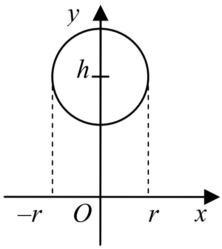


Рис. 1.28.

Приклад 1.21. Знайти площу поверхні тора, що утворюється обертанням кола, зображеного на рис. 1.28, навколо осі абсцис.

Розв'язання. Довжина цієї кривої (кола) дорівнює $2\pi r$. Центр мас знаходиться в центрі кола і має координати $(0,h)$, тому довжина кола, що описує центр мас – $2\pi h$. Тому, за теоремою Гюльдена,

$$P_{\text{поверхні тора}} = 2\pi r \cdot 2\pi h = 4\pi^2 rh\,.$$

8. Центр мас криволінійної трапеції

Нехай $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$ – криволінійна трапеція, де $f(x)$ – неперервна невід'ємна функція на відрізку $[a,b]$. Нехай ця криволінійна трапеція є матеріальною, тобто на ній розподілена деяка маса.

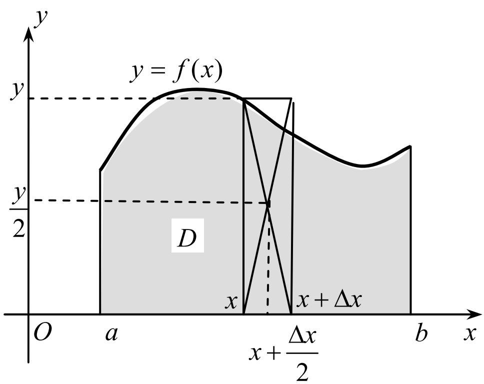


Рис. 1.29.

Нехай криволінійна трапеція – матеріальна фігура однорідної густини $\gamma = const = 1\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\right]$. Розглянемо цю криволінійну трапецію на відрізку $[x,\, x+\Delta x]$ (див. рис. 1.29). Її можна наближено замінити на прямокутник із довжиною

[1] *Гюльден (Гульдін) Пауль* (12.6.1577 – 3.11.1643) – швейцарський математик. Основні роботи присвячені проблемі нескінченно малих, серед яких «Про центр тяжіння» (1635 – 1643). Ім'я Гюльдена носить кратер на Місяці.

основи Δx і висотою $y = f(x)$ ($y \geq 0$). Координати центра мас прямокутника $\left(x+\dfrac{\Delta x}{2},\ \dfrac{y}{2}\right)$. Тоді статичний момент криволінійної трапеції на відрізку $[x,\ x+\Delta x]$ можна наближено замінити на статичний момент центра мас зазначеного прямокутника. Позначимо Δm і ΔS масу і площу прямокутника відповідно. Відносно осі абсцис отримаємо:

$$\Delta K_x \approx \Delta m \cdot \frac{y}{2} = \gamma \cdot \Delta S \cdot \frac{y}{2} = \Delta x \cdot y \cdot \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \Delta x\,,$$

а відносно осі ординат

$$\Delta K_y \approx \Delta m \cdot \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \Delta x \cdot y \cdot \left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = xy \cdot \Delta x + \underbrace{\frac{y}{2} \cdot \left(\Delta x\right)^2}_{=o(\Delta x)} \approx xy \cdot \Delta x\,.$$

Тому після застосування зазначеної схеми отримаємо формулу для обчислення статичного моменту криволінійної трапеції відносно осей координат:

$$\boxed{K_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx\,, \quad K_y = \int_a^b xy\ dx}$$

🗁 **Означення 1.43.** *Центр мас криволінійної трапеції* – це матеріальна точка M, маса якої дорівнює масі цієї криволінійної трапеції, а статичний момент цієї точки відносно Ox і Oy дорівнює статичному моменту цієї трапеції відносно цих осей.

За означенням і отриманими формулами маємо:

$$K_x^{(M)} = K_x^{(\text{крив. трапеції})}; \quad K_y^{(M)} = K_y^{(\text{крив. трапеції})};$$

$$\left.\begin{aligned} &K_x^{(M)} = m_M \cdot y_M = m_{\text{крив. трапеції}} \cdot y_M \Rightarrow K_x^{ц.т.} = S_{\text{крив. трапеції}} \cdot y_{ц.М.}, \\ &K_x^{ц.т.} = K_x^{(\text{крив. трапеції})} = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx\,, \quad S_{\text{крив. трапеції}} = \int_a^b y dx, \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx = \int_a^b y dx \cdot y_{ц.М.} \Rightarrow y_{ц.М.} = \frac{\int_a^b y^2 dx}{2\int_a^b y dx}\,,$$

аналогічно

$$K_y^{ц.т.}=K_y^{(\text{крив. трапеції})}=S_{\text{крив. трапеції}}\cdot x_{ц.т.}\Rightarrow x_{ц.М.}=\frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b ydx}.$$

Отже, **координати центра мас криволінійної трапеції** (тут $\gamma=const=1\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2}\right]$) обчислюються за формулами

$$\boxed{x_{ц.М.}=\frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b ydx},\quad y_{ц.М.}=\frac{\int\limits_a^b y^2dx}{2\int\limits_a^b ydx}}$$

Обидві частини формули

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2dx=S_{\text{крив. трапеції}}\cdot y_{ц.М.}$$

помножимо на 2π, одержимо

$S_{\text{крив. трапеції}}\cdot$	$2\cdot\pi\cdot y_{ц.М.}$	$=\quad \pi\cdot\int\limits_a^b y^2dx$
– площа криволінійної трапеції,	– довжина кола, що описує центр мас,	– об’єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі абсцис

Аналогічні міркування призведуть до тих самих висновків відносно осі ординат.

Таким чином, отримано теорему.

Теорема 1.30 *(друга теорема Гюльдена)***.** Об’єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо однієї з осей координат у випадку, коли графік функції, що задає цю трапецію, не перетинає цієї осі, дорівнює площі такої криволінійної трапеції, помноженій на довжину кола, що описує центр мас криволінійної трапеції.

9. Механічна робота

Нехай під дією деякої сили F матеріальна точка M рухається вздовж прямої Ox, причому напрям дії сили збігається з напрямком руху матеріальної точки. Потрібно знайти роботу A, яку виконує сила F при переміщенні точки M з положення $x=a$ у положення $x=b$.

Якщо величина F є сталою, то робота A дорівнює добутку сили F на довжину шляху, пройденого матеріальною точкою M:

$$A = F\cdot(b-a).$$

Нехай F неперервно змінюється в залежності від координати x точки M, тобто $F=F(x)$, де $F(x)$ є неперервною функцією на $[a;b]$. Поділимо відрізок $[a;b]$ на n частин (елементарних відрізків), довжини яких відповідно дорівнюють $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$. На кожному елементарному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i, і силу $F(x)$ на цьому відрізку вважатимемо сталою такою, що дорівнює $F(\xi_i)$. У цьому випадку наближене значення роботи сили F на шляху довжиною Δx_i буде дорівнювати $F(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Наближене значення роботи сили F із переміщення матеріальної точки з положення $x=a$ в положення $x=b$ дорівнює:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

Оскільки $F(x)$ є неперервною функцією на відрізку $[a;b]$, то існує границя інтегральної суми A_n для цієї функції на $[a;b]$ при $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$, що дорівнює роботі сили F із переміщення матеріальної точки M з положення $x=a$ в положення $x=b$. Ця границя є визначеним інтегралом від функції

$F(x)$ вздовж відрізка $[a;b]$. Тому робота змінної сили $F(x)$ тут визначається рівністю

$$\boxed{A=\int_a^b F(x)\,dx}$$

Розглянемо загальний випадок. Нехай рух здійснюється вздовж кривої $L=AB$, що параметризована довжиною дуги й задається рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(s), \\ y=\psi(s), \end{cases}$ $s\in[0,|L|]$. У такому випадку точки A та B мають координати: $A(\varphi(0),\psi(0))$, $B(\varphi(|L|),\psi(|L|))$. Якщо рух матеріальної точки вздовж цієї кривої під дією сили $F(s)$, яка є неперервною функцією на $[0,|L|]$, здійснюється так, що сила утворює з напрямом руху кут $\alpha(s)$, який так само є неперервною на $[0,|L|]$ функцією, то робота цієї сили з переміщення з точки A в точку B вздовж кривої $L=\cup AB$ обчислюється за формулою [**6**, с. 234]

$$\boxed{A=\int_0^{|L|} F(s)\cdot\cos\alpha(s)ds}$$

Якщо силу розкласти на дотичну й нормальну складові відносно кривої, то добуток $F_s(s)=F(s)\cdot\cos\left(F(s),s\right)$ виражає саме дотичну складову. Саме вона визначає величину роботи. Тому формулу для обчислення роботи можна переписати у вигляді

$$A=\int_0^{|L|} F_s(s)\,ds,$$

де $F_s(s)$ – дотична складова сили $F(s)$ вздовж даної кривої.

§4. Наближене обчислення інтегралів

1. Формула прямокутників

Пригадаємо деякі теоретичні відомості, потрібні для подальшого розуміння матеріалу.

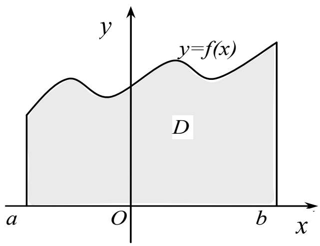


Рис. 1.30.

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Якщо функція $f\left(x\right)$ – неперервна на $[a,\, b]$ і $f\left(x\right) \geq 0$, то визначений інтеграл Рімана дорівнює площі криволінійної трапеції (рис. 1.30), тобто

$$S = \int_a^b f(x)dx \,.$$

Розглянемо розбиття

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

відрізка $[a,\, b]$. Позначимо розбиття $R = \{x_k\}$. Розглянемо проміжні точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, позначимо множину, яку вони утворюють, через $P = \{\xi_k\}$.

Геометричний зміст інтегральної суми Рімана $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ для невід'ємної неперервної на $[a,b]$, функції $f(x)$**.** Значення $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ *відповідає <u>площі прямокутника</u>*, що є складовою східчастої фігури, зображеної на рис. 1.31.

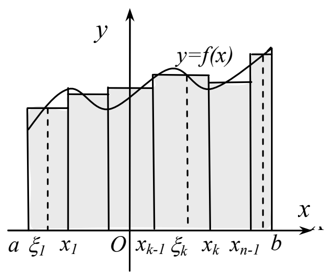


Рис. 1.31.

Значення площі усієї східчастої фігури дорівнює значенню інтегральної суми $\sigma = \sigma(f, P, R)$.

Таким чином, при застосуванні формули прямокутників інтеграл наближено замінюється відповідною інтегральною сумою.

З геометричної точки зору (у випадку $f(x) \ge 0$ на $[a,\, b]$), використання формули прямокутників передбачає заміну площ криволінійних трапецій на площі прямокутників. У загальному випадку будемо застосовувати наближення вигляду: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\cdot \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i=\overline{1,n})$.

Нехай функція $f(x)$ – неперервна на $[a,\, b]$ $\Longrightarrow$ функція $f(x)$ – інтегровна на $[a,\, b]$ (*теорема 1.9*) $\Longrightarrow$ границя інтегральних сум не залежить від вибору проміжних точок і способу розбиття.

Розіб'ємо відрізок $[a,\, b]$ на n рівних частин, а проміжні точки виберемо як середини відрізків розбиття. Тоді

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}\,; \qquad \xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\,.$$

Обчислимо

$$x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}\,,$$

$$\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + (i-1)\cdot\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{2n} = a + \left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\,,$$

позначимо $x_{i-\frac{1}{2}} = a + \left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$, отримаємо

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right).$$

$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$ або $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)$	– ***формула прямокутників***

Обчислимо похибку наближеної формули.

За *властивістю адитивності визначеного інтеграла* маємо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \ . \qquad (1.34)$$

Зробимо тимчасові перепозначення: $\alpha = x_{i-1}$; $\quad \beta = x_i$.

Проведемо *допоміжні викладки* й знайдемо значення інтеграла $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Накладемо такі **припущення** на функцію:

1) $f(x)$ задана на $[a,b]$,

2) $f(x)$ неперервно диференційовна на $[a,b]$,

3) $f(x)$ двічі диференційовна на (a,b) .

У зазначених припущеннях можна застосовувати формулу Тейлора в точці $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ із залишковим членом у формі Лагранжа у вигляді:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 .$$

В залишковому члені (останній доданок) точка c лежить між x і x_0 . Покладемо $x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, тоді

$$f(x) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1!}\cdot\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{f''(c)}{2!}\cdot\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \ ;$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot(\beta-\alpha) + f'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\int_\alpha^\beta\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx +$$

$$+ \int_\alpha^\beta \frac{f''(c)}{2}\cdot\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 dx \ .$$

Тут c розташована між x і $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, тому c залежить від x , тобто $c = c(x)$. До останнього доданка будемо застосовувати узагальнену теорему про середнє (*властивість 13*^{o}). Сформулюємо її в зручних для доведення позначеннях:

$\varphi(x)$, $g(x)$ – неперервні функції, $g(x) \geq 0$ на $[\alpha,\beta]$ $\Rightarrow$ $\exists c^* \in (\alpha,\beta)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) g(x) dx = \varphi(c^*) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx .$$

Покладемо

$$\varphi(x) = \frac{f''(c(x))}{2} ; \quad g(x) = \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 \geq 0 ,$$

Тоді

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f''(c)}{2} \cdot \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 dx = \frac{f''(c^*)}{2!} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 dx = \frac{f''(c^*)}{2!} \cdot \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} .$$

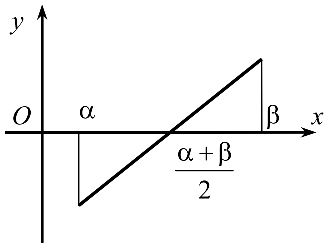


Рис. 1.32.

На рис. 1.32 зображено графік функції $y = x - \frac{\alpha+\beta}{2}$. В силу його симетрії відносно точки $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, 0 \right)$ отримаємо:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) dx = 0.$$

Отже,

$$\exists c^* \in (\alpha, \beta): \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cdot (\beta-\alpha) + \frac{f''(c^*)}{2!} \cdot \frac{(\beta-\alpha)^3}{12} .$$

Зробимо зворотні перепозначення $x_{i-1} = \alpha$, $x_i = \beta$, отримаємо:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \frac{f''(c_i^*)}{24} \cdot (x_i - x_{i-1})^3 ,$$

підставимо в (1.34)

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2} \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f''(c_i^*)}{24} \cdot (x_i - x_{i-1})^3 =$$

$$= \left\| \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}} ; \qquad x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \right\| =$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''\left(c_i^*\right) . \qquad (1.35)$$

Тут $\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''\left(c_i^*\right)$ – залишковий член формули прямокутників.

Оцінимо залишковий член. Накладемо ***додаткове припущення***, що функція $f''(x)$ – неперервна на $[a, b]$. Тоді, за другою теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.188; **4**, с.176],

$$m = \inf_{[a,b]} f''(x) = \min_{[a,b]} f''(x) ; \quad M = \sup_{[a,b]} f''(x) = \max_{[a,b]} f''(x) ;$$

Звідси $m \le f''\left(c_i^*\right) \le M \ \forall i = \overline{1,n}$ і

$$m\cdot n \le \sum_{i=1}^{n} f''\left(c_i^*\right) \le M\cdot n \ ;$$

$$m \le \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''\left(c_i^*\right) \le M \ .$$

Отже, значення $\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''\left(c_i^*\right)$ є проміжним між значеннями функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Тому за теоремою Коші, неперервна на відрізку $[a,b]$ функція набуває усіх своїх проміжних значень [**3**, с.184; **4**, с.171],

$$\Rightarrow \exists\, c^{**} \in [a,b] : f''\left(c^{**}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''\left(c_i^*\right) .$$

Підставимо в (1.35), отримаємо

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right), \quad c^{**} \in [a,b]}$$ – ***формула прямокутників із залишковим членом***

Тут $\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right)$ ($c^{**} \in [a,b]$) – *залишковий член у формулі прямокутників*.

Звідси випливає, що *похибка формули прямокутників має порядок* $\frac{1}{n^2}$.

ВИСНОВОК:

1) **Припущення**: $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$.

2) Формула прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \quad \text{або} \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right). \tag{1.36}$$

3) Формула прямокутників із залишковим членом:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right), \quad c^{**}\in[a,b].$$

4) Залишковий член формули прямокутників:

$$\frac{(b-a)^3}{24\cdot n^2}\cdot f''\left(c^{**}\right) \ \ (c^{**}\in[a,b]). \tag{1.37}$$

5) Похибка формули прямокутників має порядок $\frac{1}{n^2}$.

2. Формула трапецій

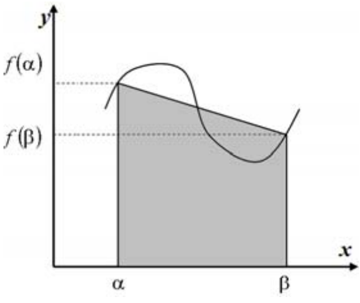


Рис. 1.33.

Ідея цієї формули полягає в тому, що у випадку неперервної невід'ємної на $[a,b]$ функції $f(x)$, у ній площа криволінійної трапеції буде наближено замінятися на площу прямолінійної трапеції (див. рис. 1.33). А у загальному випадку неперервної функції $f(x)$ на $[a,b]$ застосовується наближення вигляду:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \approx (\beta-\alpha)\cdot\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}.$$

Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a,\, b]$, то вона інтегровна на $[a,\, b]$ (*теорема 1.9*). Розіб'ємо відрізок $[a,\, b]$ на n рівних частин, тоді

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\ ; \qquad x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}\ ,$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot\left(\frac{f(x_{i-1})}{2} + \frac{f(x_i)}{2}\right).$$

За *властивістю адитивності визначеного інтеграла*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot\left(\frac{f(x_{i-1})}{2} + \frac{f(x_i)}{2}\right) = \left\| x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \right\| =$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \frac{f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3)}{2} + \ldots +\right.$$

$$\left. + \frac{f(x_{n-2})}{2} + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_{n-1})}{2} + \frac{f(x_n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) = \frac{b-a}{2\cdot n}\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2\cdot n}\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),\quad x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n}\,(i=\overline{1,n})}$$

Отримано ***формулу трапецій***. Для обчислення похібки формули розглянемо спочатку інтеграл $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$. Зробимо тимчасові перепозначення: $\alpha = x_{i-1}$, $\beta = x_i$.

Проведемо *допоміжні викладки* й знайдемо значення інтеграла $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Накладемо такі **припущення** на функцію: $f(x)$ – двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$. Тоді можливо застосувати визначене інтегрування частинами до появи другої похідної функції $f(x)$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)d(x-\alpha) = f(x)\cdot(x-\alpha)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\cdot f'(x)dx =$$

$$= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) - 0 - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot(x-\alpha)\cdot d(x-\beta) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = f'(x)\cdot(x-\alpha), & du = \left(f''(x)\cdot(x-\alpha) + f'(x)\right)dx, \\ dv = d(x-\beta), & v = x-\beta \end{matrix} \right\| =$$

$$= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) - f'(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\Big|_{\alpha}^{\beta} +$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot(x-\beta)\,dx =$$

$$= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\cdot(x-\beta)dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x-\beta, & du = dx, \\ dv = f'(x)dx, & v = f(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx + f(x)\cdot(x-\beta)\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx .$$

Таким чином,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\beta)\cdot(\beta-\alpha) + f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx,$$

тому

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\cdot(\beta-\alpha) + \frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx .$$

Нехай

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)dx ,$$

тоді покладемо в узагальненій теоремі про середнє (формулювання наведене в попередньому пункті при виведенні формули похибки у формулі прямокутників)

$$\varphi(x) = f''(x) \; ;$$

$$g(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\beta) \; .$$

На відрізку $[\alpha,\beta]$ функція $g(x) = (x-\alpha)\cdot(x-\beta) \le 0$ має сталий знак, тому до $I_{\alpha\beta}$ можна застосовувати теорему про середнє:

$$\exists c^* \in (\alpha,\beta): I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} f''(c^*)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\,dx = -\frac{f''(c^*)}{12}\cdot(\beta-\alpha)^3 \, .$$

Зробимо зворотні перепозначення, підсумуємо за i від 1 до n, отримаємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f(x_i)}{2}+\frac{f(x_{i-1})}{2}\right) - \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{f''(c_i^*)}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2} =$$

{аналогічно виведенню похибки формули прямокутників доводиться, що

$$\exists\, c^{**} \in [a,b]: f''(c^{**}) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f''(c_i^*) \; \}$$

$$= \frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - f''(c^{**})\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2} \, .$$

Отже, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - f''(c^{**})\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}$

($c^{**} \in [a,b]$) – ***формула трапецій із залишковим членом***

Тут $f''(c^{**})\cdot\dfrac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}$ ($c^{**} \in [a,b]$) – *залишковий член у формулі трапецій.*

Похибка формули має порядок $\dfrac{1}{n^2}$.

ВИСНОВОК:

1) **Припущення**: $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[a,b]$.

2) Формула трапецій:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2\cdot n}\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right),\quad x_i = a + i\cdot\frac{b-a}{n} (i=\overline{1,n}). \tag{1.38}$$

3) Формула трапецій із залишковим членом:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\cdot\left(f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) - f''\left(c^{**}\right)\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2}$$

$$(c^{**} \in [a,b]).$$

4) Залишковий член формули трапецій:

$$f''\left(c^{**}\right)\cdot\frac{(b-a)^3}{12\cdot n^2} \quad (c^{**} \in [a,b]). \tag{1.39}$$

5) Похибка формули трапецій має порядок $\dfrac{1}{n^2}$

3. Формула Сімпсона[1] (формула парабол)

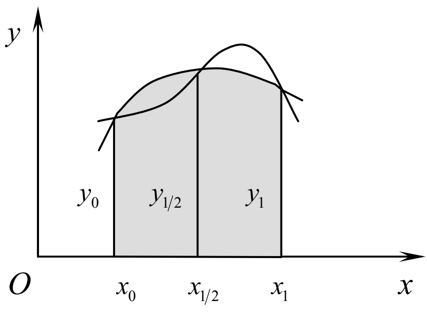


Рис.1.34.

Нехай довільні попарно різні точки

$$\left(x_0 , y_0\right),\quad \left(x_1, y_1\right),\quad \left(x_{1/2}, y_{1/2}\right)$$

належать параболі $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ (рис. 1.34). Чи можна визначити a, b, c? Ці точки задовольняють рівнянню параболи, тому

[1] **Томас Сімпсон** (1710-1761) – англійський математик і педагог, син ткача, самоук, не отримав спеціальної математичної освіти. Завдяки своїй працьовитості, таланту й інтересу до математики, він самостійно досконало опанував диференціальне й інтегральне числення. Формула, що носить його ім'я, була опублікована в його "Математичних міркуваннях на фізичні і аналітичні теми" (1743), фактично ця формула була ним лише знову відкрита. До нього її зміст був відомий Торічеллі (1644), Грегорі (1668), Ньютону (1676) й Котесу (1722).

$$\begin{cases} y_0 = a\,x_0^2 + b\,x_0 + c, \\ y_1 = a\,x_1^2 + b\,x_1 + c, \\ y_{1/2} = a\,x_{1/2}^2 + b\,x_{1/2} + c. \end{cases} \tag{1.40}$$

Визначник цієї системи $\Delta = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_{1/2}^2 & x_{1/2} & 1 \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, як визначник Вандермонда, тому система (1.40) має єдиний розв'язок.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин, тоді інтеграл можна записати у вигляді суми

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx .$$

Зробимо допоміжні викладки. На кожному відрізку розбиття замінимо інтеграл від функції $f(x)$ інтегралом від квадратичної функції, тобто

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} (a\,x^2 + b\,x + c)\,dx =$$

$$= a\frac{x_i^3}{3} - a\frac{x_{i-1}^3}{3} + b\frac{x_i^2}{2} - b\frac{x_{i-1}^2}{2} + c\,x_i - c\,x_{i-1} =$$

$$= \frac{1}{6}\Big(2\,a\left(x_i^3 - x_{i-1}^3\right) + 3\,b\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) + 6\,c\left(x_i - x_{i-1}\right)\Big) = \left\| x_i - x_{i-1} = h \right\| =$$

$$= \frac{h}{6}\Big(2\,a\left(x_i^2 + x_i\,x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) + 3\,b\left(x_i + x_{i-1}\right) + 6\,c\Big) =$$

$$= \frac{h}{6}\,(\underline{2\,a\,x_i^2 + 2\,b\,x_i + 2\,c} + \underline{\underline{2\,a\,x_{i-1}^2 + 2\,b\,x_{i-1} + 2\,c}} +$$

$$+ \underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c}}}) =$$

$$= \frac{h}{6}\left(2\,y_i + 2\,y_{i-1} + \underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1} + b\,x_i + b\,x_{i-1} + 2\,c}}}\right) .$$

Пригадаємо, що $x_{i-1/2} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$, тому

$$y_{i-1/2}=a\,x_{i-1/2}^2+b\,x_{i-1/2}+c=a\,\frac{x_i^2}{4}+\frac{a}{2}x_i\,x_{i-1}+a\,\frac{x_{i-1}^2}{4}+b\,\frac{x_i}{2}+b\,\frac{x_{i-1}}{2}+c=$$

$$=\frac{1}{4}\left(a\,x_i^2+2\,a\,x_i\,x_{i-1}+a\,x_{i-1}^2+2\,b\,x_i+2\,b\,x_{i-1}+4\,c\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\underline{a\,x_i^2+b\,x_i+c}+\underline{\underline{a\,x_{i-1}^2+b\,x_{i-1}+c}}+\underline{\underline{\underline{b\,x_i+bx_{i-1}+2\,c+2\,a\,x_i\,x_{i-1}}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(y_i+y_{i-1}+\underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1}+b\,x_i+b\,x_{i-1}+2\,c}}}\right).$$

Звідки отримаємо

$$\underline{\underline{\underline{2\,a\,x_i\,x_{i-1}+b\,x_i+b\,x_{i-1}+2\,c}}}=4\,y_{i-1/2}-y_i-y_{i-1}\ .$$

Підставимо останнє в наближену рівність:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx\frac{h}{6}\left(2\,y_i+2\,y_{i-1}\right)+\frac{h}{6}\left(2\,a\,x_i\,x_{i-1}+b\,x_i+b\,x_{i-1}+2\,c\right),$$

одержимо

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\approx\ \frac{h}{6}\left(2\,y_i+2\,y_{i-1}+4\,y_{i-1/2}-y_i-y_{i-1}\right).$$

Отже,

$$\int_{x_i}^{x_{i-1}} f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{6}\left(y_i+y_{i-1}+4\,y_{i-1/2}\right).$$

В результаті підсумовування отримаємо:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx\approx\frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i+y_{i-1}+4\,y_{i-1/2}\right)=\left\|\,h=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}\,\right\|=$$

$$=\frac{b-a}{6\,n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i+y_{i-1}+4\,y_{i-1/2}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{6\,n}\cdot\left(f\left(a\right)+f\left(b\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i+4\sum_{i=1}^{n}y_{i-1/2}\right).$$

Висновок:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\cdot\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4\sum_{i=1}^{n} y_{i-1/2}\right) \qquad (1.41)$$

формула Сімпсона

В цій формулі

$$y_i = f(x_i) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right); \qquad y_{i-1/2} = f\left(x_{i-1/2}\right) = f\left(a + \frac{b-a}{n}\cdot\left(i-1/2\right)\right).$$

Зробимо припущення про чотирикратну неперервну диференційовність функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Відомо, що залишковий член у формулі Сімпсона має вигляд

$$\boxed{R_n = -\frac{f^{IV}\left(c^{**}\right)}{2880\cdot n^4}\cdot(b-a)^5} \qquad (1.42)$$

Тому *похибка має порядок* $\frac{1}{n^4}$. (✍ Розібрати виведення формули для залишкового члена самостійно [**3**, с.484–486; **6**, с162–163]!)

§5. Невласні інтеграли

Із означення визначеного інтеграла Рімана випливає, що він задається на скінченному відрізку $[a,b]$. Необхідною умовою інтегровності функції є її обмеженість. Однак багато геометричних і прикладних задач потребують обчислення інтегралів на нескінченних проміжках або від необмежених функцій. Цю проблему вирішують невласні інтеграли.

Невласні інтеграли I роду розглядаються на нескінченних проміжках, а невласні інтеграли II роду – від необмежених функцій.

1. Невласні інтеграли I роду

Розглянемо нескінченні проміжки трьох типів:

I. $[a,+\infty)$;   II. $(-\infty,b]$;   III. $(-\infty, +\infty)$.

У *випадку I* будемо **припускати**:

- функція $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$;
- $\forall A > a$ функція $f(x)$ інтегровна на [*a, A*], тобто

  $\forall A > a \ \ \exists \int\limits_a^A f(x)dx$.

Тоді будь-якому $A > a$ відповідає єдине значення інтеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$, в результаті чого утворюють функцію $F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx$, яку задано на [*a*, +∞). Таким чином, коректним буде питання: чи існує границя

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx \, ? \tag{1.43}$$

Не завжди!

☝ 🗀**Означення 1.44**. У випадку, коли функція $f(x)$ справджує зазначені вище припущення і існує границя (1.43),

1) значення границі називають *невласним інтегралом I роду* на $[a,+\infty)$, який позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx};$$

2) інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним.*

У випадку, коли границі (1.43) не існує, то кажуть, що невласний інтеграл *розбігається*, використовуючи для його позначення той самий символ: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

II. **Означення 1.45**. Нехай функцію $f(x)$ задано на $(-\infty, b]$ і $\forall\, B < b\ \exists \int\limits_B^b f(x)dx$, то у випадку, коли $\exists \lim\limits_{B\to-\infty} \int\limits_B^b f(x)dx$,

1) значення границі називають *невласним інтегралом I роду на* $(-\infty, b]$, тобто

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^b f(x)dx};$$

2) інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають *збіжним*.

III. **Означення 1.46**. Нехай функцію $f(x)$ задано на $(-\infty, +\infty)$ і $\forall \left(A \in \mathbb{R} \wedge B \in \mathbb{R} \right)\ \ \exists \int\limits_B^A f(x)dx$, тоді, якщо $\exists \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx$ при незалежному прямуванні $A\to+\infty$ і $B\to-\infty$, то значення цієї границі називають *невласним інтегралом I роду на* $(-\infty, +\infty)$, тобто

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx}$$

При цьому інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *збіжним* на $(-\infty, +\infty)$.

Зауваження 1.16 *до випадку III*. Якщо для деякого $a \in \mathbb{R}$ $\exists \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ і $\exists \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, тоді $\exists \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Доведення.

$$\begin{array}{ccccc}
\lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx & = & \lim\limits_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \left(\int\limits_B^a f(x)dx + \int\limits_a^A f(x)dx \right) & = & \lim\limits_{B\to-\infty} \int\limits_B^a f(x)dx + \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx, \\
\exists & \Leftrightarrow & \exists & \Leftarrow & (\exists \quad \wedge \quad \exists) \\
\| & & & & \| \qquad\qquad \| \\
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx & & = & & \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx. \ \blacksquare
\end{array}$$

Зауваження 1.17.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \exists \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx\,, \\[2ex] 2)\ b>a\,, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1^0\ \exists \displaystyle\int_b^{+\infty} f(x)dx\,; \\[2ex] 2^0\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx\,. \end{array}$$

Доведення. Оскільки $\exists \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$, то при $b>a$ маємо

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_a^A f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\int_a^b f(x)dx + \int_b^A f(x)dx\right) & = \displaystyle\int_a^b f(x)dx + & \lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_b^A f(x)dx \\ \exists \qquad\qquad \Rightarrow & & \exists \\ \| & & \| \\ \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad\qquad = & & \displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx\,. \end{array} \qquad \blacksquare$$

Приклад 1.22.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$.

2) Дослідити на збіжність інтеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$, $a>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\Bigg|_a^A = \lim_{A\to+\infty}\frac{A^{1-\lambda}-a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, \text{ якщо } \lambda\neq 1,$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty}\ln|x|\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty}\ln\frac{A}{a}, \text{ якщо } \lambda=1.$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \text{якщо } \lambda>1 \\ \infty, & \text{якщо } \lambda<1 \\ \infty, & \text{якщо } \lambda=1 \end{cases}$$

Висновок: $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$, $a>0$

збігається при $\lambda>1$ — розбігається при $\lambda\le 1$.

Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і $\exists\int_a^A f(x)dx\ \forall A>a$. Відповідь на питання, збігається чи розбігається інтеграл, залежить від того, чи $\exists\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$. Пригадаємо критерій Коші [**4**, с. 134] існування границі функції на нескінченності:

$$\exists\lim_{A\to+\infty}F(A)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\Delta>0:\forall\left(A_1>a\wedge A_2>a\right)\ \left(A_1>\Delta\wedge A_2>\Delta\right)\Rightarrow\left|F(A_1)-F(A_2)\right|<\varepsilon.$$

Оскільки $\left|F(A_1)-F(A_2)\right|=\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|$, то, об’єднуючи все разом, отримаємо

Теорема 1.31 (*критерій Коші збіжності невласного інтеграла I роду*). Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і

$$\forall A>a\ \ \exists\int_a^A f(x)dx.$$

Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається тоді і лише тоді, коли

$$\forall\varepsilon>0\exists\Delta>0:\forall\left(A_1>a\wedge A_2>a\right)\ \left(A_1>\Delta\wedge A_2>\Delta\right)\Rightarrow\ \left|\int_{A_1}^{A_2}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

2. Достатні ознаки збіжності невласного інтеграла I роду

☝ **Теорема 1.32** (*загальна ознака порівняння*). Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,+\infty)$ і $\exists\int_a^A f(x)dx\ \forall A>a$. Тоді мають місце твердження

I. $\exists$ *g(x)*: $\left.\begin{array}{l}1)\ \left|f(x)\right|\le g(x)\ \forall x\ge a,\\ 2)\ \int_a^{+\infty}g(x)dx \text{ збігається,}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається;

II. $\exists$ $g(x)$: 1) $0 \le g(x) \le f(x)\ \forall x \ge a$,
2) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається, $\Bigg\} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a, +\infty)$, то дослідження на збіжність невласних інтегралів I роду можна подати таким чином:

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

Доведення

I. Із властивостей визначених інтегралів отримаємо:

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx\,. \qquad (1.44)$$

Оскільки інтеграл і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збігається, то за критерієм Коші одержимо:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a\right)\ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right) \Rightarrow \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon\,. \quad (1.45)$$

Із (1.44) і (1.45) випливає:

$$\left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \varepsilon\,, \text{ якщо } \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right).$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta > 0 : \forall \left(A_1 > a \wedge A_2 > a\right)\ \left(A_1 > \Delta \wedge A_2 > \Delta\right) \Rightarrow \left| \int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx \right| < \varepsilon\,.$$

Це означає, що за критерієм Коші інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. За умовою $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається. Це означає, що для функції $G(A)=\int\limits_a^A g(x)dx$ не існує границі $\lim\limits_{A\to+\infty} G(A)$. У даному випадку, коли $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a,+\infty)$, це означає, що функція $G(A)$ має властивості:

1) $G(A)\ge 0 \quad \forall A>a$;

2) якщо $a<A\le B$, то

$$G(A)=\int\limits_a^A g(x)dx=\int\limits_a^B g(x)dx-\underbrace{\int\limits_A^B \underbrace{g(x)}_{\ge 0}dx}_{\ge 0\ (\text{за вл. } 6^o)}\le\int\limits_a^B g(x)dx=G(B),$$

тобто $G(A)\nearrow$ на $[a,+\infty)$.

Звідки отримаємо:

$\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбігається $\Rightarrow \lim\limits_{A\to+\infty} G(A)=+\infty$, тобто $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A g(x)dx=+\infty$.

Тепер застосуємо до умови $0\le g(x)\le f(x)\ \forall x\ge a$ *властивість 7^o визначеного інтеграла* та отримаємо:

$$\begin{array}{ccl} \int\limits_a^A f(x)dx \ge & \int\limits_a^A g(x)dx & \\ \Downarrow & \swarrow & (A\to+\infty) \\ +\infty & & \end{array}$$

Отже, $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx=+\infty \quad\Rightarrow\quad \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ – розбігається. ■

Пригадаємо, що $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ збігається, якщо $\lambda>1$ і розбігається, якщо $\lambda\le 1$. Тому, як наслідок загальної ознаки порівняння, одержимо таку теорему.

☝ **Теорема 1.33** (*частинна ознака порівняння*). Нехай функція $f(x)$ задана на $[a,+\infty)$ і $\exists\int\limits_a^A f(x)dx\ \forall A>a$.

I. Якщо $\exists\lambda > 1 \wedge \exists c > 0 : |f(x)| \le \dfrac{c}{x^{\lambda}} \ \forall x \ge a$, тоді $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda \le 1 \wedge \exists c > 0 : f(x) \ge \dfrac{c}{x^{\lambda}} \forall x \ge a$, тоді $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. Покладемо $g(x) = \dfrac{c}{x^{\lambda}}$, тоді ми опиняємося в умовах загальної ознаки порівняння, звідки приходимо до висновків теореми. ■

☝ **Наслідок 1.9** (*частинна ознака порівняння в граничній формі*): $f(x)$ задана на $[a, +\infty)$

I. Якщо $\exists\lambda > 1 \wedge \exists \lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| x^{\lambda} = c$, тоді $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists\lambda \le 1 \wedge \exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\, x^{\lambda} = c > 0$, тоді $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a, +\infty)$, то при $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\lambda}}$ маємо:

якщо $\lambda > 1$, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається,

якщо $\lambda \le 1$, то інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Доведення. I. Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| x^{\lambda} = c$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \Delta > 0 : \forall x \ge a \ \ x > \Delta \Rightarrow \ \big||f(x)| x^{\lambda} - c\big| < \varepsilon,$$

тому

$$c - \varepsilon < |f(x)| x^{\lambda} < c + \varepsilon \ \text{ при } \ x > \Delta,$$

при $x > \Delta \ \ |f(x)| < \dfrac{c+\varepsilon}{x^{\lambda}} \quad (\lambda > 1)$.

Отже, за частинною ознакою порівняння, інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

II. Зауважимо, що $\exists\varepsilon > 0 : c-\varepsilon > 0$, наприклад, $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Тоді

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)x^{\lambda} = c > 0 \Rightarrow$$

для цього ε $\exists\Delta > 0 : \forall x \geq a \;\; x > \Delta \Rightarrow \left|f(x)x^{\lambda} - c\right| < \varepsilon$,

$c-\varepsilon < f(x)x^{\lambda} < c+\varepsilon$ при $x > \Delta$,

при $x > \Delta \;\; f(x) > \dfrac{c-\varepsilon}{x^{\lambda}} \quad (\lambda \leq 1)$.

Отже, за частинною ознакою порівняння, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

У частинному випадку, коли $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a,+\infty)$, висловлювання $f(x) \overset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\lambda}}$ еквівалентне тому, що $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{1/x^{\lambda}} = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^{\lambda} = 1$. Отже, для завершення доведення потрібно обрати $c = 1 > 0$ в загальному формулюванні наслідку. ∎

Приклад 1.23. **1.** Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin\dfrac{1}{x^2}\,dx$.

Оскільки $\sin t \overset{t\to0}{\sim} t$ (це те саме, що $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$) та $t = \dfrac{1}{x^2} \to 0$ при $x \to +\infty$, тоді, $\sin\dfrac{1}{x^2} \overset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Оскільки $\lambda = 2 > 1$, то за ознакою порівняння в граничній формі інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \sin\dfrac{1}{x^2}\,dx$ збігається.

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^3}dx$.

Розв’язання проілюструємо схемою

$$\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3}, \qquad \lambda = 3 > 1$$

$$\text{зб.} \;\Longleftarrow\; \text{зб.}$$

Відповідь: заданий інтеграл збігається.

3. Абсолютна та умовна збіжність невласних інтегралів I роду

☝ 🗀**Означення 1.47**. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx -$ *абсолютно збіжний* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ – збіжний.

Усі попередні ознаки порівняння дають можливість відповісти на питання про абсолютну збіжність інтегралів.

☝ **Теорема 1.34.** Якщо інтеграл збігається абсолютно, тоді він збігається.

Доведення. Покладемо $g(x) = |f(x)|$, тоді

$$\left.\begin{aligned} &|f(x)| \le g(x), \\ &\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx \text{ збігається (за умовою),} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \text{ збігається.} \ \blacksquare$$

☝ 🗀**Означення 1.48**. Якщо інтеграл збігається, але не абсолютно, то його називають *умовно збіжним*.

☝ **Теорема 1.35** (*ознака Діріхле-Абеля*).

$$\left.\begin{aligned} &1)\ f(x) \text{ неперервна і має обмежену первісну на } [a,+\infty), \text{ тобто функція } F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt - \text{ обмежена:} \\ &\exists\ K > 0 : \forall\ x \ge a\ \ |F(x)| \le K; \\ &2)\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0; \\ &3)\ g(x) \text{ неперервна і не зростає на } [a,+\infty); \\ &4)\ \exists\ g'(x) \text{ - неперервна на } [a,+\infty), \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ збігається.}$$

Доведення. Завдяки умовам 1) і 4) можна застосувати формулу інтегрування частинами на відрізку $[A_1, A_2]$:

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx\right| = \left\| \begin{matrix} u = g(x), & du = g'(x)dx, \\ dv = f(x)dx & v = F(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left| F(x)\,g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| = \left| F(A_2)g(A_2) - F(A_1)g(A_1) - \right.$$

$$\left. - \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| \le \left| F(A_2)g(A_2) \right| + \left| F(A_1)g(A_1) \right| + \left| \int_{A_1}^{A_2} F(x)g'(x)dx \right| .$$

Оскільки *g(x)* не зростає на $[a,+\infty)$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то

а) $g(x) \ge 0$ на $[a,+\infty)$,

б) $g'(x) \le 0$ на $[a,+\infty)$.

Звідси $|g(x)| = g(x)$, $|g'(x)| = -g'(x)$ на $[a,+\infty)$. Звідки й за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \le \ K \cdot g(A_2) + K \cdot g(A_1) + K \cdot \int_{A_1}^{A_2} (-g'(x))dx =$$

$$= K \cdot g(A_2) + K \cdot g(A_1) - K \cdot g(A_2) + K \cdot g(A_1) = 2 \cdot K \cdot g(A_1) .$$

Отже,

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \le 2K \cdot g(A_1) .$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta > 0 : \forall A \ge a :\ \ A > \Delta\ \Rightarrow\ g(A) < \varepsilon/(2K) .$$

Таким чином,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta > 0 : \forall A_1, A_2 \ge a :\ \ (A_1 \ge \Delta\ \wedge\ A_2 > \Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)dx \right| \le 2K \cdot g(A_1) < 2K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon .$$

Отже, за критерієм Коші інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається. ■

Зауваження 1.18. Якщо для доведення використати не формулу інтегрування частинами, а другу теорему про середнє, то припущення *теореми 1.35* можна послабити і сформулювати цю теорему у вигляді [**6**, с. 564-565]:

1) $\forall x \geq a\ f(x)-$ інтегровна на $[a, x]$ і $f(x)$ задовольняє умову: $\exists\ K > 0 : \forall\ x \geq a\ \left|\int\limits_a^x f(t)dt\right| \leq K$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$;

3) *g(x)* монотонна на $[a, +\infty)$;

$\Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ збігається.

Приклад 1.24. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx$ ($p > 0$).

Дослідимо спочатку на звичайну збіжність. Покладемо $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$. Отримаємо:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \sin t\ dt = -\cos t\Big|_1^x \Rightarrow |F(x)| \leq |\cos 1| + |\cos x| \leq 2 \quad \Rightarrow F(x)-$ обмежена на $[1, +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \forall p > 0$;

3) $g(x)$ спадає ($\searrow$) на $[1, +\infty)$.

Висновок 1: інтеграл збігається $\forall p > 0$ за ознакою Діріхле-Абеля.

Дослідимо на *абсолютну збіжність*. Оцінимо інтеграл знизу:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}dx \geq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p}dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p}dx.$$

Перший із інтегралів $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається, якщо $p > 1$, і розбігається, якщо $p \leq 1$. У другому інтегралі покладемо $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \frac{1}{x^p}$. Отримаємо:

1) $F(x) = \int\limits_1^x \cos 2t\ dt = \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_1^x \Rightarrow |F(x)| \leq \frac{1}{2}\left(|\sin 2| + |\sin 2x|\right) \leq 1\ \forall x \in [1, +\infty)$

$\Rightarrow F(x)-$ обмежена на $[1, +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^p}=0 \quad \forall p>0$;

3) $g(x)-\ \searrow$ на $[1,+\infty)$.

Отже, другий інтеграл збігається $\forall p>0$ за ознакою Діріхле-Абеля.

Висновок 2: інтеграл збігається абсолютно при $p>1$, а при $p\le 1$ він абсолютно розбігається.

Відповідь: інтеграл збігається абсолютно при $p>1$, умовно – при $p\le 1$.

Приклад 1.25. Дослідити інтеграл Френеля $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$ на збіжність.

Запишемо цей інтеграл сумою

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int\limits_0^{1}\sin x^2dx+\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2dx\ .$$

Тут $\int\limits_0^{1}\sin x^2dx$ – визначений інтеграл Рімана, він існує (підінтегральна функція неперервна на відрізку інтегрування) і скінченний. Розглянемо другий інтеграл суми:

$$\int\limits_1^{+\infty}\sin x^2dx=\int\limits_1^{+\infty}\underbrace{x\sin x^2}_{=f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)}dx\ .$$

Застосуємо ознаку Діріхле-Абеля:

1) $F(x)=\int\limits_1^{x}t\sin t^2dt=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^{x}\sin t^2d(t^2)=\left\|\begin{array}{c}u=t^2\\ t\,|1|\,x\\ \hline u\,|1|\,x^2\end{array}\right\|=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^{x^2}\sin u du=$

$=-\dfrac{1}{2}\cos u\Big|_1^{x^2}=-\dfrac{1}{2}\left[\cos x^2-\cos 1\right]\ \Rightarrow |F(x)|\le 1\ \ \forall x\in[1,+\infty)$

$\Rightarrow F(x)-$ обмежена на $[1,+\infty)$;

2) $g(x)=\dfrac{1}{x}\ -\ \searrow$ на $[1,+\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin x^2dx$ збігається.

Самостійно дослідити ✍ на абсолютну збіжність і зробити висновки щодо умовної збіжності!

4. Заміна змінних під знаком невласного інтеграла. Формула інтегрування частинами

Пригадаємо теорему про заміну змінної під знаком визначеного інтеграла.

1) $f(x)$ – неперервна на $[a, A]$;

2) $x=\varphi(t)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$ $([\beta,\alpha])$;

3) $a=\varphi(\alpha)$, $A=\varphi(\beta)$;

4) $\varphi([\alpha,\beta])=[a,A]$ $\left(\varphi([\beta,\alpha])=[a,A]\right)$,

$$\Rightarrow \quad \int\limits_a^A f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,.$$

☝ **Теорема 1.36** (*заміна змінної під знаком невласного інтеграла I роду*).

1) $f(x)$ – неперервна на $[a,+\infty)$;

2) $x=\varphi(t)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,+\infty)$ $((-\infty,\alpha])$;

3) $a=\varphi(\alpha)$;

4) $\varphi(t)$ – строго монотонна;

5) $\varphi([\alpha,+\infty))=[a,+\infty)$ $\left(\varphi((-\infty,\alpha])=[a,+\infty)\right)$,

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{\pm\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt\,. \\ \text{зб.} \quad \Rightarrow \quad \text{зб.} \end{array}}$$

Доведення. Нехай для визначеності $\varphi(t)$ зростає ($\nearrow$) на $[\alpha,+\infty)$. Під знаком визначеного інтеграла $\int\limits_a^A f(x)dx$ ($A>a$) зробимо заміну, застосовуючи згадану теорему, а потім здійснимо граничний перехід при $A \to +\infty$. Але спочатку доведемо: якщо $A \to +\infty$, то $\beta \to +\infty$.

Маємо (з теореми про неперервність оберненої функції [**4**, с.172–173]):

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \varphi(t) - \nearrow \text{ на } [\alpha, +\infty), \\ 2)\ \varphi([\alpha, +\infty)) = [a, +\infty), \\ 3)\ \varphi(t) - \text{неперервна на } [\alpha, +\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1)\ \exists \varphi^{-1} : [a, +\infty) \to [\alpha, +\infty), \\ 2)\ \varphi^{-1}(x) - \nearrow \text{ на } [a, +\infty), \\ 3)\ \varphi^{-1}(x) - \text{неперервна на } [a, +\infty). \end{array}$$

Розглянемо нескінченно велику послідовність $\{A_n\}$ таку, що $A_n \to +\infty$. Упорядкуємо її в порядку зростання (доведіть, що це можливо зробити ✍!), утворивши послідовність $\{A'_n\} - \nearrow$, при цьому $A'_n \to +\infty$. Тоді послідовність $\{\beta_n = \varphi^{-1}(A_n)\}$ буде упорядкованою разом із $\{A'_n\}$, в результаті послідовність $\{\beta'_n = \varphi^{-1}(A'_n)\}$ також буде зростаючою. Дійсно,

$$\left.\begin{array}{l} A'_n \le A'_{n+1}, \\ \varphi^{-1}(x) - \nearrow \text{ на } [a, +\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \beta'_n = \varphi^{-1}(A'_n) \le \varphi^{-1}(A'_{n+1}) = \beta'_{n+1}.$$

Доведемо, що $\beta'_n \to +\infty$. Припустимо супротивне: $\beta'_n \not\to +\infty$. Оскільки послідовність $\{\beta'_n\}$ зростає, і $\beta'_n \not\to +\infty$, то вона є обмеженою, а тому, за теоремою Вейєрштрасса ([**3**, с.96, теорема 3.15; **4**, с.71), збіжною.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Нехай } \lim\limits_{n\to\infty} \beta'_n = \mathrm{B} \in [\alpha, +\infty), \\ \text{за умовою } \varphi(t) - \\ \text{неперервна на } [\alpha, +\infty), \\ \varphi([\alpha, +\infty)) = [a, +\infty), \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A'_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(\beta'_n) = \varphi(\mathrm{B}) \in [a, +\infty).$$

Отримане суперечить припущенню про те, що $A'_n \to +\infty$.

При переставленні послідовностей $\{A'_n\}$ і $\{\beta'_n\}$ у зворотному порядку висновки щодо їх прямування до $+\infty$ не зміняться. Отже, якщо $A \to +\infty$, то $\beta \to +\infty$.

Таким чином, маємо

$$\int_a^A f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\ ;$$

$$\underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)dx}_{\exists} = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \lim_{\beta\to\pm\infty}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = \underbrace{\int_\alpha^{\pm\infty} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt}_{\exists}\ ,$$

$$\exists \quad \Rightarrow \quad \exists \qquad \blacksquare$$

Пригадаємо теорему про інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Якщо *u, v* неперервно диференційовні на [*a,A*], то

$$\int_a^A udv = uv\Big|_a^A - \int_a^A vdu\ . \tag{1.46}$$

☝ **Теорема 1.37** (*інтегрування частинами під знаком невласного інтеграла I роду*).

$\left.\begin{array}{l} u,\ v \text{ неперервно} \\ \text{диференційовні на } [a,+\infty)\ ; \\ \exists \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x) = L\ , \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \int_a^{+\infty} udv = L - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} vdu \\ \text{зб.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{зб.} \end{array}}$

Доведення. Потрібно лише зробити граничний перехід у формулі (1.46). Ті дві границі, що будуть стояти перед знаками інтегралів, будуть існувати чи не існувати одночасно. ■

5. Невласні інтеграли II роду

Ці інтеграли є узагальненням визначеного інтеграла Рімана для необмеженої функції.

Нехай $f(x)$ задана на [*a, b*).

☝ 🗁**Означення 1.49.** Точку b називають *особливою точкою функції* $f(x)$, якщо функція обмежена на будь-якому відрізку $[a, b-\alpha]$ $\forall\alpha\in(0, b-a)$, а на [*a, b*) ця функція необмежена.

$F(\alpha) = \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$ – функція змінної $\alpha\in(0, b-a)$.

Чи існує границя $\lim\limits_{\alpha\to+0} F(\alpha)$? Не завжди!

Означення 1.50. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$, тоді якщо $\exists \lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$, то значення цієї границі називають *невласним інтегралом II роду*. Позначення: $\int\limits_a^b f(x)dx$. Крім того, в цьому випадку інтеграл називають *збіжним*. Таке ж позначення зберігають й тоді, коли відповідної границі $\lim\limits_{\alpha\to+0} \int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$ не існує, а інтеграл називають *розбіжним*.

Зауваження 1.19. Розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ має скінченну кількість особливих точок на проміжку інтегрування.

Нехай спочатку на відрізку $[a,b]$ особливими є точки a,b,c, де $a<c<b$, тоді, за означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\alpha_1\to+0\\ \alpha_2\to+0\\ \alpha_3\to+0\\ \alpha_4\to+0}} \left(\int\limits_{a+\alpha_1}^{c-\alpha_2} f(x)dx + \int\limits_{c+\alpha_3}^{b-\alpha_4} f(x)dx \right)$$

при незалежному прямуванні $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ до нуля справа. В загальному випадку потрібно діяти за тим самим означенням.

Якщо відрізок $[a,b]$ з декількома особливими точками можна розбити на скінченну кількість відрізків, на кожному з яких лежить тільки одна особлива точка (що збігається з одним із кінців відрізка), причому на кожному такому відрізку інтеграл II роду збігається, то в такому випадку інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ буде збігатися й дорівнювати сумі інтегралів на відрізках розбиття. Доведення цього факту здійснюють аналогічно доведенню зауваження 1.16.

Приклад 1.26. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Підінтегральна функція на відрізку $[-1,1]$ має дві особливі точки -1 і 1. Подамо цей інтеграл у вигляді суми двох: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \ldots + \int\limits_{0}^{1} \ldots$.

Оскільки

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\alpha\to+0}\int_{-1+\alpha}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\alpha\to+0}\arcsin x\Big|_{-1+\alpha}^{0}=\lim_{\alpha\to+0}\left(0-\arcsin(-1+\alpha)\right)=\frac{\pi}{2},$$

аналогічно $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$ (доведіть це ✍!), тобто обидва інтеграли збігаються, тому збігається й заданий інтеграл, причому

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\ldots+\int_{0}^{1}\ldots=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi\cdot$$

Приклад 1.27. Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$.

Підінтегральна функція на відрізку $[-1,1]$ має одну особливу точку 0. Подамо інтеграл за означенням як таку границю:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\ln|x|\Big|_{\varepsilon_2}^{1})=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}(\ln|-\varepsilon_1|-\ln\varepsilon_2)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Покажемо, що така границя не існує. Застосуємо означення границі за Гейне:

для $\varepsilon_{1,1}^{(n)}=\varepsilon_{2,1}^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ маємо $\ln\frac{\varepsilon_{1,1}^{(n)}}{\varepsilon_{2,1}^{(n)}}=\ln 1=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$,

для $\varepsilon_{1,2}^{(n)}=\frac{1}{n}$ і $\varepsilon_{2,2}^{(n)}=\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, маємо $\ln\frac{\varepsilon_{1,2}^{(n)}}{\varepsilon_{2,2}^{(n)}}=\ln\frac{1}{2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln\frac{1}{2}$,

тому границя не існує.

Отже, заданий інтеграл розбігається.

Приклад 1.28. Розглянемо такий інтеграл:

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}=\lim_{\alpha\to+0}\int_{a}^{b-\alpha}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}=\lim_{\alpha\to+0}\begin{cases}-\dfrac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Big|_{a}^{b-\alpha}, & \lambda\neq 1,\\ \ln|b-x|\Big|_{a}^{b-\alpha}, & \lambda=1\end{cases}=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\begin{cases}\dfrac{-\alpha^{1-\lambda}+(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda\neq 1,\\ -\ln\alpha+\ln|b-a|, & \lambda=1.\end{cases}$$

Тому при

$1-\lambda > 0$ – інтеграл збігається, $\Rightarrow$ при $\lambda < 1$ – збігається;

$1-\lambda \le 0$ – інтеграл розбігається, $\Rightarrow$ при $\lambda \ge 1$ – розбігається.

Висновок: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$

збігається при $\lambda < 1$ розбігається при $\lambda \ge 1$

6. Зв'язок між невласними інтегралами I та II роду

Маємо:

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\int_a^{b-\alpha} f(x)dx = \left\| \begin{array}{ll} t=\dfrac{1}{b-x} & x = b-\dfrac{1}{t} \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b-\alpha \\ \hline t & \dfrac{1}{b-a} & \dfrac{1}{\alpha} \end{array} & dx = \dfrac{dt}{t^2} \end{array} \right\| = \int_{\frac{1}{b-\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}; \\[2ex]
f(x) \text{ на } [a,\, b\text{-}\alpha] \text{ обмежена і неперервна} \Rightarrow \exists \displaystyle\int_a^b f(x)dx; \\[2ex]
\varphi(t) = b-\dfrac{1}{t} \ \Rightarrow\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2} \text{ на } \left[\dfrac{1}{b\text{-}a}, \dfrac{1}{\alpha}\right] \text{ неперервна}; \\[2ex]
\alpha \to +0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} \to +\infty,
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{b-\alpha}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} = \int_a^b f(x)dx.$$

<u>*Отже,*</u> якщо інтеграл $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ є невласним інтегралом другого роду з особливою точкою b, то після заміни $t=\dfrac{1}{b-x}$ він буде невласним інтегралом $\displaystyle\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}dt$ першого роду.

<u>*Висновок:*</u> із наявності зв'язку між невласними інтегралами I і II роду випливає можливість використання властивостей інтегралів I роду для дослідження та обчислення невласних інтегралів II роду.

Теорема 1.38 (*критерій Коші збіжності невласних інтегралів II роду*). Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається тоді й лише тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0: \forall \ \alpha_1, \alpha_2 \in (0,b) \ \ (\alpha_1 < \delta \wedge \alpha_2 < \delta) \Rightarrow \left| \int_{b-\alpha_1}^{b-\alpha_2} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Доведення. Потрібно до функції $F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)dx$ застосувати критерій Коші існування границі $\lim_{\alpha \to +0} F(\alpha)$. (Закінчить доведення самостійно ✍!) ■

Як наслідок зв'язку між невласними інтегралами I і II роду й ознак порівняння для інтегралів I роду, існують ознаки порівняння для інтегралів II роду.

Загальна ознака порівняння має майже таке формулювання, що і для невласного інтеграла I роду.

Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді:

I. Якщо $\exists$ *g(x)*:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ |f(x)| \le g(x) \ \forall x \in [a.b), \\ 2) \ \int_a^b g(x)dx \text{ збігається,} \end{array} \right\} \text{, тоді } \int_a^b f(x)dx \text{ збігається;}$$

II. Якщо $\exists$ *g(x)*:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ 0 \le g(x) \le f(x) \ \forall x \in [a.b), \\ 2) \ \int_a^b g(x)dx \text{ розбігається,} \end{array} \right\} \text{, тоді } \int_a^b f(x)dx \text{ розбігається.}$$

Зокрема, якщо $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a.b)$, то має місце схематичне зображення щодо дослідження на збіжність невласних інтегралів II роду

$$\boxed{\begin{array}{c} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}}$$

Частинна ознака порівняння. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді

I. якщо $\exists \lambda < 1 \wedge \exists\, c > 0:\ |f(x)| \le \dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається;

II. якщо $\exists \lambda \ge 1 \wedge \exists\, c > 0:\ f(x) \ge \dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

Частинна ознака порівняння в граничній формі. Нехай точка b – особлива точка функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, тоді:

I. Якщо $\exists \lambda < 1 \wedge \exists \lim\limits_{x \to b-0} |f(x)|(b-x)^{\lambda} = c$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається.

II. Якщо $\exists \lambda \ge 1 \wedge \exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x)(b-x)^{\lambda} = c > 0$, тоді $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

7. Головне значення за Коші невласних інтегралів

Для функції $f(x)$, що задана на (-∞,+∞), невласний інтеграл I роду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ було означено як значення границі (якщо вона існує); $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{A \to +\infty \\ B \to -\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx$ при незалежному прямуванні A, B до $+\infty$ і $-\infty$.

Якщо границі не існує, то інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають *розбіжним* на (-∞, +∞). Існують випадки, коли при заміні $B = -A$ дана границя існує. В такому випадку говорять про головне значення за Коші цього інтеграла.

☝ 🗀**Означення 1.51.** Нехай функція $f(x)$ визначена на $\left(-\infty, +\infty\right)$ і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, тоді кажуть, що *існує невласний* *інтеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *у розумінні головного значення за Коші*, якщо $\exists \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$. Цю границю називають *головним значенням за Коші* й позначають $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ [1]. Тобто

$$\boxed{\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx}$$

Із означення випливає, що зі збіжності невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ випливає його існування в розумінні Коші, крім того $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 1.29. Розглянемо головне значення інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

Маємо:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-A}^{A} = 0 .$$

Як бачимо, він існує у розумінні головного значення за Коші. Однак він є розбіжним як невласний інтеграл I роду:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{B}^{A} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{2}(A^2 - B^2) ,$$

така границя не існує. Пояснимо це. Застосуємо означення границі за Гейне: для $A_1^{(n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,\ B_1^{(n)} = -n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(A_1^{(n)}\right)^2 - \left(B_1^{(n)}\right)^2\right] = 0 \ \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 ,$$

[1] V.p. – початкові літери словосполучення “Valeur principal”, що означає французькою «головне значення»

для $A_2^{(n)} = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,\ B_2^{(n)} = -2n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(A_2^{(n)}\right)^2 - \left(B_2^{(n)}\right)^2\right] = -\frac{3n^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty,$$

тому границі не існує.

Теорема 1.39 1) Якщо $f(x)$ – непарна на (-∞, +∞) і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, то $\exists$ $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

2) Якщо $f(x)$ – парна на (-∞, +∞) і інтегровна на будь-якому сегменті $[-A, A]$, тоді

$\exists$ $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ $\Leftrightarrow$ збігається невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$, причому

$$\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx.$$

Доведення. Якщо $f(x)$ – непарна на $[-A, A]$, тоді $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0 \Rightarrow$

$\exists$ $\text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 0$.

Якщо $f(x)$ – парна на $[-A, A]$, то $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)dx$, тоді

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx & = 2 & \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{0}^{A} f(x)dx, \\ \exists & \Leftrightarrow & \exists\,(\text{зб.}), \\ \| & & \| \\ \text{V.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx & = 2 & \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx. \end{array} \quad \blacksquare$$

Розглянемо відрізок $[a, b]$, і нехай $a < c < b$, а точка c – особлива.

☝ 🗀**Означення 1.52**. Якщо функція $f(x)$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ такого, що $a < c - \varepsilon < c + \varepsilon < b$, існують інтеграли Рімана $\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ і $\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, то під *головним значенням невласного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *в розумінні Коші* (V.p.) розуміють значення границі (якщо вона існує):

$$\boxed{\text{V.p.}\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]}.$$

Нагадаємо, що звичайний *невласний інтеграл II роду* з тією ж особливою точкою означається як

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right)$$

у випадку існування границі в правій частині рівності при незалежному прямуванні ε_1 і ε_2 до нуля справа.

Із означень випливає, що якщо існує невласний інтеграл II роду з особливою точкою в середині відрізка, то існує й інтеграл у розумінні головного значення за Коші. Зворотне твердження – невірне.

Приклад 1.30. Розглянемо один наочний приклад. Інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$ як невласний інтеграл є розбіжним (див. приклад 1.27). При цьому в розумінні головного значення Коші він існує й дорівнює нулю, а саме:

$$\text{V.p.}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\,\Big|_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x|\,\Big|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{-\varepsilon}{\varepsilon}\right| = 0\,.$$

§6. Функції обмеженої варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса

При розгляді цієї теми будемо вважати, що функція $f(x)$ задана й скінченна на відрізку $X = [a,b]$.

1. Монотонні функції

🗁**Означення 1.53.**

$f(x)$ – *зростаюча* ($\nearrow$) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

$f(x)$ – *спадна* ($\searrow$) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

$f(x)$ – *неспадна (нестрого зростаюча)* на X

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2),$$

$f(x)$ – *незростаюча (нестрого спадна)* на X

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2),$$

$f(x)$ – *монотонна (строго)* на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – зростаюча або спадна на X,

$f(x)$ – *нестрого монотонна* на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} f(x)$ – незростаюча або неспадна на X.

Як правило, будемо розглядати зростаючі (неспадні) функції, оскільки будь-яка спадна (незростаюча) функція $f(x)$ може бути подана таким чином $f(x) = -(-f(x))$, де $(-f(x))$ – зростаюча (неспадна) функція.

Лема 1.3. Якщо $f(x)$ – монотонна (нестрого) на $[c;b] \Rightarrow$

$$\left(\forall a \in (c,b) \quad \exists \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0) \wedge \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)\right) \wedge$$
$$\wedge \exists \lim_{x \to c+0} f(x) \wedge \exists \lim_{x \to b-0} f(x).$$

Доведення. Нехай $f(x) - \nearrow$ (нестрого) на $[c;b]$. Доведемо, що $\exists f(a+0)$. Розглянемо допоміжну множину $A = \{ f(x) : x \in (a;b) \}$. Оскільки

$$\left.\begin{array}{l} a < x < b \\ f(x) - \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow f(a) < f(x) < f(b)\,,$$

то множина A обмежена знизу числом $f(a) \Rightarrow \exists \gamma = \inf A$.

Довести: $\gamma = \inf A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \inf A \overset{def}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists 0 < \delta < b - a : \gamma \le f(a+\delta) < \gamma + \varepsilon \\ \left.\begin{array}{l} \forall x \in [c,b) \quad a \le x < a + \delta \\ \qquad f(x) \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow f(a) \le f(x) < f(a+\delta) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underset{f(a)\ \le\ \gamma\ \le\ f(x)\ \le\ f(a+\delta)\ <\ \gamma+\varepsilon}{\longrightarrow} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in [c,b) \quad a \le x < a + \delta \Rightarrow \ \left| f(x) - \gamma \right| \le \varepsilon\,.$$

Висновок: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \gamma$. ■

Наслідок 1.10.

I. $f(x) \nearrow$ (нестрого) на $[c;b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad c < a_1 < x < b \Rightarrow f(c) \le f(a_1) \le f(a_1+0) \le f(x) \le f(b), \\ (2) \quad c < y < a_2 < b \Rightarrow f(c) \le f(y) \le f(a_2 - 0) \le f(a_2) \le f(b). \end{cases}$$

II. $f(x) \searrow$ (нестрого) на $[c;b]$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) \quad c < a_1 < x < b \Rightarrow f(c) \ge f(a_1) \ge f(a_1+0) \ge f(x) \ge f(b), \\ (2) \quad c < y < a_2 < b \Rightarrow f(c) \ge f(y) \ge f(a_2 - 0) \ge f(a_2) \ge f(b). \end{cases}$$

Доведення.

$$\left.\begin{array}{c} c < a_1 < x < b, \\ f(x) \nearrow \text{(нестрого)}, \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} f(c) \le f(a_1) \le f(x) \le f(b), \\ x \to a_1 + 0 - \text{граничний} \quad \text{перехід}, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c) \le f(a_1) \le f(a_1 + 0) \le f(x) \le f(b).$$

Обґрунтуємо останню нерівність. А саме, перевіримо виконання імплікації

$$c < a_1 < x < b \ \Rightarrow f(a_1 + 0) \le f(x)\,.$$

Із доведення *леми 1.3* випливає

$$\left.\begin{array}{r}\gamma = \inf A = f(a_1+0),\\ f(x)\in A,\end{array}\right\} \Rightarrow f(a_1+0) \le f(x)\ .\ \blacksquare$$

Висновок із леми 1.3. Монотонна (нестрого) на відрізку функція може мати на цьому відрізку розриви лише першого роду.

🗀**Означення 1.54.** Якщо функція $f(x)$ в точці c має розрив першого роду, то

правий її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c+0)-f(c)$,

лівий її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c)-f(c-0)$,

повний її стрибок в точці c $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ значення виразу $f(c+0)-f(c-0)$.

У крайніх точках множини визначення $D_f = [a,b]$ функція може мати лише односторонні стрибки. А саме: в точці a – правий стрибок, рівний $f(a+0)-f(a)$, а в точці b – лівий, рівний $f(b)-f(b-0)$.

У випадку, коли функція $f(x)$ неперервна в точці c, то $f(c+0)=f(c)=f(c-0)$, тому всі її стрибки дорівнюють нулю.

Лема 1.4. Якщо $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, а $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset (a,b)$, тоді має місце нерівність

$$f(a+0)-f(a)+\sum_{k=1}^{n}\Big[f\big(x_k+0\big)-f\big(x_k-0\big)\Big]+f(b)-f(b-0) \le$$

$$\le f(b)-f(a)\ . \quad (1.47)$$

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що точки розриву функції $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ перенумеровані в порядку збільшення їх значень. Розглянемо допоміжні точки $\{y_k\}_{k=1}^{n+1}$ такі, що

$$a < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < \ldots < y_k < x_k < y_{k+1} < \ldots < y_n < x_n < y_{n+1} < b\ .$$

Тоді завдяки зростанню (нестрогому) функції і *наслідку 1.10* отримаємо:

$$\left.\begin{array}{ll} a < y_1 & \Rightarrow \quad f(a+0)-f(a) \le f(y_1)-f(a), \\ y_1 < x_1 < y_2 & \Rightarrow f(x_1+0)-f(x_1-0) \le f(y_2)-f(y_1), \\ y_2 < x_2 < y_3 & \Rightarrow f(x_2+0)-f(x_2-0) \le f(y_3)-f(y_2), \\ \ldots & \\ y_k < x_k < y_{k+1} & \Rightarrow f(x_k+0)-f(x_k-0) \le f(y_{k+1})-f(y_k), \\ \ldots & \\ y_n < x_n < y_{n+1} & \Rightarrow f(x_n+0)-f(x_n-0) \le f(y_{n+1})-f(y_n), \\ y_{n+1} < b & \Rightarrow \quad f(b)-f(b-0) \le f(b)-f(y_{n+1}), \end{array}\right\}(+) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(a+0)-f(a)+f(x_1+0)-f(x_1-0)+f(x_2+0)-f(x_2-0)+\ldots+$$
$$+f(x_k+0)-f(x_k-0)+\ldots+f(x_n+0)-f(x_n-0)+f(b)-f(b-0) \le$$
$$\le f(b)-f(a). \quad \blacksquare$$

Наслідок 1.11. Якщо $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, то множина її точок розриву, стрибки в яких не менші за σ, є скінченною.

Доведення. Із нерівності (1.47) випливає, що сума всіх стрибків зверху оцінюється різницею $f(b)-f(a)$, а знизу (за умовою) – значенням виразу $n\cdot\sigma$. Отже, отримаємо $n\cdot\sigma \le f(b)-f(a)$. Звідки випливає, що кількість n точок розриву функції, стрибки в яких неменші за σ, може бути лише скінченною. ■

Теорема 1.40. Якщо $f(x)-\nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, то множина її точок розриву не більше, ніж зчисленна. Крім того, має місце нерівність

$$f(a+0)-f(a)+\sum_k \left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(b)-f(b-0) \le$$
$$\le f(b)-f(a), \quad (1.48)$$

де $\{x_k\} \subset (a,b)$ – усі точки розриву цієї функції.

Доведення. Через A_n позначимо множину точок розриву функції, стрибки в яких не менші за $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$). За *наслідком 1.11* кожна із множин A_n ($n \in \mathbb{N}$) є скінченною. Множина A усіх точок розриву функції є об'єднанням множин A_n ($n \in \mathbb{N}$), тобто $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Таким чином, множина A, як зчисленне об'єднання скінченних множин, є не більш, ніж зчисленною. Першу частину теореми доведено.

Якщо функція має скінченну множину точок розриву, то нерівність (1.48) перетворюється на нерівність (1.47). Якщо ж ця множина зчисленна, то після здійснення в нерівності (1.47) граничного переходу при $n \to \infty$ отримаємо нерівність (1.48). ■

🗀**Означення 1.55.** Нехай функцію $f(x)$ задано на $[a,b]$, тоді *функцією стрибків* цієї функції називають функцію $s(x)$, задану співвідношеннями:

$$s(a) = 0,$$
$$s(x) = f(a+0) - f(a) + \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + f(x) - f(x-0),$$

де $\{x_k\} \subset (a,b)$ – точки розриву даної функції.

Теорема 1.41. Різниця між неспадою функцією і функцією її стрибків є неспадна неперервна функція.

Доведення. Позначимо зазначену в теоремі функцію через $\varphi(x)$, тобто $\varphi(x) = f(x) - s(x)$. Нехай $a < x < y < b$, тоді

$$s(y) - s(x) =$$
$$= \left[f(a+0) - f(a) \right] + \sum_{x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right] -$$
$$- \left[f(a+0) - f(a) \right] - \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] - \left[f(x) - f(x-0) \right] =$$
$$= \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(x+0) - f(x-0) \right] +$$
$$+ \sum_{x < x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right] -$$
$$- \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] - \left[f(x) - f(x-0) \right] =$$
$$= \left[f(x+0) - f(x) \right] + \sum_{x < x_k < y} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + \left[f(y) - f(y-0) \right].$$

Оскільки $f(x) - \nearrow$ (нестрого) на $[x,y]$, то до отриманого виразу можна застосувати нерівність (1.48). Тоді

$$s(y)-s(x)=\left[f(x+0)-f(x)\right]+\sum_{x<x_k<y}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+\left[f(y)-f(y-0)\right]\leq$$

$$\leq f(y)-f(x).$$

Звідки

$$f(x)-s(x)\leq f(y)-s(y),$$

$$\varphi(x)\leq\varphi(y). \tag{1.49}$$

Нестроге монотонне зростання функції $\varphi(x)$ доведено.

Доведемо тепер неперервність функції $\varphi(x)$ в точці x. Для цього потрібно довести , що

$$\varphi(x-0)=\varphi(x)=\varphi(x+0).$$

Доведемо лише другу рівність, першу доводить аналогічно.

Здійснимо граничний перехід під знаком нерівності (1.49) при $y\to x+0$, одержимо

$$\varphi(x)\leq\varphi(x+0). \tag{1.50}$$

Оскільки

$$s(y)-s(x)=$$

$$=\underbrace{\left[f(x+0)-f(x)\right]}_{\oplus}+\sum_{x<x_k<y}\underbrace{\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]}_{\oplus}+\underbrace{\left[f(y)-f(y-0)\right]}_{\oplus}\geq$$

$$\geq f(x+0)-f(x),$$

тобто

$$s(y)-s(x)\geq f(x+0)-f(x),$$

то, здійснюючи граничний перехід у останній нерівності при $y\to x+0$, отримаємо

$$s(x+0)-s(x)\geq f(x+0)-f(x),$$

$$\varphi(x)\geq\varphi(x+0). \tag{1.51}$$

Із нерівностей (1.50) і (1.51) матимемо: $\varphi(x)=\varphi(x+0)$. Теорему повністю доведено. ■

Наведені вище твердження виконуються також і для незростаючої функції, за тією лише відмінністю, що праві частини нерівностей (1.47) і (1.48) будуть виражатися різницею $f(a)-f(b)$.

Приклад 1.31. Наведемо приклад функції, яка:

1) нестрого зростає на відрізку $[0;1]$,
2) неперервна на відрізку $[0;1]$,
3) майже в усіх точках $[0;1]$ має похідну $f'(x)$, що дорівнює 0,
4) $f(0)=0,\ f(1)=1$.

Розв'язання. Задамо значення функції в точках доповняльних інтервалів відкритої канторової множини G:

1) $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$,

2) $x\in\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^2}$ і $x\in\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2^2}$,

3) $x\in\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^3}$, $x\in\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2^3}$,

$x\in\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{5}{2^3}$, $x\in\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)\Rightarrow f(x)=\frac{7}{2^3}$ і т.д.

Зокрема, для n-ої групи 2^{n-1} доповняльних інтервалів функцію $f(x)$ задамо значеннями $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\ldots,\frac{2^n-1}{2^n}$. У результаті функція вже визначена в усіх точках множини G.

Визначимо тепер функцію в точках замкненої канторової множини F:

$f(0)=0$, $f(1)=1$,

$$x_0\in(0;1)\setminus G\Rightarrow f(x_0)=\sup_{x\in G,x<x_0} f(x).$$

Схему графіка функції див. на рис. 1.35.

Із побудови функції випливає її нестроге зростання.

Доведемо неперервність функції на $[0;1]$. Припустимо супротивне: точка $x_0 \in [0;1]$ є точкою розриву, тоді внаслідок зростання (нестрогого) функції цей розрив може бути лише першого роду, а один із інтервалів $\left(f(x_0-0); f(x_0)\right)$ або $\left(f(x_0); f(x_0+0)\right)$ вільний від значень функції. Позначимо такий інтервал (α, β).

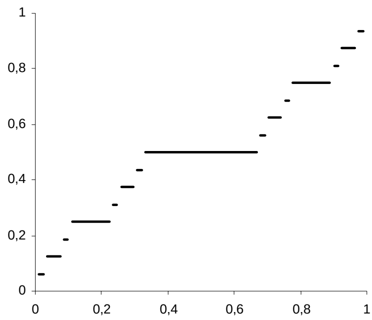


Рис. 1.35.

Оскільки на множині G функція набуває всіх двійково-раціональних значень[1] із сегмента $[0;1]$, то поміж числами α і β можна знайти двійково-раціональне число, яке повинно бути значенням функції в точці із G. Це суперечить припущенню про відсутність усередині інтервалу (α, β) значень функції. Отже, функція є неперервною на $[0;1]$.

Замкнена канторова множина F має лебеґову міру 0 (див. *приклад 1.17.4*). У точках множини $G = [0;1] \setminus F$ функція є *кусково-сталою*. На кожному доповняльному інтервалі вона набуває сталого значення, тому в кожній точці цього інтервалу похідна дорівнює 0. Отже,

$$f'(x) \overset{\substack{\text{майже}\\ \text{скрізь}}}{=} 0 . \quad \blacksquare$$

2. Функції обмеженої варіації: означення та властивості

Нехай функція $f(x)$ задана на сегменті $[a,b]$. Розглянемо розбиття R цього сегмента:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

[1] Двійково-раціональним числом називають число, яке можна подати дробом вигляду $\frac{m}{2^k}$, $k = 0,1,2,\ldots$, $m \in \mathbb{Z}$. Нескладно довести, що множина двійково-раціональних чисел має ті самі властивості, що і множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \right\}$.

й утворимо суму $V = V(f, R) = \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - f(x_{k-1}) |$.

🗀**Означення 1.56.** *Повною варіацією* $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називають

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \overset{def}{=} \sup_R V(f, R).$$

Якщо $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < +\infty$, то функцію $f(x)$ *називають функцією обмеженої варіації* на відрізку $[a,b]$.

Теорема 1.42. Нестрого монотонна на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку обмежену варіацію, а повна варіація такої функції дорівнює

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \left| f(b) - f(a) \right|.$$

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що ця функція неспадна.

Розглянемо розбиття

$$R:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Оскільки $f(x) - \nearrow$ (нестрого) на $[a,b]$, то $f(x_k) \geq f(x_{k-1})$, $k = \overline{1,n}$. Отже,

$$V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) +$$
$$+ f(x_3) - f(x_2) + \ldots + f(x_{k-1}) - f(x_{k-2}) + f(x_k) - f(x_{k-1}) + \ldots +$$
$$+ f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a).$$

Тому $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_R V(f,R) = f(b) - f(a)$. ■

🗀**Означення 1.57.** Функція $f(x)$, задана на сегменті $[a,b]$, *задовольняє умову Ліпшица, якщо*

$$\exists K > 0 : \forall x, y \in [a,b] \ \ | f(x) - f(y) | \leq K \,| x - y |.$$

При цьому число K називають *сталою Ліпшица*.

Теорема 1.43. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову Ліпшица на $[a,b]$, то вона на цьому відрізку має обмежену варіацію.

Доведення. Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$

$$R:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Тоді

$$V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| \le K \sum_{k=1}^{n} \left| x_k - x_{k-1} \right| = K(b-a)\,,$$

$$\mathop{V}_a^b(f) = \sup_R V(f,R) \le K(b-a)\,. \quad \blacksquare$$

Наслідок 1.12. Якщо функція $f(x)$ має на відрізку $[a,b]$ обмежену похідну, то вона на цьому відрізку має обмежену варіацію.

Доведення. За умовою функція на $[a,b]$ має обмежену похідну, тому

$$\exists K > 0 : \forall x \in [a,b]\ \ \left| f'(x) \right| \le K\,.$$

Тоді $\forall x, y \in [a,b]$ на відрізку, що сполучає ці точки, функція диференційовна, а тому й неперервна. Внаслідок цього на такому відрізку можна застосовувати теорему Лагранжа [**3**, с. 245-246; **4**, с. 226-227]:

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)\cdot(x-y),$$

де ξ лежить між x і y. Тому

$$\left| f(x) - f(y) \right| = \left| f'(\xi) \right| \cdot \left| x-y \right| \le K \left| x-y \right|,$$

і функція задовольняє умову Ліпшица, тому за *теоремою 1.43* має обмежену варіацію на $[a,b]$. $\blacksquare$

Теорема 1.44 (*необхідна умова обмеженості варіації*)**.** Будь-яка функція обмеженої варіації є обмеженою. Тобто

$$\mathop{V}_a^b(f) < \infty \Rightarrow \exists \sup_{[a,b]} f(x)\,.$$

Доведення. Розглянемо розбиття $R^*:\ a \le x \le b$, тоді

$$\left.\begin{array}{l} V(f,R^*)\le \sup\limits_R V(f,R)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \\ V(f,R^*)=\left|f(x)-f(a)\right|+\left|f(b)-f(x)\right|\ge\left|f(x)-f(a)\right| \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|f(x)-f(a)\right|\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\Rightarrow f(a)-\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le f(x)\le f(a)+\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Оскільки отримана нерівність виконується при всіх $x\in[a,b]$, то функція $f(x)$ обмежена на $[a,b]$. ■

Приклад 1.32. Навести приклад обмеженої функції з необмеженою варіацією.

Розв’язання. Розглянемо функцію

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x}, & 0<x\le 1, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

на сегменті $\left[0,1\right]$. На цьому відрізку $\left|x\cdot\cos\dfrac{\pi}{2x}\right|=x\cdot\left|\cos\dfrac{\pi}{2x}\right|\le 1$, тому функція є обмеженою.

Розбиття відрізка $\left[0,1\right]$ оберемо спеціальним чином, а саме:

$$R_m^*:\quad 0<\frac{1}{2m}<\frac{1}{2m-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1.$$

Тоді

$$V(f,R_m^*)=\left|1\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos\pi\right|+\left|\frac{1}{2}\cdot\cos\pi-\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}\right|+\left|\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\cdot\cos 2\pi\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{4}\cdot\cos 2\pi-\frac{1}{5}\cdot\cos\frac{5\pi}{2}\right|+\ldots+\left|\frac{1}{2m-1}\cdot\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}-\frac{1}{2m}\cdot\cos m\pi\right|+\left|\frac{1}{2m}\cdot\cos m\pi\right|=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m},$$

звідки

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V(f,R)\ge\sup_m V(f,R_m^*)=\sup_m\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}\right)=\infty.\quad ■$$

Теорема 1.45 *(арифметичні операції над функціями обмеженої варіації).* I. Сума, різниця й добуток функцій скінченної варіації є функцією скінченної варіації. Тобто

$$\begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty, \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f \pm g) < \infty, \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(f \cdot g) < \infty. \end{cases}$$

II. Якщо $f(x)$ – функція скінченної варіації на $[a,b]$, причому $f(x) \geq c > 0$ всюди на $[a,b]$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ також має скінченну варіацію на $[a,b]$. Тобто

$$\begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty, \\ f(x) \geq c \ \forall x \in [a,b], \end{cases} \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{1}{f}\right) < \infty .$$

III. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ – функції скінченної варіації на $[a,b]$, причому $g(x) \geq \sigma > 0$ всюди на $[a,b]$, то частка $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є функцією скінченної варіації. Тобто

$$\begin{cases} \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \wedge \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \\ g(x) \geq c \ \forall x \in [a,b], \end{cases} \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\frac{f}{g}\right) < \infty .$$

Доведення. Розглянемо довільне розбиття відрізка $[a,b]$:

$$R: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b .$$

I. Тоді для суми й різниці функцій обмеженої варіації

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \left(f(x_i) \pm g(x_i) \right) - \left(f(x_{i-1}) \pm g(x_{i-1}) \right) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left| \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \pm \left(g(x_i) - g(x_{i-1}) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| + \sum_{i=1}^{n} \left| g(x_i) - g(x_{i-1}) \right| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g).$$

Для добутку функцій обмеженої варіації

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right| =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)\big(g(x_i)-g(x_{i-1})\big)+\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)g(x_{i-1})\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)\right|\cdot\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\cdot\left|g(x_{i-1})\right| \le$$

$$\left\{\mathop{V}_a^b(f)<\infty \Rightarrow \exists \sup_{[a,b]} f(x);\quad \mathop{V}_a^b(g)<\infty \Rightarrow \exists \sup_{[a,b]} g(x)\right\}$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\cdot \mathop{V}_a^b(g)+\sup_{x\in[a,b]}\left|g(x)\right|\cdot \mathop{V}_a^b(f).$$

Переходимо до верхніх меж за всіма можливими розбиттями відрізка $[a,b]$, отримаємо:

$$\mathop{V}_a^b(f\pm g)\le \mathop{V}_a^b(f)+\mathop{V}_a^b(g),$$

$$\mathop{V}_a^b(f\cdot g)\le \sup_{x\in[a,b]}\left|f(x)\right|\cdot \mathop{V}_a^b(g)+\sup_{x\in[a,b]}\left|g(x)\right|\cdot \mathop{V}_a^b(f). \quad \blacksquare$$

II. Для функції $\dfrac{1}{f(x)}$ матимемо:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right| = \sum_{i=1}^{n}\frac{\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|}{\left|f(x_i)\right|\cdot\left|f(x_{i-1})\right|} \le$$

$$\left\|\left|f(x_i)\right|\ge c,\ \ \left|f(x_{i-1})\right|\ge c\right\|$$

$$\le \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right| \le \frac{1}{c^2}\mathop{V}_a^b(f).$$

Переходимо до верхньої межі за різними розбиттями $[a,b]$:

$$\mathop{V}_a^b\left(\frac{1}{f}\right)\le \frac{1}{c^2}\mathop{V}_a^b(f).$$

Властивість III є наслідком властивостей I і II. $\blacksquare$

Теорема 1.46 *(адитивність повної варіації)***.** Нехай на відрізку $[a,b]$ задано скінченну функцію $f(x)$ і $a<c<b$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left(\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<\infty \wedge \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<\infty\right);$$

$$\boxed{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)} \tag{1.53}$$

Доведення. Нехай $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$. Розіб'ємо кожен із відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ довільним чином точками

$$a=y_0<y_1<\ldots<y_m=c; \quad c=z_0<z_1<\ldots<z_n=b$$

і розглянемо суми

$$V_{[a,c]}=\sum_{k=1}^{m}\left|f(y_k)-f(y_{k-1})\right|, \qquad V_{[c,b]}=\sum_{k=1}^{n}\left|f(z_k)-f(z_{k-1})\right|.$$

Множина точок $R^*=\{y_k\}\bigcup\{z_k\}$ утворює розбиття відрізку $[a,b]$, якому відповідає сума $V_{[a,b]}=V(f,R^*)=V_{[a,c]}+V_{[c,b]}$. Тоді

$$\left.\begin{aligned} &V\left(f,R^*\right)\le\sup_R V(f,R)=\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),\\ &V_{[a,c]}+V_{[c,b]}=V_{[a,b]}=V\left(f,R^*\right), \end{aligned}\right\}\Rightarrow V_{[a,c]}+V_{[c,b]}\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\Rightarrow$$

{як наслідок довільності розбиттів відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ після переходу до точної верхньої межі}

$$\Rightarrow\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \tag{1.54}$$

крім того, $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)<\infty\wedge\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)<\infty$.

Нехай тепер на кожному з відрізків $[a,c]$ і $[c,b]$ функція $f(x)$ має обмежену варіацію. Тоді розіб'ємо довільним чином сегмент $[a,b]$ точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,$$

поки що включимо точку c в число точок подрібнення. Якщо $c = x_m$, то сума $V^*_{[a,b]}$, що відповідає цьому розбиттю, має вигляд:

$$V^*_{[a,b]} = \sum_{k=1}^{m} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| + \sum_{k=m+1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = V_{[a,c]} + V_{[c,b]},$$

звідки

$$V^*_{[a,b]} \le \mathop{V}_a^c (f) + \mathop{V}_c^b (f).$$

Тепер розглянемо випадок, коли точка c не входить в число точок подрібнення і $x_{m-1} < c < x_m$:

$$V^{**}_{[a,b]} = \sum_{k=1}^{m-1} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| + \sum_{k=m+1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| + \left| f(x_m) - f(x_{m-1}) \right|.$$

При додаванні точки подрібнення c отримаємо

$$V^{**}_{[a,b]} \le \underline{\sum_{k=1}^{m-1} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|} + \underline{\underline{\sum_{k=m+1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|}} +$$

$$+ \underline{\left| f(x_m) - f(c) \right|} + \underline{\underline{\left| f(c) - f(x_{m-1}) \right|}} = V_{[a,c]} + V_{[c,b]} = V^*_{[a,b]} \le \mathop{V}_a^c (f) + \mathop{V}_c^b (f).$$

Отже, для будь-яких розбиттів відрізка $[a,b]$ виконується нерівність $V_{[a,b]} \le \mathop{V}_a^c (f) + \mathop{V}_c^b (f)$, а тому і нерівність

$$\mathop{V}_a^b (f) \le \mathop{V}_a^c (f) + \mathop{V}_a^b (f), \tag{1.55}$$

крім того, $\mathop{V}_a^b (f) < \infty$. Із нерівностей (1.54) і (1.55) випливає справедливість рівності (1.53).■

Із останньої теореми випливають наслідки.

Наслідок 1.13. Якщо функція на сегменті $[a,b]$ має обмежену варіацію, то вона має обмежену варіацію на будь-якому відрізку, що міститься у відрізку $[a,b]$.

Наслідок 1.14. Якщо функція на кожному зі скінченної кількості сегментів, що розбивають відрізок $[a,b]$, має обмежену варіацію, то вона має обмежену варіацію на усьому відрізку $[a,b]$.

Зокрема, якщо відрізок $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість частин, на кожній із яких функція нестрого монотонна, то ця функція має обмежену варіацію на $[a,b]$.

Останнє випливає з теореми про обмеженість варіації нестрого монотонної функції і властивості адитивності повної варіації.

Теорема 1.47 *(подання функції обмеженої варіації різницею неспадних функцій)***.** Для того щоб функція $f(x)$ була функцією обмеженої варіації, необхідно й достатньо, щоб її можна було подати у вигляді різниці двох неспадних функцій.

Доведення. *Достатність* є наслідком теореми про обмеженість варіації несторого монотонної функції й теореми про арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.

Необхідність. Розглянемо функцію

$$\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f),\ a\le x\le b\ .$$

Якщо $a\le x_1<x_2\le b$, то, за *властивістю адитивності варіації*,

$$\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)+\underbrace{\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)}_{\oplus}\ge\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)\Rightarrow\pi(x_2)\ge\pi(x_1)\ .$$

Звідки випливає неспадання функції $\pi(x)$ на $[a,b]$.

Розглянемо тепер іншу функцію

$$\nu(x)=\pi(x)-f(x)\ . \tag{1.56}$$

Доведемо її неспадання. Нехай $a\le x_1<x_2\le b$, тоді в силу *властивості адитивності варіації*

$$\pi(x_2)=\overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)=\pi(x_1)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu(x_2)=\pi(x_2)-f(x_2)=\pi(x_1)+\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)-f(x_2).$$

Звідки

$$\nu(x_2)-\nu(x_1)=\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)-\left[f(x_2)-f(x_1)\right].$$

Розглянемо тривіальне розбиття відрізка $\left[x_1,x_2\right]$ двома його кінцями, тоді

$$V=\left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le \sup_R V=\overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\ \Rightarrow\ \left|f(x_2)-f(x_1)\right|\le \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\le \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)\ ,$$

Тому $\nu(x_2)-\nu(x_1)\ge 0.$ Отже, функція $\nu(x)$ не спадає на $[a,b]$.

Таким чином, функцію обмеженої варіації $f(x)$ подано у вигляді різниці двох неспадних на $[a,b]$ функцій:

$$f(x)=\pi(x)-\nu(x)\,.\ \blacksquare$$

Завдяки властивостям множини точок розриву нестрого монотонних функцій і останній теоремі, одержимо наслідок.

Наслідок 1.15. Множина точок розриву функції обмеженої варіації не більш, ніж зчисленна. Усі точки розриву такої функції першого роду, і в кожній із них існують границі:

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x),\quad f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)\,.$$

Розглянемо функцію $f(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$. Нехай не більш, ніж зчисленна множина $\{x_n : a\le x_n\le b\}$ охоплює усі точки розриву неспадних функцій $\pi(x)$ і $\nu(x)$, введених в *теоремі 1.47*. Розглянемо їх функції стрибків

$$s_\pi(a) = 0,$$
$$s_\pi(x) = \pi(a+0) - \pi(a) + \sum_{x_k < x} \left[\pi\left(x_k + 0\right) - \pi\left(x_k - 0\right) \right] + \pi(x) - \pi(x-0);$$
$$s_\nu(a) = 0,$$
$$s_\nu(x) = \nu(a+0) - \nu(a) + \sum_{x_k < x} \left[\nu\left(x_k + 0\right) - \nu\left(x_k - 0\right) \right] + \nu(x) - \nu(x-0).$$

Якщо точка розриву однієї з цих функцій є точкою неперервності іншої, то відповідний доданок в поданні функції її стрибків зникає.

Розглянемо функцію $s\left(x\right) = s_\pi\left(x\right) - s_\nu\left(x\right)$. Внаслідок рівності $f\left(x\right) = \pi\left(x\right) - \nu\left(x\right)$ матимемо

$$s(a) = 0,$$
$$s(x) = f(a+0) - f(a) + \sum_{x_k < x} \left[f\left(x_k + 0\right) - f\left(x_k - 0\right) \right] + f(x) - f(x-0).$$

Таким чином, утворилася функція стрибків функції $f(x)$.

Як відомо з *теореми 1.41*, наступні функції $\pi\left(x\right) - s_\pi\left(x\right)$, $\nu\left(x\right) - s_\nu\left(x\right)$ є неперервними і неспадними на $[a,b]$. Тому функція

$$\varphi\left(x\right) = f\left(x\right) - s\left(x\right) = \pi\left(x\right) - s_\pi\left(x\right) - \left(\nu\left(x\right) - s_\nu\left(x\right)\right)$$

є неперервною на $[a,b]$. Отже, теорему доведено.

Теорема 1.48 (*подання функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервною функцією*). Будь-яка функція $f(x)$ обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$ може бути подана у вигляді суми функції її стрибків $s(x)$ і неперервної функції обмеженої варіації $\varphi\left(x\right) = f\left(x\right) - s\left(x\right)$.

3. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса. Інтеграл Стілтьєса (Th. J. Stieltjes[1]) є безпосереднім узагальненням звичайного інтеграла Рімана.

Дві обмежені функції $f(x)$ і $g(x)$ задані на проміжку $[a,b]$.

Розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ скінченною кількістю точок

[1] **Томас Іоанес Стілтьєс** (нідерл. Thomas Joannes Stieltjes, 29.12.1856, — 31.12.1894) — нідерландський математик. Запропонував у 1894 р. узагальнення визначеного інтеграла (Інтеграл Рімана-Стілтьеса). Член-кореспондент Петербурзької Академії наук (1894).

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\ ,$$

позначимо розбиття $R = \{x_k\}$,

$d = \max\limits_{k=\overline{1,n}}(x_k - x_{k-1})$ – діаметр розбиття,

$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $\quad k = \overline{1,n}$, $P = \{\alpha_k\}$ – проміжні точки.

Розглянемо $\sigma = \sigma(f, g, R, P) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \left[g(x_k) - g(x_{k-1}) \right]$ – інтегральну суму Стілтьєса.

🗀**Означення 1.58** *(на мові* $\varepsilon - \delta$*)*. Якщо

$$\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \ \ R = \{x_k\}\ \forall P = \{\alpha_k\} : \quad d < \delta \Rightarrow \left| I - \sigma \right| < \varepsilon\ ,$$

то число I називають границею інтегральних сум і позначається $I = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$. Якщо таке число I існує, то функцію $f(x)$ називають *інтегровною за Стілтьєсом* за функцією $g(x)$ на відрізку $[a, b]$, а зна*чення границі* I – *інтегралом Рімана-Стілтьєса.*

Застосовують позначення: $I = (S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ або $I = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$.

Символ «(S)» пишуть або опускають у залежності від необхідності поставити наголос на те, що йдеться саме про інтеграл Стілтьєса.

Очевидно, що єдина відміна цього означення від означення звичайного інтеграла Рімана полягає в тому, що $f(\alpha_k)$ множиться не на приріст Δx_k незалежної змінної, а на приріст $\Delta g(x_k) = g(x_k) - g(x_{k-1})$ іншої функції. Таким чином, <u>інтеграл Рімана є частинним випадком інтеграла Стілтьєса</u>, коли за функцію $g(x)$ взято саму незалежну змінну x, тобто $g(x) = x$.

4. Властивості інтеграла Стілтьєса

Властивості лінійності:

1^{00} $\int\limits_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dg(x) = \int\limits_a^b f_1(x)\,dg(x) \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dg(x)$;

2^{00} $\int\limits_a^b f(x)\,d[g_1(x)\pm g_2(x)] = \int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) \pm \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x)$;

3^{00} $\int\limits_a^b \alpha f(x)\,d[\beta g(x)] = \alpha\beta\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \quad (\alpha,\beta = const)$.

При цьому із існування інтегралів у правій частині випливає існування інтеграла у лівій частині.

Доведемо, наприклад, властивість 2^{00}:

$$\sigma(f,g_1\pm g_2,R,P) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\Big[g_1(x_k)\pm g_2(x_k) - \big(g_1(x_{k-1})\pm g_2(x_{k-1})\big)\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\big[g_1(x_k) - g_1(x_{k-1})\big] \pm \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\big[g_2(x_k) - g_2(x_{k-1})\big] =$$

$$= \sigma(f,g_1,R,P) \pm \sigma(f,g_2,R,P).$$

Здійснимо граничний перехід:

$$\begin{array}{ccccccc}
\underbrace{\lim\limits_{d\to0}\sigma(f,g_1\pm g_2,R,P)} & = & \underbrace{\lim\limits_{d\to0}\big[\sigma(f,g_1,R,P)\pm\sigma(f,g_2,R,P)\big]} & = & \underbrace{\lim\limits_{d\to0}\sigma(f,g_1,R,P)} & \pm & \underbrace{\lim\limits_{d\to0}\sigma(f,g_2,R,P)} \\
\| & & & & \| & & \| \\
\exists & \Leftarrow & \exists & \Leftarrow & (\exists & \wedge & \exists) \\
\| & & & & \| & & \| \\
\int\limits_a^b [f(x)d[g_1(x)\pm g_2(x)] & & = & & \int\limits_a^b f(x)dg_1(x) & \pm & \int\limits_a^b f(x)dg_2(x).
\end{array}$$

Властивість адитивності:

4^{00} $\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^c f(x)dg(x) + \int\limits_c^b f(x)dg(x)$,

у припущенні, що $a < c < b$ і існують всі три інтеграли.

Для доведення цієї формули достатньо включити точку c в число точок розбиття проміжку $[a,b]$, при утворенні суми Стілтьєса для інтеграла $\int\limits_a^b f\,dg$.

Зауважимо, що з існування інтеграла $\int\limits_a^b f\,dg$ випливає існування обох інтегралів $\int\limits_a^c f\,dg$ і $\int\limits_c^b f\,dg$. Але, важливо відмітити, що з існування обох інтегралів $\int\limits_a^c f\,dg$ і $\int\limits_c^b f\,dg$, взагалі кажучи, не випливає існування інтеграла

$\int\limits_a^b f\,dg$. Щоб упевнитися в цьому, достатньо розглянути приклад. Нехай на проміжку $[-1,1]$ функції $f(x)$ і $g(x)$ задані наступними рівностями:

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -1\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } 0<x\le 1;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -1\le x<0,\\ 1 \text{ при } 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Тоді

$$\sigma_{[-1;0]}=\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n} 0\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=0,$$

$$\sigma_{[0;1]}=\sum_{m=1}^{n} f(\alpha'_m)\cdot\left[g\left(x_m\right)-g\left(x_{m-1}\right)\right]=\sum_{m=1}^{n} f(\alpha'_m)\cdot\left[1-1\right]=0.$$

Після граничного переходу отримаємо

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)dg(x)=0, \quad \int\limits_{0}^{1} f(x)dg(x)=0,$$

Тобто, обидва ці інтеграли існують.

У той же час інтеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dg(x)$ не існує. Дійсно, розіб'ємо проміжок $[-1,1]$ так, щоб точка 0 не потрапила до складу точок розбиття, і $x_{k_0-1}<0<x_{k_0}$.

Утворимо суму:

$$\sigma_{[-1;1]}=\sum_{k=1}^{k_0-1} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]+f(\alpha_{k_0})\cdot\left[g\left(x_{k_0}\right)-g\left(x_{k_0-1}\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]=\sum_{k=1}^{k_0-1} 0\cdot\left[g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)\right]+f(\alpha_{k_0})\cdot\left[1-0\right]+$$

$$+\sum_{k=k_0+1}^{n} f(\alpha_k)\cdot\left[1-1\right]=f(\alpha_{k_0}).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Якщо } \alpha_{k_0}\le 0, \text{ то } \sigma_{[-1;1]}=f(\alpha_{k_0})=0,\\ \text{якщо } \alpha_{k_0}>0, \text{ то } \sigma_{[-1;1]}=f(\alpha_{k_0})=1,\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ границі } \lim_{d\to 0}\sigma \text{ не існує.}$$

Інтегрування частинами. Для інтегралів Стілтьєса має місце формула

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x), \qquad (1.57)$$

Причому з існування одного з цих інтегралів випливає існування іншого. Ця формула має назву *формули інтегрування частинами.*

Доведення. Нехай існує інтеграл $\int_a^b g\,df$. Розглянемо розбиття $R = \{x_k\}$ сегмента $[a,\ b]$, оберемо на відрізках розбиття довільні проміжні точки $P = \{\alpha_k\}$ таким чином, що

$$a = x_0 \le \alpha_1 \le x_1 \le ... \le x_{k-1} \le \alpha_k \le x_k \le \alpha_{k+1} \le x_{k+1} \le ... \le x_{n-1} \le \alpha_n \le x_n = b.$$

Суму Стілтьєса для інтеграла $\int_a^b f\,dg$

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]$$

можна подати у вигляді

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)g(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{k+1})g(x_k) =$$

$$= -\left\{g(a)f(\alpha_1) + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right] - g(b)f(\alpha_n)\right\}.$$

Якщо додати й відняти справа вираз $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ та позначити $\alpha_0 = a$, $\alpha_{n+1} = b$, то сума σ матиме вигляд:

$$\sigma = f(x)g(x)\Big|_a^b -$$

$$-\left\{g(a)\left[f(\alpha_1) - f(a)\right] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right] + g(b)\left[f(b) - f(\alpha_n)\right]\right\} =$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \sum_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right].$$

Зменшуване в правій частині являє собою стілтьєсову суму для інтеграла $\int_a^b gdf$ (існування якого припущено!). Вона відповідає розбиттю відрізка $[a,b]$ точками

$$a = \alpha_0 \le \alpha_1 \le \ldots \le \alpha_k \le \alpha_{k+1} \le \ldots \le \alpha_n \le \alpha_{n+1} = b,$$

якщо в якості проміжних точок із відрізків $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ $(i = 0, \ldots, n)$ обрати x_k. Якщо $d = \max(x_k - x_{k-1})$, то тепер довжини всіх частинних проміжків не перевищать $2d$.

При $d \to 0$ зазначена сума прямує до $\int\limits_a^b g\,df$. Із цього випливає, що існує границя і для σ, яка не залежить від вибору розбиття $R = \{x_k\}$ і набору проміжних точок $P = \{\alpha_k\}$ (в силу довільності їх вибору). Значення границі $\lim\limits_{d \to 0} \sigma$ дорівнюватиме інтегралу $\int\limits_a^b f\,dg$ і

$$\begin{array}{ccccc} \lim\limits_{d \leftrightarrow 0} \sigma & = & f(x)g(x)\Big|_a^b & - & \lim\limits_{d \leftrightarrow 0} \sum\limits_{k=0}^{n} g(x_k)\left[f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)\right] \\ \| & & & & \| \\ \int\limits_a^b f(x)dg(x) & = & f(x)g(x)\Big|_a^b & - & \int\limits_a^b g(x)df(x). \end{array} \quad \blacksquare$$

5. Теорема про існування інтеграла Рімана-Стілтьєса

Розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

введемо позначення

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x); \qquad M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

і розглянемо *інтегральні суми Дарбу-Стілтьєса*

$$\underline{S} = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad \overline{S} = \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right].$$

Лема 1.5. Нехай функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Тоді для сум Дарбу-Стілтьєса має місце нерівність

$$\underline{S} \le \sigma \le \overline{S} \quad \forall P = \{\alpha_k\}.$$

Ця лема є простим наслідком означення й того факту, що завдяки неспаданню функції $g(x)$ кожна з різниць $g(x_k) - g(x_{k-1})$ невід'ємна.

Лема 1.6. Нехай функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Тоді додавання до точок розбиття додаткових точок призводить до того, що нижня сума Дарбу-Стілтьєса може лише збільшитися, а верхня – лише зменшитися.

Доведення. Без обмеження загальності міркувань можна розглянути лише одну додаткову точку розбиття.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Нехай } R=\{x_k\} \text{ – розбиття,}\\ x' \text{ – додаткова точка,}\end{array}\right\}\Rightarrow \quad \text{нове розбиття } R':\ \{x_k\}\bigcup\{x'\}=\{x_i'\}.$$

Позначимо через k_0 той номер відрізка розбиття, в який потрапила додаткова точка x', тобто $x_{k_0-1}<x'<x_{k_0}$ (див. рис. 1.36), тоді, зважаючи на невід'ємність кожної з різниць $g(x_k)-g(x_{k-1})$, матимемо:

$$\underline{S}'=\underline{S}(f,g,R')=\sum_{i=1}^{n} m_k\cdot[g(x_i')-g(x_{i-1}')]=\sum_{k<k_0} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]+$$
$$+m_{k_0}'\cdot[g(x')-g(x_{k_0-1})]+m_{k_0}''\cdot[g(x_{k_0})-g(x')]+\sum_{k>k_0} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})],$$

$$m_{k_0}'=\inf_{[x_{k_0-1},x']} f(x)\ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x)=m_{k_0},$$
$$m_{k_0}''=\inf_{[x',x_{k_0}]} f(x)\ge \inf_{[x_{k_0-1},x_{k_0}]} f(x)=m_{k_0},$$
$$\underline{S}'\ge\sum_{k\ne k_0} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]+$$
$$\underbrace{+m_{k_0}\cdot[g(x')-g(x_{k_0-1})]+m_{k_0}\cdot[g(x_{k_0})-g(x')]}_{=m_{k_0}\cdot[g(x_{k_0})-g(x_{k_0-1})]}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} m_k\cdot[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\underline{S}.$$

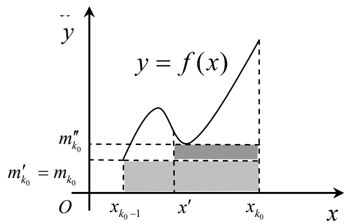


Рис. 1.36.

Для верхньої суми доведення аналогічне. ■

Лема 1.7. Нехай функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Тоді будь-яка нижня інтегральна сума Дарбу-Стілтьєса не більша за верхню суму, навіть для різних розбиттів, а саме: $\underline{S}_1\le\overline{S_2}$, для $R_1=\{x_k^{(1)}\},\quad R_2=\{x_i^{(2)}\}$.

Доведення. Введемо до розгляду розбиття $R_3=R_1\bigcup R_2$ і інтегральні суми Дарбу-Стілтьєса $\underline{S}_3$ *і* $\overline{S}_3$, що йому відповідають. Розбиття R_3 є подрібненням як розбиття R_1, так і розбиття R_2, тому, згідно з лемами 1.5 та 1.6, маємо $\underline{S}_1 \le \underline{S}_3 \le \overline{S}_3 \le \overline{S_2}$. ■

Теорема 1.49.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty, \end{array}\right\} \Rightarrow \ \exists (S)\int_a^b f(x)dg(x).$$

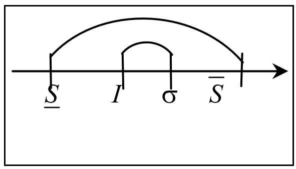
Доведення. Обмежимося розглядом функції $g(x) \ne const$.

I. Припустимо спочатку, що функція $g(x)$ не спадає на $[a,b]$. Розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Із леми 1.7 випливає, що множина $\{\underline{S} = \underline{S}(f,g,R)\}_R$ обмежена зверху будь-якою фіксованою верхньою сумою Дарбу-Стілтьєса, тому $\exists \sup\limits_R \{\underline{S}(f,g,R\} = I$. Таким чином, при будь якому способі розбиття буде $\underline{S} < I < \overline{S}$. Отже,

$$\left.\begin{array}{l} \underline{S} \le \mathrm{I} \le \overline{S} \quad \forall P, \\ \underline{S} \le \sigma \le \overline{S} \quad \forall P \end{array}\right\} \Rightarrow \quad |\mathrm{I} - \sigma| < \overline{S} - \underline{S} \ \forall P .$$



(за лемою 1.5)

Далі маємо: $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ $\Rightarrow$ рівномірно неперервна на $[a,b]$ (теорема Кантора [**3**, с.192; **4**, с. 179])

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall R = \{x_k\}_{k=1}^n : \ d < \delta \Rightarrow M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \forall k = \overline{1,n} .$$

Тоді

$$\forall P = \{\alpha_k\} \ \forall R = \{x_k\} \ \ |\mathrm{I} - \sigma| < \overline{S} - \underline{S} =$$

$$= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}[g(x_k) - g(x_{k-1})] =$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_1)-g(x_0)+g(x_2)-g(x_1)+g(x_3)-g(x_2)+\ldots+$$

$$+g(x_{k-1})-g(x_{k-2})+g(x_k)-g(x_{k-1})+\ldots+g(x_{n-1})-g(x_{n-2})+g(x_n)-g(x_{n-1})]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(x_n)-g(x_0)]=\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)]=\varepsilon.$$

Іншими словами, $\lim\limits_{d\to 0}\sigma = \mathrm{I}$, отже, I і є інтегралом Стілтьєса $\int\limits_a^b f(x)dg_1(x)$.

II. У загальному випадку, якщо функція $g\left(x\right)$ має обмежену варіацію, її можна подати у вигляді різниці двох неспадних обмежених функцій, однак не однозначно. Нехай існують два подання функції $g\left(x\right)$ в зазначеному вигляді: $g\left(x\right)=\overline{g}_1(x)-\overline{g}_2(x)$ і $g\left(x\right)=g_1(x)-g_2(x)$. За доведеним вище, кожен із інтегралів $\int\limits_a^b f(x)\,dg_i(x)$ і $\int\limits_a^b f(x)\,d\overline{g}_i(x)$ $(i=1,2)$ існує.

Тоді, застосовуючи *властивість лінійності інтеграла Стільтьєса* 2^{00}, отримаємо:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)=\int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x)-\int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x)=\int\limits_a^b f(x)\,d\,\overline{g}_1(x)-\int\limits_a^b f(x)\,d\,\overline{g}_2(x).$$

Оскільки інтеграл є границею відповідних інтегральних сум, то кожен із інтегралів у цій рівності обчислюється однозначно. Отже, інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ існує, а його значення не залежить від подання функції $g(x)$ різницею двох неспадних функцій.

Теорему доведено. ■

Із доведеної теореми й формули інтегрування частинами випливає

Наслідок 1.16. Будь-яка функція зі скінченною варіацією інтегровна за будь-якою неперервною функцією.

6. Теореми про обчислення інтеграла Рімана-Стілтьєса

Теорема 1.50 *(про зв'язок між інтегралом Рімана і Стілтьєса).*

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b]; \\ \forall x \in [a;b] \setminus \{c_k\}_{k=1}^{m}\ \exists\, g'(x); \\ g'(x) \text{ – інтегровна за Ріманом на } [a,b],\ g(x) \text{ – неперервна на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx}$$

Доведення. Обґрунтуємо існування кожного з інтегралів рівності, яку доводимо.

Оскільки $g'(x)$ – інтегровна за Ріманом на $[a,b]$, тоді $g'(x)$ – обмежена на $[a;b] \setminus \{c_k\}_{k=1}^{m}$ (*за твердженням 1.3*). Без обмеження загальності міркувань можна вважати, що $a < c_1 < c_2 < ... < c_m < b$. На кожному з відрізків $[a,c_1]$, $[c_1,c_2],...,$ $[c_m,b]$, аналогічно доведенню *наслідка 1.12*, можна довести обмеженість варіації функції $g(x)$ [1]. Тоді *із властивості адитивності варіації* 1.14) прийдемо до висновку про обмеженість варіаціі функції $g(x)$ на всьому відрізку $[a,b]$.

Отже,

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \exists (S)\int_a^b f(x)dg(x) \text{ (теорема 1.49).}$$

Доведемо існування інтеграла Рімана за критерієм Лебеґа інтегровності функції:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ – неперервна на } [a,b], \\ g'(x) \text{ – інтегровна за Ріманом на } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \exists (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx\,.$$

Тепер переходимо до доведення рівності інтегралів.

З цією метою розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками

[1] Значення функції $g'(x)$ на кінцях зазначених відрізків не будуть впливати на висновки при доведенні, оскільки при застосуванні теореми Лагранжа потрібна диференційовність лише на інтервалі, а не на відрізку, на якому цю теорему застосовують. При доведенні важливим буде факт неперервності функції $g(x)$ на кожному з цих відрізків, її диференційовність, а також обмеженість функції $g'(x)$ на множинах внутрішніх точок відрізків.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\ ,$$

в число яких включимо точки $\{c_k\}_{k=1}^{m}$, де функція $g'(x)$ не визначена. Оскільки функція $g(x)$ неперервна на $[x_{k-1}; x_k]$ і диференційовна на $(x_{k-1}; x_k)$, то до кожної різниці $g(x_k) - g(x_{k-1})$ $(k = \overline{1,n})$ застосуємо формулу Лагранжа (див. [**3**, с. 245-246; **4**, с. 226-227]):

$$\exists \alpha_k \in (x_k, x_{k-1}): \quad g(x_k) - g(x_{k-1}) = g'(\alpha_k) \cdot (x_k - x_{k-1})\ .$$

Утворимо інтегральну суму Стілтьєса, обираючи за проміжні точки ті, що знайдено при застосуванні формули Лагранжа:

$$\sigma_{(S)} = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) g'(\alpha_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sigma_{(R)}\ .$$

Отримано рівність між інтегральними сумами Стілтьєса і Рімана, тому після граничного переходу при $d \to 0$ буде мати місце рівність між інтегралами. ■

Теорема 1.51. Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $g(x)$ стала на кожному з інтервалів $(a,c_1),\ (c_1,c_2),\ldots,\ (c_m,b)$, де

$$a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m < b\ .$$

Тоді

$$\boxed{\begin{aligned}(S)\int_a^b f(x)dg(x) &= f(a)\left[g(a+0) - g(a)\right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right) - g\left(c_k-0\right)\right] + f(b)\left[g(b) - g(b-0)\right]\end{aligned}} \tag{1.58}$$

Доведення. Кусково-стала функція $g(x)$ має обмежену варіацію на відрізку $[a,b]$, а тому й на будь-якій частині цього відрізка. Функція $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$. Отже, інтеграл Стілтьєса існує як на усьому відрізку, так і на кожній його частині. Тому застосуємо *властивість адитивності*, позначивши $c_0 = a,\ c_{m+1} = b$:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x)\ .$$

Обчислимо інтеграл $\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dg(x)\ \ (k=\overline{1,n})$. Нехай $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{i=0}^{n_k}$ – розбиття відрізка $[c_{k-1}, c_k]$, тоді

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n_k} f\left(\alpha_i^{(k)}\right)\left[g\left(x_i^{(k)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right] = f\left(\alpha_0^{(k)}\right)\left[g\left(x_1^{(k)}\right)-g\left(\underbrace{x_0^{(k)}}_{=c_{k-1}}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n_k} f\left(\alpha_i^{(k)}\right)\underbrace{\left[g\left(x_i^{(k)}\right)-g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right]}_{=0}+f\left(\alpha_n^{(k)}\right)\left[g\left(\underbrace{x_n^{(k)}}_{=c_k}\right)-g\left(x_{n-1}^{(k)}\right)\right]=$$

$$= f\left(\alpha_0^{(k)}\right)\left[g\left(x_1^{(k)}\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(\alpha_n^{(k)}\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(x_{n-1}^{(k)}\right)\right];$$

$$\underbrace{\lim_{d\to 0}\sigma_k}_{\| \atop \int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x)} = f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(c_k-0\right)\right].$$

Тепер обчислимо інтеграл вздовж відрізка $[a,b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \sum_{k=1}^{m+1}\int\limits_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dg(x) =$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\left\{f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(c_k-0\right)\right]\right\}=$$

$$= f\left(c_0\right)\left[g\left(c_0+0\right)-g\left(c_0\right)\right]+f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1\right)-g\left(c_1-0\right)\right]+$$

$$+f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1+0\right)-g\left(c_1\right)\right]+f\left(c_2\right)\left[g\left(c_2\right)-g\left(c_2-0\right)\right]+\ldots+$$

$$+f\left(c_{k-2}\right)\left[g\left(c_{k-2}+0\right)-g\left(c_{k-2}\right)\right]+f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}\right)-g\left(c_{k-1}-0\right)\right]+$$

$$+f\left(c_{k-1}\right)\left[g\left(c_{k-1}+0\right)-g\left(c_{k-1}\right)\right]+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+\ldots+$$

$$+f\left(c_{n-2}\right)\left[g\left(c_{n-2}+0\right)-g\left(c_{n-2}\right)\right]+f\left(c_{n-1}\right)\left[g\left(c_{n-1}\right)-g\left(c_{n-1}-0\right)\right]+$$

$$+f\left(c_{n-1}\right)\left[g\left(c_{n-1}+0\right)-g\left(c_{n-1}\right)\right]+f\left(c_n\right)\left[g\left(c_n\right)-g\left(c_n-0\right)\right]=$$

$$= f\left(c_0\right)\left[g\left(c_0+0\right)-g\left(c_0\right)\right]+f\left(c_1\right)\left[g\left(c_1+0\right)-g\left(c_1-0\right)\right]+\ldots+$$

$$+f\left(c_k\right)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+\ldots+f\left(c_n\right)\left[g\left(c_n+0\right)-g\left(c_n-0\right)\right].$$

Згадуючи позначення $c_0 = a, c_{m+1} = b$, приходимо до рівності (1.58). ■

Теорема 1.52. Нехай

1) $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$,

2) похідна $g'(x)$ існує в усіх точках $[a,b]$, окрім скінченної множини точок $\{c_k\}_{k=1}^m$; функція $g'(x)$ інтегровна за Ріманом на $[a,b]$;

3) функція $g(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, окрім скінченної множини точок[1], в яких вона має розрив першого роду.

Тоді має місце формула

$$\boxed{\begin{aligned}&(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \ + f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+\\ &+\sum_{k=1}^m f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]\end{aligned}} \tag{1.59}$$

Доведення. При доведенні *теореми 1.50* показано, як із другої умови теореми отримати висновок про обмеженість варіації функції $g(x)$ на відрізку $[a,b]$. Згідно з *теоремою 1.48*, подамо функцію обмеженої варіації $g(x)$ сумою функції її стрибків $s_g(x)$ і неперервної на $[a,b]$ функції $\varphi(x) = g(x) - s_g(x)$. Тоді $s_g(x)$ – кусково-стала на $[a,b]$ і згідно з (1.58)

$$(S)\int_a^b f(x)ds_g(x) = f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right]+ \sum_{k=1}^m f(c_k)\left[g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)\right]+ \\ +f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right].$$

Оскільки кусково-стала на відрізку $[a,b]$ функція $s_g(x)$ має інтегровну похідну, то неперервна на цьому відрізку функція $\varphi(x)$ має інтегровну за Ріманом на $[a,b]$ похідну $\varphi'(x)$, причому рівність $\varphi'(x) = g'(x)$ виконується в усіх точках $[a,b]$ за винятком скінченної множини точок. Застосовуючи

[1] Очевидно, що у всіх тих точках, у яких функція $g(x)$ має розрив, похідна $g'(x)$ не існує. Отже, ці точки будуть належати множині $\{c_k\}_{k=1}^m$. Але в деяких із точок c_k $(k=\overline{1,m})$, у яких похідна не існує, функція $g(x)$ може бути неперервною. В таких точках стрибок $g\left(c_k+0\right)-g\left(c_k-0\right)$ матиме нульове значення, і відповідний доданок формули (1.59) дорівнює нулю.

теорему 1.50 про зв'язок між інтегралами Рімана і Стілтьєса та *зауваження 1.5*, отримаємо

$$(S)\int_a^b f(x)d\varphi(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx .$$

Унаслідок *властивості лінійності інтеграла Стілтьєса* маємо:

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (S)\int_a^b f(x)d\left(s_g(x)+\varphi(x)\right) = (S)\int_a^b f(x)ds_g(x) + (S)\int_a^b f(x)d\varphi(x) \cdot$$

Згадуючи означення функції стрибків і формулу (1.58), отримаємо формулу (1.59). ■

7. Про одне застосування інтеграла Стілтьєса у фізиці

Припустимо, що вздовж відрізка $[a;b]$ осі абсцис розподілено маси. Деякі з них зосереджені в окремих точках («важких» точках), а деякі розподілені неперервно. Побудуємо функцію $g(x)$ за правилом: у точках $x > a$ значення функції $g(x)$ дорівнює сумі всіх мас, розподілених на відрізку $[a;x]$; $g(a) = 0$. Зрозуміло, що функція $g(x)$ зростає на відрізку $[a;b]$.

Приклад 1.33 [7]. Побудувати функцію $g(x)$ для такого розподілу мас: одиничні маси в точках $x = 1,\ 2$ і 3 та неперервно розподілені маси щільності 2 вздовж проміжку $[1;3]$.

Розв'язання. За означенням $g(1) = 0$.

Якщо $x \in (1;2)$, то $g(x) = 1 + \int_1^x 2dt = 1 + 2(x-1) = 2x - 1$.

Якщо $x = 2$, то $g(2) = 1 + \int_1^2 2dt + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$.

Якщо $x \in (2;3)$, то $g(x) = g(2) + \int_2^x 2dt = 4 + 2(x-2) = 2x$.

Якщо $x = 3$, то $g(3) = g(2) + \int_2^3 2dt + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$.

Отже,

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=1;\\ 2x-1, & 1<x<2;\\ 4, & x=2;\\ 2x, & 2<x<3;\\ 7, & x=3;\end{cases} = \begin{cases}0, & x=1;\\ 2x-1, & 1<x<2;\\ 2x, & 2\le x<3;\\ 7, & x=3.\end{cases} \blacksquare$$

Приклад 1.34 [7]. Побудувати функцію $g(x)$ для такого розподілу мас: маси величини 2 в точках $x=2$ і 4 та неперервно розподілені маси щільності $2x$ вздовж проміжку $[0;5]$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу одержимо:

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ \int\limits_0^x 2t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2, & 0<x<2;\\ \int\limits_0^2 2t\,dt+2 = t^2\Big|_0^2+2=6, & x=2;\\ g(2)+\int\limits_2^x 2t\,dt = 6+t^2\Big|_2^x = x^2+2, & 2<x<4;\\ g(2)+\int\limits_2^4 2t\,dt+2=6+12+2=20, & x=4;\\ g(4)+\int\limits_4^x 2t\,dt = 4+x^2, & 4<x\le 5\end{cases} = \begin{cases}x^2, & 0\le x<2;\\ x^2+2, & 2\le x<4;\\ x^2+4, & 4\le x\le 5.\end{cases} \blacksquare$$

Тепер поставимо задачу знайти статичний момент мас, розподілених зазначеним чином, відносно початку координат. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на частини точками

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{k-1}<x_k<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\,.$$

Розглянемо деякий відрізок розбиття $\left[x_{k-1};x_k\right]$, де $k=\overline{1,n}$. Маса, розподілена вздовж цього відрізка, дорівнює $\Delta g\left(x_k\right)=g\left(x_k\right)-g\left(x_{k-1}\right)$. Наближено можна вважати, що ця маса є зосередженою у фіксованій точці такого відрізка, наприклад, у правій точці (тобто в точці x_k), а статичний момент маси $\Delta g\left(x_k\right)$ відносно початку координат дорівнює $x_k\cdot\Delta g\left(x_k\right)$. Тоді шуканий статичний момент наближено можна подати формулою

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot g\left(x_k\right).$$

Здійснюючи граничний перехід при діаметрі розбиття d, що прямує до нуля, отримаємо:

$$M = \int_a^b x\, dg(x)\,. \tag{1.60}$$

Приклад. 1.35. Обчислити статичні моменти мас, розподілених так, як зазначено в прикладах 1.33 та 1.34.

Розв'язання. Обчислення статичних моментів будемо здфйснювати за формулою (1.60). Для інтеграла в правій частині (1.60), що відповідає прикладу 1.33 маємо:

1) $f(x) = x -$ неперервна на відрізку $[1;3]$;
2) $g(x)$ має похідну в усіх точках $[1;3]$, окрім точок $x = 1,\ 2$ і 3;
   $g'(x) -$ інтегровна на $[1;3]$;
3) $g(x) -$ неперервна в усіх точках $[1;3]$, окрім точок $x = 1,\ 2$ і 3, в яких ця функція має розриви першого роду.

Отже, виконуються припущення *теореми 1.52*. Для обчислень застосовуємо далі формулу (1.59):

$$\forall x \in (1;2) \cup (2;3) \ \ g'(x) = 2\,;$$

стрибки функції $g(x)$ в усіх точках $x = 1,\ 2$ і 3 дорівнюють 1;

$$M = (S)\int_1^3 x\, dg(x) = (R)\int_1^3 x \cdot 2\, dx + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 = x^2\Big|_1^3 + 1 + 2 + 3 = 14\,.$$

Аналогічно для розподілу мас прикладу 1.34:

$$f(x) = x\,; \quad \forall x \in [0;2) \cup (2;4) \cup (4;5] \ \ g'(x) = 2x\,;$$

стрибки функції $g(x)$ в усіх точках $x = 2$ і 4 дорівнюють 2;

$$M = (S)\int_0^5 x\, dg(x) = (R)\int_0^5 x \cdot 2x\, dx + f(2)\cdot 2 + f(4)\cdot 2 = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^5 + 4 + 8 = 95\frac{1}{3}\,. \ \blacksquare$$

§7. Про використання програмного забезпечення в інтегральному численні

Сьогодні такими засобами програмного забезпечення ПК, як Maple, Mathematica, MatLab, Mathcad та ін., інтеграли можна обчислювати в символьному вигляді або чисельно. Наведемо декілька прикладів.

Для порівняння на рис. 1.37 наведено результати символьного обчислення невизначених інтегралів за допомогою програмного пакета Maple 15, що були обчислені вище. Результати зведено в порівняльній таблиці (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 –

Номер прикладу	Невизначений інтеграл та результат його обчислення в теоретичній частині	Символьне обчислення. Номер формули на рис. 1.37.
1.6.	$\int \frac{xdx}{\left(x^2+4x+5\right)\left(x-1\right)^2} = -\frac{1}{10(x-1)} + \frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+4x+5} - \frac{11}{50}\operatorname{arctg}(x+2)+C$	(1)
1.7.	$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5} = = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$	(2)
1.9.	$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\ln\left\|\sqrt{x^2+x+1}+x\right\| - \frac{3}{2}\ln\left\|1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x\right\| + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+2\sqrt{x^2+x+1}+2x}+C$	(3)
1.10.1.	$\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx = \left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\ln\left\|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right\|+C.$	(4)

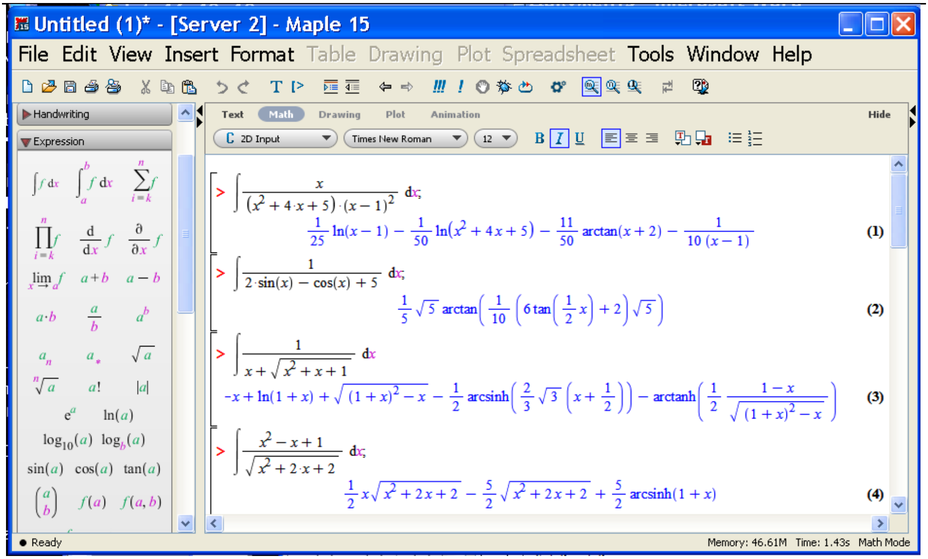


Рис. 1.37.

Якщо пригадати *зауваження 1.2*, в якому наведені формули для обчислення ареа-функцій, то стане зрозуміло, що результати обчислень однакові.

У прикладі 1.10.4 отримано:

$$\int \frac{x+3}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \sqrt{8}\cdot \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}\cdot|1-x|}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}\cdot(1+x)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}\cdot(1+x)}\right|+C.$$

Обчислення інтеграла (вираз f) та його спрощення (вираз g) за допомогою Maple 15 наведено на рис. 1.38. Обидва результати однакові. Однак результат, отриманий за допомогою ПК, громіздкий і дещо недосконалий.

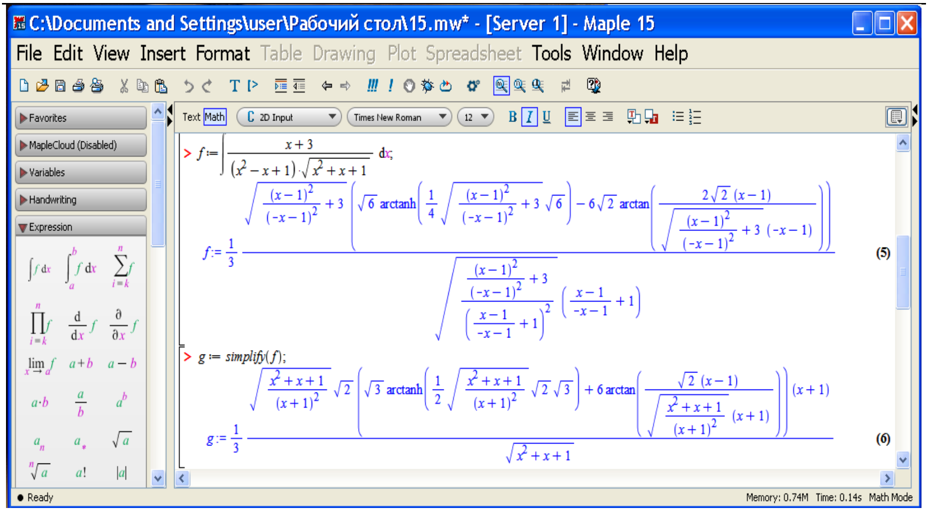


Рис. 1.38.

Програмне забезпечення з кожним роком удосконалюється. На рис. 1.39 наведено результати обчислень двох інтегралів із *прикладів 1.10.3*

$$\int \frac{dx}{\left(2x^2-x+2\right)^{\frac{7}{2}}}=\frac{2^9}{\sqrt{2}\cdot 15^3}\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x-0,25}{\sqrt{x^2-0,5x+1}}\right)^5\right)+C$$

та *1.12*

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{2\cos x+\sin^2 x+2}=-\cos x-2\ln(\cos x-3)+C$$

за допомогою Maple 5.4 та Maple 15. Наочно можна спостерегти відмінність подання результатів. Зокрема, можна дійти висновку, що в попередній версії розробниками програмного забезпечення було закладено обчислення інтеграла від тригонометричних функцій лише через універсальну тригонометричну підстановку. Більш досконала остання версія програмного продукту «застосовує» раціональніший спосіб обчислення, а саме той, що застосовувався при обчисленні *прикладу 1.12*.

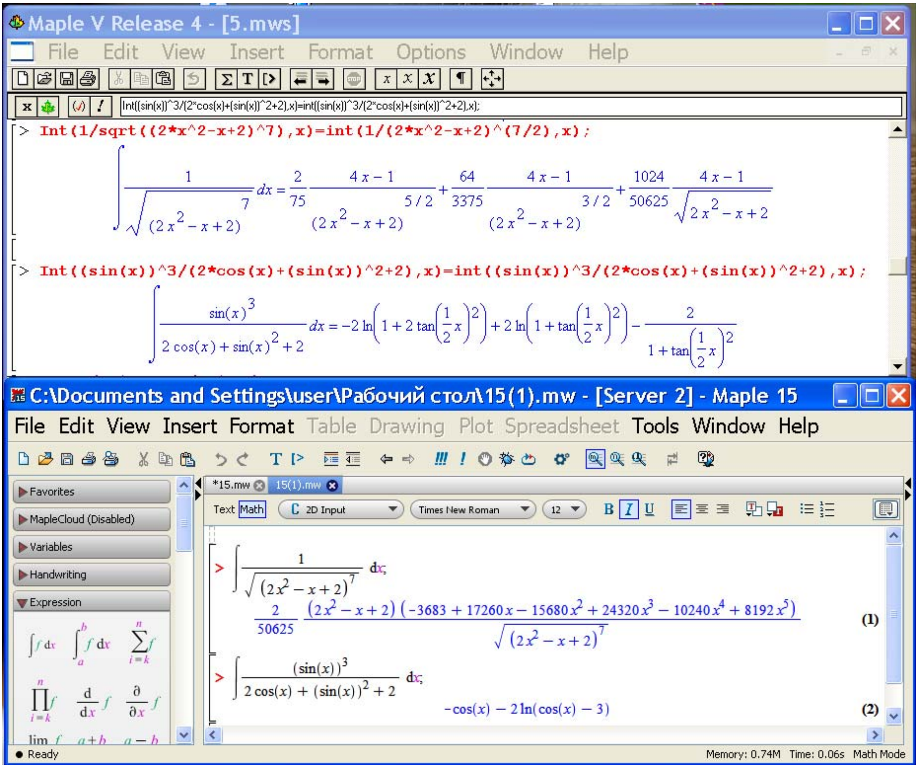


Рис. 1.39.

За допомогою Maple можна також обчислювати визначені інтеграли в символьному вигляді та наближено, обчислювати або отримувати результат щодо розбіжності невласних інтегралів та їх головних значень за Коші. Відповідні результати наведені в табл. 1.2 та на рис. 1.40.

Таблиця 1.2 –

Номер прикладу	Результат, отриманий у посібнику	Формула на рис. 1.40.
1.18.	$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$ (визначений інтеграл)	(1)
1.22. 1)	$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$ (невласний інтеграл)	(2)

1.27.	$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ (невласний інтеграл)	(3)
1.30.	$\text{V.p.}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$ (головне значення за Коші невласного інтеграла II роду)	(4)
1.29.	$\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = 0$ (головне значення за Коші невласного інтеграла I роду)	(5)
3.171.	$\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx \approx 0,7468$ (наближене обчислення визначеного інтеграла)	(6)

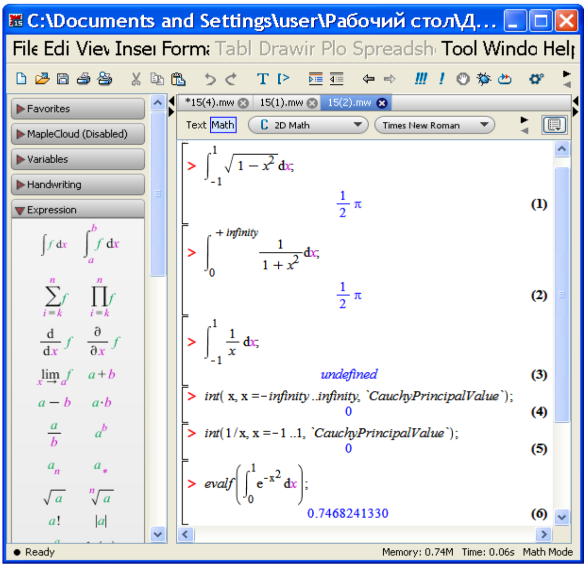


Рис. 1.40.

Це був лише незначний екскурс у можливості програмного забезпечення ЕОМ. Можливості цих засобів величезні. На перший погляд навіть може здатися, що в детальному вивченні інтегрального числення взагалі немає потреби. Однак така думка хибна.

По-перше, програмне забезпечення недосконале, про що вже йшлося вище, і його потрібно надалі вдосконалювати.

По-друге, результатами, які надає програмний продукт, треба вміти правильно користуватися. Наприклад, поставивши собі задачу щодо обчислення визначеного інтеграла $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, користувач Maple може застосувати результат формули (1) із рис. 1.41 і вирішити, що він вже знає первісну для підінтегральної функції на відрізку інтегрування. Однак це не так; про це йдеться у прикладі 3.115. Ось тоді цей користувач і отримає не зрозуміло який результат, а якщо ще й порівняє його з результатом, наданим формулою (2) на рис. 1.41, то дуже здивується відмінностям.

По-третє, потрібно вміти правильно «ставити задачу перед комп'ютером». Так, очікуючи отримати числовий результат для інтеграла $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, користувач Maple одержить відповідь у вигляді формули (3) на рис. 1.41. Досвідченого користувача такий результат зовсім не збентежить, і він переформулює задачу на пошук чисельного (наближеного) значення цього інтеграла так, як це було виконано на рис. 1.40 з відповіддю (6).

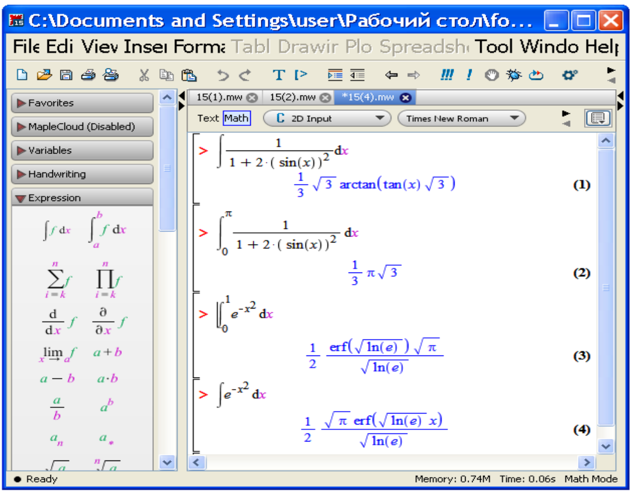


Рис. 1.41.

Розділ 2. КОРОТКИЙ НАРИС ІСТОРІЇ РОЗВИТКУ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Інтегральне числення як розділ математики, що вивчає властивості та способи обчислення інтегралів і їх застосування при розв'язанні різних математичних, фізичних та інших задач, складає одну з основних частин математичного аналізу (або аналізу нескінченно малих).

Поняття інтегрального числення виникло з потреби обчислювати площі будь-яких фігур і поверхонь та об'єми довільних тіл. Витоки інтегрального числення належать до античного періоду розвитку математики та простежуються ще в Стародавньому Єгипті. У математичних папірусах з'явилися задачі, які мають прикладний характер і пов'язані з визначенням площ кривих поверхонь та обчисленням об'ємів деяких геометричних фігур. Зокрема, Московський математичний папірус («математичний папірус Голеніщева»), містить розв'язання 25 математичних задач і демонструє знання формули об'єму зрізаної піраміди та обчислення площі поверхні, а складений приблизно в 1650 р. до н.е. математичний папірус Ринда (папірус Ахмеса) є збіркою розв'язань 84 задач, які містять дії з дробами, визначення площі прямокутника, трикутника, трапеції та круга, об'єму прямокутного паралелепіпеда й циліндра, пропорційного ділення, обчислення суми геометричної прогресії. Проте для розв'язання вказаних задач у цих папірусах не надано загальних правил і методів отримання розв'язків та не зроблено жодних теоретичних узагальнень[1].

Аналогічні задачі розв'язуються й у Вавилоні[2]. Математичні тексти, які являють собою клинописні таблички, показують, що вавилоняни мали в розпорядженні формули для обчислення площ простих прямолінійних фігур і об'ємів простих тіл, причому в порівнянні зі Стародавнім Єгиптом у числі розглядуваних у Вавилоні геометричних фігур з'явилися сегмент круга та зрізаний конус. Проте, як і в Єгипті, теоретична основа математики Вавилона не мала цілісного характеру та зводилася до набору розрізнених прийомів,

[1] Папирусы // Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – С. 447.

[2] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3-х т. / Под ред. А.П.Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – Т.1: С древнейших времен до начала нового времени. – 352 с.

позбавлених доказової бази: в математичних текстах Вавилона викладаються тільки алгоритми розв'язання задач (на конкретних прикладах).

Систематичний же доказовий підхід у математиці до розв'язання задач на знаходження квадратури (тобто, обчислення площ) плоских фігур, а також кубатур (обчислення об'ємів) тіл з'явився тільки в математиків Древньої Греції. Велику роль при розв'язанні таких задач зіграв *метод вичерпання*[1] (термін «вичерпання» вперше з'являється в Григорія з Сен-Вінцента, 1647 р.), створений приблизно в 370 р. до н.е. Євдоксом Кнідським (бл. 408–355 до н.е.). Цей метод, по суті, став першим відомим методом для розрахунку інтегралів. З його допомогою Євдокс намагався знайти площі та об'єми, розбиваючи їх на нескінченну кількість частин, для яких площа або об'єм є вже відомими. Надалі метод Євдокса був удосконалений Архімедом (бл. 287–212 до н.е.) і використовувався ним для наближеного розрахунку площі круга, визначення об'ємів кулі та еліпсоїда і т.п. Отже, ідеї Архімеда, пов'язані з обчисленням площ і об'ємів, по суті, випередили відкриття математичного аналізу та інтегрального числення, здійснене майже через 2000 років потому. Проте у дослідженнях Архімеда не було виділено основних методів інтегрування, не було визначено поняття інтеграла, а найголовніше, не був створений алгоритм інтегрального числення. Але, незважаючи на це, вчені XVII ст., які отримали багато нових результатів, навчалися на працях Архімеда.

Аналогічні методи обчислення площ і об'ємів фігур були розроблені незалежно в Китаї: в III ст. н.е. Лю Хуей (220–280) запропонував методи знаходження площі круга, обчислення площ поверхонь та об'ємів призми, піраміди, тетраедра, циліндра, конуса та зрізаного конуса. Згодом цей метод був використаний Дзю Чонгши (429–501) для знаходження об'єму сфери.

Разом з описаними методами активно застосовувався й інший метод – *метод неподільних* (найменування методу з'явилося наприкінці XVI ст. як назва об'єднаної сукупності різнорідних прийомів визначення відношень площ або об'ємів фігур), який також виник в Давній Греції і пов'язаний, у першу чергу, з переконаннями Демокріта (бл. 460–370 до н.е.), філософа, що є засновником атомістики. В основі цього методу лежить порівняння «неподільних» елементів (або ж сукупностей елементів), що утворюють фігури,

[1] Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука: Пер. с голл. / Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 460 с.

відношення розмірів яких необхідно знайти. Іншими словами, передбачалося, що відрізок прямої, площа, об'єм складаються з великого, але скінченного числа неподільних «атомів». Обчислення об'єму тіла здійснювалося підсумовуванням об'ємів усіх «атомів», з яких складалося тіло. Наприклад, криволінійна трапеція подавалася складеною з вертикальних відрізків довжиною $f(x)$, яким, проте, приписувалася площа, що дорівнює нескінченно малій величині $f(x)dx$. Відповідно до такого розуміння шукана площа визначалася як сума $S = \sum_{a<x<b} f(x)dx$ нескінченно великого числа нескінченно малих площ[1].

Відзначимо також, що деякі математики пізнішого часу, наприклад, Франсуа Вієт (1540–1603) і Йоганн Кеплер (1571–1630), по суті, користувалися такими ж поняттями методу неподільних та вважали коло складеним із дуже великої кількості нескінченно малих відрізків. Сучасні поняття границі надали можливість перетворити цю «атомну» теорію Демокріта на таку ж строгу теорію, як і метод вичерпання.

Отже, ідеї інтегрального числення значною мірою передбачила антична математика. Проте подальша криза й занепад стародавнього світу призвели до забуття багатьох цінних наукових досягнень. Не стали винятком і методи неподільних та вичерпання. Арабські завоювання та короткочасне об'єднання величезних територій під владою арабських халіфів призвели до зростання ролі «арабської культури» в області математики. На тлі науки, що розвивається, відроджується й інтерес до відкриттів Стародавнього світу, Індії та Китаю. Вчені Середньої Азії та Близького Сходу, Північної Африки та Піренейського півострова в IX–XV ст. вивчають і перекладають праці Архімеда та низки видатних учених-математиків античного світу на загальнодоступну в їх середовищі арабську мову, що зводиться, зрештою, до збереження та передачі математикам Західної Європи древніх знань. Крім того, в цей час істотним є внесок учених Середньої Азії та Близького Сходу в розвиток математичної науки, зокрема, в становлення інтегрального числення. Так, одне зі значних наукових досягнень у обчисленні інтегралів було отримано в XI ст. в Іраку

[1] Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики: Пер. с нем. – 5-е изд., испр. / Д.Я. Стройк. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 256 с.

математиком Ібн ал-Хайсамом (965–1039), який у роботі «Про вимір параболічного тіла» наводить формули для суми послідовних квадратів, кубів та четвертих степенів, а також ряд інших формул для сум рядів, за допомогою яких проводить обчислення, що є рівнозначним обчисленню визначеного інтеграла $\int_0^a x^4 dx$ для знаходження об'єму параболоїда[1]. Він зміг узагальнити свої результати для інтегралів від многочленів до четвертого степеня. Отже, він був близький до пошуку загальної формули для інтегралів від поліномів, але при цьому не торкався многочленів вищих 4 степеня. У трактаті «Про ізопериметричні фігури» Ібн ал-Хайсам зробив спробу довести, що круг має найбільшу площу з усіх фігур рівного периметру, а куля – найбільший об'єм з усіх тіл із рівними поверхнями. Дещо раніше в «Книзі про вимір конічного перерізу, званого параболою» Сабіт ібн Корра (836–901) запропонував оригінальний прийом знаходження квадратури параболи, заснований на розділенні відрізка інтегрування на нерівні частини та рівнозначний обчисленню інтеграла $\int_0^a \sqrt{x} dx$. Це обчислення було істотним кроком уперед у порівнянні з дослідженнями античності, оскільки в Архімеда зустрічаються лише розрахунки, еквівалентні інтегруванню $\int_0^a x dx$ та $\int_0^a x^2 dx$. Прийом ібн Корри отримав подальший розвиток тільки у XVII ст., коли за допомогою прийому розділення відрізка інтегрування на нерівні частини в геометричній прогресії П. Ферма обчислив інтеграли[2] $\int_0^a x^{m/n} dx$.

Для західноєвропейської математики XII–XV сторіччя є переважно періодом засвоєння спадку Стародавнього світу та Сходу. Діяльність європейських учених у цей час була досить скромною. В цей час виникають перші ідеї про нескінченно великі та нескінченно малі величини. Так, в Оксфордському і Паризькому університетах такими вченими, як Ричард

---

[1] Юшкевич А.П. Интегральное исчисление / А.П. Юшкевич // Математический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – С. 230-236.

[2] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3-х т. / Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – Т.1: С древнейших времен до начала нового времени. – 352 с.

Суайнсхед (початок XIV ст.), Ніколя Орем (до 1130 р. – 1382) та ін., розвиваються перші елементи теорії зміни поточних величин, як функцій часу та їхні графічне зображення, що є основною передумовою виникнення математичного аналізу. У розгляд вводяться деякі необмежено протяжні площі скінченної величини. Важливим засобом дослідження при цьому виступає нескінченна збіжна геометрична прогресія. Наукові праці цих учених надалі помітно вплинули на деяких творців науки Нового часу – передусім на Ніколо Кузанського (1401–1464), Галілео Галілея (1564–1642) та Рене Декарта (1596–1650).

XVI століття для Західної Європи стало першим сторіччям переваги над Стародавнім світом і Сходом. В цей час починають знову відроджуватися вже колись забуті метод вичерпання і метод неподільних. У XVI і XVII ст. розвиток природничих наук поставив перед математикою Європи ряд нових задач, зокрема, задачі на знаходження квадратур (обчислення площ), кубатур (обчислення об'ємів) та визначення центрів тяжіння. Праці Архімеда, вперше видані в 1544 р. (латинською та грецькою мовами), стали привертати широку увагу, а їх вивчення стало одним із найважливіших відправних пунктів подальшого розвитку інтегрального числення. Математики нового часу, які шукали загальні пізнавальні прийоми та методи, передусім звернули увагу на недостатню загальність методу вичерпання. Схожі у своїй аналітичній суті задачі на квадратуру параболи й спіралі Архімеда, на кубатуру піраміди й еліпсоїда (всі вони можуть бути зведені до обчислення інтеграла $\int_0^a x^2 dx$) розглядалися давньогрецькими математиками кожна окремо.

Багато вчених першої половини XVII ст., зокрема, Лука Валеріо (1552–1618), Григорій із Сен-Винцента (1584–1667), його учень Андре Таке (1612–1660) та інші, – стали на шлях виділення тих загальних понять та їх властивостей, які знаходились у основі архімедівських доказів. А. Таке у своїй книзі «Теорія і практика арифметики» (1656) довів низку теорем, зокрема, знайшов суму нескінченно спадної геометричної прогресії, застосувавши граничний перехід (цю формулу тим самим методом отримав Е. Торрічеллі), визначив число комбінацій із n елементів по m. У роботі «Чотири книги про циліндрики і кільця» (1651) ним був застосований метод вичерпання для обчислення кубатури деяких тіл. Дослідження вказаних учених стали досить значущими для розвитку інтегрального числення їх послідовниками, хоча сам напрям досліджень мало збагатив запас обчислювальних засобів аналізу.

Першим ученим, який відродив античний метод «неподільних», був Йоганн Кеплер (1571–1630), що зумів обґрунтувати ідею цього методу на основі відомих йому робіт Архімеда завдяки своїм власним поглядам на нескінченно малі. У своїх творах «Нова астрономія» (1609) і «Стереометрія винних бочок» (1615) Й. Кеплер обчислив ряд площ (наприклад, площа фігури, обмеженої еліпсом) і знайшов близько сотні об'ємів тіл обертання (тіло розрізалося на нескінченно тонкі пластинки). Крім того, при виведенні законів руху планет, Й. Кеплер фактично спирався на ідею наближеного інтегрування. Ці дослідження були продовжені італійськими математиками Бонавентурою Кавальєрі (1598–1647) й Еванджелістом Торрічеллі (1608–1647), англійськими математиками Джоном Валлісом (1616–1703) та Ісаком Барроу (1630–1677), французьким математиком Блезом Паскалем (1623–1662). Методом неподільних була розв'язана низка геометричних та механічних задач. До цього ж часу належать опубліковані пізніше роботи французького математика Пьєра Ферма (1601–1665) з квадрування графіків функцій n-го степеня (у 1629 р. ним була розв'язана задача квадратури будь-якої кривої $y = x^N$, де N – ціле, тобто виведена формула $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$, і на цій основі розв'язана серія задач на знаходження центрів тяжіння), а потім – праці нідерландського математика Хрістіана Гюйгенса (1629–1695) з випрямлення кривих. У працях названих учених були закладені основи сучасного інтегрального числення. Значний прогрес у обчисленні інтегралів проявився в роботах Б. Кавальєрі з його методом неподільних. У роботах П. Ферма закладені основи сучасного інтегрального числення, а перші натяки на зв'язок між інтегруванням та диференціюванням зроблені на початку XVII століття І. Барроу й Е. Торрічеллі. У результаті цих досліджень виявилася спільність прийомів інтегрування при розв'язанні зовні несхожих задач геометрії та механіки, які приводилися до квадратури як до геометричного еквіваленту визначеного інтеграла. Завершальною ланкою в ланцюзі відкриттів цього періоду було встановлення взаємно зворотного зв'язку між задачами на проведення дотичної й на квадратуру, тобто між диференціюванням і інтегруванням.

У систематичній формі інтегральне числення було запропоноване в XVII ст. англійським натурфілософом і математиком Ісаком Ньютоном (1649–1727) і німецьким філософом і математиком Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем (1646–1716) незалежно один від одного. В їх працях були розроблені основні поняття й теорія інтегрального й диференціального числень, передусім зв'язок операцій диференціювання й інтегрування, а також їх застосування до розв'язання прикладних задач. Ці дослідження, по суті, стали початком інтенсивного розвитку математичного аналізу. При цьому в роботах І. Ньютона основну роль відігравало поняття невизначеного інтеграла (флюєнти), тоді як Г. Лейбніц виходив із поняття визначеного інтеграла[1]. Подальший розвиток інтегрального числення в XVIII ст. пов'язаний з іменами братів Якоба Бернуллі (1654–1705) і Йоганна Бернуллі (1667–1748), Брука Тейлора (1685–1731), Гійома Франсуа Антуана де Лопиталя (1661–1704), Леонарда Ейлера (1707–1783) і Жозефа Луї Лагранжа (1736–1813).

На початку XIX ст. інтегральне числення разом із диференціальним було перебудоване французьким математиком Огюстеном Луї Коші (1789–1857) на основі теорії границь та отримало логічно завершену форму. Дослідження в цьому напрямку пов'язані також з іменами чеського математика Бернарда Больцано (1781–1848), німецьких математиків Карла Фрідріха Гауса (1777–1855) і Георга Фрідріха Бернхарда Рімана (1826–1866), французьких математиків Жана Гастона Дарбу (1842–1917) і Анрі Леона Лебеґа (1875–1941) та ін. У розвитку інтегрального числення в XIX ст. взяли участь українські та російські математики Михайло Васильович Остроградський (1801–1862), Віктор Якович Буняковський (1804–1889), Микола Іванович Лобачевський (1792–1856), Пафнутій Львович Чебишев (1821–1894) та ін.

Отже, створення, розвиток та обґрунтування інтегрального числення стало результатом праці плеяди видатних учених. За допомогою інтегрального числення стало можливим розв'язувати єдиним методом багато теоретичних і прикладних задач, як нових, що раніше не піддавалися розв'язанню, так і старих, розв'язання яких вимагало спеціальних прийомів.

[1] Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1960. – 468 с.

Розділ 3. ПРАКТИКУМ ІЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

§1. Невизначений інтеграл

1. Безпосереднє інтегрування.

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці інтегралів називають **безпосереднім інтегруванням**. При цьому використовують елементарні перетворення підінтегральної функції.

Приклад 3.1 [**1**]. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральний вираз, використовуючи основну тригонометричну тотожність:

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Підставимо отриманий вираз у інтеграл. За допомогою формул (7) та (8) розширеної таблиці основних інтегралів (розділ 1, §1, п. 2.1), отримуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \ \blacksquare$$

Приклад 3.2 [**1**]. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3)}$.

Розв'язання. Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2-3)} = \frac{1}{4} \frac{(x^2+1)-(x^2-3)}{(x^2+1)(x^2-3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2-3} - \frac{1}{x^2+1} \right).$$

З урахуванням формул (13) та (15) розширеної таблиці основних інтегралів знаходимо:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-3)} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x^2-3} - \int \frac{dx}{x^2+1} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \operatorname{arctg} x \right) + C. \blacksquare$$

Приклад 3.3 [**28**]. Знайти інтеграл $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. У підінтегральній функції поділимо чисельник на знаменник:

$$\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1+3\sqrt{x}+3x+x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1+3x^{\frac{1}{2}}+3x+x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{7}{6}}.$$

Інтегруємо отриману суму степеневих функцій за формулою (1) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3 dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \left(x^{-\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{7}{6}}\right)dx = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C. \ \blacksquare$$

Приклад 3.4 [**16**]. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Понизимо степінь у підінтегральному виразі, отримаємо:

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}.$$

Підставляючи отриманий вираз у інтеграл, знаходимо:

$$\int\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx = \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C.$$

Тут ми використали властивість

$$\int f\left(ax+b\right)dx = \frac{1}{a}F\left(ax+b\right)+C, \qquad (3.1)$$

де $a \neq 0$, $F\left(x\right)$ є первісною функції $f\left(x\right)$, а також формулу (6) розширеної таблиці основних інтегралів. ■

Приклад 3.5 [**16**]. Знайти інтеграл $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx$.

Розв'язання. Використовуючи формулу косинуса подвійного кута, подамо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}=\frac{1+\sin^2 x}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right).$$

Тоді інтеграл набуває вигляду:

$$\int\frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+1\right)dx=\frac{-\operatorname{ctg} x+x}{2}+C.\ ■$$

Приклад 3.6 [**16**]. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$$\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}.$$

Після чого для обчислення інтеграла застосуємо формулу (3.1) і формулу (7) розширеної таблиці інтегралів:

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-1/2)}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.\ ■$$

Приклад 3.7 [**16**]. Знайти інтеграл $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину в підінтегральному виразі. Використовуючи формулу (15) розширеної таблиці основних інтегралів, отримаємо:

$$\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\frac{\left(x^2-1\right)+4}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\ ■$$

Приклад 3.8 [**16**]. Знайти інтеграл $\int\cos 3x\cdot\cos 2x dx$.

Розв'язання. Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми:

$$\cos 3x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\left(\cos 5x+\cos x\right).$$

Маємо:

$$\int \cos 3x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 5x + \cos x\right) dx = \frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{2}\sin x + C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.9 [**16**]. Знайти інтеграл $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$.

Розв’язання. Розкладемо на квадратні множники біквадратний тричлен, що знаходиться в знаменнику підінтегральної функції: $x^4-5x^2+6=\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)$. Підінтегральну функцію можна подати у вигляді суми двох дробів:

$$\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}=\frac{x^2-2+x^2-3}{\left(x^2-2\right)\left(x^2-3\right)}=\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2-2}\,.$$

Підставляючи у інтеграл, маємо:

$$\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx=\int\left(\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2-2}\right)dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C\,.\blacksquare$$

Приклад 3.10 [**16**]. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}$.

Розв’язання. Помножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на спряжений вираз $\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}$ та одержимо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}=\int \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{2a}dx=\frac{1}{3a}\left[\left(x+a\right)^{\frac{3}{2}}-\left(x-a\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.11 [**16**]. Знайти інтеграл $\int x\sqrt{a-bx}dx$.

Розв’язання. Виконаємо перетворення підінтегральної функції:

$$x\sqrt{a-bx}=-\frac{1}{b}\left(-bx\sqrt{a-bx}\right)=-\frac{1}{b}\left((a-bx-a)\sqrt{a-bx}\right)=-\frac{\left(a-bx\right)^{\frac{3}{2}}}{b}+\frac{a\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}}{b}\,.$$

$$\int x\sqrt{a-bx}dx=-\frac{1}{b}\int\left(a-bx\right)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{a}{b}\int\left(a-bx\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\frac{2}{5b^2}\left(a-bx\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2a}{3b^2}\left(a-bx\right)^{\frac{3}{2}}+C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.12 [**14**]. Знайти інтеграл $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$, то інтеграл набуває вигляду:

$$\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=2\cdot\int 5^{-x}dx-\frac{1}{5}\cdot\int 2^{-x}dx=-2\cdot\frac{5^{-x}}{\ln 5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2^{-x}}{\ln 2}+C\ .$$

Тут для інтегрування було використано формулу (4) розширеної таблиці основних інтегралів. ■

Приклад 3.13 [**33**]. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегральної функції:

$$4x^2+4x+5=\underline{(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 1+1}+4=(2x+1)^2+4\ .$$

Підставляючи в підінтегральний вираз, отримаємо інтеграл, що можна обчислити безпосереднім інтегруванням за допомогою формули (13) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int \frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C\ .\ ■$$

Приклад 3.14 [**33**]. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат під коренем у підінтегральній функції:

$$7-6x-x^2=7-\left(x^2+2\cdot 3\cdot x+9\right)+9=16-(x+3)^2,$$

отримаємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x+3)^2}}=\arcsin\frac{x+3}{4}+C\ .$$

Тут при інтегруванні було використано формулу (14) розширеної таблиці основних інтегралів. ■

Приклад 3.15 [**16**]. Знайти всі криві, кутовий коефіцієнт дотичних до яких у кожній точці дорівнює $2e^{2x}$.

Розв'язання. Нехай $y = y(x)$ – рівняння кривої. Тоді

$$y' = 2e^{2x} \Rightarrow y = \int 2e^{2x}dx = e^{2x} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.16 [**16**]. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, змінюється за законом $v = 3t^2 + 2$. Знайти закон руху тіла $s(t)$, якщо $s(0) = 0$.

Розв'язання. Із механічного змісту похідної [**4**, с. 190] випливає, що $v(t) = s'(t) = 3t^2 + 2$, тоді

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (3t^2 + 2)dt = t^3 + 2t + C .$$

Оскільки в початковий момент часу $s = 0$, то маємо

$$s(0) = C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 + 2t . \blacksquare$$

2. Метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі

У теоретичній частині було розглянуто обґрунтування застосування методу підстановки (заміни змінної) для знаходження невизначеного інтеграла (*теорема 1.2*) та деякі приклади використання підстановок $u = \varphi(x)$ або $x = \varphi(t)$. На прикладах розглянемо особливості застосування цього методу.

Приклад 3.17. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sin^2(\ln x)dx}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$, то доцільно використати підстановку $u = \ln x$. Отримуємо:

$$I = \int \sin^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2u)du = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C = \frac{\ln x}{2} - \frac{\sin(2\ln x)}{4} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.18 [**33**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 3}}$.

Розв'язання. У підінтегральному виразі $e^x dx = d\left(e^x\right), e^{2x} = \left(e^x\right)^2$, тому застосуємо підстановку $u = e^x$. Інтеграл I набуває вигляду $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3}}$. Отримали табличний інтеграл:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2+3}\right) + C = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+3}\right) + C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.19 [**19**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt[3]{1+x+x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз містить функцію $u = 1 + x + x^2$, а також, у вигляді множника, її диференціал $du = (2x+1)dx$. Тому, використовуючи підстановку $u = 1 + x + x^2$, отримуємо табличний інтеграл:

$$I = \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2} + C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.20 [**17**]. Обчислити інтеграл $\int \frac{f(x)\cdot f'(x)\,dx}{1+f(x)}$, де $f(x)$ – неперервно диференційовна на своїй області визначенння функція, $f(x) \neq -1$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int \frac{f(x)\cdot f'(x)\,dx}{1+f(x)} = \left\| \begin{matrix} t = f(x), \\ dt = f'(x)\,dx \end{matrix} \right\| = \int \frac{t\,dt}{1+t} = \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt =$$
$$= t - \ln|t+1| + C\,.$$

Повертаючись до змінної x, отримуємо:

$$\int \frac{f(x)\cdot f'(x)\,dx}{1+f(x)} = f(x) - \ln|1+f(x)| + C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.21. Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin x \cos x\,dx}{1+\sin x}$.

Розв'язання. Скористуємось результатом прикладу 3.20, де $f(x) = \sin x$, отримаємо:

$$\int \frac{\sin x \cos x dx}{1+\sin x} = \sin x - \ln\left|1+\sin x\right| + C \ . \ \blacksquare$$

Приклад 3.22 [**16**]. Знайти інтеграл $I = \int x\left(1-x\right)^{20} dx$.

Розв’язання. Цей інтеграл можна знайти, застосовуючи для піднесення до 20-го степеня формулу бінома Ньютона, проте більш доцільніше скористатися методом підстановки. Оскільки $x = 1-\left(1-x\right)$, то інтеграл I можна подати у вигляді:

$$I = \int \left(1-\left(1-x\right)\right)\left(1-x\right)^{20} dx \ .$$

Виконаємо підстановку $1-x=t,\ dx=-dt$. Отримуємо інтеграл:

$$I = \int \left(t-1\right)\cdot t^{20} dt = \int \left(t^{21}-t^{20}\right)dt = \frac{t^{22}}{22} - \frac{t^{21}}{21} + C = \frac{\left(1-x\right)^{22}}{22} - \frac{\left(1-x\right)^{21}}{21} + C \ . \ \blacksquare$$

Приклад 3.23 [**8**]. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2}$.

Розв’язання. Враховуючи, що $d\left(x^n\right) = n\cdot x^{n-1}dx$, доцільно виконати підстановку $z = x^n$. Маємо інтеграл

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{x^{2n}+a^2} = \frac{1}{n}\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C = \frac{1}{na}\operatorname{arctg}\frac{x^n}{a} + C \ . \ \blacksquare$$

Приклад 3.24 [**8**]. Знайти інтеграл $I = \int \frac{1+\ln x}{3+x\ln x}dx$.

Розв’язання. Використаємо підстановку

$$3 + x\ln x = t,\ \ dt = \left(1+\ln x\right)dx \ .$$

Отримаємо:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|t\right| + C = \ln\left|3+x\ln x\right| + C \ . \ \blacksquare$$

Приклад 3.25. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x\cdot\cos^2 x}}$.

Розв'язання. Оскільки $d\left(\operatorname{tg} x\right)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$, то інтеграл I можна подати у вигляді ($u=\operatorname{tg} x$):

$$I=\int u^{-\frac{3}{5}}du=\frac{5}{2}u^{\frac{2}{5}}+C=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}+\mathrm{C}.$$

Зазначені вище дії еквівалентні внесенню функції $\operatorname{tg} x$ під знак диференціала. А саме;

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 x}\cdot\cos^2 x}=\int\left(\operatorname{tg} x\right)^{-\frac{3}{5}}d\left(\operatorname{tg} x\right)=\frac{5}{2}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\frac{2}{5}}+C=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\operatorname{tg}^2 x}+\mathrm{C}.\ \blacksquare$$

Приклади 3.26 – 3.29 розв'яжемо внесенням функцій під знак диференціала.

Приклад 3.26 [**2**]. Обчислити інтеграл $\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

Розв'язання. Тут внесемо під знак диференціала функцію $1+x^3$, отримаємо:

$$\int x^2\cdot\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\left\|\begin{matrix} d\left(1+x^3\right)=3x^2dx \\ x^2dx=\dfrac{1}{3}d\left(1+x^3\right)\end{matrix}\right\|=\frac{1}{3}\int\left(1+x^3\right)^{1/3}d\left(1+x^3\right)\overset{(1)}{=}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(1+x^3\right)^{4/3}}{4/3}+C=\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 3.27 [**2**]. Обчислити інтеграл $\int\dfrac{x^3dx}{x^8-2}$.

Розв'язання. Внесемо під знак диференціала функцію x^4, одержимо:

$$\int\frac{x^3dx}{x^8-2}=\int\frac{1/4d\left(x^4\right)}{\left(x^4\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 3.28 [**2**]. Обчислити інтеграл $\int\operatorname{tg} x dx$.

Розв'язання. Тут після перетворень під знаком диференціала опиниться функція $\cos x$:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} \overset{(2)}{=} -\ln|\cos x| + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.29 [**2**]. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Розв’язання. Застосуємо основну тригонометричну тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ і внесемо функцію $\sin x$ під знак диференціала:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} \overset{(15)}{=} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos(\pi/2-x)}{1-\cos(\pi/2-x)}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| = \ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.30. Знайти інтеграл $\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2}dx$.

Розв’язання. Використовуючи підстановку $z = x^4 + x^2$, зведемо інтеграл до табличного:

$$\int \frac{2x^3+x}{x^4+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^4+x^2\right| + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.31. Знайти інтеграл $\int \frac{5^x dx}{9+25^x}$.

Розв’язання. Для спрощення інтеграла застосуємо підстановку $t = 5^x$, $dt = \ln 5 \cdot 5^x dx$. Отримаємо табличний інтеграл:

$$\int \frac{5^x dx}{9+25^x}dx = \frac{1}{\ln 5}\int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{1}{3\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3\ln 5}\operatorname{arctg}\frac{5^x}{3} + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.32. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\sqrt[3]{x}}$.

Розв’язання. Підстановка $\sqrt[3]{x} = t,\ dt = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}}$ зводить цей інтеграл до інтеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\sqrt[3]{x}} = 3\int \frac{dt}{\cos^2 t} = 3\operatorname{tg} t + C = 3\operatorname{tg}\sqrt[3]{x} + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.33 [**33**]. Знайти інтеграл $I=\int \dfrac{\left(1+\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$.

Розв’язання. Для зведення цього інтеграла до інтеграла від раціональної функції використаємо підстановку $x=t^6$. Тоді диференціал набуває вигляду $dx=6t^5dt$. Маємо інтеграл:

$$I=6\int \frac{\left(1+t^3\right)t^5dt}{t^3-t^2}=6\int \frac{t^3+t^6}{t-1}dt=6\int \frac{(t^3-1)+\left(t^6-1\right)+2}{t-1}dt=\ 6\left(I_1+I_2+I_3\right).$$

$$I_1=\int \frac{t^3-1}{t-1}dt=\int \left(t^2+t+1\right)dt=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C_1\ ;$$

$$I_2=\int \frac{t^6-1}{t-1}dt=\int \left(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)dt=\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C_2\ ;$$

$$I_3=\int \frac{2}{t-1}dt=2\ln\left|t-1\right|+C_3\ .$$

$$I=6\left(I_1+I_2+I_3\right)=6\left(\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{2t^3}{3}+t^2+2t+2\ln\left|t-1\right|\right)+C\ .$$

Виконуючи зворотну підстановку $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I=6\left(\frac{x}{6}+\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{4}+\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3}+x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+2\ln\left|x^{\frac{1}{6}}-1\right|\right)+C=$$

$$=6\left(\frac{x}{6}+\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{2\sqrt{x}}{3}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+2\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|\right)+C\ .\ \blacksquare$$

Приклад 3.34 [**33**]. Обчислити інтеграл $\int \dfrac{dx}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}}$.

Розв’язання. Застосуємо підстановку $x=\dfrac{1}{t},\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}$. Переходячи до нової змінної, отримуємо:

$$\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+t^2\right)}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1+t^2} + C =$$

$$= -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} + C. \ ■$$

Приклад 3.35. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{1+x^7}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int \frac{x^6 dx}{x^7 \cdot \sqrt[4]{1+x^7}} = \left\| \begin{matrix} 1+x^7 = t^4, \\ 7x^6 dx = 4t^3 dt \end{matrix} \right\| = \frac{4}{7}\int \frac{t^3 dt}{\left(t^4-1\right)\cdot t} = \frac{4}{7}\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} .$$

Отриманий інтеграл перетворимо таким чином:

$$\frac{4}{7}\int \frac{t^2 dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} = \frac{2}{7}\int \frac{\left(t^2-1\right)+\left(t^2+1\right)}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)} dt = \frac{2}{7}\left(\int \frac{dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2-1} \right) =$$

$$= \frac{2}{7}\left(\operatorname{arctg} t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \right) + C .$$

Зробимо зворотну підстановку $t = \sqrt[4]{1+x^7}$, отримаємо значення інтеграла:

$$I = \frac{2}{7}\operatorname{arctg} \sqrt[4]{1+x^7} + \frac{1}{7}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^7}-1}{\sqrt[4]{1+x^7}+1}\right| + C . \ ■$$

Розглянемо підстановки, що використовуються при інтегруванні виразів виду $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $a > 0$. Тут можливі такі випадки.

1) Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{a^2 - x^2}$, доцільно використовувати підстановку $x = a\sin t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. У цьому випадку отримуємо $dx = a\cos t\, dt,\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$.

2) Якщо підінтегральна функція містить вираз $\sqrt{x^2-a^2}$, позбутися ірраціональності можна за допомогою підстановки $x = \frac{a}{\cos t},\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$. Тоді

$dx = \frac{a\sin t\, dt}{\cos^2 t},\ \sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg} t$.

3) У випадку, коли під знаком інтеграла маємо корінь $\sqrt{a^2+x^2}$, можна позбутися радикала, використовуючи заміну змінної $x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Маємо $dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}, \sqrt{a^2+x^2} = \frac{a}{\cos t}$.

У цих випадках можуть також бути використані гіперболічні підстановки, а саме: для випадку 1 – $x = a\,\mathrm{th}\,t$, для випадку 2 – $x = a\,\mathrm{ch}\,t$, для випадку 3 – $x = a\,\mathrm{sh}\,t$.

Приклад 3.36 [**1**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}}$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить корінь $\sqrt{a^2+x^2}$, то маємо випадок 3, тому використаємо підстановку $x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Отримаємо:

$$I = \int \frac{a^3\mathrm{tg}^2 t\cos^3 t dt}{a^3\cos^2 t} = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt = \int \frac{\sin^2 t\cos t dt}{1-\sin^2 t} = \left\| \begin{matrix} \sin t = u, \\ \cos t\,dt = du \end{matrix} \right\| = \int \frac{u^2 du}{1-u^2}.$$

Виконаємо перетворення у отриманому інтегралі:

$$\int \frac{u^2 du}{1-u^2} = -\int \frac{(1-u^2)-1}{1-u^2}du = -\int du + \int \frac{du}{1-u^2} = -u - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C =$$

$$= -\sin t - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t - 1}{\sin t + 1}\right| + C.$$

Оскільки $x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ t = \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$, то, користуючись тотожністю $\sin\left(\mathrm{arctg}\,\alpha\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$, при $\alpha = \frac{x}{a}$ маємо $\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Остаточно отримуємо:

$$I = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{a^2+x^2}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\right| + C. \blacksquare$$

Приклад 3.37 [**1**]. Обчислити інтеграл $I = \int x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

Розв'язання. Для цього інтеграла маємо випадок 1), тому використовуємо заміну змінної $x = a\sin\, t,\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$:

$$I = a^4 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + C .$$

Виконаємо зворотну заміну: $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$. Виразимо через змінну x величину $\sin 4t$.

$$\sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t = 4\sin t \cos t\left(1 - 2\sin^2 t\right).$$

При $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ маємо $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$. Для $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$ одержимо $\sin t = \dfrac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},\ a > 0$. Підставляючи ці залежності у вираз для $\sin 4t$, отримаємо $\sin 4t = \dfrac{4x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} - \dfrac{8x^3}{a^4}\sqrt{a^2 - x^2}$. Підставимо цей вираз у отримане значення інтеграла I:

$$I = \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{a^2 x}{8}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^3}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C . \ ■$$

Приклад 3.38 [**1**]. Обчислити інтеграл $I = \int \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить $\sqrt{x^2 - a^2}$, то для цього інтеграла доцільно використати підстановку випадку 2: $x = \dfrac{a}{\cos t},\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

$$I = \int \frac{a \operatorname{tg} t \cdot \cos t}{a} \cdot \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t} = a\int \operatorname{tg}^2 t dt = = a\int\left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)dt = a\left(\operatorname{tg} t \text{ - } t\right) + C\ /$$

Перейдемо до змінної x:

$$\cos t = \frac{a}{x}, \;\; t = \arccos\frac{a}{x}, \;\; \operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Таким чином, $I = \sqrt{x^2 - a^2} - a \cdot \arccos\frac{a}{x} + C$. ■

Приклад 3.39 [**2**]. Обчислити інтеграл $I = \int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx$.

Розв'язання. У цьому випадку доцільно використати підстановку $x = a\cos t$:

$$I = \left\| \begin{array}{l} x = a\cos t, \\ 0 < t < \pi, \\ t = \arccos\dfrac{x}{a}, \\ dx = -a\sin t\, dt \end{array} \right\| = -a\int \sqrt{\frac{a - a\cos t}{a + a\cos t}} \sin t\, dt =$$

$$= -a\int \left| \operatorname{tg}\frac{t}{2} \right| \cdot 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\, dt .$$

Оскільки $0 < t < \pi$, то $\operatorname{tg}\frac{t}{2} > 0$, модуль відкривається із знаком „+", звідки отримаємо

$$I = -2a\int \sin^2\frac{t}{2} dt = -a\int (1 - \cos t) dt = -a(t - \sin t) + C =$$

$$= -a\arccos\frac{x}{a} + a\sin\left(\arccos\frac{x}{a}\right) + C .$$

Далі скористаємось формулою $\sin\arccos y = \sqrt{1 - y^2}$ і одержимо

$$I = -a\arccos\frac{x}{a} + a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + C = -a\arccos\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C . \;■$$

Приклад 3.40. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$.

Розв'язання. Спочатку зазначимо, що підінтегральна функція визначена при $x < -3$ і при $x > 3$. Оскільки підінтегральний вираз містить радикал вигляду $\sqrt{x^2 - a^2}$, то для знаходження цього інтеграла можна використати гіперболічну підстановку $x = 3\operatorname{ch} t,\ t > 0$ у випадку $x > 3$ або підстановку $x = -3\operatorname{ch} t,\ t > 0$ у випадку $x < -3$.

Розглянемо спочатку випадок $x > 3$. Тоді $x = 3\operatorname{ch} t,\ t > 0$, $dx = 3\operatorname{sh} t\, dt$, а підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{3\operatorname{sh} t\, dt}{9\operatorname{ch}^2 t \cdot \sqrt{9\operatorname{ch}^2 t - 9}} = \frac{3\operatorname{sh} t\, dt}{9\operatorname{ch}^2 t \cdot 3\operatorname{sh} t} = \frac{dt}{9\operatorname{ch}^2 t}.$$

Підставимо його в інтеграл I:

$$I = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{9}\operatorname{th} t + C.$$

Перейдемо до змінної x:

$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\operatorname{ch} t} = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}}{\frac{x}{3}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x};$$

$$I = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C \text{ при } x > 3.$$

Тепер розглянемо випадок $x < -3$. Тоді $x = -3\operatorname{ch} t,\ t > 0$, $dx = -3\operatorname{sh} t\, dt$, отже

$$I = \int \frac{-3\operatorname{sh} t\, dt}{9\operatorname{ch}^2 t \cdot \sqrt{9\operatorname{ch}^2 t - 9}} = \int \frac{-dt}{9\operatorname{ch}^2 t} = -\frac{1}{9}\operatorname{th} t + C =$$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}{\operatorname{ch} t} + C = -\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1}}{-\frac{x}{3}} + C = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C \text{ при } x < -3. \blacksquare$$

3. Метод інтегрування частинами

Цей метод ґрунтується на використанні формули, доведення якої надається у розділі 1, §1, п. 2.2 (*теорема 1.3*):

$$\boxed{\int u(x)\, d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)\, d(u(x))}$$

Тут із існування на X невизначеного інтеграла $\int u(x)d(v(x))$ випливає існування інтеграла $\int v(x)\, d(u(x))$ і навпаки.

Для застосування цього методу підінтегральний вираз слід подати у вигляді добутку однієї функції та диференціала іншої функції. У розділі 1, §1, п. 2.2 у таблиці надано класифікацію основних типів функцій, що інтегруються частинами.

Приклад 3.41. Обчислити інтеграл $\int x^{\alpha} \ln x\, dx, \quad \alpha \neq -1$.

Розв'язання. Виберемо за u вираз $\ln x$. При цьому отримуємо:

$$u = \ln x, dv = x^{\alpha} dx, du = \frac{dx}{x}, v = \int dv = \int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} .$$

Тут і в інших прикладах при знаходженні v ми вибираємо найпростішу первісну, для якої $C = 0$. З формули інтегрування частинами знаходимо:

$$\int x^{\alpha} \ln x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = x^{\alpha} dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \end{matrix} \right\| = \frac{x^{\alpha+1} \cdot \ln x}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} \int x^{\alpha} dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1} \cdot \ln x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.42 [**2**]. Обчислити інтеграл $\int \arcsin x dx$.

Розв'язання. Для даного інтеграла $u = \arcsin x, dv = dx$. Тоді $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$. Підставляючи ці вирази у формулу інтегрування частинами, знаходимо:

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.43 [**28**]. Обчислити інтеграл $I = \int \cos\left(\ln x\right) dx$.

Розв'язання. Приймемо $u = \cos\left(\ln x\right), dv = dx$. Тоді

$$du = -\frac{\sin(\ln x)dx}{x},\ v = \int dv = x\ ;$$

$$I = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx\ .$$

Застосуємо формулу інтегрування частинами ще раз:

$$u = \sin(\ln x),\ dv = dx,\ du = \frac{\cos(\ln x)dx}{x},\ v = x\ ;$$

$$I_1 = \int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - I\ .$$

Підставляючи I_1 у вираз для I , отримуємо:

$$I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I\ .$$

Звідси отримуємо: $I = \frac{x}{2}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] + C$. ■

Приклад 3.44. Обчислити інтеграл $I = \int \left(x^2 - 3x + 7\right)\sin 2xdx$.

Розв'язання. Даний інтеграл відноситься до класу А за класифікацією розділу 1, §1, п. 2.2, тому за u виберемо многочлен: $u = x^2 - 3x + 7$. Тоді $dv = \sin 2xdx,\ du = (2x-3)dx,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x$. За формулою інтегрування частинами знаходимо:

$$I = -\frac{x^2 - 3x + 7}{2}\cdot\cos 2x + \frac{1}{2}\int (2x-3)\cos 2xdx\ .$$

В інтегралі у правій частині цієї рівності покладемо

$$u = 2x - 3,\ \ dv = \cos 2xdx,\ \ du = 2dx,\ v = \frac{1}{2}\sin 2x\ .$$

Тоді

$$I = \frac{-x^2 + 3x - 7}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{2x-3}{2}\sin 2x - \int \sin 2xdx\right) =$$

$$= \frac{6x - 2x^2 - 13}{4}\cos 2x + \frac{2x-3}{4}\sin 2x + C\ .\ ■$$

При обчисленні інтегралів вигляду $\int P_n(x)e^{ax}dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, які належать до класу А (за класифікацією розділу 1, §1, п. 2.2), інтегрування частинами необхідно виконувати n разів, вибираючи $u = P_n(x)$. При цьому в результаті інтегрування отримуємо функцію, що має вигляд $Q_n(x)e^{ax}$, де $Q_n(x)$ – многочлен того ж степеня n, що й $P_n(x)$. Це дає змогу застосувати для обчислення інтегралів цього типу метод невизначених коефіцієнтів, сутність якого розглянемо на прикладі.

Приклад 3.45 [**8**]. Обчислити інтеграл $\int(3x^3-17)e^{2x}dx$.

Розв'язання. Застосуємо розглянутий вище підхід до розв'язання цього прикладу. Будемо шукати інтеграл I у вигляді добутку многочлена 3-го степеня з невизначеними коефіцієнтами на показникову функцію e^{2x}:

$$\int(3x^3-17)e^{2x}dx = (A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4)e^{2x}+C.$$

Диференціюючи праву та ліву частину цієї рівності, отримуємо:

$$(3x^3-17)e^{2x} = (3A_1x^2+2A_2x+A_3)e^{2x}+2e^{2x}(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4).$$

$$3x^3-17 \equiv 2A_1x^3+(2A_2+3A_1)x^2+(2A_3+2A_2)x+(2A_4+A_3).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах цієї тотожності, отримуємо систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів A_1, A_2, A_3, A_4:

$$\begin{cases} 2A_1 = 3, \\ 2A_2+3A_1 = 0, \\ 2A_3+2A_2 = 0, \\ 2A_4+A_3 = -17; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{3}{2}, \ \ A_2 = -\dfrac{9}{4}, \\ A_3 = \dfrac{9}{4}, \ \ A_4 = -\dfrac{77}{8}. \end{cases}$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int(3x^3-17)e^{2x}dx = \left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C. \ \blacksquare$$

Метод невизначених коефіцієнтів можна застосувати також для знаходження інтегралів більш загального вигляду

$I=\int e^{ax}\left(P_n\left(x\right)\cos bx+Q_m\left(x\right)\sin bx\right)dx$, де $P_n\left(x\right)$ та $Q_m\left(x\right)$ – многочлени степенів n та m відповідно. У цьому випадку результат інтегрування шукаємо у вигляді: $I=e^{ax}\left(R_l\left(x\right)\cos bx+S_l\left(x\right)\sin bx\right)$, де $R_l\left(x\right)$ та $S_l\left(x\right)$ – многочлени з невизначеними коефіцієнтами степені $l=\max\left\{m,n\right\}$. Ці коефіцієнти знаходимо, диференціюючи вирази для I та прирівнюючи коефіцієнти при однакових виразах виду $x^k e^{ax}\cos bx$ та $x^k e^{ax}\sin bx$, $k=1,2,...,l$.

Приклад 3.46 [33]. Обчислити інтеграл

$$I=\int e^{-x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x-x\sin 2x\right]dx .$$

Розв'язання. Оскільки $l=\max\left\{1;\,2\right\}=2$, будемо шукати значення інтеграла I у вигляді:

$$\int e^{-x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x-x\sin 2x\right]dx=$$
$$=e^{-x}\left[\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\cos 2x+\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)\sin 2x\right]+C .$$

Після диференціювання обох частин цієї рівності отримаємо:

$$e^{-x}\left[\left(x^2+1\right)\cos 2x-x\sin 2x\right]=$$
$$=-e^{-x}\left[\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\cos 2x+\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)\sin 2x\right]+e^{-x}\times$$
$$\times\Big[\left(2A_1x+A_2\right)\cos 2x-2\left(A_1x^2+A_2x+A_3\right)\sin 2x+$$
$$+\left(2B_1x+B_2\right)\sin 2x+2\left(B_1x^2+B_2x+B_3\right)\cos 2x\Big].$$

З останньої рівності отримуємо систему для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases}2B_1-A_1=1,\\ 2B_2+2A_1-A_2=0,\\ 2B_3+A_2-A_3=1,\\ -B_1-2A_1=0,\\ 2B_1-B_2-2A_2=-1,\\ B_2-B_3-2A_3=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=-\dfrac{1}{5},\ A_2=\dfrac{16}{25},\\ A_3=\dfrac{17}{125},\ B_1=\dfrac{2}{5},\\ B_2=\dfrac{13}{25},\ B_3=\dfrac{31}{125}.\end{cases}$$

Таким чином, отримуємо значення інтеграла I :

$$I = e^{-x}\left[\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{16}{25}x + \frac{17}{125}\right)\cos 2x + \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{13}{25}x + \frac{31}{125}\right)\sin 2x\right] + C\ .\ \blacksquare$$

Приклад 3.47 [**15**]. Обчислити інтеграл $I = \int \sin\sqrt{x}dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $t = \sqrt{x},\ x = t^2,\ dx = 2tdt$. Отримаємо $I = 2\int t\sin tdt$. Застосуємо формулу інтегрування частинами, вибираючи $u = t,\ dv = \sin tdt,\ du = dt,\ v = -\cos t$:

$$I = 2\left(-t\cos t + \int \cos tdt\right) = 2\left(\sin t - t\cos t\right) + C = = 2\left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) + C\ .\ \blacksquare$$

Приклад 3.48 [**33**]. Отримати рекурентну формулу для інтеграла $I_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$, де $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$.

Розв'язання. Застосуємо для знаходження цього інтеграла метод інтегрування частинами:

$$u = \sin^{n-1} x,\ dv = \frac{\sin xdx}{\cos^m x},\ du = \left(n-1\right)\sin^{n-2} x\cos xdx,$$

$$v = -\int \cos^{-m} xd\left(\cos x\right) = \frac{1}{\left(m-1\right)\cos^{m-1} x};$$

$$I_{n,m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx = \frac{\sin^{n-1} x}{\left(m-1\right)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\sin^{n-2} xdx}{\cos^{m-2} x} =$$

$$= \frac{\sin^{n-1} x}{\left(m-1\right)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}I_{n-2,m-2}\ .\ \blacksquare$$

Приклад 3.49 [**15**]. Отримати рекурентну формулу для інтеграла $I_n = \int x^\alpha \ln^n xdx$, де $\alpha \neq -1$, $n \geq 2$.

Розв'язання. Для випадку $n = 1$ інтеграл I_1 знайдено у прикладі 3.41. Для обчислення інтеграла I_n виберемо $u = \ln^n x,\ dv = x^\alpha dx,$ тоді $du = n\ln^{n-1} x \cdot \frac{dx}{x},\ v = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. За формулою інтегрування частинами маємо:

$$I_n = \int x^\alpha \ln^n x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1}\int x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^n x - \frac{n}{\alpha+1} I_{n-1},\ n \geq 2 .$$

При $n=1$ маємо $I_1 = \dfrac{x^{\alpha+1}\cdot \ln x}{\alpha+1} - \dfrac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C$. ■

Приклад 3.50. Знайти інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3}$.

Розв'язання. Використаємо рекурентну формулу, отриману в розділі 1, §1, п. 2.2:

$$K_\lambda = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1} + \frac{x}{2(\lambda-1)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right],\ \lambda \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

де $K_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. При $\lambda = 3, a = 2$ отримаємо:

$$K_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}K_2 + \frac{x}{4\left(x^2+4\right)^2}\right].$$

Далі послідовно знаходимо:

$$K_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C ,$$

$$K_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C .$$

Підставляючи K_2 в K_3, маємо:

$$K_3 = \frac{1}{16}\left(\frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+4} + \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right) + C . \ ■$$

При обчисленні багатьох інтегралів доводиться застосовувати формулу інтегрування частинами послідовно кілька разів. Результат можна отримати швидше, якщо використати узагальнену формулу інтегрування частинами:

$$\int u(x)v(x)dx = u(x)v_1(x) - u'(x)v_2(x) + u''(x)v_3(x) - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v_n(x) + (-1)^n \int u^{(n)}(x)v_n(x)dx .$$

У цій формулі $v_k(x)=\int v_{k-1}(x)dx,\ k=1,2,...,n,\ v_0=v(x)$. Тут за $v_k(x)$ вибираємо первісну, для якої $C=0$. При цьому вважається, що всі похідні та інтеграли, які входять у цю формулу, існують. Застосування формули узагальненого інтегрування частинами є доцільним, зокрема, при обчисленні інтеграла $\int P_n(x)\varphi(x)dx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, а множник $\varphi(x)$ легко послідовно інтегрувати $n+1$ разів.

Приклад 3.51 [**8**]. Використовуючи узагальнену формулу інтегрування частинами, обчислити інтеграл

$$I=\int\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\sqrt{2x+6}dx.$$

Розв'язання. Виберемо $u=2x^3+3x^2-8x+1$, $v=\sqrt{2x+6}$. Тоді знаходимо:

$$u'=6x^2+6x-8,\ u''=12x+6,\ u'''=12,$$

$$v_1=\int vdx=\int\sqrt{2x+6}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3},\ v_2=\int v_1dx=\frac{1}{3}\int(2x+6)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{5}{2}}}{15},$$

$$v_3=\int v_2dx=\frac{1}{15}\int(2x+6)^{\frac{5}{2}}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{7}{2}}}{105},$$

$$v_4=\int v_3dx=\frac{1}{105}\int(2x+6)^{\frac{7}{2}}dx=\frac{(2x+6)^{\frac{9}{2}}}{945}.$$

Оскільки $u^{(n)}(x)=0$ при $n\geq 4$, то за узагальненою формулою інтегрування частинами отримуємо значення інтеграла I:

$$I=\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(6x^2+6x-8\right)\frac{(2x+6)^{\frac{5}{2}}}{15}+$$

$$+(12x+6)\frac{(2x+6)^{\frac{7}{2}}}{105}-12\frac{(2x+6)^{\frac{9}{2}}}{945}+C.\ \blacksquare$$

4. Інтегрування раціональних функцій

Загальні теоретичні відомості щодо інтегрування раціональних функцій наведено в розділі 1, §1, п. 3.

Розглянемо приклади інтегрування раціональних функцій вигляду $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}, n \in N$.

Приклад 3.52. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2+16x+73}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат у знаменнику підінтегрального виразу:

$$x^2+16x+73 = \underline{x^2+2\cdot 8x+64}+9 = \left(x+8\right)^2+9 .$$

Підставимо в інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+16x+73} = \int \frac{dx}{\left(x+8\right)^2+9} = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x+8}{3}+C . \blacksquare$$

Приклад 3.53. Знайти інтеграл $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5}$.

Розв'язання. Оскільки похідною знаменника дробу є $4x+2$, доцільно виділити цей вираз у чисельнику підінтегральної функції:

$$\frac{x}{2x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x+2-2}{2x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x+2}{2x^2+2x+5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)} .$$

Тоді $\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\left(I_1-I_2\right)$, де $I_1 = \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx, I_2 = \int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}}$.

$$I_1 = \int \frac{d\left(2x^2+2x+5\right)}{2x^2+2x+5} = \ln\left(2x^2+2x+5\right)+C_1, I_2 = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\mathrm{arctg}\frac{2x+1}{3}+C_2 .$$

Для заданого інтеграла отримуємо:

$$\int \frac{xdx}{2x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\left(I_1 - I_2\right) = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{3} + C\,. \ \blacksquare$$

Приклад 3.54 [**28**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,dx$.

Розв'язання. Похідна квадратного тричлена $x^2+2x+10$ дорівнює $2x+2$, тому підінтегральну функцію перетворимо до вигляду

$$\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}\left(2x+2\right)-1}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2} - \frac{1}{\left(\left(x+1\right)^2+9\right)^2}\,.$$

Заданий інтеграл подамо у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,dx - \int \frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+9\right)^2},$$

$$I_1 = \int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,dx, \quad I_2 = \int \frac{dx}{\left(\left(x+1\right)^2+9\right)^2}.$$

Тоді інтеграл I_1 набуде вигляду

$$I_1 = \int \frac{d\left(x^2+2x+10\right)}{\left(x^2+2x+10\right)^2} = -\frac{1}{x^2+2x+10} + C_1\,,$$

а інтеграл I_2 заміною $x+1=t$ зведемо до інтеграла K_λ, $\lambda = 2$, що обчислюємо за рекурентною формулою (3.2):

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+9\right)^2} = \frac{1}{18}\cdot\frac{t}{t^2+9} + \frac{1}{54}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C_2\,.$$

Остаточно отримаємо:

$$I = \int \frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot I_1 - I_2 = -\frac{3}{2\left(x^2+2x+10\right)} - \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C\,. \ \blacksquare$$

Для інтегрування раціональних функцій найчастіше використовують їх розклад на прості дроби. Методику здійснення такого розкладання розглянуто в розділі 1, §1, п. 3.

Приклад 3.55. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx$.

Розв'язання. Дріб $\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}$ є правильним (степінь чисельника є меншим, ніж степінь знаменника), його розклад у суму простих дробів має вигляд:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B та C, для чого приведемо праву частину розкладу до спільного знаменника:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}.$$

Знаменники дробів у лівій та правій частинах цієї рівності є рівними, тому повинні збігатися й чисельники. Маємо:

$$x^2+4x+4=A(x^2-2x+1)+B(x^2-x)+Cx.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій та лівій частинах останньої рівності, отримуємо систему для знаходження коефіцієнтів A, B та C:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -2A-B+C=4, \\ A=4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4, \\ B=-3, \\ C=9. \end{cases}$$

Таким чином, розклад підінтегральної функції на прості дроби має вигляд:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.$$

Підставляючи цей розклад у інтеграл I, отримуємо:

$$\int \frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}dx=4\int\frac{dx}{x}-3\int\frac{dx}{x-1}+9\int\frac{dx}{(x-1)^2}=4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C. \blacksquare$$

Приклад 3.56. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x^2-5x+6)}dx$.

Розв'язання. Подамо другий множник знаменника у вигляді добутку незвідних многочленів: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$. Знайдемо розклад підінтегральної функції на прості дроби:

$$\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x^2-5x+6)}=\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

Після зведення суми дробів у правій частині до спільного знаменника, прирівнюючи чисельники, отримаємо:

$$x^2-x+4=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2).$$

Для знаходження коефіцієнтів A, B та C замість прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x можна обчислити значення правої та лівої частин цієї рівності при трьох різних значеннях змінної x. Для цього зручно вибрати корені знаменника підінтегральної функції: $x=-1$, $x=2$ та $x=3$. При $x=-1$ отримуємо $12A=6,\ A=\frac{1}{2}$. При $x=2$ знаходимо $-3B=6,\ B=-2$, при $x=3$ маємо $4C=10,\ C=\frac{5}{2}$.

Таким чином, отримуємо:

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x-2}+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-3}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-2\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln|x-3|+C.$$

Зауважимо, що невизначені коефіцієнти в цьому прикладі можна було також шукати за допомогою прийому викреслювання (див. у розділ 1, §1, п. 3). У цьому випадку усі коефіцієнти A, B та C почергово знаходяться викреслюванням у знаменнику дробу

$$\frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

відповідного незвідного множника $(x+1)$, $(x-2)$ та $(x-3)$ і підстановкою в ті вирази, що залишилися

$$\frac{x^2-x+4}{(x-2)(x-3)},\ \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-3)}\ \text{та}\ \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)}$$

значень коренів $-1,\ 2$ та 3. Відповідно отримаємо:

$$A=\frac{(-1)^2-(-1)+4}{(-1-2)(-1-3)}=\frac{1}{2},\ B=\frac{2^2-2+4}{(2+1)(2-3)}=2\ \text{та}\ C=\frac{3^2-3+4}{(3+1)(3-2)}=\frac{5}{2}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.57. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}dx$.

Розв'язання. Розклад дробу $\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}$ у суму простих дробів шукаємо у вигляді:

$$\frac{3x^2-x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Систему для визначення коефіцієнтів цього розкладу отримаємо, зводячи дроби у правій частині рівності до спільного знаменника та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у чисельнику:

$$3x^2-x+2=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+C)(x-1)\left(x^2+1\right)+(Dx+E)(x-1).$$

Вибираючи $x=1$, знаходимо $A=1$. Із рівності коефіцієнтів при однакових степенях x випливає:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -B+C=0, \\ 2A-C+D+B=3, \\ A-C-E=2. \end{cases}$$

З урахуванням $A=1$ із даної системи знаходимо решту коефіцієнтів: $B=C=-1, D=1, E=0$.

$$I=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{x+1}{x^2+1}dx+\int\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-$$

$$-\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.58. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}dx$.

Розв'язання. Оскільки дріб під знаком інтеграла є неправильним (степінь чисельника є більшим, ніж степінь знаменника), то перед його розкладом на прості дроби необхідно спочатку виділити цілу частину. Ділимо x^3-x на квадратний тричлен x^2-5x+6 та отримуємо:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+0x^2-x+0 & x^2-5x+6 \\ \underline{x^3-5x^2+6x} & \overline{x+5} \\ -\;5x^2-7x & \\ \underline{5x^2-25x+30} & \\ 18x-30. & \end{array}$$

Звідки

$$\frac{x^3-x}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{18x-30}{x^2-5x+6}=x+5+\frac{18x-30}{(x-2)(x-3)}\,.$$

Розкладемо дріб у правій частині рівності на прості дроби:

$$\frac{18x-30}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\,.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях x у чисельниках, маємо $A+B=18$, $-3A-2B=-30$. Звідси знаходимо $A=-6, B=24$. Таким чином,

$$I=\int(x+5)dx-6\int\frac{dx}{x-2}+24\int\frac{dx}{x-3}=\frac{x^2}{2}+5x-6\ln|x-2|+24\ln|x-3|+C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.59 [**2**]**.** Обчислити інтеграл $I=\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний раціональний дріб є неправильним, тому спочатку виділимо цілу частину, поділивши чисельник на знаменник «стовпчиком»:

$$
\begin{array}{r|l}
\_\,x^{10}+0x^9+0x^8+0x^7+0x^6+0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0 & x^2+x-2 \\
\hline
x^{10}+x^9-2x^8 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4- \\
\_\,-x^9+2x^8+0x^7 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & -21x^3+43x^2-85x+171 \\
-x^9-x^8+2x^7 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\_\,3x^8-2x^7+0x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
3x^8+3x^7-6x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\_\,-5x^7+6x^6+0x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
-5x^7-5x^6+10x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
\_\,11x^6-10x^5+0x^4 \qquad\qquad\qquad & \\
11x^6+11x^5-22x^4 \qquad\qquad\qquad & \\
\_\,-21x^5+22x^4+0x^3 \qquad\qquad & \\
-21x^5-21x^4+42x^3 \qquad\qquad & \\
\_\,43x^4-42x^3+0x^2 \qquad & \\
43x^4+43x^3-86x^2 \qquad & \\
\_\,-85x^3+86x^2+0x & \\
-85x^3-85x^2+170x & \\
\_\,171x^2-170x+0 & \\
171x^2+171x-342 & \\
-341x+342 &
\end{array}
$$

Звідки отримаємо

$$I=\int\left(x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3+43x^2-85x+171+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+\int\frac{-341x+342}{x^2+x-2}dx\ .$$

Тепер розглянемо підінтегральну функцію в інтегралі $\int\frac{-341x+342}{x^2+x-2}dx$ і розкладемо цей дріб на найпростіші:

$$\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{-341x+342}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}\ .$$

Невизначені коефіцієнти можна знайти, наприклад, за допомогою прийому викреслювання: $A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1024}{3}$. Після чого одержимо

$$\int\frac{-341x+342}{x^2+x-2}dx=\int\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1024}{3(x+2)}\right)dx=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1024}{3}\ln|x+2|+C\ .$$

Об'єднуючи разом усі отримані результати, отримаємо:

$$I=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}+171x+$$

$$+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1024}{3}\ln|x+2|+C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.60 [**2**]**.** Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб є правильним. Розкладемо його знаменник на незвідні множники:

$$x^5-x^4+x^3-x^2+x-1=\left(x^5-x^4\right)+\left(x^3-x^2\right)+\left(x-1\right)=(x-1)\left(x^4+x^2+1\right)=.$$

$$=(x-1)\left(x^4+2x^2+1-x^2\right)=(x-1)\left(\left(x^2+1\right)^2-x^2\right)=(x-1)\left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right).$$

У результаті отримаємо дріб

$$\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)},$$

який підлягає розкладу на прості дроби:

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}.$$

Після застосування методу невизначених коефіцієнтів одержимо $A=1/3$, $B=-1/3,\quad C=-1/6,\quad D=0,\quad E=-1/2$, тому

$$I=\int\left(\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2-x+1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\,. \blacksquare$$

Оскільки розклад на прості дроби здебільшого потребує значних затрат часу, то при обчисленні інтегралів від раціональних функцій корисно виконувати спрощення або заміну змінних у підінтегральному виразі, що дозволяє полегшити обчислення інтеграла.

Приклад 3.61. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{(x-3)(x+4)}$.

Розв'язання. Здійснимо перетворення підінтегральної функції:

$$\frac{1}{(x-3)(x+4)}=\frac{1}{7}\cdot\frac{(x+4)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+4}\right).$$

Підставивши в інтеграл, отримаємо:

$$I=\frac{1}{7}\left(\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{x+4}\right)=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-3}{x+4}\right|+C.$$

Приклад 3.62 [**1**]. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{x^2\left(x^2+2\right)^2}$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення підінтегральної функції:

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{x^2+2-x^2}{2x^2\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{2x^2\left(x^2+2\right)}-\frac{1}{2\left(x^2+2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+2}\right)-\frac{1}{2\left(x^2+2\right)^2}.$$

Підставляючи в інтеграл I, отримаємо:

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}.$$

Застосуємо до останнього інтеграла рекурентну формулу (3.2).

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}+\frac{x}{4\left(x^2+2\right)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{4\left(x^2+2\right)}+C_1.$$

Отже, $I=-\frac{1}{4x}-\frac{x}{8\left(x^2+2\right)}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. ■

Приклад 3.63 [**1**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x\left(1-x^3\right)^2}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $3x^2$. Отримаємо:

$$I = \int \frac{3x^2 dx}{3x^3\left(1-x^3\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{x^3\left(1-x^3\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u\left(1-u\right)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\left(1-u\right)+u}{u\left(1-u\right)^2}du =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{du}{u\left(1-u\right)} + \int \frac{du}{\left(1-u\right)^2}\right] = \frac{1}{3}\left[\int \frac{u+\left(1-u\right)}{u\left(1-u\right)}du - \frac{1}{u-1}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{u} - \frac{1}{u-1}\right] = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x^3}{x^3-1} - \frac{1}{x^3-1}\right] + C\ . \ ■$$

Приклад 3.64. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}dx$.

Розв'язання. Ділимо чисельник та знаменник підінтегральної функції на x^2, отримаємо:

$$I = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5} = \int \frac{dz}{z^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{\sqrt{5}x} + C\ . \ ■$$

Якщо знаменник $Q(x)$ правильного раціонального дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ має кратні корені (в тому числі й комплексні), то для інтегрування цього дробу можна застосувати ***метод Остроградського*** [**3**, с. 353 – 359], який полягає у виділенні раціональної частини первісної. Запишемо многочлен $Q_2(x)$ так, щоб усі його корені були простими й при цьому кожний корінь $Q_2(x)$ був би також коренем многочлена $Q(x)$. Тоді $Q(x) = Q_2(x)Q_1(x)$, де корені $Q_1(x)$ є коренями многочлена $Q(x)$ на одиницю меншої кратності. Зокрема, всі прості корені $Q(x)$ будуть коренями $Q_2(x)$ і не будуть коренями $Q_1(x)$. Метод Остроградського ґрунтується на основному співвідношенні

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{R(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{S(x)}{Q_2(x)}dx,$$

де $R(x), S(x)$ – многочлени з невизначеними коефіцієнтами, степені яких відповідно на одиницю менші за степені многочленів $Q_1(x)$ та $Q_2(x)$. Невизначені коефіцієнти у цих многочленах знаходяться за допомогою диференціювання основного співвідношення методу Остроградського. Звичайно, цей метод доцільно застосовувати, якщо многочлен $Q(x)$ має кілька коренів великої кратності.

Приклад 3.65 [**1**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{(2x+12)dx}{(x^2+4x+8)^2}$.

Розв'язання. Застосуємо метод Остроградського, згідно з яким інтеграл I запишемо у вигляді:

$$I = \int \frac{(2x+12)dx}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{ax+b}{x^2+4x+8} + \int \frac{(cx+d)dx}{x^2+4x+8}.$$

Тут $Q(x) = (x^2+4x+8)^2$ має пару комплексних коренів кратності 2, тому $Q_2(x)$ та $Q_1(x)$ є многочленами, що мають лише ці ж прості корені. Звідси $Q_2(x) = Q_1(x) = x^2+4x+8$. Диференціюючи отриманий вираз для I, маємо

$$\frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)}{(x^2+4x+8)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4x+8}.$$

Звідси, додаючи дроби в правій частині останньої рівності, прирівнюємо чисельники зліва та справа:

$$2x+12 = a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)+(cx+d)(x^2+4x+8).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій та правій частинах отриманої рівності, будуємо систему для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} c = 0, \\ a - 2a + d + 4c = 0, \\ 4a - 4a - 2b + 4d + 8c = 2, \\ 8a - 4b + 8d = 12; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ a = b = d = 1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\int \frac{(2x+12)\,dx}{\left(x^2+4x+8\right)^2} = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \left\| \begin{aligned} & x^2+4x+8 = \\ & = \underline{x^2+4x+4}+4 = \\ & = (x+2)^2+2^2 \end{aligned} \right\| =$$

$$= \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C\,. \blacksquare$$

Приклад 3.66. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{x^4+1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменник підінтегрального виразу:

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = \left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right).$$

Подамо підінтегральну функцію у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,.$$

Приводячи суму дробів у правій частині останньої рівності до спільного знаменника, отримуємо тотожність:

$$1 \equiv (Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right).$$

Звідси отримуємо систему для визначення коефіцієнтів A, B, C та D:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D=0, \\ A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}=0, \\ B+D=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \\ C=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \\ B=D=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Таким чином отримуємо інтеграл I:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}(I_1-I_2);$$

$$I_1=\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+C.$$

Аналогічно знаходимо інтеграл I_2:

$$I_2=\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)-\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)+C.$$

Підставляючи I_1 та I_2 у вираз для I, отримаємо:

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}(I_1-I_2)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)\right)+C. \blacksquare$$

5. Інтегрування ірраціональних виразів

При інтегруванні виразів, що містять знак кореня, використовують підстановки, які дозволяють позбутися ірраціональностей у підінтегральній функції. Основні типи таких підстановок розглянуті у розділі 1, §1, п. 6 – 9 .

Приклад 3.67. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5} - \sqrt[6]{x^7}} dx$.

Розв’язання. Найменше спільне кратне знаменників степенів змінної x , тобто чисел 2, 3, 4, 6, дорівнює 12, тому виконаємо заміну

$x = t^{12}, \, dx = 12t^{11}dt$. Тоді $t = \sqrt[12]{x}, \sqrt{x} = t^6, \sqrt[3]{x} = t^4$, $\sqrt[4]{x^5} = t^{15}, \sqrt[6]{x^7} = t^{14}$.

Інтеграл I набуває вигляду:

$$I = \int \frac{\left(t^6 + t^4\right)12t^{11}dt}{t^{15} - t^{14}} = 12\int \frac{t^3 + t}{t-1} dt = 12\int \frac{\left(t^3 - 1\right) + \left(t - 1\right) + 2}{t-1} dt =$$

$$= 12\int \left(t^2 + t + 1\right)dt + 12\int dt + 24\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 4t^3 + 6t^2 + 24t + 24\ln\left|t-1\right| + C = 4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 24\sqrt[12]{x} + 24\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + C . \blacksquare$$

Приклад 3.68 [**17**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{2}{\left(2-x\right)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$.

Розв’язання. Підінтегральна функція є раціональною відносно x та дробово-лінійної ірраціональності $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$, тому використаємо підстановку $t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ (див. розділ 1, §1, п. 6). Отримаємо:

$$t^3 = \frac{2-x}{2+x}, \, x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}, \, 2-x = \frac{4t^3}{1+t^3},$$

$$dx = \frac{-6t^2\left(1+t^3\right) - \left(2-2t^3\right)\cdot 3t^2}{\left(t^3+1\right)^2} dt = \frac{-12t^2dt}{\left(t^3+1\right)^2} .$$

Підставимо ці вирази в інтеграл I :

$$I=-\int\frac{2\left(1+t^3\right)^2\cdot t\cdot 12t^2dt}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C\,.\ ■$$

Приклад 3.69 [17]. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^5}}$.

Розв'язання. Перетворимо знаменник підінтегрального виразу в такий спосіб:

$$\sqrt[4]{\left(x-1\right)^3\left(x+2\right)^5}=\left(x-1\right)\left(x+2\right)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}\,.$$

Підінтегральний вираз є раціональною функцією від x та $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$, тому доцільно використати підстановку $t=\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$. Звідси отримуємо

$$\frac{x+2}{x-1}=t^4,\ x=\frac{t^4+2}{t^4-1},$$

$$dx=\frac{4t^3\left(t^4-1\right)-4t^3\left(t^4+2\right)}{\left(t^4-1\right)^2}dt=-\frac{12t^3dt}{\left(t^4-1\right)^2},\ x-1=\frac{3}{t^4-1},\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}\,.$$

Отже, отримуємо вираз для інтеграла I:

$$I=-\int\frac{\left(t^4-1\right)^2 12t^3dt}{9t^5\left(t^4-1\right)^2}=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C\,.\ ■$$

Розглянемо приклади на застосування підстановок Ейлера (в розділі 1, §1, п. 7).

Приклад 3.70 [17]. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена під знаком радикала $ax^2+bx+c\equiv x^2+2x+2$ коефіцієнт при x^2 дорівнює 1, тобто $a=1>0$. Тому використаємо відповідну підстановку Ейлера $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$. Піднесемо до квадрата обидві частини цієї рівності. Після зведення подібних доданків отримаємо $2x+2tx=t^2-2$. Звідси знаходимо:

$$x = \frac{t^2-2}{2(t+1)},\ dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt .$$

Перейдемо під інтегралом до змінної t. У знаменнику маємо:

$$1+\sqrt{x^2+2x+2} = 1+t-x = 1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)} = \frac{t^2+4t+4}{2(1+t)} .$$

Інтеграл набуває вигляду:

$$I = \int \frac{2(1+t)(t^2+2t+2)}{(t^2+4t+4)\cdot 2(1+t)^2}dt = \int \frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}dt .$$

Таким чином, отримано інтеграл від раціонального дробу. Розкладемо підінтегральну функцію на прості дроби:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2} = \frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{C}{(t+2)^2} = \frac{A(t+2)^2+B(t+1)(t+2)+C(t+1)}{(t+1)(t+2)^2} .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої та правої частин цієї рівності, знаходимо коефіцієнти $A,\ B$ та C:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 4A+3B+C=2, \\ 4A+2B+C=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1, \\ B=0, \\ 4A+3B+C=2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=0, \\ C=-2. \end{cases}$$

Знаходимо I:

$$I = \int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C .$$

Повертаючись до змінної x, отримуємо:

$$I = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C . \ ■$$

Приклад 3.71. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}}$.

Розв'язання. У цьому випадку для квадратного тричлена в знаменнику $ax^2+bx+c \equiv 7x-10-x^2$ маємо: $a<0, c<0$. Тому першу та другу підстановки Ейлера застосувати не можна. Проте квадратний тричлен $7x-10-x^2$ має дійсні корені $x_1 = 2, x_2 = 5$, тому можна застосувати третю підстановку Ейлера $\sqrt{7x-10-x^2} = (x-2)t$. Знайдемо з цієї рівності x:

$$\sqrt{7x-10-x^2} = \sqrt{(x-2)(5-x)} = (x-2)t.$$

Підносячи до квадрата після скорочення на $x-2$, отримаємо:

$$5-x = (x-2)t^2,\ x = \frac{5+2t^2}{t^2+1},\ dx = -\frac{6tdt}{\left(t^2+1\right)^2},\ \sqrt{7x-10-x^2} =$$

$$= (x-2)t = \left(\frac{5+2t^2}{1+t^2} - 2\right)t = \frac{3t}{1+t^2}.$$

Підставимо в інтеграл I:

$$I = -\frac{6}{27}\int \frac{5+2t^2}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)+C = = \frac{10(x-2)}{9\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4\sqrt{7x-10-x^2}}{9(x-2)} + C. \ \blacksquare$$

Приклад 3.72. Обчислити інтеграл $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{\left(x^2+x+2\right)^5}}$.

Розв'язання. Для знаходження цього інтеграла застосуємо підстановку Абеля (розділ 1, §1, п. 8), згідно з якою вводимо нову змінну $t = \left(\sqrt{x^2+x+2}\right)' = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$. Встановимо зв'язок між диференціалами dx та dt. Задля цього спочатку виразимо x^2+x+2 через t:

$$4t^2\left(x^2+x+2\right) = 4x^2+4x+1 = 4\left(x^2+x+2\right)-7, \quad x^2+x+2 = -\frac{7}{4t^2-4}.$$

Диференціюючи рівність $t\sqrt{x^2+x+2} = x + \dfrac{1}{2}$, отримаємо:

$$dt\sqrt{x^2+x+2} + \frac{(2x+1)tdx}{2\sqrt{x^2+x+2}} = dx.$$

Звідси, враховуючи, що $t = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$, отримуємо:

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+t^2dx=dx,\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{dt}{1-t^2}.$$

Підставимо цей вираз у інтеграл:

$$I=\int\frac{1}{\left(x^2+x+2\right)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{16}{49}\int\frac{\left(t^2-1\right)^2}{1-t^2}dt=$$

$$=\frac{16}{49}\int\left(1-t^2\right)dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C.$$

Переходячи до змінної x, остаточно отримуємо:

$$I=\frac{16}{49}\left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right]+C. \blacksquare$$

Приклад 3.73. Знайти інтеграл $I=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, для знаходження якого можна використати метод невизначених коефіцієнтів, розглянутий у розділі 1, §1, п. 8.1. Згідно з цим методом, такий інтеграл шукаємо у вигляді:

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Диференціюючи цю рівність, маємо

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\left(2b_1x+b_2\right)\sqrt{x^2+4x+5}+\frac{\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Помножимо цей вираз на $\sqrt{x^2+4x+5}$ та отримаємо:

$$\left(2b_1x+b_2\right)\left(x^2+4x+5\right)+\left(b_1x^2+b_2x+b_3\right)\left(x+2\right)+\lambda=x^3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо систему:

$$\begin{cases} 3b_1 = 1, \\ 10b_1 + 2b_2 = 0, \\ 10b_1 + 6b_2 + b_3 = 0, \\ 5b_2 + 2b_3 + \lambda = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{3}, \quad b_2 = -\dfrac{5}{3}, \\ b_3 = \dfrac{20}{3}, \; \lambda = -5. \end{cases}.$$

Тоді, підставляючи знайдені коефіцієнти у вираз для I, отримаємо:

$$I = \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+2\right)^2 + 1}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2 - 5x + 20\right)\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 5\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}\right| + C \,. \blacksquare$$

Приклад 3.74 [**2**]. Знайти інтеграл $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$.

Розв’язання. В чисельнику стоїть многочлен третього степеня, тому многочлен із невизначеними коефіцієнтами треба обрати другого степеня, і тоді отримаємо:

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} \,.$$

Для отримання значень невизначених коефіцієнтів треба спочатку продиференціювати обидві частини останньої рівності:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (Ax^2 + Bx + C)\cdot\frac{2x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4x + 3}} +$$

$$+ \lambda \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}},$$

потім обидві частини помножити на квадратичну ірраціональність $\sqrt{x^2 + 4x + 3}$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (2Ax + B)(x^2 + 4x + 3) + (Ax^2 + Bx + C)(x + 2) + \lambda \,,$$

після чого застосувати метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 2A + A = 1, \\ 8A + B + 2A + B = -6, \\ 6A + 4B + 2B + C = 11, \\ 3B + 2C + \lambda = -6; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{3}, \quad B = -\dfrac{14}{3}, \\ C = 37, \; \lambda = -66. \end{cases}$$

Звідки отримаємо

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = \left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right|+C. \ \blacksquare$$

Приклад 3.75. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\left(x-1\right)^3\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Розв'язання. Інтеграли вигляду $\int\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ при $x>\alpha$ підстановкою $t=\frac{1}{x-\alpha}$ зводять до інтегралів, розглянутих у попередньому прикладі (розділ 1, §1, п.8.2). При $\alpha=1$ і $x>1$ виконаємо підстановку $x-1=\frac{1}{t}$. Звідси знаходимо:

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\ x^2-2x-1=\left(x-1\right)^2-2=\frac{1}{t^2}-2=\frac{1-2t^2}{t^2}.$$

Підставимо в інтеграл:

$$I=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Обчислимо цей інтеграл методом невизначених коефіцієнтів.

$$I=\int\frac{-t^2dt}{\sqrt{1-2t^2}}=\left(b_1t+b_2\right)\sqrt{1-2t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Диференціюючи цю рівність, знаходимо:

$$\frac{-t^2}{\sqrt{1-2t^2}}=b_1\sqrt{1-2t^2}-\frac{2t\left(b_1t+b_2\right)}{\sqrt{1-2t^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2t^2}}=\frac{b_1\left(1-2t^2\right)-2b_1t^2-2b_2t+\lambda}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t у чисельниках лівої та правої частин рівності, отримуємо систему для знаходження λ, b_1, b_2:

$$\begin{cases} -4b_1 = -1, \\ b_2 = 0, \\ \lambda + b_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{1}{4}, \\ b_2 = 0,\ \lambda = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Підставляючи в вираз для I , одержимо:

$$I = \frac{1}{4} t\sqrt{1-2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{2} t + C .$$

Оскільки $t = \dfrac{1}{x-1}$, то остаточно отримуємо

$$I = \frac{1}{4(x-1)} \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{(x-1)^2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x-1} + C . \ \blacksquare$$

Приклад 3.76. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{(11x-13)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. Методику обчислення інтегралів такого типу викладено у розділі 1, §1, п. 8.3. Інтеграл I належить до інтегралів 3-го типу, для знаходження яких використовують дробово-лінійну підстановку $x = \dfrac{\alpha t + \beta}{t+1},\ \alpha \neq \beta$. Квадратний тричлен $x^2 - x + 1$ набуває вигляду:

$$x^2 - x + 1 = \frac{\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2 - (\alpha t + \beta)(t+1) + t^2 + 2t + 1}{(t+1)^2} .$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при t у чисельнику останнього дробу, отримуємо співвідношення між коефіцієнтами α та β :

$$2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0 .$$

Для виразу $x^2 + 1$ маємо

$$x^2 + 1 = \frac{\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t + \beta^2 + t^2 + 2t + 1}{(t+1)^2} .$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнт при t у чисельнику останнього дробу, знаходимо ще одне співвідношення між α та β :

$$2\alpha\beta + 2 = 0 .$$

Таким чином, для визначення коефіцієнтів α та β отримуємо систему:

$$\begin{cases} 2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0, \\ 2\alpha\beta + 2 = 0. \end{cases}$$

Ця система має два розв'язки: $\alpha = 1,\ \beta = -1$ та $\alpha = -1,\ \beta = 1$. Виберемо один із них, наприклад, $\alpha = 1,\ \beta = -1$, тобто в інтегралі необхідно виконати підстановку $x = \dfrac{t-1}{t+1}$.

Перейдемо до змінної t у підінтегральному виразі:

$$x^2 - x + 1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2},\ x^2 + 1 = \frac{2t^2+2}{(t+1)^2},\ 11x - 13 = \frac{-2t-24}{t+1},\ dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}.$$

Підставляючи ці співвідношення під знак інтеграла, отримаємо

$$\int \frac{(11x-13)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}} = -2\sqrt{2}\int \frac{(t+12)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = -2\sqrt{2}\left(I_1 + 12I_2\right).$$

Обчислимо інтеграл:

$$I_1 = \int \frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{d\left(\sqrt{t^2+1}\right)}{t^2+3} = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}} + C.$$

Для обчислення інтеграла

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$$

використаємо підстановку Абеля:

$$z = \left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}},\ z^2 = \frac{t^2}{t^2+1},\ t^2 + 3 = \frac{3-2z^2}{1-z^2},\ \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{dz}{1-z^2}.$$

Інтеграл I_2 набуває вигляду:

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dz}{3-2z^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right| + C.$$

Отже,

$$I=\int\frac{(11x-13)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}=-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}-4\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}t}\right|+C,$$

де $t=\dfrac{x+1}{1-x}$. ■

Приклад 3.77 [**1**]. Обчислити інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз цього інтеграла є біноміальним диференціалом (розділ 1, §1, п. 9) , при цьому $p=-2\in\mathbb{Z}$. Найменшим спільним знаменником дробів $m=\dfrac{1}{2}$ та $n=\dfrac{1}{3}$ є 6, тому виконуємо підстановку $x=t^6$. Тоді $dx=6t^5dt,\ \sqrt{x}=t^3,\ \sqrt[3]{x}=t^2$. Отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=6\int\frac{t^8dt}{(t^2+1)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{3(t^2+1)+t^2}{(t^2+1)^2}\right)dt=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\operatorname{arctg}t-6\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині рівності:

$$\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\int t\cdot d\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

Враховуючи, що $t=\sqrt[6]{x}$, остаточно отримуємо:

$$I=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C. \ ■$$

Приклад 3.78. Обчислити інтеграл $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Маємо біноміальний диференціал, у якому

$$m=-\frac{1}{2},\ n=\frac{1}{4},\ p=\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}.$$

Отже, маємо другий випадок інтегровності біноміального диференціала, що потребує використання підстановки $1+\sqrt[4]{x}=t^2$.

Звідси отримуємо

$$x=\left(t^2-1\right)^4,\ \sqrt{x}=\left(t^2-1\right)^2,\ t=\sqrt{1+\sqrt[4]{x}},\ dx=4\left(t^2-1\right)^3\cdot 2tdt=8t\left(t^2-1\right)^3dt.$$

Підставляючи ці вирази у інтеграл I, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=8\int\frac{t^2\left(t^2-1\right)^3dt}{\left(t^2-1\right)^2}=8\int\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{8}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{8}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^5-\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\sqrt[4]{x}}\right)^3+C.\ \blacksquare$$

Приклад 3.79. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання. Для біноміального диференціала, що перебуває під знаком інтеграла $m=-\frac{3}{2}$, інші параметри – $n=\frac{3}{4},\ p=-\frac{1}{3}$. Знаходимо $\frac{m+1}{n}+p=-1\in\mathbb{Z}$. Виконуємо підстановку $x^{-\frac{3}{4}}+1=t^3$, тобто

$$x=\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}},\ dx=-\frac{4}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}\cdot 3t^2dt=-4t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Перейдемо в підінтегральному виразі до змінної t. Отримаємо:

$$x^{-\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{3}{4}}\right)^{-\frac{1}{3}}dx=x^{-\frac{3}{2}}\left[x^{-\frac{1}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]dx=x^{-\frac{7}{4}}\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=-\left(t^3-1\right)^{\frac{7}{3}}\cdot 4t\left(t^3-1\right)^{-\frac{7}{3}}dt.$$

Таким чином, отримуємо інтеграл від раціональної функції:

$$I=-4\int tdt=-2t^2+C=-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C. \ \blacksquare$$

Інтеграли вигляду $\int R(x;\sqrt{P_n(x)})dx,$ де $P_n(x)-$ многочлен степеня $n>2$, як правило, не можна виразити через елементарні функції [**6**, с.84 – 90] і в такому випадку при $n=3$ і $n=4$ називають *еліптичними*, а при $n>4-$ *гіпереліптичними*. Якщо ж цей інтеграл при $n=3$ і $n=4$ є елементарною функцією, його називають *псевдоеліптичним* [**6**, с. 86]. Кожний еліптичний інтеграл може бути вираженим через елементарні функції й через стандартні еліптичні інтеграли:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},$$

$$\int\frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2x^2)}},\ \ \kappa\in(0;1).$$

Заміною $x=\sin\varphi$ ці інтеграли зводять до лінійних комбінацій інтегралів:

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}}, \tag{3.3}$$

$$\int\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \tag{3.4}$$

$$\int\frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}},\ \ \kappa\in(0;1),$$

які називають відповідно *еліптичними інтегралами першого, другого, третього роду у формі Лежандра*.

Через $F(\varphi;\kappa)$ та $E(\varphi;\kappa)$ позначимо відповідно ту з первісних (3.3) і (3.4), яка при $\varphi=0$ перетворюється в нуль. Отримаємо спеціальні функції, значення яких наведено у відповідних таблицях, вперше побудованих Лежандром.

Приклад 3.80. Обчислити інтеграли

а) $\displaystyle\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$, б) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}}$.

Розв'язання.

а) $$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}} = \left\| \begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=t, \quad t^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2, \\ \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt \end{array} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-2}} = \left\| \begin{array}{l} \frac{1}{t}=z, \ \ z>0, \\ -\frac{1}{t^2}dt = dz \end{array} \right\| = -\int \frac{dz}{\sqrt{1-2z^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{1-(z\sqrt{2})^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos z\sqrt{2} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arccos \frac{x\sqrt{2}}{x^2+1} + C.$$

б) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{36x^4-13x^2+1}} = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-9x^2)(1-4x^2)}} = \left\| \begin{array}{l} x=\frac{1}{3}\sin\varphi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \\ dx = \frac{1}{3}\cos\varphi\, d\varphi \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{27}\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{27}\int \frac{\frac{9}{4}\left(-\frac{4}{9}\sin^2\varphi+1\right)-\frac{9}{4}}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}} d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{12}\int \sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}d\varphi + \frac{1}{12}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{12}\left(F\left(\varphi;\frac{2}{3}\right) - E\left(\varphi;\frac{2}{3}\right)\right) + C,$$

де $\varphi = \arcsin 3x$. ■

6. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні та гіперболічні функції

У п. 5 і п. 10, 11 розділу 1, §1 висвітлюено основні методи інтегрування тригонометричних та гіперболічних функцій. Розглянемо приклади застосування зазначених методів.

Приклад 3.81 [**19**]. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією аргументів $\sin x$ та $\cos x$, тому для інтегрування доцільно застосувати універсальну тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, -\pi < x < \pi$. Тоді тригонометричні функції виражають через раціональні дроби у такий спосіб:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Підставляючи ці вирази в інтеграл I, маємо:

$$I = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 2} + C. \blacksquare$$

Приклад 3.82. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

Розв'язання. Застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, -\pi < x < \pi$, перейдемо до інтеграла від раціональної функції:

$$I = \int \frac{\left(1 + \dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}\left(1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t} + t + 2\right)dt = \frac{1}{2}\left(\ln|t| + \frac{t^2}{2} + 2t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C. \blacksquare$$

Приклад 3.83. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x}$.

Розв'язання. Перейдемо до інтеграла від раціональної функції, для чого використаємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$I = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{6t+1-t^2} = -2\int\frac{dt}{(t-3)^2 - 10} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{t-3-\sqrt{10}}{t-3+\sqrt{10}}\right| + C\cdot$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}} \right| + C \text{ . } \blacksquare$$

Приклад 3.84. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл I у вигляді

$$I = \int \frac{dx}{\sin x \cdot 2\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x} .$$

Під інтегралом знаходиться раціональна відносно $\sin x$ та $\cos x$ функція, тобто $R(\sin x, \cos x)$, яка змінює знак при заміні $\cos x$ на $(-\cos x)$, а саме:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) .$$

Тому для інтегрування доцільно використати заміну $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$. Помножимо чисельник та знаменник підінтегрального виразу на $\cos x$ та отримаємо:

$$I = \int \frac{\cos x dx}{2\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dt}{2t^2\left(1-t^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2 + \left(1-t^2\right)}{t^2\left(1-t^2\right)} dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{dt}{t^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2t} + C .$$

Перейдемо до змінної x:

$$I = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C \text{ . } \blacksquare$$

Приклад 3.85. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$.

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків функцій $\sin x$ та $\cos x$ підінтегральна функція не змінює знака, то застосуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$. Поділивши чисельник та знаменник на $\cos^2 x$, маємо:

$$I=\int\frac{(2\operatorname{tg}x+3)\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2}=\int\frac{2t+3}{t^2+2}dt=\ln\left(t^2+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C.$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I=\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+2\right)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}+C. \blacksquare$$

Приклад 3.86. Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx}{1-2\sin^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ підінтегральний вираз змінює знак на протилежний, то використаємо заміну $\cos x=t$. Звідси отримуємо такі вирази:

$$1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1=2t^2-1,\quad \sin^2 x=1-t^2,\quad \sin x dx=-dt.$$

Підставляючи їх у інтеграл I, знаходимо:

$$I=\int\frac{t^2-2}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{3}{2t^2-1}\right)dt=\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{t}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right|+C.$$

Оскільки $t=\cos x$,то остаточно отримаємо:

$$I=\frac{\cos x}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right|+C. \blacksquare$$

Приклад 3.87 [17]. Обчислити інтеграл $I=\int\dfrac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$.

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду $\int\sin^{\nu}x\cos^{\mu}x dx$, де $\nu=-6,\ \mu=3$. Оскільки μ – непарне, то доцільно застосувати підстановку $\sin x=t$. Перейдемо до змінної t:

$$I=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)}{\sin^6 x}=\int\frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^6}=$$

$$=\int t^{-6}dt-\int t^{-4}dt=-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{3t^3}+C.$$

Виконаємо зворотну заміну:

$$I = \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.88. Обчислити інтеграл $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Тут обидва показники степенів функцій $\sin x$ та $\cos x$ є парними невід'ємними числами, тому при інтегруванні доцільно використати формули синуса подвійного кута та зниження степеня:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha , \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right), \quad \sin^4\alpha = \frac{1}{8}\left(\cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha + 3\right) .$$

У нашому випадку отримуємо:

$$\int \sin^6 x\cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\cdot\sin^2 x dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 2x\left(1-\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{32}\int \sin^4 2x dx - \frac{1}{64}\int \sin^4 2x\cdot d\left(\sin 2x\right) = \frac{1}{256}\int \left(\cos 8x - 4\cos 4x + 3\right)dx -$$

$$-\frac{1}{64}\cdot\frac{\sin^5 2x}{5} = \frac{\sin 8x}{2048} - \frac{\sin 4x}{256} + \frac{3x}{256} - \frac{\sin^5 2x}{320} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.89. Обчислити інтеграл $I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos x}}dx$.

Розв'язання. Тут показник степеня функції $\sin x$ дорівнює $\nu = 3$ – непарному додатному числу, тому використаємо заміну змінної $\cos x = t$. Для цього запишемо інтеграл у вигляді:

$$I = -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)d\left(\cos x\right)}{\left(\cos x\right)^{\frac{4}{3}}} = \int \frac{\left(t^2-1\right)dt}{t^{\frac{4}{3}}} = \int \left(t^{\frac{2}{3}} - t^{-\frac{4}{3}}\right)dt = \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C .$$

Переходячи до змінної x , отримаємо:

$$I = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \frac{3}{5}\cos x\cdot\sqrt[3]{\cos^2 x} + C . \blacksquare$$

Приклад 3.90 [**28**]. Обчислити інтеграл $I = \int \mathrm{tg}^7 x dx$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію з врахуванням того, що

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x=\left(\operatorname{tg}x\right)';$$

$$\operatorname{tg}^7 x=\operatorname{tg}^5 x\left(\sec^2 x-1\right)=\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x-\operatorname{tg}^3 x\left(\sec^2 x-1\right)=$$
$$=\operatorname{tg}^5 x\sec^2 x-\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x+\operatorname{tg}x\left(\sec^2 x-1\right).$$

Виконуючи заміну $\operatorname{tg}x=t,\ \sec^2 xdx=dt$, отримаємо:

$$I=\int\left(t^5-t^3+t\right)dt-\int\operatorname{tg}xdx=\frac{\operatorname{tg}^6 x}{6}-\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 3.91 [**28**]. Знайти інтеграл $I=\int\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}dx$.

Розв'язання. Перетворимо добуток тригонометричних функцій під знаком інтеграла в суму.

$$\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}\right)+\ +\frac{1}{4}\left(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}+\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right).$$

Підставимо отриманий вираз у інтеграл I:

$$I=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}+\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)dx=\frac{\sin\frac{7x}{4}}{7}+\frac{\sin\frac{5x}{4}}{5}+\frac{\sin\frac{3x}{4}}{3}+\sin\frac{x}{4}+C.\blacksquare$$

Для знаходження інтегралів вигляду $\int\frac{a\sin x+b\cos x}{c\sin x+d\cos x}dx$ можна користуватися методом невизначених коефіцієнтів, який проілюструємо наступним прикладом.

Приклад 3.92 [**1**]. Обчислити інтеграл $I=\int\frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx$.

Розв'язання. Подамо чисельник підінтегральної функції $\left(\sin x-3\cos x\right)$ у вигляді лінійної комбінації знаменника $\left(4\sin x+5\cos x\right)$ та його похідної $\left(4\cos x-5\sin x\right)$, тобто

$$\sin x-3\cos x=A\left(4\sin x+5\cos x\right)+B\left(4\cos x-5\sin x\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin x$ та $\cos x$ у обох частинах останнього рівняння, маємо:

$$\begin{cases} 4A - 5B = 1, \\ 5A + 4B = -3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{11}{41}, \\ B = -\dfrac{17}{41}. \end{cases}$$

$$I = -\frac{11}{41}\int \frac{4\sin x + 5\cos x}{4\sin x + 5\cos x}dx - \frac{17}{41}\int \frac{d\left(4\sin x + 5\cos x\right)}{4\sin x + 5\cos x} = -\frac{11x}{41} -$$

$$-\frac{17}{41}\ln\left|4\sin x + 5\cos x\right| + C\ . \blacksquare$$

Розглянемо приклади інтегрування виразів, що містять гіперболічні функції.

Приклад 3.93 [**8**]. Знайти інтеграл $I = \int \mathrm{ch}^2 x dx$.

Розв'язання. Використаємо тотожність $\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\, 2x + 1\right)$. Підставляючи її в інтеграл, отримуємо:

$$I = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{ch}\, 2x + 1\right)dx = \frac{1}{4}\mathrm{sh}\, 2x + \frac{1}{2}x + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.94 [**8**]. Обчислити інтеграл $I = \int \mathrm{ch}^3 x dx$.

Розв'язання. Оскільки $\mathrm{ch}\, x$ входить у підінтегральний вираз у непарному степені, можна використати підстановку $\mathrm{sh}\, x = t,\ dt = \mathrm{ch}\, x\, dx$. Підставимо ці вирази в інтеграл:

$$I = \int \mathrm{ch}^2 x \cdot \mathrm{ch}\, x dx = \left\| \mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x \right\| = \int \left(1 + t^2\right)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \mathrm{sh}\, x + \frac{\mathrm{sh}^3 x}{3} + C\ . \blacksquare$$

Приклад 3.95. Обчислити інтеграл $I = \int \mathrm{th}^4 x dx$.

Розв'язання. Нехай $\mathrm{th}\, x = u$, тоді $|u| < 1$. Звідки

$$du = \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \left(1 - \mathrm{th}^2 x\right)dx = \left(1 - u^2\right)dx\ .$$

Тому $dx=\dfrac{du}{1-u^2}$, а інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int \operatorname{th}^4 x dx=\int \frac{u^4 du}{1-u^2}=\int \frac{\left(u^4-1\right)+1}{1-u^2}du=-\int\left(u^2+1\right)du+\int \frac{du}{1-u^2}=$$
$$=-\frac{u^3}{3}-u-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C .$$

Переходячи до змінної x, отримуємо:

$$I=-\operatorname{th}x-\frac{\operatorname{th}^3 x}{3}+x+C .$$

Тут було застосовано формулу (див. *зауваження 1.2*):

$$\operatorname{arth}u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\quad |u|<1,\ u=\operatorname{th}x . \blacksquare$$

Інтеграли від раціональних виразів відносно гіперболічних функцій знаходять за допомогою універсальної гіперболічної підстановки $t=\operatorname{th}\dfrac{x}{2}$. Тоді $dx=\dfrac{2dt}{1-t^2}$, $\operatorname{sh}x=\dfrac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch}x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$.

Приклад 3.96. Обчислити інтеграл $I=\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{ch}x}$.

Розв'язання. Використовуючи універсальну гіперболічну підстановку, запишемо підінтегральний вираз через змінну t:

$$\frac{dx}{2+\operatorname{ch}x}=\frac{\dfrac{2dt}{1-t^2}}{2+\dfrac{1+t^2}{1-t^2}}=\frac{2dt}{3-t^2} .$$

Підставляючи в I, отримаємо табличний інтеграл:

$$I=2\int\frac{dt}{3-t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\operatorname{th}\frac{x}{2}}\right|+C . \blacksquare$$

§ 2. Визначений інтеграл

1. Поняття визначеного інтеграла та інтегровності функцій за Ріманом

Приклад 3.97. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox, кривою $y = e^x$ та прямими $x = 0$ і $x = 1$.

Розв'язання. Для знаходження площі поділимо відрізок $[0;1]$ на n рівних частин точками

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \ldots < x_k = \frac{k}{n} < \ldots < x_n = \frac{n}{n} = 1 .$$

Довжина кожного відрізка $[x_k ; x_{k+1}]$ дорівнює $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$.

Нехай $\xi_k = x_k = \dfrac{k}{n}$, де $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тоді

$$f(\xi_k) = e^{\frac{k}{n}}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1 .$$

Будемо вважати, що площа частини трапеції, розташованої над k-м відрізком, наближено дорівнює площі прямокутника з основою Δx_k та висотою $f(\xi_k)$.

Тоді наближена величина площі визначиться сумою $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$.

Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Оскільки $\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$ є сумою n членів геометричної прогресії зі знаменником $q = e^{\frac{1}{n}}$ та першим членом, що дорівнює 1, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

тому

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (e-1)\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}. \tag{3.5}$$

Оскільки при $\alpha \to 0$ маємо $e^{\alpha}-1 \sim \alpha$ (див. додаток А), то границя в правій частині рівності (3.5) дорівнює 1, тому отримуємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e-1$.

Оскільки S_n є інтегральною сумою функції e^x, а функція e^x є неперервною (а, значить, і інтегровною) на відрізку $[0;1]$, то значення границі інтегральних сум S_n не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок, тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ є визначеним інтегралом функції $y=e^x$ по проміжку $[0;1]$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Згадуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, доходимо висновку, що площа шуканої області S дорівнює

$$S = \int_0^1 e^x dx = e-1.$$

Тут ми площу наближено замінили сумою S_n, тобто $S \approx S_n$ і отримали, що похибка такого наближення прямує до нуля при $n\to\infty$ та $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.■

Приклад 3.98. Тіло рухається прямолінійно, причому його швидкість $v(t)$ у момент часу t дорівнює t^2. Знайти шлях, пройдений тілом від початку руху $(t=0)$ до моменту $t=b$.

Розв'язання. Поділимо проміжок часу $[0;b]$ на n рівних частин, тривалість кожної з яких дорівнює $\Delta t = \frac{b}{n}$, причому k-й проміжок часу починається в момент $t_k = \frac{kb}{n}$ і закінчується в момент часу $t_{k+1} = \frac{(k+1)b}{n}$. Спочатку знайдемо наближене значення пройденого шляху. Будемо вважати, що протягом кожного окремо взятого проміжку часу $\left[t_{k;}\ t_{k+1}\right]$ тіло рухається зі сталою швидкістю $v\left(t_k\right) = {t_k}^2$. Тоді шлях, пройдений за k-й проміжок часу, наближено знайдемо за формулою:

$$\Delta s_k \approx v\left(t_k\right)\Delta t = {t_k}^2 \Delta t .$$

Весь шлях $s\left(b\right)$, пройдений тілом, наближено можна знайти як суму

$$s\left(b\right) \approx \sum_{k=0}^{n-1} v\left(t_k\right)\Delta t = \sum_{k=0}^{n-1} {t_k}^2 \Delta t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{kb}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{\left(n-1\right)n\left(2n-1\right)}{6} =$$

$$= \frac{b^3}{6}\cdot\frac{\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{n^2} .$$

Тут ми використали формулу

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} .$$

Зі збільшенням значення n проміжки часу Δt зменшуються, тим самим зменшується похибка, яку ми допускаємо при заміні руху на окремих проміжках рівномірним. Тому шлях, пройдений тілом за проміжок $t \in \left[0; b\right]$, дорівнює границі суми:

$$s\left(b\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} {t_k}^2 \Delta t = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\cdot\frac{\left(n-1\right)\left(2n-1\right)}{n^2} = \frac{b^3}{3} . \ \blacksquare$$

Сума $\sum_{k=0}^{n} {t_k}^2 \Delta t$ є інтегральною сумою для визначеного інтеграла $\int_0^b t^2 dt$, що відповідає розбиттю відрізка $\left[0; b\right]$ на n рівних частин та вибору точок ξ_k на кожній із них на початку відповідних відрізків $\left[t_{k;}\ t_{k+1}\right]$. Якщо б ми прийняли швидкість на $\left[t_{k;}\ t_{k+1}\right]$ такою, що дорівнює швидкості у момент t_{k+1}, то отримали б іншу суму

$$\sum_{k=0}^{n-1} t_{k+1}^2 \Delta t = \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(k+1\right)^2 ,$$

границя якої при $n \to \infty$ залишається тією ж. Ці суми є відповідно нижньою та верхньою інтегральними сумами для інтеграла $\int\limits_0^b t^2 dt$. ■

Приклад 3.99. Для функції $f(x) = 4x - x^2$ знайти нижню та верхню інтегральні суми Дарбу на відрізку $[2; 4]$, поділивши його на n рівних частин. Знайти границі цих сум при $n \to \infty$.

Розв'язання. Поділимо відрізок $[2; 4]$ на n рівних частин. Отримаємо n елементарних відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ довжиною $\Delta x_k = \dfrac{2}{n}$, де точки поділу мають вигляд $x_k = 2 + \dfrac{2k}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Оскільки

$$f'(x) = 4 - 2x < 0,\ x \in (2; 4),$$

то $f(x)$ монотонно спадає на проміжку інтегрування. Таким чином, на кожному елементарному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$

$$\min_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = f\left(2 + \frac{2(k+1)}{n}\right) = 4\left(2 + \frac{2(k+1)}{n}\right) - \left(2 + \frac{2(k+1)}{n}\right)^2 =$$

$$= 4 - \frac{4(k+1)^2}{n^2} = m_k.$$

Отримуємо нижню інтегральну суму Дарбу:

$$\underline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(4 - \frac{4(k+1)^2}{n^2}\right) = \frac{2}{n}\left(4n - \frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2\right) = 8 - \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}.$$

Функція $f(x)$ на кожному з елементарних відрізків $[x_k; x_{k+1}]$ досягає свого максимального значення в точці x_k. Тут

$$\max_{[x_k;\, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = f\left(2 + \frac{2k}{n}\right) = 4\left(2 + \frac{2k}{n}\right) - \left(2 + \frac{2k}{n}\right)^2 = 4 - \frac{4k^2}{n^2} = M_k.$$

Тепер знайдемо верхню інтегральну суму Дарбу:

$$\overline{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(4-\frac{4k^2}{n^2}\right) = \frac{2}{n}\left(4n-\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\right) = 8-\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}.$$

Знайдемо границі верхньої та нижньої сум Дарбу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2}\right) = 8-\frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4(n-1)(2n-1)}{3n^2}\right) = 8-\frac{8}{3} = \frac{16}{3}.$$

Таким чином, у даному прикладі $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n} = \dfrac{16}{3}$. ■

Приклад 3.100. З'ясувати, чи буде інтегровною на $[0; 1]$ функція

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{\pi}{2x}\right), x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо $\cos\dfrac{\pi}{2x} > 0$, то

$$\frac{\pi}{2x} \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2n\pi\right) \Rightarrow \frac{1}{x} \in (4n-1; 4n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $\cos\dfrac{\pi}{2x} > 0$, якщо $x \in \left(\dfrac{1}{4n+1}; \dfrac{1}{4n-1}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, а $\cos\dfrac{\pi}{2x} < 0$ при $x \in \left(\dfrac{1}{4n+3}; \dfrac{1}{4n+1}\right), n = 0, 1, 2, \ldots$.

Отже, $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{\pi}{2x}\right) = 1$, якщо $x \in \left(\dfrac{1}{4n+1}; \dfrac{1}{4n-1}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = -1$ при значеннях аргументу $x \in \left(\dfrac{1}{4n+3}; \dfrac{1}{4n+1}\right), n = 0, 1, 2, \ldots$, $f(x) = 0$, якщо $x = \dfrac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$. Точками розриву функції $f(x)$ є точки $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$, що утворюють зчисленну множину. Оскільки функція

$f(x)$ обмежена на відрізку $[0;1]$ та має на ньому зчисленну множину точок розриву, то вона є інтегровною на цьому відрізку, згідно з критерієм Лебеґа. ■

Приклад 3.101 [**33**]. З'ясувати, чи буде інтегровною на довільному відрізку $[a,b]$ функція Рімана

$$\varphi(x)=\begin{cases}0,\ x\neq \dfrac{m}{n},\\ \dfrac{1}{n},\ x=\dfrac{m}{n},\end{cases}$$

де m та n $(n\geq 1)$ – взаємно прості цілі числа.

Розв'язання. *I спосіб.* Скористаємось критерієм Дарбу інтегровності функції на $[a,b]$. Для того, щоб обмежена на $[a,b]$ функція була інтегровною на цьому відрізку, необхідно та достатньо, щоб $\forall\varepsilon>0$ знайшлося таке розбиття $T_{[a,b]}$ відрізка $[a,b]$, для якого $\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon$, де $\overline{S}$, $\underline{S}$ – відповідно верхня та нижня інтегральні суми Дарбу.

Задамо довільне $\varepsilon>0$. Тоді функція Рімана $\varphi(x)$ задовольняє нерівність

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}<\varphi(x)\leq 1$$

лише в деякій скінченній кількості K точок. Дійсно, всі раціональні точки з $[a,b]$, тобто точки виду $\frac{m}{n}$ утворюють зчисленну множину. Розташуємо їх у такому порядку: спочатку точки виду $\frac{m}{1}$, потім точки виду $\frac{m}{2}$, $\frac{m}{3}$ тощо. Відповідні значення функції Рімана в цих точках дорівнюють 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,…, тобто вони зменшуються з переходом до кожної наступної групи точок. При цьому маємо скінченну кількість точок кожного вигляду, які лежать на заданому відрізку $[a;b]$. Таким чином, у число вказаних K точок попадають такі, для яких $\frac{1}{n} > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, звідки $n < \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$. Маємо скінченну кількість K таких точок.

Покриємо ці точки скінченною системою відрізків, які попарно не перетинаються та мають загальну суму довжин, меншу, ніж $\frac{\varepsilon}{2}$. Довжини цих відрізків позначимо $\Delta x_i'$. Отримали деяке розбиття відрізка $[a,b]$. На відрізках, що мають довжини $\Delta x_i'$ коливання функції ω_i' не перевищують 1, оскільки $\forall x \in [a,b]\ 0 \le \varphi(x) \le 1$. При розбитті ми отримали також деяку скінченну кількість інших сегментів. Позначимо їх довжини $\Delta x_i''$. Коливання ω_i'' функції $\varphi(x)$ на цих відрізках не перевищують $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Тому для отриманого розбиття відрізка $[a,b]$ виконується така оцінка:

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum \omega_i \Delta x_i = \sum \omega_i' \Delta x_i' + \sum \omega_i'' \Delta x_i'' <$$

$$< \sum \Delta x_i' + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta x_i'' < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \varepsilon .$$

Таким чином, за заданим $\varepsilon > 0$ знайдено таке розбиття відрізка $[a,b]$, для якого $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$, тобто функція Рімана $\varphi(x)$ є інтегровною на будь-якому відрізку $[a,b]$.

II спосіб. Скористаємось критерієм Лебеґа інтегровності функції на $[a,b]$. Відомо [**32**, с. 192], що функція Рімана розривна в кожній раціональній і неперервна в кожній ірраціональній точці. Отже, множина A її точок розриву на відрізку $[a,b]$ – це множина раціональних чисел цього відрізка. Множина A – зчисленна, тому її міра Лебеґа дорівнює нулю (див. *приклад 1.17* пункт 3). Крім того, функція Рімана є обмеженою: $\forall x \in [a,b]\ 0 \le \varphi(x) \le 1$. Отже, за критерієм Лебеґа, вона є інтегровною. ■

Приклад 3.102 [**33**]. Користуючись означенням, обчислити такий інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. Функція $f(x) = x^{-1}$ є неперервною на $[1; 2]$, тому вона є інтегровною на цьому відрізку. Це означає, що значення границі інтегральних сум при діаметрі розбиття, що прямує до нуля, не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок. Оберемо розбиття й проміжні точки так, щоб значення суми обчислювалося нескладно.

Поділимо відрізок інтегрування $[1; 2]$ на n частин так, щоб точки поділу x_i, $i = 1,..., n$, утворювали геометричну прогресію:

$$x_0 = 1,\; x_1 = q,\; x_2 = q^2,...,\; x_n = q^n = 2 .$$

З останньої рівності знаходимо $q = \sqrt[n]{2}$. Довжина i-го елементарного відрізка дорівнює

$$\Delta x_i = q^{i+1} - q^i = q^i (q-1) .$$

Звідси випливає, що $\max\limits_i \Delta x_i = q^{n-1}(q-1) \to 0$ при $n \to \infty$, тобто при $q \to 1$. Отже, діаметр обраного розбиття прямує до нуля. Приймемо за точки ξ_i праві кінці елементарних відрізків, тобто $\xi_i = x_{i+1} = q^{i+1}$. Запишемо відповідну інтегральну суму:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\xi_i} \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{q^{i+1}} q^i (q-1) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Знайдемо границю (див. додаток А) цієї інтегральної суми при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)}{2^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \ln 2 = \ln 2 .$$

Таким чином, $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$. ■

Приклад 3.103 [2]. Користуючись означенням, обчислити такий інтеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \sin x$ є неперервною на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тому вона є інтегровною на цьому відрізку. Це робить можливим (так само, як і в попередньому прикладі) обирати розбиття й проміжні точки зручним для нас чином.

Поділимо відрізок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ на n рівних частин точками $x_k = \frac{k\pi}{2n}, k = 0, 1, 2, ..., n$. Довжина кожного з отриманих елементарних відрізків дорівнює $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}, k = 0, 1, ..., n-1$. За точки ξ_k виберемо ліві межі кожного елементарного відрізка. Обчислимо значення підінтегральної функції в точках ξ_k :

$$f(\xi_k) = f(x_k) = \sin \frac{k\pi}{2n}, k = 0, 1, ..., n-1 .$$

Складемо інтегральну суму:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} .$$

Використовуючи тотожність

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} ,$$

отримаємо: $S_n = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$. Звідки

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1\cdot 1 = 1 . \blacksquare$$

Приклад 3.104. Користуючись означенням, обчислити $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2} \sin x dx$.

Розв’язання. Оскільки функція $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\sin x$ є неперервною на $[-1; 1]$, то вона інтегровна на цьому відрізку (*теорема 1.9*) і можна знайти границю послідовності інтегральних сум за будь-якого вибору розбиттів відрізка інтегрування та точок ξ_i на цих відрізках. Розіб’ємо відрізок $[-1; 1]$ точками

$$x_i = -1 + \frac{i}{n},\ 0 \le i \le 2n,\ n \in \mathbb{N}$$

на $2n$ елементарних відрізків. Виберемо точки $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, що є серединами відрізків $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, ..., 2n$. Отримаємо інтегральну суму:

$$S_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\ \xi_k = -\xi_{n-k+1},\ k = 1, 2, ..., n .$$

Тут $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$. Оскільки функція $f(x)$ є непарною, то

$$S_{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(\xi_k) + f(\xi_{n-k+1})\right) = 0 .$$

Умова $\max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$ тут еквівалентна умові $n \to \infty$. Таким чином, отримуємо:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2} \sin x dx = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0 . \blacksquare$$

Приклад 3.105. Виходячи з геометричного змісту визначеного інтеграла, знайти $\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx$.

Розв'язання. При $0 \le x \le 4$ крива $y = \sqrt{16 - x^2}$ – це дуга кола, що знаходиться в першій координатній чверті. Криволінійна трапеція, обмежена лініями $y = \sqrt{16 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 4$, – це четверта частина круга $x^2 + y^2 \le 16$. Його площа дорівнює 16π. Таким чином, ураховуючи геометричний зміст визначеного інтеграла, отримаємо:

$$\int_0^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx = \frac{16\pi}{4} = 4\pi\ . \blacksquare$$

2. Формула Ньютона-Лейбніца

Для обчислення визначеного інтеграла основною є формула Ньютона-Лейбніца: якщо функція $f(x)$ є неперервною на $[a;b]$, а $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на цьому відрізку, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Приклад 3.106. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу Ньютона-Лейбніца. Однією з первісних функції $f(x) = \sin 4x$ є $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 4x$. Отримуємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \cos(4\cdot 0)\right) = -\frac{1}{4}(1-1) = 0\ .\blacksquare$$

Приклад 3.107. Обчислити інтеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. За формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_e^{e^2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2\ . \blacksquare$$

Приклад 3.108. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{d\left(x^3\right)}{1+\left(x^3\right)^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{12}. \blacksquare$$

Приклад 3.109. Обчислити інтеграл $\int_0^8 f\left(x\right)dx$, якщо

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^2, 0 \le x < 1, \\ \sqrt[3]{x}, 1 \le x \le 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Функція неперервна на відрізку $[0,8]$ (доведіть це!), а тому інтегровна на цьому відрізку. Використаємо властивість адитивності інтеграла (властивість 5°), згідно з якою

$$\int_0^8 f\left(x\right)dx = \int_0^1 f\left(x\right)dx + \int_1^8 f\left(x\right)dx.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} x^2 = 1 = f(1)$, то можна вважати, що функція $f(x)$ на відрізку [0,1] задається як x^2.

Для заданої функції $f\left(x\right)$ маємо:

$$\int_0^8 f\left(x\right)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^8 \sqrt[3]{x}dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^8 = \frac{1}{3} + \frac{3}{4}\left(16-1\right) = \frac{139}{12}. \blacksquare$$

Приклад 3.110. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \left|2-x\right|dx$.

Розв'язання. Оскільки $\left|2-x\right| = \begin{cases} 2-x, x \le 2, \\ x-2, x > 2, \end{cases}$ то (аналогічно до прикладу 3.109) отримаємо:

$$\int_0^4 \left|2-x\right|dx = \int_0^2 \left(2-x\right)dx + \int_2^4 \left(x-2\right)dx = -\frac{\left(2-x\right)^2}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{\left(x-2\right)^2}{2}\Bigg|_2^4 = 2+2 = 4. \blacksquare$$

Приклад 3.111. Обчислити інтеграл $\int_a^b \frac{\left|x\right|}{x}dx$, де $a < b$.

Розв'язання.

1) Якщо $0 \le a \le b$, то $\frac{|x|}{x} = 1$, тому $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x} dx = \int\limits_a^b dx = b - a$.

2) Якщо $a < b \le 0$, то $\frac{|x|}{x} = -1$ і $\int\limits_a^b \frac{|x|}{x} dx = -\int\limits_a^b dx = -b + a$.

3) Для $a < 0 < b$ інтеграл розіб'ємо на два інтеграли:

$$\int\limits_a^b \frac{|x|}{x} dx = -\int\limits_a^0 dx + \int\limits_0^b dx = a + b.$$

Усі ці три випадки можна об'єднати однією формулою:

$$\int\limits_a^b \frac{|x|}{x} dx = |b| - |a|.$$

Приклад 3.112 [33]. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2 x}{2}} = |\cos x| = \begin{cases} \cos x, \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, \ \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

то для заданого інтеграла маємо:

$$\int\limits_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2. \ ■$$

Приклад 3.113 [33]. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{50\pi} |\sin x| dx$.

Розв'язання. Функція $f(x) = |\sin x|$ є періодичною з періодом π, тому $\int\limits_0^{50\pi} |\sin x| dx = 50 \int\limits_0^{\pi} |\sin x| dx$. Оскільки $\sin x > 0$ на $[0; \pi]$, то

$$I = 50 \int\limits_0^{\pi} |\sin x| dx = 50 \int\limits_0^{\pi} \sin x dx = -50 \cos x \Big|_0^{\pi} = 50 + 50 = 100. \ ■$$

Приклад 3.114. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{4\pi} x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x) dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$ на відрізку інтегрування має 3 точки розриву першого роду $x_1=\pi, x_2=2\pi, x_3=3\pi$, тому для обчислення цього інтеграла його потрібно подати у вигляді суми інтегралів:

$$\int_0^{4\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx+$$

$$+\int_{2\pi}^{3\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx.$$

Функція $\operatorname{sgn}(\sin x)$ дорівнює 1 на проміжках $(0;\pi)$, $(2\pi;3\pi)$, а на проміжках $(\pi;2\pi)$ та $(3\pi;4\pi)$ вона дорівнює -1. Підставляючи значення підінтегральної функції в останню рівність, отримуємо:

$$\int_0^{4\pi} x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi} xdx-\int_{\pi}^{2\pi} xdx+\int_{2\pi}^{3\pi} xdx-\int_{3\pi}^{4\pi} xdx=$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\pi}^{2\pi}+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{2\pi}^{3\pi}-\left.\frac{x^2}{2}\right|_{3\pi}^{4\pi}=-2\pi^2.\ \blacksquare$$

При застосуванні формули Ньютона-Лейбніца для обчислення визначених інтегралів слід звертати увагу на правомірність її використання, тобто виконання умов, за яких згадана формула є справедливою. Цю формулу застосовують для обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції лише тоді, коли рівність $F'(x)=f(x)$ виконується на всьому відрізку $[a;b]$, причому функція $F(x)$ має бути первісною функції $f(x)$, тобто диференційовною, і, зокрема, неперервною на всьому відрізку $[a;b]$. Приймаючи за первісну функцію, що має розриви на відрізку інтегрування, можна отримати невірний результат.

Приклад 3.115 [**33**]. Знайти помилку, допущену при наступному обчисленні інтеграла:

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=\int_0^{\pi}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{1+3\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)\Big|_0^{\pi}=0.$$

Розв'язання. Функція $F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)$ не є первісною функції $f(x)=\frac{1}{1+2\sin^2 x}$ на відрізку $\left[0;\pi\right]$, оскільки вона має розрив у точці $x=\frac{\pi}{2}\in\left[0;\pi\right]$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(+\infty\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(-\infty\right)=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Знайдемо вірний розв'язок. Для цього розглянемо функцію $F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}x}{\sqrt{3}}\right)$, задану на інтервалі $\left(0;\pi\right)$. Довизначимо її в точках $x=0$ і $x=\pi$:

$$F(0)=\lim_{x\to 0+0}F(x)=0,\quad F(\pi)=\lim_{x\to\pi-0}F(x)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Знайдемо похідну функції $F(x)$. При $x\in\left(0;\pi\right)$ маємо

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sin^2 x}\right)=\frac{1}{1+2\sin^2 x}=f(x);$$

в точках $x=0$ і $x=\pi$ –

$$F'\left(0\right)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{F(\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\Delta x}{\sqrt{3}}\right)-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\Delta x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\right)}{\Delta x}=$$

$$=\left\|\begin{array}{l}\text{при } x\to 0\\ \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\right)\sim\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\end{array}\right\|=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x}{\Delta x}=1;$$

$$F'(\pi)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{F(\pi+\Delta x)-F(\pi)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}(\pi+\Delta x)}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{\Delta x}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\pi-\operatorname{arcctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}(\Delta x)}{\sqrt{3}}\right)}{\Delta x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\operatorname{ctg}(\Delta x)}{\sqrt{3}}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\Delta x\right)}{\Delta x}=1=f(\pi)\,.$$

Отже, функція $F(x)$ неперервна й диференційовна на відрізку інтегрування $\left[0;\pi\right]$ і $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[0;\pi]$, тому є первісною функції $f(x)$ на відрізку $\left[0;\pi\right]$.

Таким чином, вірний розв'язок має такий вигляд:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}=-\int_0^{\pi}\frac{d\left(\operatorname{ctg}x\right)}{\operatorname{ctg}^2 x+3}=F(\pi)-F(0)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.\quad ■$$

Приклад 3.116 [**16**]. Дотична до графіка функції $y=f\left(x\right)$ у точці з абсцисою $x=a$ утворює з віссю Ox кут $\frac{\pi}{3}$, а в точці з абсцисою $x=b$ – кут $\frac{\pi}{4}$. Обчислити інтеграли $I_1=\int_a^b f''\left(x\right)dx$ та $I_2=\int_a^b f'\left(x\right)\cdot f''\left(x\right)dx$.

Розв'язання. З геометричного змісту похідної випливає, що $f'\left(a\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},\ \ f'\left(b\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$. Тому

$$\int_a^b f''\left(x\right)dx=\int_a^b d\left(f'\left(x\right)\right)=f'\left(b\right)-f'\left(a\right)=\sqrt{3}-1\,,$$

$$\int_a^b f'\left(x\right)f''\left(x\right)dx=\int_a^b f'\left(x\right)d\left(f'\left(x\right)\right)=\left.\frac{\left[f'\left(x\right)\right]^2}{2}\right|_a^b=$$

$$=\frac{1}{2}\left[f'^2\left(b\right)-f'^2\left(a\right)\right]=\frac{3-1}{2}=1\,.\ ■$$

Приклад 3.117 [**16**]. Розв'язати рівняння

$$\int_1^3 \sqrt{x-|x-1|}\,dx = \lg(x-1).$$

Розв’язання. Оскільки область допустимих значень цього рівняння визначається нерівністю $x>1$, то $|x-1| = x-1$, маємо, що

$$\int_1^3 \sqrt{x-|x-1|}\,dx = \int_1^3 dx = 3-1 = 2,$$

$$2 = \lg(x-1) \quad \Rightarrow \quad x-1 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 101. \ \blacksquare$$

Розглянемо приклади, пов’язані з диференціюванням інтеграла зі змінними межами інтегрування. Із властивостей таких інтегралів (див. розділ 1, §2, п.8) випливають рівності, що відображають правила диференціювання інтегралів зі змінними межами інтегрування:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \quad \frac{d}{dx}\int_x^a f(t)\,dt = -f(x).$$

На основі цих формул та правила диференціювання складеної функції отримаємо рівність:

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

Приклад 3.118 [**19**]. Знайти похідні функцій:

а) $F(x) = \int_1^x \ln t dt \quad (x>0)$; б) $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \quad (x>0)$.

Розв’язання. Маємо функції, що являють собою інтеграли зі змінними межами інтегрування. Використовуючи наведені вище правила диференціювання, отримуємо:

а) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\int_1^x \ln t\,dt = \ln x$;

б) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt = \cos\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

$$=\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.119 [**33**]. Знайти точки екстремуму функції $F(x)=\int\limits_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt$ при $x>0$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції $F(x)$. Отримаємо:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^{2x}\frac{\sin t}{t}dt=2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin 2x}{x}.$$

Знайдемо критичні точки функції $F(x)$:

$$\frac{\sin 2x}{x}=0\Rightarrow\sin 2x=0\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{N}.$$

Обчислимо другу похідну в критичних точках:

$$F''(x)=\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)'=\frac{2\cos 2x\cdot x-\sin 2x}{x^2},\ F''\left(\frac{k\pi}{2}\right)=\frac{2\cos k\pi-\sin k\pi}{k^2\pi^2}=\frac{2\cdot(-1)^k}{k^2\pi^2}.$$

Оскільки в критичних точках друга похідна $F''(x)\neq 0$, то ці точки є точкам екстремуму, а саме – точками максимуму, якщо k непарне, точками мінімуму при парних значеннях k. ■

Приклад 3.120 [**33**]. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x\cos t^2dt}{x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg}t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$.

Розв'язання.

1) При $x\to 0$ маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$.

2) За властивістю 2 інтеграла зі змінною верхньою межею інтегрування (див. розділ 1, §2, п.8), випливає диференційовність функцій чисельника й знаменника в правому околі точки 0.

3) Для прикладу **а)**:

$$\frac{d}{dx}(x)=1\neq 0 \quad \forall x\in(0,\delta) \quad (\delta>0);$$

для прикладу **б)**:

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt\right)=\sqrt{\sin(\operatorname{tg}x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\neq 0 \quad \forall x\in(0,\delta) \quad \left(0<\delta<\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, для знаходження границі можна застосувати перше правило Лопіталя у випадку існування границі відношення похідних. Спочатку при застосуванні правила Лопіталя поставимо знак «?» над знаком рівності. Потім, якщо границя відношення похідних буде існувати, то знак «?» закреслимо.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \cos t^2\,dt}{x}=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^x \cos t^2\,dt\right)}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tgt}}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tgt}}\,dt\right)}{\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}\cdot\cos x}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg}x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg}x)}}\cdot\lim_{x\to 0}\cos^3 x=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg}x)}}.$$

Останню границю знаходимо, використавши еквівалентність нескінченно малих (див. додаток А) $\operatorname{tg}\alpha$ та $\sin\alpha$ при $\alpha\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin(\operatorname{tg}x)}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg}x}}=1.\ \blacksquare$$

У наступних прикладах розглянемо застосування визначених інтегралів до обчислення границь.

Приклад 3.121 [19]. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}\right)$.

Розв’язання. Розглянемо вираз, що знаходиться під знаком границі. Доданки $e^{\frac{1}{n}}, e^{\frac{2}{n}}, ..., e^{\frac{n}{n}}$ є значеннями функції $f(x) = e^x$ у точках $x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, ..., x_n = \frac{n}{n} = 1$. Ці точки розбивають відрізок $[0; 1]$ на n рівних відрізків: $[0; x_1], [x_1; x_2], ..., [x_{n-1}; x_n]$ довжиною $\Delta x = \frac{1}{n}$.

Вираз, що знаходиться під знаком границі, є інтегральною сумою для функції $f(x) = e^x$ на $[0; 1]$. Функція $f(x) = e^x$ є неперервною на $[0; 1]$, і тому інтегровною на цьому відрізку (*теорема 1.9*). Звідси випливає, що границя інтегральних сум не залежить від способу розбиття і вибору точок $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$, тому ми можемо вибрати $\xi_i = x_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Таким чином, шукана границя є границею інтегральної суми для функції $f(x) = e^x$ на $[0; 1]$, тобто дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції по даному відрізку. Цей інтеграл можна обчислити за допомогою формули Ньютона – Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 e^x\, dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1 . \blacksquare$$

Приклад 3.122 [**19**]. Обчислити границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Розв’язання. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = A$. Тоді знаходимо:

$$\ln A = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n) - \ln n \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n} + \ln\frac{2}{n} + ... + \ln\frac{n}{n} \right].$$

Вираз під знаком границі в правій частині останньої рівності є інтегральною сумою $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ функції $f(x) = \ln x$ на $[0; 1]$, де $\xi_i = \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, ..., n$, $\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{n}$. З тієї ж причини, що й у попередньому прикладі, значення границі цих інтегральних сум не залежить від способу розбиття й вибору проміжних точок, тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right]=\int_0^1 \ln t dt=\left(t\ln t-t\right)\Big|_0^1=-1 .$$

Таким чином, $\ln A=-1$, звідки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}$. ■

Приклад 3.123 [**2**]**.** Обчислити границю

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$,

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

Розв'язання. а) Запишемо суму, що знаходиться під знаком границі, у вигляді:

$$S_n=\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right).$$

Маємо інтегральну суму функції $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$ на відрізку $[0,1]$. Тому, аналогічно до попередніх двох прикладів, границю можна обчислити як визначений інтеграл:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

б) Запишемо суму, що знаходиться під знаком границі, у вигляді:

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} .$$

Маємо інтегральну суму функції $f(x)=\frac{1}{1+x}$ на відрізку $[0,1]$. Тому границю можна обчислити як визначений інтеграл:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2\ .\ ■$$

3. Інтегральні нерівності. Теорема про середнє значення

Приклад 3.124. Оцінити інтеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Для отримання такої оцінки знайдемо мінімальне m та максимальне M значення неперервної функції $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ на відрізку інтегрування $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$. Функція $\cos x$ на цьому відрізку спадає та неперервно змінюється від $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до 0. Тому для функції $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ маємо: $m=1$, а $M=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Довжина відрізка інтегрування $b-a=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. З оціночного співвідношення (властивість 8° визначеного інтеграла)

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

випливає оцінка даного інтеграла:

$$\frac{\pi}{4}\le\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}dx\le\frac{\pi\sqrt{6}}{8}\ .\ ■$$

Приклад 3.125. Оцінити інтеграл $I=\int_0^1\frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{x^6}{\sqrt{1+x}}$ є неперервною, а тому інтегровною на $[0;1]$. Знайдемо мінімальне m та максимальне M значення цієї функції на відрізку інтегрування.

Оскільки

$$f'(x) = \frac{6x^5\sqrt{1+x} - \dfrac{x^6}{2\sqrt{1+x}}}{1+x} = \frac{x^5(11x+12)}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \geq 0,\ x \in [0;1],$$

то підінтегральна функція зростає на $[0;1]$, тому

$$f_{\min} = f(0) = 0,\ f_{\max} = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b-a=1.$$

Звідси знаходимо оцінку заданого інтеграла:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \ ■$$

Приклад 3.126. Користуючись інтегральною нерівністю Коші-Буняковського, оцінити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx$.

Розв’язання. Для інтегровних на $[a;b]$ функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ виконується нерівність Коші-Буняковського [**24**]:

$$\left(\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)dx.$$

Нехай $f(x)=1, \varphi(x)=\sqrt{1+x^4}$. Тоді, за нерівністю Коші-Буняковського, отримаємо:

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx\right)^2 \leq \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 (1+x^4)dx = \frac{6}{5}.$$

Отже, $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \leq \sqrt{\frac{6}{5}}$. ■

Приклад 3.127. Знайти середнє значення функції

а) $f(x)=3x^2+2x+5$ на відрізку $[1;3]$;

б) $f(x)=\sin^5 x \cdot \cos x$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{6}\right]$.

Розв’язання. Середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ знаходимо за формулою (див. *означення 1.16*):

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

а) $\overline{f} = \frac{1}{3-1}\int\limits_1^3 \left(3x^2+2x+5\right)dx = \frac{1}{2}\left(x^3+x^2+5x\right)\Big|_1^3 =$

$$= \frac{1}{2}\left(27+9+15-1-1-5\right) = 22 .$$

б) $\overline{f} = \frac{1}{\frac{\pi}{6}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x\cos x dx = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x d\left(\sin x\right) = \frac{6}{\pi}\frac{\sin^6 x}{6}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{64\pi}$. ■

Приклад 3.128 [**2**]**.** Довести рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = 0 \quad (p>0)$.

Доведення. В теоремі про середнє оберемо $a=n, b=n+p$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, тоді $g(x)>0$, на $[n,n+p]$, $-1\le\inf\limits_{[a,b]} f(x);$ $\sup\limits_{[a,b]} f(x)\le 1$, функції $f\left(x\right)$ і $g\left(x\right)$ неперервні, а тому інтегровні (*теорема 1.9*) на проміжку інтегрування. Отже, матиме місце оцінка

$$-1\cdot\int\limits_n^{n+p}\frac{1}{x}dx \le \int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx \le 1\cdot\int\limits_n^{n+p}\frac{1}{x}dx .$$

Формула Ньютона-Лейбніца дозволяє зробити обчислення

$$\int\limits_n^{n+p}\frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big\|_n^{n+p} = \ln\frac{n+p}{n} .$$

Тому за теоремою про двостороннє обмеження (про «двох міліціонерів») [**3**, с. 94; **4**, с. 57] отримаємо при $n\to\infty$

$$\begin{array}{ccccc} -\ln\frac{n+p}{n} & \le & \int\limits_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx & \le & \ln\frac{n+p}{n} \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Що й треба було довести. ■

4. Інтегрування частинами та заміна змінної у визначеному інтегралі

Будемо застосовувати формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі (*теорема 1.16*). Якщо функції u та v є неперервно диференційовними на $\left[a;b\right]$, то виконується рівність (формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі):

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = \left(u\cdot v\right)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$$

Також пригадаємо формулу заміни змінної (підстановки) під знаком визначеного інтеграла (*теорема 1.15*):

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на } [a,b]; \\ x=\varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha,\beta]; \\ \varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b, \\ \varphi[\alpha,\beta]=[a,b] \text{ (образ відрізка } [\alpha,\beta] \text{ збігається з відрізком } [a,b]); \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$$

При заміні змінної у визначеному інтегралі, на відміну від невизначеного інтеграла, не потрібно повертатися до початкової змінної, оскільки після перетворення ми обчислюємо інтеграл за відрізком інтегрування, на якому змінюється новий аргумент.

Використовуючи заміну змінної, можна отримати такі правила, що дозволяють у багатьох випадках спростити обчислення визначених інтегралів:

1) Якщо $f\left(x\right)$ – парна та інтегровна на проміжку $[-a,a]$ функція, то (див. розділ 1, §2, п. 9)

$$\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 2\int_0^a f\left(x\right)dx\,.$$

2) Якщо $f\left(x\right)$ – непарна функція, інтегровна на $[-a,a]$, то (див. розділ 1, §2, п. 9)

$$\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx = 0\,.$$

3)Якщо $f\left(x\right)$ – інтегровна на $\left[0;T\right]$ періодична функція з періодом T, то $f\left(x\right)$ є інтегровною на довільному відрізку $\left[a;b\right]$, причому

$$\int_a^{a+T} f\left(x\right)dx = \int_0^T f\left(x\right)dx$$

(доведіть самостійно ✍!).

Приклад 3.129. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\pi} x\sin xdx$.

Розв'язання. Застосуємо формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int\limits_0^{\pi} x\sin xdx = \left\| \begin{matrix} u = x, \ dv = \sin xdx, \\ du = dx, \ v = -\cos x \end{matrix} \right\| = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos xdx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi . \ \blacksquare$$

Приклад 3.130. Обчислити інтеграл $\int\limits_1^{e} \ln xdx$.

Розв'язання. За формулою інтегрування частинами маємо:

$$\int\limits_1^{e} \ln xdx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, \ dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, \ v = x \end{matrix} \right\| = x\ln x\Big|_1^{e} - \int\limits_1^{e} x\cdot\frac{1}{x}dx = e - x\Big|_1^{e} = 1 . \ \blacksquare$$

Приклад 3.131. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну змінної $x = a\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Оскільки $dx = a\cos tdt$, а при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ виконується

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t ,$$

то

$$\int\limits_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2tdt = \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos 4t\right)dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16} . \ \blacksquare$$

Приклад 3.132. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\frac{x\sin x}{\cos^2 x}$ є парною, тому на симетричному відносно $x = 0$ відрізку інтегрування $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ маємо:

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx .$$

Інтегруємо частинами, приймаючи $u = x, dv = \dfrac{\sin xdx}{\cos^2 x}$. Тоді $du = dx, v = \dfrac{1}{\cos x}$.

Отримуємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{x}{\cos x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{2\pi}{3} - \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).$$

Тут для обчислення інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{dx}{\cos x}$ було використано заміну $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \left\| \begin{matrix} t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}; \\ x = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).$$

Таким чином, маємо:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = \frac{4\pi}{3} - 2\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right). \blacksquare$$

Приклад 3.133. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^4 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{x^4 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}$ є непарною, її інтегрування здійснюється за симетричними відносно $x = 0$ відрізком, тому цей інтеграл дорівнює 0. ■

Приклад 3.134 [16]. Обчислити інтеграл $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \dfrac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

Розв'язання. Використаємо підстановку $t=\sqrt{e^x+1}$. Тоді $e^x+1=t^2,\ x=\ln\left(t^2-1\right),\ dx=\dfrac{2t\,dt}{t^2-1}$. Знайдемо межі інтегрування для змінної t. При $x=\ln 3$ отримуємо значення $t=\sqrt{e^x+1}=\sqrt{e^{\ln 3}+1}=\sqrt{3+1}=2$, при $x=\ln 8$ – значення $t=\sqrt{e^{\ln 8}+1}=\sqrt{8+1}=3$. Таким чином,

$$\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int\limits_2^3\frac{2t\,dt}{t\left(t^2-1\right)}=2\int\limits_2^3\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=\ln\frac{3}{2}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.135. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{\pi^2}\cos\sqrt{x}dx$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $t=\sqrt{x}$.Тоді $x=t^2,\ dx=2tdt$. Нові межі інтегрування дорівнюють $t=0$ при $x=0$, $t=\pi$ при $x=\pi^2$. Отримаємо $I=2\int\limits_0^{\pi}t\cos tdt$. Для обчислення цього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I=2\int\limits_0^{\pi}t\cos tdt=\left\|\begin{matrix}u=t,\ dv=\cos tdt,\\ du=dt,\ v=\sin t.\end{matrix}\right\|=2t\sin t\Big|_0^{\pi}-2\int\limits_0^{\pi}\sin tdt=0+2\cos t\Big|_0^{\pi}=-4\ .\blacksquare$$

Приклад 3.136. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{\left(x-2\right)^2\sqrt{x^2-10x+13}}$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $z=\dfrac{1}{x-2}$. Тоді отримаємо $dz=-\dfrac{dx}{\left(x-2\right)^2}$. При $x=-1$ маємо $z=-\dfrac{1}{3}$, а при $x=1$ маємо $z=-1$. Підінтегральний вираз набуває вигляду:

$$\frac{dx}{\left(x-2\right)^2\sqrt{x^2-10x+13}}=-\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{6}{z}-3}}=\frac{-|z|\,dz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}.$$

Оскільки на відрізку інтегрування $x<2$, то $z<0$ і $|z|=-z$. Інтеграл I набуває вигляду:

$$I=\int_{-\frac{1}{3}}^{-1}\frac{zdz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}=-\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{zdz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{(z+1)dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}}=I_1+I_2\ .$$

Обчислимо кожен інтеграл окремо:

$$I_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{(z+1)dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}-2z-z^2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\,,$$

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{-\frac{1}{3}}\frac{dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{(z+1)\sqrt{3}}{2}\Bigg|_{-1}^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

Підставивши у вираз для I, остаточно отримуємо

$$I=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\ .\ ■$$

Приклад 3.137 [**1**]. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки під знаком інтеграла знаходиться раціональна функція від $\cos x$, то для знаходження її первісної звичайно застосовують універсальну тригонометричну підстановку $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Якщо формально виконати цю підстановку в заданому визначеному інтегралі, то отримаємо нові межі інтегрування: при $x=0$ буде $t=\operatorname{tg}0=0$, а при $x=2\pi$ буде $t=\operatorname{tg}\pi=0$. Отримали, що верхня та нижня межі інтегрування збігаються та дорівнюють 0, тобто $I=0$. Проте цей інтеграл не може дорівнювати нулю, оскільки це інтеграл від додатної на відрізку інтегрування функції, тому $I>0$. Отримана суперечність пояснюється некоректністю використання в цьому випадку визначеного інтегрування універсальної тригонометричної підстановки, оскільки функція $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ не є неперервною на відрізку інтегрування $[0; 2\pi]$. У точці $x = \pi \in [0; 2\pi]$ вона має розрив другого роду.

Перетворимо інтеграл таким чином, щоб на новому відрізку інтегрування можна було б застосувати універсальну тригонометричну підстановку. Для цього спочатку зробимо заміну змінної $x - \pi = t$. Тоді $x = \pi + t, dx = dt$. Нові межі інтегрування дорівнюють $t = -\pi$ при $x = 0$ і $t = \pi$ при $x = 2\pi$. Отримаємо

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{3 + \cos(\pi + t)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{3 - \cos t}.$$

Далі, зважаючи на парність функції під інтегралом, одержимо $I = 2\int_{0}^{\pi} \dfrac{dt}{3 - \cos t}$.

Тепер в останньому інтегралі введемо заміну $t - \dfrac{\pi}{2} = y$. Тоді $dt = dy$. При $t = 0$ маємо $y = -\dfrac{\pi}{2}$, а при $t = \pi$ маємо $y = \dfrac{\pi}{2}$. Отже,

$$I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{3 + \sin y}.$$

Нарешті, застосуємо універсальну тригонометричну підстановку $z = \operatorname{tg}\dfrac{y}{2}$. Оскільки $\sin y = \dfrac{2z}{1 + z^2}$, $\cos y = \dfrac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $dy = \dfrac{2dz}{1 + z^2}$, а при $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ маємо $z = \pm 1$ відповідно, то

$$I = 2\int_{-1}^{1} \frac{2dz}{\left(1 + z^2\right) \cdot \left(3 + \frac{2z}{1 + z^2}\right)} = 4\int_{-1}^{1} \frac{dz}{3z^2 + 2z + 3} = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} \frac{dz}{z^2 + \frac{2}{3}z + 1} = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}} =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3z + 1}{2\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \sqrt{2}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.138 [**33**]. Довести рівність

$$\int_{0}^{\pi} x \cdot f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\, dx,$$

де $f(t)-$ неперервна на $[0;1]$. Застосувати отриманий результат для обчислення інтеграла $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

Розв'язання. До інтеграла в лівій частині заданої рівності застосуємо підстановку $x=\pi-t$. Тоді маємо $dx=-dt$ і нові межі інтегрування: при $x=0$ маємо $t=\pi$, а при $x=\pi$ маємо $t=0$. Одержимо:

$$I=\int\limits_0^{\pi} x\cdot f\left(\sin x\right)dx=-\int\limits_{\pi}^{0}\left(\pi-t\right)\cdot f\left(\sin\left(\pi-t\right)\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\pi\cdot f\left(\sin t\right)dt-\int\limits_0^{\pi}t\cdot f(\sin t)dt=\int\limits_0^{\pi}\pi\cdot f\left(\sin t\right)dt-I\ .$$

Звідси знаходимо:

$$2I=2\int\limits_0^{\pi}x\cdot f\left(\sin x\right)dx=\pi\int\limits_0^{\pi}f\left(\sin x\right)dx\,,$$

звідки випливає рівність, яку потрібно довести.

Використаємо доведену рівність для обчислення інтеграла $\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$:

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin xdx}{1+\cos^2 x}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\left(\cos x\right)}{1+\cos^2 x}=-\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}\left(\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}\ .\ \blacksquare$$

Приклад 3.139. Довести, що $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\cos x\right)dx$, де $f(t)-$ неперервна на $[0;1]$.

Розв'язання. У інтегралі, що знаходиться в правій частині заданої рівності, виконаємо підстановку $x=\frac{\pi}{2}-t,\quad dx=-dt$. Нові межі інтегрування: при $x=0$ буде $t=\frac{\pi}{2}$, а при $x=\frac{\pi}{2}$ буде $t=0$. Звідси знаходимо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx\,,$$

що й потрібно було довести. ■

Використовуючи інтегрування частинами у визначеному інтегралі, можна отримати рекурентні формули для обчислення визначених інтегралів, що залежать від натурального параметра n. Приклад обчислення інтеграла такого типу, а саме $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, наведено в теоретичній частині цього посібника. Розглянемо інші приклади.

Приклад 3.140. Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

Розв'язання. Використаємо формулу з *прикладу 1.19*:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n-\text{непарне},\\ \dfrac{\pi}{2}, & n-\text{парне}, \end{cases} \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Враховуючи доведену в попередньому прикладі рівність

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx\,,$$

маємо:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n-\text{непарне},\\ \dfrac{\pi}{2}, & n-\text{парне}, \end{cases} \qquad n\in\mathbb{N}\,.■$$

Приклад 3.141 [**19**]. Обчислити інтеграл $I_n = \int_0^a \left(a^2-x^2\right)^n dx$, де $n\in\mathbb{N}$.

Розв'язання. Для отримання рекурентної формули подамо інтеграл I_n у вигляді:

$$I_n = \int_0^a \left(a^2-x^2\right)^n dx = \int_0^a \left(a^2-x^2\right)^{n-1}\left(a^2-x^2\right)dx = a^2 I_{n-1} - \int_0^a x\left(a^2-x^2\right)^{n-1} x\,dx\,.$$

Останній інтеграл знайдемо, інтегруючи частинами:

$$\int_0^a x\left(a^2-x^2\right)^{n-1} x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x,\, dv = \left(a^2-x^2\right)^{n-1} x\,dx, \\ du = dx,\, v = -\dfrac{1}{2n}\left(a^2-x^2\right)^n. \end{matrix} \right\| =$$

$$= -\frac{1}{2n} x\left(a^2-x^2\right)^n \Big|_0^a + \frac{1}{2n} I_n = \frac{1}{2n} I_n .$$

Підставляючи цей результат у вираз для I_n, отримаємо:

$$I_n = a^2 I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n \quad \Rightarrow \quad I_n = \frac{2a^2 n}{2n+1} I_{n-1} .$$

Враховуючи, що $I_0 = \int_0^a dx = a$, отримаємо:

$$I_n = a^{2n+1} \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3} = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} .$$

Цей результат можна було б отримати, застосувавши для обчислення I_n підстановку $x = a\sin t$, і тим самим звести цей інтеграл до інтеграла, розглянутого в прикладі 3.140 (обчисліть його в такий спосіб самостійно ✍!). ■

Приклад 3.142. Обчислити інтеграл $I_{m,n} = \int_0^1 x^m \left(1-x\right)^n dx$, де $m, n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегрування частинами. Нехай

$$u = \left(1-x\right)^n ,\ x^m dx = dv ,\ du = -n\left(1-x\right)^{n-1} dx ,\ v = \frac{x^{m+1}}{m+1} .$$

Підставляючи у $I_{m,n}$, отримаємо:

$$I_{m,n} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\left(1-x\right)^n \right]\Bigg|_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}\left(1-x\right)^{n-1} dx = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1} .$$

Застосовуючи послідовно цю формулу n разів, отримаємо:

$$I_{m,n} = \frac{n}{m+1} I_{m+1,n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{m+2,n-2} = \ldots = \frac{n(n-1)\cdots\left(n-(n-1)\right)}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} I_{m+n,0} ,$$

$$I_{m+n,0} = \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{m+n+1} .$$

Остаточно отримуємо:

$$I_{m,n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)(m+n+1)} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} . \ ■$$

§3. Застосування визначених інтегралів

1. Обчислення довжин ліній за допомогою інтегралів

У теоретичній частині цього посібника (розділ 1, §3, п. 1) розглянуто основні формули, що можуть бути використані для обчислення довжини дуги кривої при різних способах її задання. Розглянемо приклади застосування цих формул.

Приклад 3.143. Знайти довжину дуги кривої $y = \operatorname{ch} x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(b;\operatorname{ch} b)$.

Розв'язання. Використаємо формулу для знаходження довжини дуги графіка неперервно диференційовної функції $y = y(x)$, заданої в декартових координатах на відрізку $[a;b]$, що була розглянута в теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 1):

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx .$$

У нашому випадку $y'(x) = \operatorname{sh} x$, $1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x$, тому

$$|L| = \int_0^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_0^b \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x\Big|_0^b = \operatorname{sh} b . \blacksquare$$

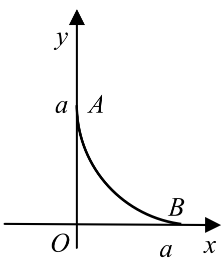


Рис. 3.1.

Приклад 3.144. Знайти довжину дуги L кривої, заданої в параметричній формі:

$$x = a\cos^4 t,\ y = a\sin^4 t,\ a > 0 .$$

Розв'язання. Ця крива в декартовій системі координат наведена на рис. 3.1. Оскільки $x > 0,\ y > 0$, то можна прийняти, що $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Тоді кожному значенню t відповідає єдина точка на дузі L і навпаки. Функції

$x(t)$ і $y(t)$ є неперервно диференційовними на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, отже, можна використати формулу для обчислення довжини дуги кривої, заданої в параметричній формі (*теорема 1.17*):

$$|L| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt,$$

де $t \in [t_1; t_2]$.

Для заданої кривої $x'(t) = -4a\cos^3 t \cdot \sin t,\ y'(t) = 4a\sin^3 t\cos t$. Тоді отримуємо:

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 16a^2\cos^6 t\sin^2 t + 16a^2\sin^6 t\cos^2 t = 2a^2\sin^2 2t\left(1+\cos^2 2t\right).$$

Шукана довжина дуги L дорівнює:

$$|L| = a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 2t}\,\sin 2t\,dt = \left\|\begin{array}{l}\cos 2t = z,\ -2\sin 2t dt = dz, \\ t = 0 \Rightarrow z = 1,\ t = \pi/2 \Rightarrow z = -1\end{array}\right\| =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}\,dz.$$

Використаємо відомий табличний інтеграл

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C,$$

наведений у розширеній таблиці основних інтегралів (розділ 1, §1, п. 2):

$$|L| = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(z\sqrt{1+z^2} + \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^1 = a + \frac{a\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.145. Знайти довжину дуги L кривої $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right),\ a > 0$ (кардіоїда), заданої в полярній системі координат.

Розв'язання. Загальний вигляд кардіоїди наведено на рис. 3.2. Вона є зімкненою кривою й для неї $\varphi \in [0; 2\pi]$. Використаємо формулу для знаходження довжини дуги кривої, заданої в полярних координатах, наведену в теоретичній частині посібника (розділ 1, §3, п. 1):

$$|L| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi .$$

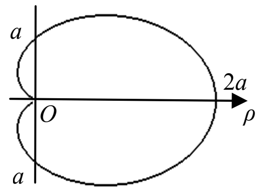


Рис. 3.2.

Для кардіоїди маємо:

$$\rho' = -a\sin\varphi,\ \rho^2 + \rho'^2 = a^2\left(2 + 2\cos\varphi\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$|L| = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\ . \ \blacksquare$$

Приклад 3.146 [**1**]. Обчислити довжину петлі кривої $x = \sqrt{3}t^2$, $y = t - t^3$.

Розв'язання. Для того, щоб скористатися формулою обчислення довжини дуги кривої, заданої в параметричній формі, знайдемо межі інтегрування t_1 та t_2.

Для цього знайдемо точки самоперетину кривої. Ці точки відповідають таким значенням параметра t_1 та t_2,, що $t_1 \neq t_2$, однак $x(t_1) = x\left(t_2\right)$ і $y(t_1) = y\left(t_2\right)$. Таким чином, отримуємо систему:

$$\begin{cases} \sqrt{3}t_1^2 = \sqrt{3}t_2^2, \\ t_1 - t_1^3 = t_2 - t_2^3. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $t_1 = t_2 = 0$ або $t_1 = -1,\ t_2 = 1$. Оскільки $t_1 \neq t_2$, то єдиною точкою самоперетину кривої є точка, що відповідає значенням параметра $t_1 = -1$ та $t_2 = 1$. Тут маємо $x(t_1) = x\left(t_2\right) = \sqrt{3}$, координати точки самоперетину – $\left(\sqrt{3};0\right)$. Таким чином, при знаходженні довжини дуги петлі кривої інтегрування має виконуватися у межах від -1 до 1.

Функції $x(t)$ та $y(t)$ визначені при всіх дійсних t. Оскільки $x(t) = \sqrt{3}t^2 \geq 0$, то задана крива розташована в правій півплощині. Зауважимо, що при зміні знака параметра t величина $x(t)$ не змінюється, а $y(t)$ змінює знак, то крива є симетричною відносно осі Ox. Схематичне зображення заданої кривої наведене на рис. 3.3.

Диференціюючи функції $x(t)$ і $y(t)$ із параметричного рівняння цієї кривої за змінною t, отримуємо:

$$x'(t) = 2\sqrt{3}t,\ y'(t) = 1 - 3t^2,$$

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{12t^2 + 1 - 6t^2 + 9t^4} = 3t^2 + 1.$$

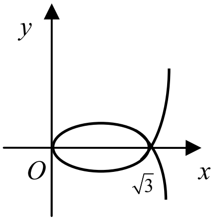


Рис. 3.3.

Підставляючи цей вираз у формулу для знаходження довжини дуги, заданої в параметричній формі, остаточно отримуємо:

$$|L| = \int_{-1}^{1}\left(1 + 3t^2\right)dt = \left(t + t^3\right)\Big|_{-1}^{1} = 4\,. \ ■$$

2. Обчислення площ за допомогою інтегралів

З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає методика його застосування до обчислення площ плоских фігур, заданих різноманітними способами, що була наведена в теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 3). Розглянемо приклади знаходження площ за допомогою визначеного інтеграла.

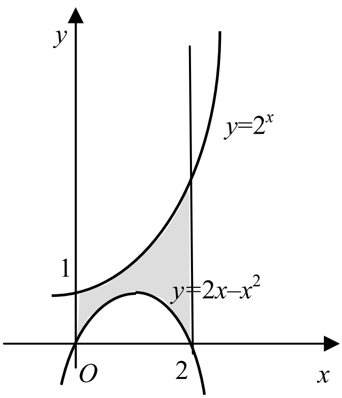


Рис. 3.4.

Приклад 3.147 [**33**]. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x = 0$, $x = 2$ та кривими $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо задану фігуру (рис. 3.4). Виходячи з розташування графіків кривих $y = 2^x$ та $y = 2x - x^2$ при $x \in [0; 2]$, знаходимо площу криволінійної трапеції, обмеженої цими лініями (див. *зауваження 1.12*):

$$S = \int_0^2\left(2^x - \left(2x - x^2\right)\right)dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^2 -$$

$$- x^2\Big|_0^2 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}\,. \ ■$$

Приклад 3.148. Знайти площу області, обмеженої лініями $y = x - 1$ та $y^2 = x + 1$.

Розв'язання. Ця область зображена на рис. 3.5. Вона є об'єднанням двох областей D_1 та D_2, що визначаються нерівностями:

$$D_1 : \begin{cases} -1 \le x \le 0, \\ -\sqrt{x+1} \le y \le \sqrt{x+1}; \end{cases} \quad D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ x - 1 \le y \le \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

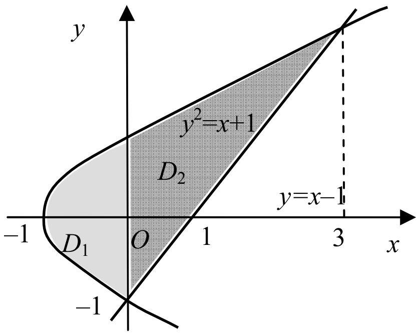


Рис. 3.5

Знайдемо площу S цієї області як суму площ S_1 та S_1 областей D_1 та D_2:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \left(\sqrt{x+1} - \left(-\sqrt{x+1} \right) \right) dx = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1} \cdot dx = \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{0} = \frac{4}{3},$$

$$S_2 = \int_{0}^{3} \left(\sqrt{x+1} - (x-1) \right) dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{0}^{3} - \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{0}^{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{19}{6}.$$

Для площі S всієї області знаходимо:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{19}{6} + \frac{4}{3} = \frac{9}{2}. \ ■$$

Приклад 3.149 [9]. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = |x - 1|$ та $y = 3 - |x|$.

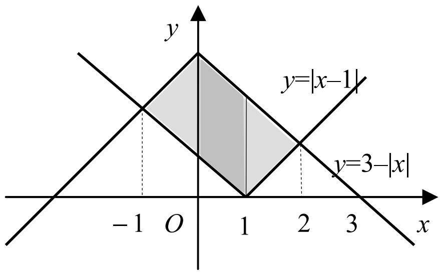


Рис. 3.6.

Розв'язання. Задані криві перетинаються у двох точках (рис. 3.6). Прирівнюючи значення y для цих кривих, знаходимо абсциси цих точок.

Розв'яжемо рівняння $|x-1| = 3-|x|$. При $x<0$ маємо $1-x=3+x \Rightarrow x=-1$. При $x\in[0;1]$ $1-x=3-x \Rightarrow x\in\varnothing$. На промені $x>1$ точку перетину кривих знаходимо з рівняння $x-1=3-x$, звідки $x=2$. Для знаходження площі фігури поділимо $[-1;2]$ на три відрізки: $[-1;0]$, $[0;1]$ та $[1;2]$. У відповідності до рис. 3.6, враховуючи знак виразу під модулем на кожному з цих проміжків та відповідно з цим розкриваючи знак модуля, знаходимо шукану площу:

$$S=\int_{-1}^{0}\big((3+x)-(1-x)\big)\,dx+\int_{0}^{1}\big((3-x)-(1-x)\big)\,dx+\int_{1}^{2}\big((3-x)-(x-1)\big)\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(2x+2)\,dx+\int_{0}^{1}2dx+\int_{1}^{2}(4-2x)\,dx=1+2+1=4.$$

Зауважимо, що той же результат можна знайти без застосування інтеграла, користуючись лише методами елементарної геометрії. Цю нескладну й цікаву задачу пропонуємо розв'язати читачеві самостійно. ■

Приклад 3.150 [**19**]. Знайти площу фігури, обмеженої двома гілками кривої $(y-x)^2 = x^3$ та прямою $x=1$.

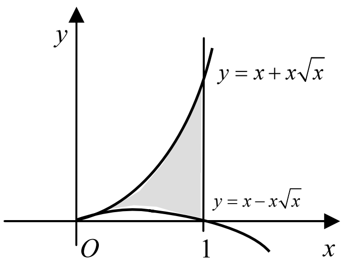


Рис. 3.7.

Розв'язання. З рівняння кривої $(y-x)^2 = x^3$ випливає, що тут y визначена лише при $x \ge 0$, оскільки ліва частина цього рівняння є невід'ємною. З рівняння $(y-x)^2 = x^3$ знаходимо $y = y(x)$. Отримуємо: $y - x = \pm x\sqrt{x}$; звідки рівняння гілок кривої мають вигляд: $y_1 = x + x\sqrt{x}$, $y_2 = x - x\sqrt{x}$. Вони зображені на рис. 3.7. При $x \ge 0$ $y_1(x) \ge y_2(x)$, тому для знаходження площі S заданої криволінійної трапеції отримуємо вираз:

$$S = \int_0^1 \left[y_1(x) - y_2(x) \right] dx = \int_0^1 \left(x + x\sqrt{x} - x + x\sqrt{x} \right) dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \Bigg|_0^1 = \frac{4}{5}. \blacksquare$$

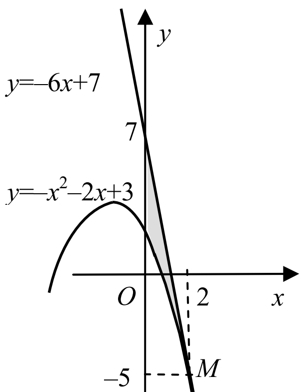


Рис. 3.8.

Приклад 3.151 [**1**]. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 - 2x + 3$, дотичною до неї, проведеною у точці з абсцисою $x = 2$ та віссю ординат.

Розв'язання. Знайдемо рівняння вказаної дотичної. Оскільки $y(2) = -5$, $y'(2) = -6$, то рівняння дотичної має вигляд $y + 5 = -6(x-2)$, або $y = -6x + 7$.

Фігуру, визначену в умові задачі, побудовано на рис.3.8. Парабола розташована під дотичною на $[0; 2]$. Звідси випливає, що площа фігури S обчислюється в такий спосіб:

$$S=\int_0^2\left[7-6x-\left(-x^2-2x+3\right)\right]dx=\int_0^2\left(x-2\right)^2dx=\left.\frac{\left(x-2\right)^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.152 [**1**]. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої

$$x=a\left(t^2-2t\right),\ y=a\left(t^2-1\right)\left(t-3\right),\ a>0.$$

Розв'язання. Якщо крива утворює петлю, то для неї існує точка самоперетину, тобто існують такі значення t_1, t_2 ($t_1\neq t_2$), що виконується умова:

$$\begin{cases} x\left(t_1\right)=x\left(t_2\right), \\ y\left(t_1\right)=y\left(t_2\right). \end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\begin{cases} a\left(t_1^2-2t_1\right)=a\left(t_2^2-2t_2\right), \\ a\left(t_1^2-1\right)\left(t_1-3\right)=a\left(t_2^2-1\right)\left(t_2-3\right); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(t_1^2-t_2^2\right)=2\left(t_1-t_2\right), \\ \left(t_1^2-1\right)\left(t_1-3\right)=\left(t_2^2-1\right)\left(t_2-3\right); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=-1, \\ t_2=3. \end{cases}$$

Таким чином, точка самоперетину кривих відповідає значенням $t_1=-1$, $t_2=3$. Для побудови заданої кривої здійснимо дослідження функцій $x\left(t\right)$ та $y\left(t\right)$. У точці $t_1=-1$ маємо: $x\left(-1\right)=3a$, $y\left(-1\right)=0$. При $t_2=3$ маємо: $x\left(3\right)=3a$, $y\left(3\right)=0$.

З рівняння $x'\left(t\right)=2a\left(t-1\right)=0$ знаходимо стаціонарну точку функції $x\left(t\right)$ – точка $t_3=1$. У цій точці $x\left(1\right)=-a$, $y\left(1\right)=0$.

З рівняння $y'\left(t\right)=a\left(3t^2-6t-1\right)=0$ знаходимо стаціонарні точки функції $y\left(t\right)$ – точки $t_{4,5}=1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Маємо:

$$x\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{a}{3},\ y\left(1\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\pm\frac{16\sqrt{3}a}{9}.$$

Таким чином, для заданої кривої значення координати x змінюються в межах від $x_{\min} = -a$ до $x_{\max} = 3a$, значення y – від мінімального значення $-\frac{16\sqrt{3}a}{9}$ до максимального $\frac{16\sqrt{3}a}{9}$. Обидва екстремальні значення досягаються при $x = \frac{a}{3}$.

Стаціонарні точки t_3, t_4, t_5 ділять проміжок $(-1; 3)$ на чотири інтервали. Встановлюючи знаки похідних на кожному з них, знаходимо, що на $\left(-1; 1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ функція $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає, на $\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ функція $x(t)$ продовжує спадати, $y(t)$ тут теж спадає. На проміжку $\left(1; 1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ функція $x(t)$ зростає, $y(t)$ спадає, на останньому інтервалі $\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}; 3\right)$ спостерігаємо зростання функцій $x(t)$ та $y(t)$.

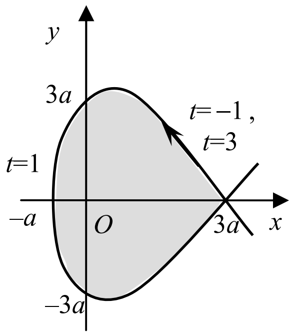


Рис. 3.9.

Ми знайшли точки перетину кривої з віссю Ox. Вісь Oy вона перетинає, якщо $x(t) = 0$, тобто при $t = 0$ та $t = 2$. Тут отримуємо відповідні значення координати y: $y(0) = 3a, y(2) = -3a$.

Ми дослідили функції $x(t)$ та $y(t)$ на монотонність на відрізку $[-1; 3]$, в результаті отримали, що зі зростанням змінної t на цьому відрізку обхід петлі здійснюється проти годинникової стрілки (додатній напрям обходу). Побудуємо цю петлю на координатній площині (рис. 3.9).

Для обчислення шуканої площі використаємо таку формулу (див. *зауваження 1.13*):

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)\right]dt\,.$$

У цьому випадку маємо:

$$x'(t) = 2a(t-1),\ y'(t) = a\left(3t^2 - 6t - 1\right),$$

$$S = \frac{a^2}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(t^2-2t\right)\left(3t^2-6t-1\right) - \left(t^2-1\right)(t-3)(2t-2)\right]dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{-1}^{3}\left(t^4 - 4t^3 + 7t^2 - 6t + 6\right)dt = \frac{a^2}{2}\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 3t^2 + 6t\right)\Bigg|_{-1}^{3} = \frac{256}{15}a^2\,. \blacksquare$$

Приклад 3.153. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a\sin 3\varphi$.

Розв'язання. Щоб знайти межі зміни полярного кута, потрібно розв'язати нерівність:

$$\rho \ge 0 \;\Leftrightarrow\; a\sin 3\varphi \ge 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\pi n}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}\,.$$

При $n = 0, 1, 2$ отримаємо три ділянки даної кривої. Ця крива (трилисник) зображена на рис. 3.10. Вона утворює три петлі рівної площі, кожна з яких обмежує криволінійний сектор. Обчислимо площу одного такого сектора, використовуючи формулу (*теорема 1.23*):

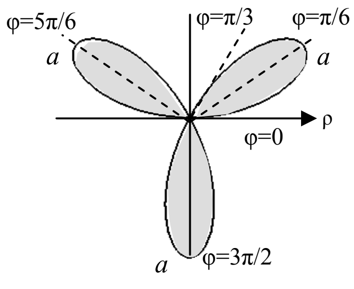


Рис. 3.10.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi\,.$$

У нашому випадку для сектора в першій чверті координатної площини $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$. Тому його площа дорівнює:

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(1 - \cos 6\varphi\right)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi a^2}{12}\,.$$

Шукана площа: $S = 3S_1 = \dfrac{\pi a^2}{4}$. ■

Приклад 3.154 [**33**]. Знайти площу петлі декартового листка $x^3 + y^3 = 3axy$.

Розв'язання. ця крива наведена на рис. 3.11. Для знаходження її площі перейдемо до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Рівняння декартового листка запишемо у вигляді:

$$\rho^3\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right) = 3a\rho^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

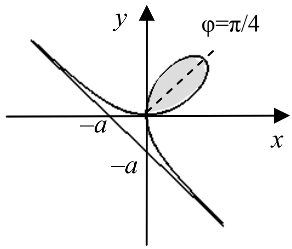


Рис. 3.11.

Виражаючи звідси ρ, знаходимо:

$$\rho = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi} = \frac{3a\sin 2\varphi}{\left(\sin\varphi + \cos\varphi\right)\left(2 - \sin 2\varphi\right)}.$$

З цього рівняння випливає, що $\rho = 0$ при $\varphi = 0$ та $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. При $\varphi \to \dfrac{3\pi}{4}$ та $\varphi \to -\dfrac{\pi}{4}$ $\rho \to \infty$, що пояснюється наявністю в заданої кривої асимптоти $y = -x - a$. Петля декартового листка описується при зміні полярного кута φ у межах від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Шукана площа дорівнює:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)^2}d\varphi.$$

Крива є симетричною відносно променя $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, тому обчислимо спочатку площу половини її петлі:

$$S_1 = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)^2}d\varphi = \left\| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\varphi = z;\ \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = dz; \\ \varphi = 0 \Rightarrow z = 0,\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^1 \frac{z^2dz}{\left(1+z^3\right)^2} = \frac{3a^2}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1+z^3\right)}{\left(1+z^3\right)^2} = -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+z^3}\Bigg|_0^1 = \frac{3a^2}{4}.$$

Для площі петлі S остаточно отримуємо $S = 2S_1 = \frac{3a^2}{2}$. ■

3. Обчислення об'ємів тіл обертання

Розглянемо приклади, пов'язані з використанням визначеного інтеграла для знаходження об'ємів тіл обертання. Відповідні формули наведені в теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 4).

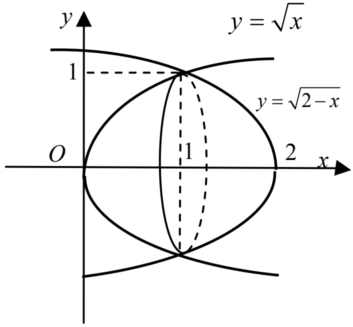


Рис. 3.12.

Приклад 3.155 [**33**]. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2-x}$ та $y=0$, навколо осі Ox.

Розв'язання. Задане тіло обертання схематично наведено на рис. 3.12. Абсцису точки перетину кривих $y=\sqrt{x}$ та $y=\sqrt{2-x}$ знаходимо з рівняння $\sqrt{2-x}=\sqrt{x}$, звідки $x=1$. Шуканий об'єм знаходимо як суму об'ємів двох тіл. Для першого з них $0\le x\le 1$, $0\le y\le\sqrt{x}$, для другого – $1\le x\le 2$, $0\le y\le\sqrt{2-x}$.

Використаємо для обчислення кожного з цих об'ємів формулу (див. *теорему 1.28*):

$$V = \pi\int_a^b y^2\left(x\right)dx,$$

отримаємо:

$$V = \pi\int_0^1 xdx + \pi\int_1^2 \left(2-x\right)dx = \frac{\pi}{2} - \pi\frac{\left(x-2\right)^2}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi. \ ■$$

Приклад 3.156. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 16, x = 1, x = 3, y = 0$, навколо осі Ox.

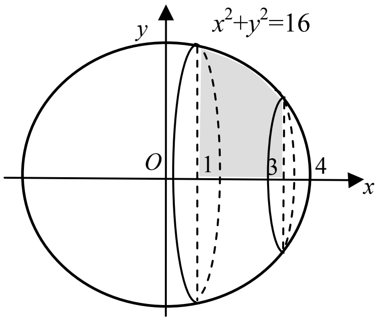


Рис. 3.13.

Розв'язання. Схематичне зображення цього тіла обертання наведено на рис. 3.13. Для обчислення його об'єму використаємо формулу з попереднього прикладу. Маємо:

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx = \pi\int_1^3 \left(16 - x^2\right)dx =$$

$$= \pi\left(16x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 = \frac{70\pi}{3}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.157. Знайти об'єм тіла, що утворене обертанням криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y = x^3$, $y = 8, x = 0$, навколо осі Oy.

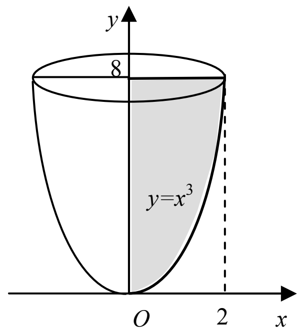


Рис. 3.14

Розв'язання. Для знаходження об'єму тіла, схематичне зображення якого наведене на рис. 3.14, використаємо формулу для об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)$ навколо осі Oy (див. *зауваження 1.15*):

$$V = 2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\,dx.$$

Звідки отримаємо:

$$V = 2\pi\int_0^2 x\cdot x^3\,dx = 2\pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{64\pi}{5}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.158. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ та $8x = y^2$.

Розв'язання. Задане тіло схематично наведено на рис. 3.15. Знайдемо координати точок перетину парабол, розв'язуючи для цього систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x. \end{cases}$$

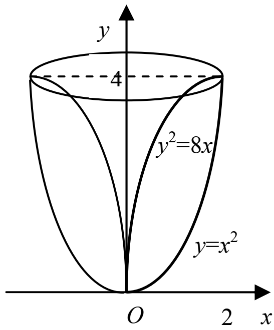


Рис. 3.15.

Знаходимо ординати точок перетину цих кривих: $y_1 = 0$ та $y_2 = 4$. Для знаходження об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy області, для якої

$$0 \le \varphi_1(y) \le x(y) \le \varphi_2(y),\ c \le y \le d,$$

використаємо формулу (*зауваження 1.14*):

$$V = \pi \int_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y) \right) dy.$$

Тому шуканий об'єм дорівнює:

$$V = \pi \int_0^4 \left(\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 \right) dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{320} \right) \Bigg|_0^4 = \frac{24\pi}{5}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.159. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні області, обмеженої кривою $\rho = a\cos 3\varphi$, $a > 0, -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$, навколо: **а)** полярної осі; **б)** прямої $\varphi = \frac{\pi}{6}$; **в)** прямої $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

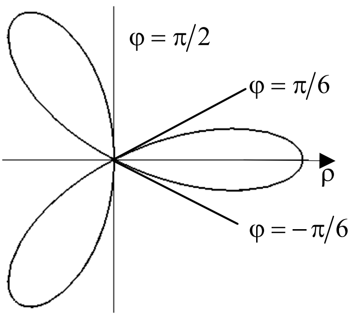


Рис. 3.16.

Розв'язання. Задану криву зображено на рис. 3.16.

а) Зауважимо спочатку, що при обертанні пелюстки кривої при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ навколо полярної осі утворюється таке ж тіло, як і при обертанні навколо цієї осі області, обмеженої заданою лінією при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ і полярною віссю.

I спосіб. Перейдемо до декартової системи координат, де полярній осі відповідає додатній напрям осі Ox, У цій системі рівняння кривої можна записати у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi = a\cos 3\varphi\cos\varphi = \frac{a}{2}\left(\cos 4\varphi + \cos 2\varphi\right), \\ y = \rho\sin\varphi = a\cos 3\varphi\sin\varphi = \frac{a}{2}\left(-\sin 2\varphi + \sin 4\varphi\right). \end{cases}$$

Віссю обертання є вісь Ox.

Враховуючи, що

$$dx = \frac{a}{2}\left(\cos 4\varphi + \cos 2\varphi\right)' d\varphi = -\frac{a}{2}\left(4\sin 4\varphi + 2\sin 2\varphi\right)d\varphi \le 0,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6},$$

отримаємо:

$$V_x = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} y^2(\varphi)\cdot dx(\varphi) = \frac{\pi a^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-\sin 2\varphi + \sin 4\varphi\right)^2\left(2\sin 4\varphi + \sin 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-3\sin 2\varphi\sin^2 4\varphi + 2\sin^3 4\varphi + \sin^3 2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-6\sin 2\varphi - 3\sin 6\varphi + 3\sin 10\varphi\right)d\varphi -$$

$$-\frac{\pi a^3}{8}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 4\varphi\right)d(\cos 4\varphi) + \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(1-\cos^2 2\varphi\right)d(\cos 2\varphi)\right) =$$

$$= -\frac{47\pi}{320} - \frac{\pi a^3}{8}\left(\cos 4\varphi - \frac{\cos^3 4\varphi}{3} + \cos 2\varphi - \frac{\cos^3 2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{19\pi}{960}.$$

II спосіб. Скористаємося формулою для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі плоскої фігури

$$0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ \ 0 \le \rho \le \rho(\varphi),$$

(φ і $\rho -$ полярні координати) [**2**; **32**]

$$\boxed{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi}.$$

Отже, в цьому випадку отримаємо:

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 3\varphi \sin\varphi\, d\varphi \ = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(-3\sin 2\varphi + 3\sin 4\varphi - \sin 8\varphi + \sin 10\varphi\right) d\varphi = \ = \frac{19\pi}{960}.$$

■

б) Здійснимо поворот заданої кривої так, щоб нова полярна вісь пройшла через пряму $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Для цього її потрібно повернути на кут $\dfrac{\pi}{6}$ за рухом годинникової стрілки. В результаті такої дії крива $\rho = a\cos 3\varphi$ при $-\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6}$ перейде в криву $\rho = a\cos 3\left(\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \rho_1(\varphi)$ при $-\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$.

Враховуючи те, що $\sin\varphi \le 0$ при $-\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$, знаходимо

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\rho_1(\varphi)\right)^3 \left|\sin\varphi\right| d\varphi \ - \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \cos^3 3\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sin^3 3\varphi\ \sin\varphi\, d\varphi \ = \frac{\pi}{12}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(3\cos 2\varphi - 3\cos 4\varphi - \cos 8\varphi + \cos 10\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{27\pi\sqrt{3}}{320}.\ ■$$

в) Аналогічно попередньому прикладу розглянемо криву $\rho = a\cos 3\left(\varphi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \rho_2(\varphi)$ при $-\dfrac{5\pi}{6} \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{3}$, яку отримуємо поворотом кривої

$\rho = a\cos 3\varphi$ при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ на кут $\frac{\pi}{2}$ за рухом годинникової стрілки. В результаті об'єм шуканого тіла обертання навколо прямої $\varphi = \frac{\pi}{2}$ стає рівним об'єму тіла, утвореного обертанням області, обмеженої кривою $\rho = a\cos 3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ при $-\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le -\frac{\pi}{3}$, навколо полярної осі.

Враховуючи те, що $\sin\varphi \le 0$ при $-\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le -\frac{\pi}{3}$, знаходимо

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \left(\rho_2(\varphi)\right)^3 \left|\sin\varphi\right| d\varphi \; -\frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \cos^3 3\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \sin^3 3\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{12}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \left(3\cos 2\varphi - 3\cos 4\varphi - \cos 8\varphi + \cos 10\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{27\pi\sqrt{3}}{160}. \; \blacksquare$$

4. Площі поверхонь обертання

Приклад 3.160. [**1**]. Область, обмежена частиною спіралі $\rho = e^{\varphi}$, де $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{7\pi}{6}$, та відрізком, що з'єднує її кінці, обертається навколо прямої, що містить цей відрізок. Знайти площу поверхні отриманого тіла обертання.

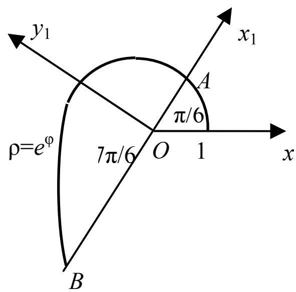


Рис. 3.17.

Розв'язання. Область, зазначена в умові задачі, наведена на рис. 3.17. Виберемо декартову систему координат таким чином, щоб початок координат збігався з полюсом, а додатній напрямок осі Ox – з променем $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Переходячи до введеної таким чином декартової системи координат, отримуємо:

$$x = \rho\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$y = \rho\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = e^{\varphi - \frac{\pi}{6}}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right).$$

Далі використовуємо формулу для знаходження площі поверхні тіла обертання (випадок полярних координат), наведену у теоретичній частині посібника (розділ 1, §3, п. 5):

$$P_\rho = 2\pi\cdot\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2}\,d\varphi .$$

Для заданої спіралі $\sqrt{\rho^2 + \left(\rho'_\varphi\right)^2} = e^\varphi\cdot\sqrt{2}$. Віссю обертання є вісь Ox, тому вираз $\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$ у формулі для P_ρ ми повинні замінити на відстань від точки кривої до осі обертання для даного випадку, тобто $|y(\varphi)|$. Отже,

$$P_\rho = 2\pi\cdot\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\sqrt{2}\cdot e^{2\varphi+\frac{\pi}{6}}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\cdot d\varphi = \left\|\begin{array}{l}\varphi - \frac{\pi}{6} = t,\ d\varphi = dt;\\ \varphi = \frac{\pi}{6}\Rightarrow t = 0,\ \varphi = \frac{7\pi}{6}\Rightarrow t = \pi\end{array}\right\| =$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\int_0^\pi e^{2t+\frac{\pi}{6}}\sin t\,dt.$$

Останній інтеграл знаходимо, двічі інтегруючи частинами. Отримуємо:

$$P_\rho = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(2\sin t - \cos t\right)\cdot e^{2t}\Big|_0^\pi = e^{\pi/6}\cdot 2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{5}. \blacksquare$$

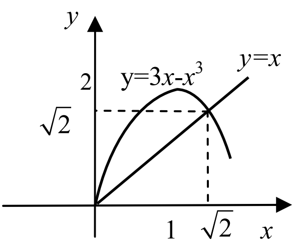


Рис. 3.18.

Приклад 3.161 [**1**]. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням частини кривої $y = 3x - x^3$, що знаходиться у правій півплощині $(x \ge 0)$ над прямою $y = x$ (рис. 3.18) навколо осі абсцис.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину кривої $y = 3x - x^3$ та прямої $y = x$, для яких $x \ge 0$:

$$\begin{cases} y = 3x - x^3, \\ y = x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 = 0, \\ x_2 = y_2 = \sqrt{2}, \\ x_3 = y_3 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Оскільки $x \ge 0$, то для заданої частини кривої $0 \le x \le \sqrt{2}$. Використаємо формулу для обчислення площі бічної поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі обертання Ox області, заданої в декартових координатах (розділ 1, §3, п. 4):

$$P_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

У нашому випадку віссю обертання є пряма $y = x$, тому множник $f(x)$ у підінтегральному виразі ми повинні замінити на відстань від кривої до осі обертання, тобто:

$$\frac{\left|3x - x^3 - x\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}} .$$

Враховуючи, що $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1 + 9\left(1 - x^2\right)^2}$, отримуємо:

$$P_x = \pi\sqrt{2} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 9\left(1 - x^2\right)^2}\left(2 - x^2\right) x\, dx .$$

Виконуючи в останньому інтегралі заміну $t = 1 - x^2$, $dt = -2xdx$, знаходимо:

$$P_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + 9t^2}\left(1 + t\right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1 + 9t^2} + \frac{1}{6}\ln\left|3t + \sqrt{1 + 9t^2}\right|\right]\Bigg|_{-1}^{1} +$$

$$+ \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1} t\sqrt{1 + 9t^2}\, dt .$$

Оскільки функція $t\sqrt{1 + 9t^2}$ непарна, то інтеграл від неї на відрізку $[-1,1]$ із симетричними межами інтегрування дорівнює нулю. Отже,

$$P_x = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\left(3\sqrt{10} + \ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right).\ \blacksquare$$

5. Деякі фізичні застосування визначеного інтеграла

Розглянемо спочатку задачі на знаходження центра мас. Тут будемо вважати густину кривої чи області сталою та одиничною.

Приклад 3.162. Знайти координати центра мас дуги ланцюгової лінії $y = \operatorname{ch} x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(b; \operatorname{ch} b)$.

Розв'язання. Довжина дуги заданої кривої знайдена в прикладі 3.214, де отримано $|L| = \operatorname{sh} b$. Для знаходження координат центра мас даної дуги використаємо формулу, наведену в теоретичній частині цього посібника (розділ 1, §3, п. 7):

$$x_{ц.М.} = \frac{1}{|L|}\cdot\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ ,$$

$$y_{ц.М.} = \frac{1}{|L|}\cdot\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\ .$$

Враховуючи, що $\sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x$, отримаємо значення інтегралів у цих формулах:

$$\int_0^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^b x\cdot\operatorname{ch} x\,dx = x\cdot\operatorname{sh} x\Big|_0^b - \int_0^b \operatorname{sh} x\,dx = b\cdot\operatorname{sh} b - \operatorname{ch} b + 1,$$

$$\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^b \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^b\left(1+\operatorname{ch} 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right)\Bigg|_0^b =$$

$$= \frac{b}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2b}{4}.$$

Підставляючи ці значення у формули для обчислення центра мас, отримаємо:

$$x_{ц.М.} = \frac{b\cdot\operatorname{sh} b - \operatorname{ch} b + 1}{\operatorname{sh} b},\ \ y_{ц.М.} = \frac{2b + \operatorname{sh} 2b}{4\operatorname{sh}\mathrm{b}}.\ \blacksquare$$

Приклад 3.163 [**33**]. Знайти центр мас фігури, обмеженої еліпсом $4x^2+9y^2=36$ та колом $x^2+y^2=9$, що знаходиться в першій чверті координатної площини.

Розв'язання. Побудуємо дуги кола радіуса 3 з центром у початку координат та еліпса з цим же центром та півосями 3 та 2, розташовані у першій чверті, які разом із координатними осями обмежують задану фігуру (рис. 3.19).

Спочатку знаходимо статичні моменти цієї фігури. У теоретичній частині (розділ 1, §3, п. 8) наведено формули для обчислення статичних моментів криволінійної трапеції

$$\{(x,y): a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}.$$

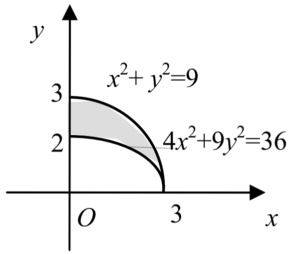


Рис. 3.19.

З них можна отримати формули для знаходження статичних моментів узагальненої криволінійної трапеції $\{(x,y): a\le x\le b, f_1(x)\le y\le f_2(x)\}$:

$$K_y=\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx,\ K_x=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx,$$

які застосуємо для розв'язання цієї задачі:

$$K_y=\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^3 x\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,d\left(9-x^2\right)=-\frac{1}{9}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^3=3;$$

$$K_x=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b\left(f^2{}_2(x)-f^2{}_1(x)\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^3\left(\left(9-x^2\right)-\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(5x-\frac{5x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3=5.$$

Далі знайдемо координати центра мас фігури за формулами:

$$x_{ц.м.}=\frac{K_y}{P},\ y_{ц.м.}=\frac{K_x}{P},$$

де P – площа даної фігури.

Площу криволінійної трапеції знайдемо як різницю площі чверті круга радіуса 3 та чверті еліпса з півосями $a=3, b=2$ (площа еліпса з півосями a, b дорівнює πab):

$$P=\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

Отже, отримуємо координати центра мас:

$$x_{ц.м.}=\frac{K_y}{P}=\frac{4}{\pi},\ y_{ц.м.}=\frac{K_x}{P}=\frac{20}{3\pi}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.164 [**33**]. Користуючись першою теоремою Гюльдена, знайти центр мас півкола радіуса a.

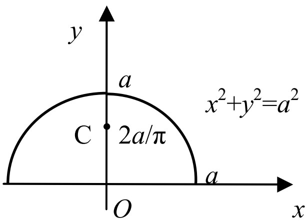


Рис. 3.20.

Розв'язання. Проведемо координатні осі через центр заданого півкола (рис. 3.20). Оскільки крива є симетричною відносно осі Oy, то $\underline{x_{ц.м.}=0}$. Для знаходження $y_{ц.м.}$ використаємо першу теорему Гюльдена. Площа поверхні P тіла, утвореного обертанням півкола навколо осі Ox, дорівнює $4\pi a^2$ (площа поверхні сфери радіуса a), довжина дуги півкола $|L|=\pi a$. За першою теоремою Гюльдена, маємо:

$$4\pi a^2=\pi a\cdot 2\pi\cdot y_{ц.м.}.$$

Звідси знаходимо $\underline{y_{ц.м.}=\frac{2a}{\pi}}$. $\blacksquare$

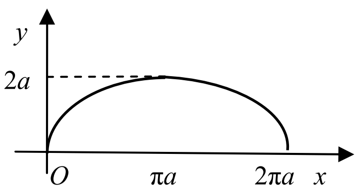


Рис. 3.21.

Приклад 3.165 [**33**]. Користуючись другою теоремою Гюльдена, знайти координати центра мас фігури, обмеженої віссю Ox та однією аркою циклоїди

$$x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t)$$

(рис. 3.21).

Розв'язання. Знайдемо об'єм тіла, отриманого обертанням кривої навколо осі Ox:

$$V = \pi\int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos t\right)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} dt - 3\pi a^3 \int_0^{2\pi} \cos t dt +$$

$$+\frac{3\pi a^3}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+\cos 2t\right) dt - \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1-\sin^2 t\right) d\left(\sin t\right) = 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 = 5\pi^2 a^3.$$

Знайдемо площу фігури:

$$P = \int_0^{2\pi} y dx = \pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-\cos t\right)^2 dt = \pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = 3\pi^2 a^2 .$$

Фігура є симетричною відносно прямої $x = \pi a$, тому $x_{ц.м.} = \pi a$.

За другою теоремою Гюльдена маємо:

$$y_{ц.м.} = \frac{V}{2\pi P} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi^2 a^2} = \frac{5a}{6\pi}. \ ■$$

Приклад 3.166 [**33**]. Електричний заряд e_1, розташований у початку координат, відштовхує заряд e_2 з точки $(x_1; 0)$ у точку $(x_2; 0)$. Знайти роботу A сили відштовхування F.

Розв'язання. Відомо, що електричні заряди відштовхуються із силою

$$F = \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2},$$

де e_1 та e_2 – величини зарядів, r – відстань між ними.

Диференціал роботи сили F на переміщенні dx дорівнює :

$$dA = F\left(x\right) dx = \frac{e_1 e_2}{x^2} dx .$$

Звідси знаходимо:

$$A = e_1 e_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = -e_1 e_2 \left.\frac{1}{x}\right|_{x_1}^{x_2} = e_1 e_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right). \ ■$$

Приклад 3.167. Робота, необхідна для того, щоб підняти тіло на певну висоту, дорівнює добутку ваги тіла на цю висоту. Визначити роботу, необхідну для того, щоб викачати воду із циліндричної цистерни, радіус якої дорівнює R, а висота H.

Розв'язання. Поділимо цистерну площинами, паралельними її основі, що знаходяться на відстані dx одна від одної. Об'єм кожного з отриманих при цьому елементарних циліндрів дорівнює:

$$dV = \pi R^2 dx.$$

Елементарна робота, потрібна для підняття з глибини x отриманого елементарного циліндра вагою $\gamma \cdot g \cdot dV$, де γ – густина води, g – прискорення вільного падіння, дорівнює:

$$dA = \gamma \cdot g \cdot x \cdot \pi R^2 dx.$$

Повна робота дорівнює:

$$A = \pi R^2 \int_0^H x dx = \frac{\pi R^2 H^2}{2}. \blacksquare$$

Приклад 3.168 [17]. Знайти тиск, що діє на півкруг, вертикально занурений у рідину, якщо його радіус дорівнює R, а діаметр лежить на вільній поверхні рідини (рис 3.22). Питома вага рідини дорівнює γ.

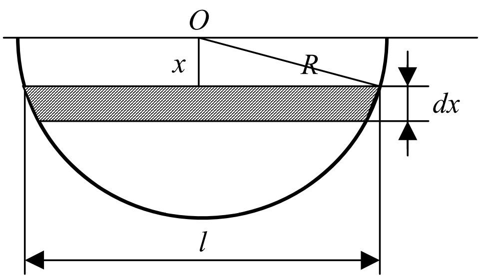


Рис. 3.22.

Розв'язання. Проводимо горизонтальну смужку на глибині x. Нехай ширина смужки dx, а довжина l. Приймаючи цю смужку за елемент площі, для диференціала площі одержимо вираз $ds = ldx$, але $x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = R^2$, звідки $l = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, отже: $ds = 2\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Сила тиску рідини на елементарну смужку $dP = \gamma x ds = 2\gamma x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$ Таким чином

$$P = \gamma\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\gamma\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(R^2 - x^2\right) =$$

$$= -\gamma\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R = \frac{3}{2}\gamma R^3. \blacksquare$$

Приклад 3.169 [13]. Яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо відомо, що від навантаження в $1H$ вона розтягнулася на 1 см?

Розв'язання. Згідно із законом Гука, сила F, яка розтягнула пружину на x м, дорівнює: $F = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови: якщо $x = 0,01$ м, то $F = 1\text{Н}$, отже $k = \frac{1}{0,01} = 100\left(\frac{\text{Н}}{\text{м}}\right)$ та $F = 100x$. Тоді

$$A = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2\Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ (Дж)}. \blacksquare$$

§ 4. Наближене обчислення інтегралів

Приклад 3.170. Обчислити наближено $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, застосовуючи формули прямокутників, трапецій, Сімпсона з кроком 0,1. Оцінити похибку обчислень.

Розв'язання. Розбиваємо відрізок [1;2] на 10 рівних частин із кроком $h = \frac{2-1}{10} = 0,1$. Утворюємо таблицю значень функції $y = \frac{1}{x}$ (див. табл. 3.1).

Здійснюючи обчислення за формулою прямокутників (1.36), отримаємо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \cdot 6,9283536 = 0,69283536.$$

Підставляючи значення у формулу трапецій (1.38), одержимо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \cdot \left(\frac{1+0,5}{2} + 6,1877139\right) = 0,69377139.$$

Застосовуючи формулу Сімпсона (1.41), маємо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0{,}1}{6}\left(1 + 0{,}5 + 4 \cdot 6{,}9283536 + 2 \cdot 6{,}1877139\right) = 0{,}69314737 .$$

Таблиця 3.1 –

i	x_i	$x_{i-\frac{1}{2}}$	y_i	$y_{i-\frac{1}{2}}$
0	1		1	
		1,05		0,9523810
1	1,1		0,9090909	
		1,15		0,8695652
2	1,2		0,8333333	
		1,25		0,8
3	1,3		0,7692308	
		1,35		0,7407407
4	1,4		0,7142857	
		1,45		0,6896552
5	1,5		0,6666667	
		1,55		0,6451613
6	1,6		0,625	
		1,65		0,6060606
7	1,7		0,5882352	
		1,75		0,5714286
8	1,8		0,5555556	
		1,85		0,5405405
9	1,9		0,5263157	
		1,95		0,5128205
10	2,0		0,5	
Сума			7,6877139	6,9283536

Оцінимо похибку кожного із знайдених значень, використовуючи формули залишкових членів у цих формулах (1.37), (1.39) і (1.42).

Обчислимо $f''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)''=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}$, звідки $\max\limits_{[1;2]}\left|f''(x)\right|=2$. Тоді похибка формули прямокутників

$$\left|R_n\right|\le\frac{2\cdot 1}{24}(0{,}1)^2\approx 0{,}83\cdot 10^{-3};$$

похибка формули трапецій

$$\left|R_m\right|\le\frac{2\cdot 1}{12}(0{,}1)^2\approx 1{,}7\cdot 10^{-3}.$$

Тепер обчислюємо: $f^{IV}(x)=\frac{24}{x^5}$; $\max\limits_{[1;2]}\left|f^{IV}(x)\right|=24$. Звідси отримаємо похибку формули Сімпсона:

$$\left|R_c\right|\le\frac{24\cdot 1}{2880}(0{,}1)^4\approx 0{,}83\cdot 10^{-6}.$$

Отже, за формулою прямокутників з урахуванням похибки:

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx 0{,}692\pm 0{,}001;$$

за формулою трапецій

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx 0{,}693\pm 0{,}002;$$

за формулою Сімпсона

$$\int_1^2\frac{dx}{x}\approx 0{,}693147\pm 0{,}000001.$$

Точне значення інтеграла: $\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2=0{,}693147189...$

Висновок: найменшу похибку отримуємо при застосуванні квадратурної формули Сімпсона. ■

Приклад 3.171. Обчислити $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ із точністю 0,0001 за формулою Сімпсона.

Розв'язання. Обчислити цей інтеграл досить складно, оскільки первісна підінтегральної функції не виражається через елементарні функції. За умовою дозволена похибка повинна не перевищувати 0,0001, тому кількість частин n розбиття відрізку інтегрування у формулі (1.41) знайдемо, враховуючи формулу (1.42), із нерівності

$$\frac{M_4(b-a)}{2880}\cdot h^4 < 0{,}0001 \text{ або } \frac{M_4(b-a)^5}{2880\cdot n^4} < 0{,}0001 . \tag{3.6}$$

Тут $M_4 = \max\limits_{[0;1]}\left|f^{IV}(x)\right|$. Обчислимо значення M_4 для функції $f(x)=e^{-x^2}$. Функція $f^{IV}(x)=\left(16x^4-48x^2+12\right)\cdot e^{-x^2}$ монотонно спадає на відрізку [0;1], тому $M_4=\left|f^{IV}(0)\right|=12$.

Підставляючи значення $(b-a)=1$ і $M_4=12$ в (3.6), отримаємо $\frac{12}{2880\cdot n^4}<0,0001$, звідки $n^4>\frac{125}{3}$. Остання нерівність виконується для всіх $n\geq 3$. Оберемо для розрахунків $n=5$. Ділимо відрізок [0;1] на 5 рівних частин із кроком $h=\frac{1-0}{5}=0{,}2$ та обчислюємо значення функції $f(x)=e^{-x^2}$ в точках розбиття x_i та в серединах елементарних відрізків $x_{i-1/2}$ (i=1,…,5).

При цьому, щоб забезпечити задану точність (0,0001), обчислення проводимо з п'ятьма знаками після коми (табл. 3.2), округляючи остаточний результат до чотирьох знаків.

Таблиця 3.2 –

i	x_i	$x_{i-1/2}$	y_i		$y_{i-1/2}$
0	0		1		
		0,1			0,99005
1	0,2			0,96079	
		0,3			0,91393
2	0,4			0,85214	
		0,5			0,77880
3	0,6			0,69768	
		0,7			0,61263
4	0,8			0,52729	
		0,9			0,44486
5	1		0,36788		
Сума			1,36788	3,0379	3,74027

Підставляючи отримані значення у формулу (1.41), отримуємо

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{0,2}{6}\left(1,36788 + 4\cdot 3,74027 + 2\cdot 3,0379\right) = 0,74683 \approx 0,7468\,. \ ■$$

§ 5. Невласні інтеграли

У теоретичній частині посібника було наведено означення невласних інтегралів першого та другого роду, їх основні властивості та ознаки збіжності. Розглянемо приклади, пов’язані з обчисленням та дослідженням невласних інтегралів.

Приклад 3.172. Обчислити невласні інтеграли першого роду або встановити їх розбіжність:

а) $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$; **б)** $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10}$; **в)** $I_3 = \int\limits_0^{+\infty} x\sin x\,dx$.

Розв’язання. **а)** За означенням невласного інтеграла першого роду маємо:

$$I_1 = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{a\to+\infty} \int_{e^2}^{a} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\bigg|_{e^2}^{a} \right) = \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\ln^2 a} \right) = \frac{1}{8}.$$

б) Знайдемо невласний інтеграл I_2:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+10} + \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \frac{dx}{x^2+2x+10}.$$

Замість точки $x=0$ за проміжну межу інтегрування можна взяти будь-яку іншу скінченну точку числової прямої.

Знайдемо границі з правої частини останньої рівності:

$$\lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{3} \lim_{b\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3}\bigg|_{b}^{0} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6},$$

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \frac{1}{3} \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3}\bigg|_{0}^{a} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Підставляючи ці границі у вираз для I_2, отримаємо:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}.$$

в) Використовуючи означення невласного інтеграла першого роду, маємо:

$$I_3 = \int_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} x\sin x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x,\ dv = \sin x dx, \\ du = dx,\ v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \left(-x\cos x\Big|_0^a + \int_0^a \cos x\,dx \right) = \lim_{a\to+\infty} \left(-a\cos a + \sin a \right).$$

Останньої границі не існує. Інтеграл I_3 є розбіжним. ■

Приклад 3.173. Обчислити невласний інтеграл першого роду

$$I = \int_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}.$$

Розв'язання. Переходячи до границі, отримаємо:

$$I=\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}=\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{2}^{a}\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}=-\lim_{a\to+\infty}\left(x^2-3\right)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_2^a=$$

$$=-\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-3}}-1\right)=1\ .\ ■$$

У теоретичній частині цього посібника були розглянуті загальна та частинна ознаки порівняння, які дають змогу дослідити на збіжність невласні інтеграли. Розглянемо відповідні приклади.

Приклад 3.174. Дослідити на збіжність інтеграл

$$I=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{3x^5+x^3+1}\,.$$

Розв'язання. Використаємо частинну ознаку порівняння в граничній формі. Оскільки в знаменнику підінтегрального дробу знаходиться многочлен 5 степеня, то порівняємо підінтегральну функцію $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3x^5+x^3+1}$ з $\dfrac{1}{x^5}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{\frac{1}{x^5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{3x^5+x^3+1}=\frac{1}{3}=const\neq 0\,,$$

Таким чином, $f\left(x\right)$ є нескінченно малою порядку $\lambda=5$ у порівнянні з $\dfrac{1}{x}$. Оскільки 5>1, то заданий інтеграл є збіжним. ■

Приклад 3.175 [**19**]. Дослідити на збіжність інтеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x+\sin^2 x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x+\sin^2 x}$ є неперервною та додатною при $x\geq 1$. При $x\to+\infty$ функція $f\left(x\right)$ є нескінченно малою порядку $\lambda=1$ у порівнянні з $\dfrac{1}{x}$, тому, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл є розбіжним. ■

Приклад 3.176. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді $f(x)=1-\cos\frac{2}{x}=2\sin^2\frac{1}{x}$. Вона є додатною та неперервною при $x\geq 1$. Оскільки при $x\to+\infty$ функція $2\sin^2\frac{1}{x}$ є нескінченно малою, еквівалентною $\frac{2}{x^2}$, то, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл є збіжним. ■

Приклад 3.177 [**33**]. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\ln\frac{e^{\frac{1}{x}}+(\alpha-1)}{\alpha}dx$, де $\alpha>0$.

Розв'язання. Перетворимо підінтегральну функцію до вигляду $f(x)=\ln\frac{e^{\frac{1}{x}}+(\alpha-1)}{\alpha}=\ln\left(1+\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\alpha}\right)$. Таким чином при $x\to+\infty$ підінтегральна функція є нескінченно малою, еквівалентною $\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\alpha}$, яка, у свою чергу, еквівалентна $\frac{1}{\alpha x}$ (див. додаток А). Тому, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл є розбіжним.

Приклад 3.178 [**33**]**.** Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1-4\sin 2x}{x^3+2\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1-4\sin 2x}{x^3+2\sqrt{x}}$ змінює знак на проміжку інтегрування, тому дослідимо на збіжність $\int\limits_1^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$. Оскільки

$$\left|f\left(x\right)\right| = \frac{\left|1-4\sin 2x\right|}{x^3+2\sqrt{x}} \le \frac{1+\left|4\sin 2x\right|}{x^3+2\sqrt{x}} \le \frac{5}{x^3},$$

а інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{5}{x^3}dx$ є збіжним, то, за загальною ознакою порівняння, збіжним є і інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right| dx$. Таким чином, заданий інтеграл збігається абсолютно. ■

Приклад 3.179 [**19**]. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Подамо за означенням невласний інтеграл у вигляді границі:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \lim_{B\to\infty} \int\limits_0^{B} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}.$$

Під знаком визначеного інтеграла застосуємо підстановку $x = \mathrm{tg}\, t$, де $0 \le t < \frac{\pi}{2}$. Тоді $x = 0$ при $t = 0$ і $x = B$ при $t = \mathrm{arctg}\, B$. Виконуючи заміну змінної у визначеному інтегралі, отримаємо:

$$\int\limits_0^{B} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \int\limits_0^{\mathrm{arctg}\, B} \cos^{2n-2} t\, dt.$$

Оскільки при $B \to +\infty$ верхня межа інтегрування $\mathrm{arctg} B \to \frac{\pi}{2} - 0$, то

$$\lim_{B\to\infty} \int\limits_0^{B} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n} = \lim_{B\to\infty} \int\limits_0^{\mathrm{arctg}\, B} \cos^{2n-2} t\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t\, dt.$$

Таким чином, після заміни змінної отримали визначений інтеграл, обчислений у прикладі 3.140. Підставляючи туди замість n парне $2n-2$, отримаємо:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x dx = \frac{\left(2n-3\right)!!}{\left(2n-2\right)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n > 1.$$

При $n=1$ $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. ■

Приклад 3.180 [**33**]. Використовуючи означення, обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\textbf{а)}\ \int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}};\ \textbf{б)}\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x};\ \textbf{в)}\ \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^3}.$$

Розв'язання. а) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ є необмеженою в околі точки $x=1$. На будь-якому відрізку $[1+\varepsilon; e]$ $(0<\varepsilon<e-1)$ вона є неперервною, а тому інтегровною. За визначенням невласного інтеграла другого роду маємо:

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to +0}\left(\frac{3}{2}(\ln x)^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e}\right)=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to +0}\left(1-\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\frac{3}{2}.\ ■$$

б) Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ є необмеженою в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$ і є інтегровною на будь-якому відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$, де $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, оскільки є неперервною на цьому відрізку. Тому отримуємо:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\right]=+\infty.$$

Інтеграл є розбіжним. ■

в) Розкладемо підінтегральну функцію $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$ на суму простих дробів:

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{x^2+x+1}\right).$$

Тоді отримуємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Другий доданок у правій частині цієї рівності є визначеним інтегралом, тому він не впливає на характер збіжності інтеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$. Збіжність заданого інтеграла визначається збіжністю інтеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(1-x)\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = +\infty.$$

Таким чином, заданий інтеграл є розбіжним. ■

Приклад 3.181. Обчислити інтеграл $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція є необмеженою в лівому околі точки $x=2$.

Знайдемо невизначений інтеграл $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx$. Для цього перетворимо підінтегральну функцію:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C.$$

Функція $F(x) = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}$ неперервна на $[0; 2-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<2)$ та $F'(x) = f(x)$ на $(0; 2-\varepsilon)$. Тому отримуємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}\right)\Bigg|_0^{2-\varepsilon} = \pi+2.$$ ■

Приклад 3.182. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є необмеженою в околі особливої точки $x=1\in[0;\,2]$, тому (див. *зауваження 1.19*)

$$I=\int_0^2\frac{dx}{1-x^2}=\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\left(\int_0^{1-\alpha}\frac{dx}{1-x^2}+\int_{1+\beta}^{2}\frac{dx}{1-x^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\left(\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\alpha}+\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{1+\beta}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+0}}\left(\ln\frac{|2-\alpha|}{2+\beta}-\ln\frac{\alpha}{\beta}+\ln 3\right).$$

Такої границі не існує. Пояснимо це. Застосуємо означення границі за Гейне:

для $\alpha_1^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0,\ \beta_1^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(\ln\frac{\left|2-\alpha_1^{(n)}\right|}{2+\beta_1^{(n)}}-\ln\frac{\alpha_1^{(n)}}{\beta_1^{(n)}}+\ln 3\right)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\ln 3}{2},$$

для $\alpha_1^{(n)}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0,\ \beta_1^{(n)}=\frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}+0$ маємо

$$\frac{1}{2}\left[\left(\ln\frac{\left|2-\alpha_2^{(n)}\right|}{2+\beta_2^{(n)}}-\ln\frac{\alpha_1^{(n)}}{\beta_2^{(n)}}+\ln 3\right)\right]\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\ln 6}{2},$$

тому границі не існує. Отже, заданий інтеграл розбігається. ■

Зауваження 3.1. Відомо [**32**], що у випадку, коли особлива точка c функції $f(x)$ є внутрішньою точкою відрізка $[a,b]$, а функція $f(x)$ інтегровна на будь-якому відрізку $[\alpha,\beta]\subset\left([a,c)\cup(c,b]\right)$, то, за означенням, із розбіжності одного із інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ або $\int_c^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Звідси отримаємо інший спосіб розв'язання прикладу 3.182. Розглянемо інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{1-x^2}$ з особливою точкою $x=1$, яка збігається з правим кінцем проміжку інтегрування:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{\alpha\to+0}\int_0^{1-\alpha} \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+0} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_0^{1-\alpha} = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+0}\ln\frac{|2-\alpha|}{\alpha} = +\infty .$$

Він розбігається. Отже, згідно із зауваженням 3.1, розбігається й інтеграл $I = \int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$.

Наступний приклад розв'яжемо також із застосуванням зауваження 3.1.

Приклад 3.183. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язання. Цей інтеграл є невласним, оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[5]{x}}$ є необмеженою в околі точки $x = 0$. Подамо інтеграл у вигляді:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}} .$$

Обидва інтеграли в правій частині останньої рівності є розбіжними, оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ є розбіжним при $\lambda > 1$, а у нашому випадку $\lambda = \frac{6}{5} > 1$. Таким чином, за частинною ознакою порівняння для невласних інтегралів другого роду інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$ є розбіжним, а тому, за зауваженням 3.1, розбіжним є й інтеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x\sqrt[5]{x}}$. ■

Приклад 3.184 [33]. Обчислити невласний інтеграл $I_n = \int_0^1 x^m \ln^n x\, dx$, де $m > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Розв'язання. Знайдемо значення інтеграла при $n = 0$:

$$I_0 = \int_0^1 x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{m+1} .$$

При $n > 0$ проінтегруємо I_n частинами, вибираючи $u = \ln^n x, \quad dv = x^m dx$. Тоді $du = \dfrac{n \ln^{n-1} x\, dx}{x}$, $v = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$. Отримаємо:

$$I_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x \Bigg|_{\varepsilon}^{1} - \frac{n}{m+1} \int_{\varepsilon}^{1} x^m \ln^{n-1} x\, dx \right) = -\frac{1}{m+1} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^n \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} - \frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Обчислимо границю за правилом Лопіталя. При першому застосування цього правила отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^n \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\text{правило Лопіталя} \right] \overset{?}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{n \ln^{n-1} \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}}{(-m-1)\varepsilon^{-m-2}} = -\frac{n}{m+1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^{n-1} \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}}.$$

Якщо $n > 1$, то виникає потреба в повторному застосуванні правила Лопіталя:

$$-\frac{n}{m+1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^{n-1} \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\text{правило Лопіталя} \right] \overset{?}{=} \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^{n-2} \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}}.$$

Правило Лопіталя застосовується загалом n разів. При останньому його застосуванні одержимо:

$$\frac{n(n-1)}{(m+1)^2} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln^{n-2} \varepsilon}{\varepsilon^{-m-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \left[\text{правило Лопіталя} \right] \overset{?}{=} \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^n} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^{-m-1}} = 0.$$

Отже, маємо:

$$I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

Остання рівність визначає рекурентну формулу, за допомогою якої інтеграл I_n приводиться до I_0 при довільному $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = -\frac{n}{m+1} I_{n-1} = \cdots = \frac{\left(-1\right)^n n!}{\left(m+1\right)^n} I_0 = \frac{\left(-1\right)^n n!}{\left(m+1\right)^{n+1}}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.185 [**1**]. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$.

Розв'язання. Крім того, що інтеграл обчислюється на нескінченному проміжку, підінтегральна функція є необмеженою в околі нижньої межі інтегрування – точки $x=0$. Розіб'ємо проміжок інтегрування на два проміжки – $(0;\pi)$ та $(\pi;+\infty)$. Маємо:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx=\int_0^{\pi}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx+\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx=I_1+I_2.$$

На першому з цих проміжків інтеграл є невласним інтегралом другого роду, на другому проміжку – невласним інтегралом першого роду. Подамо підінтегральну функцію у вигляді:

$$f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=d\left(\frac{\sin x}{x}\right),$$

тоді

$$I_1=\int_0^{\pi}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx=\int_0^{\pi}d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi}d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{\pi}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}=-1.$$

Таким чином, інтеграл I_1 є збіжним, а його значення $I_1=-1$. Знайдемо інтеграл I_2:

$$I_2=\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{\pi}^{b}d\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\pi}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\frac{\sin b}{b}=0.$$

Ми отримали, що інтеграли I_1 та I_2 є збіжними, тобто збіжним є також інтеграл $I=I_1+I_2$. ■

Приклад 3.186. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^4-2x^2-5}{x^6+4x^3+9}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2-5}{x^6+4x^3+9}$ є неперервною на всьому проміжку інтегрування $[0;+\infty)$, тому маємо невласний інтеграл першого роду. Оскільки $f(x)$ є раціональною функцією, то її первісна може бути поданою у вигляді елементарної функції. Проте, оскільки задача обчислення заданого інтеграла не ставиться, то замість знаходження первісної з наступним обчисленням її границі на нескінченності, обмежимося використанням ознаки порівняння для встановлення збіжності чи розбіжності цього інтеграла.

Різниця між степенями многочленів у знаменнику та чисельнику підінтегрального виразу дорівнює 2, тому в якості еталонного інтеграла для порівняння розглянемо $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, що є збіжним. Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = 1 = \text{const} \neq 0$, то інтеграл I також є збіжним. ■

Приклад 3.187. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + x^3}}$ є необмеженою на нижній межі інтегрування – точці $x = 0$, тому для дослідження інтеграла на збіжність подамо його у вигляді суми двох інтегралів:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}} = I_1 + I_2,\ I_1 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}},\ I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}.$$

Для дослідження кожного з інтегралів I_1 та I_2 використаємо ознаку порівняння. Підінтегральна функція в I_1 при $x \to 0+$ є нескінченно великою, еквівалентною $x^{-\frac{1}{2}}$, тому, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, інтеграл I_1 є збіжним. У інтегралі I_2 підінтегральна функція при $x \to +\infty$ – нескінченно мала, еквівалентна $x^{-\frac{3}{2}}$, звідки випливає, що цей інтеграл також є збіжним. Оскільки I_1 та I_2 є збіжними інтегралами, то їх сума також є збіжним інтегралом. ■

При дослідженні на умовну збіжність невласних інтегралів від функцій, що змінюють знак на проміжку інтегрування нескінченне число разів доцільно використовувати ознаку Діріхле-Абеля, (*теорема 1.35*).

Приклад 3.188. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. Спочатку подамо заданий інтеграл у вигляді

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{1} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx = I_1 + I_2 .$$

Перший інтеграл $I_1 = \int\limits_0^{1} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx$ є визначеним інтегралом від неперервної функції, тому він приймає скінченне значення. Тепер дослідимо другий інтеграл на збіжність.

Перевіримо виконання умов ознаки Діріхле-Абеля для інтеграла $I_2 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{x\cos x}{1+x^2}dx$:

1) функція $f(x) = \cos x$ неперервна на $[1; +\infty)$, її первісна $F(x) = \int\limits_1^{x} \cos t dt = \sin x - \sin 1$ є обмеженою на $[1; +\infty)$;

2) функція $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ є неперервною, а також незростаючою на $[1; +\infty)$, оскільки $g'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \le 0$ на $[1; +\infty)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тому, за ознакою Діріхле-Абеля, інтеграл I_2 є збіжним.

Для дослідження інтеграла I_2 на абсолютну збіжність застосуємо оцінку $|\cos x| \ge \cos^2 x$. Маємо:

$$\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right| \ge \frac{\cos^2 x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} .$$

Таким чином, отримуємо:

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|dx \geq \int_1^{+\infty}\frac{x\cos 2xdx}{2\left(1+x^2\right)}+\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{2\left(1+x^2\right)}=I_{2,1}+I_{2,2}\ .$$

Збіжність інтеграла $I_{2,1}=\int_1^{+\infty}\frac{x\cos 2xdx}{2\left(1+x^2\right)}$ доводиться аналогічно розглянутому вище інтегралу I_2. Інтеграл $I_{2,2}=\int_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{2\left(1+x^2\right)}$ є розбіжним за частинною ознакою порівняння ($\lambda=1$), тому інтеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|dx$ є розбіжним, а інтеграл I_2 збігається умовно, а разом із ним умовно збігається й цей інтеграл. ■

Приклад 3.189. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральна функція $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}$ є необмеженою в околі лівої межі інтегрування $x=0$, то для дослідження заданого інтеграла на збіжність подамо його у вигляді суми двох невласних інтегралів:

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx=\int_0^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}dx=I_1+I_2\ .$$

Оскільки при $x\to 0+$ функція $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}$ є нескінченно великою, еквівалентною $\frac{1}{\sqrt{x}}$, то інтеграл I_1, за частинною ознакою порівняння в граничній формі, є абсолютно збіжним (тут підінтегральна функція є додатною на проміжку інтегрування $\left[0;1\right]$). Оскільки має місце оцінка $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x^3+x^5}}$, а функція в правій частині цієї нерівності еквівалентна

$\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$, то за частинною ознакою порівняння інтеграл I_2 є абсолютно збіжним. Тому сума інтегралів I_1 та I_2 теж є абсолютно збіжним інтегралом. ■

Приклад 3.190. Дослідити на збіжність інтеграл $I = \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{\frac{3}{2}}} dx$.

Розв'язання. Здійснимо заміну під знаком інтеграла $\frac{1}{x} = t, dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Тоді невласний інтеграл другого роду перетвориться в невласний інтеграл першого роду на проміжку $[1; +\infty)$, а саме:

$$I = -\int_{+\infty}^{1} \frac{\cos t}{t^{-\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dt}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}} dt .$$

Дослідимо спочатку на звичайну збіжність. Покладемо $f(t) = \cos t$, $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$. Отримаємо:

1) функція $f(t)$ – неперервна на $[1, +\infty)$, а її первісна $F(t) = \int_1^t \cos y \, dy = \sin t - \sin 1$ – обмежена на $[1, +\infty)$;

2) $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} = 0$;

3) функція $g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ є неперервною, а також незростаючою на $[1, +\infty)$.

Таким чином, за ознакою Діріхле-Абеля інтеграл I збігається.

Дослідимо цей інтеграл на абсолютну збіжність. Застосуємо оцінку

$$\left| \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}} \right| \geq \frac{\cos^2 t}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{1 + \cos 2t}{2t^{\frac{1}{2}}},$$

з якої випливає, що інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\left|\frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}}}\right|dt$ є розбіжним, оскільки інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\cos 2t}{2t^{\frac{1}{2}}}dt$ збігається, а інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}}$ розбігається. Отже, інтеграл I збігається умовно. ■

Приклад 3.191. Дослідити на збіжність інтеграл $I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Розв'язання. Спочатку подамо інтеграл у вигляді

$$I=\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_{1}^{e}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx=I_1+I_2 .$$

Перший інтеграл $I_1=\int\limits_{1}^{e}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ є визначеним інтегралом від неперервної функції, тому він набуває скінченного значення. Тепер дослідимо другий інтеграл на збіжність.

Для дослідження інтеграла $I_2=\int\limits_{e}^{+\infty}\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ на збіжність застосуємо ознаку Діріхле-Абеля. Функція $f(x)=\sin x$ неперервна на $\left[e;+\infty\right)$, її первісна $F\left(x\right)=\int\limits_{e}^{x}\sin t\,dt=\cos e-\cos x$ є обмеженою на $\left[e;+\infty\right)$. Розглянемо функцію $g\left(x\right)=\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$. Оскільки $0<\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}<\frac{\ln x}{x}$ на проміжку інтегрування, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, то $g\left(x\right)$ є нескінченно малою при $x\to+\infty$. Дослідимо $g\left(x\right)$ на монотонність за допомогою похідної:

$$g'\left(x\right)=\frac{1-x^2\left(\ln x-1\right)}{x\left(x^2+1\right)^{3/2}}\le 0,\quad x\in[e;+\infty) .$$

Таким чином, функція $g(x)$ не зростає на проміжку $[e;+\infty)$. Умови Діріхле-Абеля виконуються, тому інтеграл I_2 є збіжним.

Здійснимо дослідження інтеграла I_2 на абсолютну збіжність. Для цього використаємо оцінки:

$$\left|\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\right|\geq\frac{\ln x\cdot\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}}-\frac{\ln x\cdot\cos 2x}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

Інтеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln x\cdot\cos 2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$ збігається аналогічно розглянутому вище інтегралу I_2. Має місце оцінка:

$$\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}}\geq\frac{1}{4x},\ x\geq e.$$

Невласний інтеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{1}{4x}dx$ розбігається, а тому розбігається й інтеграл $\int\limits_e^{+\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2+1}}dx$ (за ознакою порівняння).

Отже, інтеграл $\int\limits_e^{+\infty}\left|\frac{\sin x\cdot\ln x}{\sqrt{x^2+1}}\right|dx$ розбігається, а інтеграл I_2 збігається умовно, таким чином, умовно збігається й заданий інтеграл. ■

Для розв'язання наступного прикладу використаємо означення головного значення невласного інтеграла за Коші (*означення 1.51 і 1.52*).

Приклад 3.192. Знайти головне значення інтеграла за Коші:

а) $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+5}dx$; **б)** $I=\int\limits_{0,5}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Розв'язання. а) Знайдемо первісну підінтегральної функції:

$$\int\frac{x}{x^2-2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2-2x+5\right)}{x^2-2x+5}+\int\frac{dx}{(x-1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-2x+5\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C\ .$$

Тоді

$$I=\text{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2-2x+5}dx=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}\frac{xdx}{x^2-2x+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-2x+5\right)+\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}\right]\Bigg|_{-M}^{M}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\ln\frac{M^2-2M+5}{M^2+2M+5}+\frac{1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{M-1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{-M-1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln 1+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

б) Первісна підінтегральної функції має вигляд:

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C\ ,$$

тому

$$I=\text{V.p.}\int_{0,5}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{0,5}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}\right]=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\left|\ln x\right|\Big|_{0,5}^{1-\varepsilon}+\ln\left|\ln x\right|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\left|\left(\ln\left(1-\varepsilon\right)\right)\right|-\ln\ln 2+\ln\ln 2-\ln\left|\left(\ln\left(1+\varepsilon\right)\right)\right|\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln\left(1-\varepsilon\right)}{\ln\left(1+\varepsilon\right)}\right|=\ln 1=0.\ \blacksquare$$

§ 6. Функції обмеженої варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса

1. Функції обмеженої варіації

Приклад 3.193. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0;1]$, що має 3 точки розриву: $x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{4}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\frac{1}{4};\\ x+\frac{1}{4}, & \frac{1}{4}\le x<\frac{1}{2};\\ x+\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{4};\\ x+\frac{3}{4}, & \frac{3}{4}\le x\le 1. \end{cases}$$

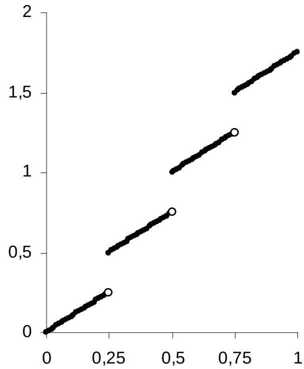


Рис. 3.23

Графік функції зображено на рис.3.23.

Доведемо зростання функції.

Нехай $x_1<x_2$. Розглянемо $f(x_2)-f(x_1)$. Якщо x_1 і x_2 належать одному із проміжків $\left[0;\frac{1}{4}\right)$ або $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, або $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, або $\left[\frac{3}{4};1\right]$, то $f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1>0$. Якщо x_1 і x_2 належать різним проміжкам, то $f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1+C$, де C може приймати значення $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ або $\frac{3}{4}$ в залежності від того, якій саме парі проміжків належать точки x_1 і x_2. У будь-якому із зазначених випадків $f(x_2)-f(x_1)>0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на $[0;1]$. ■

Приклад 3.194. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0;1]$, що має n точок розриву.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на $n+1$ рівних частин точками $\left\{\frac{k}{n+1}\right\}_{k=1}^{n}$. Оберемо ці точки як точки розриву функції. Шуканою є функція вигляду

$$f(x) = x + \frac{k}{n+1},\ \text{якщо}\ \frac{k}{n+1} \le x < \frac{k+1}{n+1},\ k = 0,1,2,...,n; \quad f(1) = 1 + \frac{n}{n+1}.$$

Доведення монотонності здійснюється аналогічно прикладу 3.193. ■

Приклад 3.195. Побудувати монотонну функцію на відрізку $[0;1]$, що має зчисленну множину точок розриву.

Розв'язання. Оберемо точки $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ як точки розриву. Шукана функція має вигляд

$$f(x) = \frac{x}{2^n},\ \text{якщо}\ \frac{1}{2^n} < x \le \frac{1}{2^{n-1}},\ n \in \mathbb{N}; \quad f(0) = 0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0 = f(0)$, то в точці $x = 0$ немає розриву. Графік функції зображено на рис. 3.24.

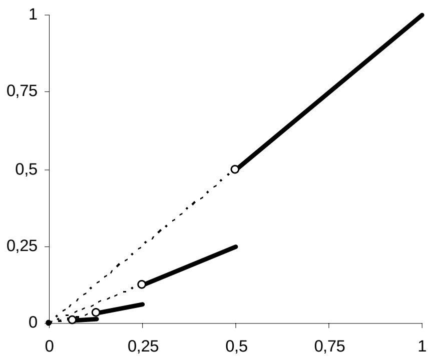


Рис. 3.24.

Доведемо зростання функції. Нехай $x_1 < x_2$. Якщо x_1 і x_2 належать одному з проміжків $\left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right]$ $(n \in \mathbb{N})$, то $f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{2^n} > 0$. Якщо x_1

і x_2 належать різним проміжкам, то меншому аргументу буде відповідати таке значення функції, знаменник якого має більший показник степеня двійки, тобто $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{2^{k-1}}-\frac{x_1}{2^{k+m-1}}$, де $k, m \in \mathbb{N}$. Тут $x_2 > x_1 \geq 0 \wedge 2^{k-1} < 2^{k+m-1}$ ($k, m \in \mathbb{N}$), тому $f(x_2)-f(x_1)>0$. У будь-якому із зазначених випадків $f(x_2)-f(x_1)>0$. Крім того, помітимо, що $f(0)=0$, а $f(x)>0 \forall x>0$. Отже, функція $f(x)$ зростає на $[0;1]$.■

Приклад 3.196. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x=0, \\ x^2\cos\frac{\pi}{x}, \text{ при } x\neq 0 \end{cases}$$

має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Обчислимо похідну цієї функції в кожній точці відрізка $[0;1]$. Нехай спочатку $x\in(0;1]$, тоді

$$f'(x)=2x\cdot\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}.$$

В точці $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cos\frac{\pi}{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\Delta x}_{\text{н.м.ф.}}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{\Delta x}}_{\text{обм.}}=0\cdot$$

Тоді

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cdot\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}, \text{ при } x\neq 0, \\ 0, \text{ при } x=0. \end{cases}$$

На $(0;1]$ похідна обмежена:

$$|f'(x)|=\left|2x\cos\frac{\pi}{x}+\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq\left|2x\cos\frac{\pi}{x}\right|+\left|\pi\sin\frac{\pi}{x}\right|\leq 2+\pi\text{,}$$

в точці $x=0$

$$|f'(0)|=0\leq 2+\pi.$$

Отже, $\forall x \in [0,1]$ $|f'(x)| \le 2+\pi$, тому похідна обмежена на $[0;1]$, звідки випливає обмеженість її варіації (*наслідок 1.12*). ■

Приклад 3.197. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{при} \quad x \ne 0 \end{cases}$$

має необмежену варіацію на відрізку $[0;1]$.

Розв'язання. Задана функція є необмеженою, оскільки вона є нескінченно великою в точці $x = 0$: $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Будь-яка необмежена функція має необмежену варіацію (*необхідна умова обмеженості варіації*). ■

Приклад 3.198 [38]. Довести, що функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x = 0, \\ x \sin\dfrac{1}{x}, & \text{при} \quad x \ne 0 \end{cases}$$

має необмежену варіацію на відрізку $\left[0;\dfrac{2}{\pi}\right]$.

Розв'язання. Нехай k – довільне натуральне число. Розглянемо розбиття відрізку $\left[0;\dfrac{2}{\pi}\right]$ точками

$$R_k^*:\ 0 < \frac{2}{\pi(2k+1)} < \frac{2}{\pi(2k-1)} < \ldots < \frac{2}{3\pi} < \frac{2}{\pi}$$

на $k+1$ відрізок і утворимо суми σ_k

$$\sigma_k = \left(\frac{2}{\pi(2k+1)} - 0\right) + \left(\frac{2}{\pi(2k+1)} + \frac{2}{\pi(2k-1)}\right) + \left(\frac{2}{\pi(2k-1)} + \frac{2}{\pi(2k-3)}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{2}{5\pi} + \frac{2}{3\pi}\right) + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots + \frac{2}{2k+1}\right].$$

Послідовність $\left\{u_k = \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{2k+1}\right\}$ не є фундаментальною, оскільки для неї не виконується твердження $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}:\forall k\geq k_0\ \forall p\in\mathbb{N}\ \left|u_{k+p}-u_k\right|<\varepsilon$.

Дійсно, для $\varepsilon=\frac{1}{5}$, $\forall k\in\mathbb{N}$ і для $p=k$ маємо:

$$u_{k+p}-u_k=u_{2k}-u_k=\frac{1}{2k+3}+\frac{1}{2k+5}+...+\frac{1}{4k+1}\geq k\cdot\frac{1}{4k+1}\geq\frac{1}{5}=\varepsilon .$$

Отже, послідовність $\{u_k\}$ розбігається (за критерієм Коші збіжності послідовності [**3**, с. 116]). Оскільки вона зростає та її члени додатні, то $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=\infty$.

Таким чином,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V(f,R)\geq\sup_k V(f,R_k^*)=\sup_k\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+...+\frac{2}{2k+1}\right)=\infty . \ \blacksquare$$

Приклад 3.199. Знайти варіацію функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$:

а) $f\left(x\right)=\operatorname{sgn}x$, $[a;b]=\left[-1;1\right]$;

б) $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 5, & \text{при} \quad x=1,\\ -x+3, & \text{при} \quad x\in(1;2],\end{cases}$ $\quad [a;b]=\left[0;2\right]$.

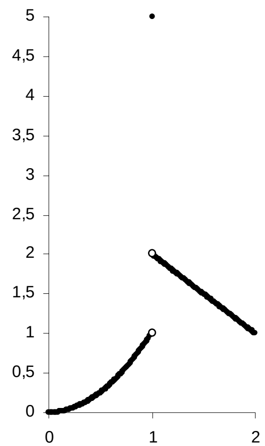


Рис. 3.25.

Розв'язання. а) На відрізку $\left[-1;1\right]$ функція $f\left(x\right)=\operatorname{sgn}x$ зростає нестрого, тому

$$\overset{1}{\underset{-1}{V}}\left(f\right)=f(1)-f(-1)=1-(-1)=2 .$$

б) Графік функції зображено на рис. 3.25. Розіб'ємо відрізок $\left[0;2\right]$ на два відрізки $[0;1]$ і $[1;2]$. На відрізку $[0;1]$ функція зростає, а на відрізку $[1;2]$ – спадає, тому

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}f=f(1)-f(0)=5-0=5 ,$$

$$\overset{2}{\underset{1}{V}}\left(f\right)=f(1)-f(2)=5-1=4 ,$$

звідки в силу адитивності повної варіації

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(f)=\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)+\overset{2}{\underset{1}{V}}(f)=5+4=9\,.\quad\blacksquare$$

Приклад 3.200. Нехай функція $f(x)$ на півінтервалі $[a;b)$ зростає, а в точці b набуває значення $f(b)$ й границя $\exists f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ скінченна. Довести, що

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left[f(b-0)-f(a)\right]+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Доведення. Розіб’ємо відрізок $[a;\ b]$ точками $a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$. Тоді

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_1)-f(x_{i-1})\right|=f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+...+$$

$$+f(x_{n-1})-f(x_{n-2})+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=f(x_{n-1})-f(x_0)+$$

$$+\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=f(x_{n-1})-f(a)+\left|f(b)-f(x_{n-1})\right|;$$

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_R V=\lim_{x_{n-1}\to b-0}f(x_{n-1})-f(a)+\left|f(b)-\lim_{x_{n-1}\to b-0}f(x_{n-1})\right|=$$

$$=\left[f(b-0)-f(a)\right]+\left|f(b)-f(b-0)\right|.\quad\blacksquare$$

Приклад 3.201. Нехай функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ монотонна, а в точках a і b набуває значення $f(a)$ і $f(b)$, а також $\exists f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ і $\exists f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ скінченні. Довести, що

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left|f(a+0)-f(a)\right|+\left|f(b-0)-f(a+0)\right|+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Доведення. Розіб’ємо відрізок $[a;b]$ на два відрізки $[a;c]$ і $[c;b]$ $(a<c<b)$, тоді $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$. На кожному з двох нових відрізків функція задовольняє умови, аналогічним попередньому прикладу, тому

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)=\left|f(a+0)-f(a)\right|+\left|f(c)-f(a+0)\right|+$$

$$+\left|f(b-0)-f(c)\right|+\left|f(b)-f(b-0)\right|.$$

Внаслідок монотонності функції обидва модулі в сумі $\left|f(c)-f(a+0)\right|+\left|f(b-0)-f(c)\right|$ відкриваються з однаковими знаками, тому ця сума дорівнює $\left|f(b-0)-f(a+0)\right|$. Звідки і отримаємо потрібну формулу. ■

Приклад 3.202. Нехай функція $f(x)$ монотонна на кожному із інтервалів $(c_0,c_1),(c_1,c_2),...,(c_{m-1},c_m)$, де

$$a=c_0<c_1<c_2<...<c_{m-1}<c_m=b$$

Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sum_{k=1}^{m}\Big[\left|f(c_{k-1}+0)-f(c_{k-1})\right|+\left|f(c_k-0)-f(c_{k-1}+0)\right|+\left|f(c_k)-f(c_k-0)\right|\Big]. \quad (3.7)$$

Якщо на зазначених інтервалах функція стала , то

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\left|f(c_0+0)-f(c_0)\right|+\sum_{k=1}^{m-1}\Big[\left|f(c_k+0)-f(c_k)\right|+\left|f(c_k)-f(c_k-0)\right|\Big]+$$

$$+\left|f(c_m)-f(c_m-0)\right|. \quad (3.8)$$

Розв'язання. Виписані формули є наслідками попереднього прикладу. (✍Виведення здійснити самостійно**!)** ■

Приклад 3.203 [38]. Обчислити варіацію функції

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x=0,\\ 1-x, & \text{при } 0<x<1,\\ 5, & \text{при } x=1\end{cases}$$

на відрізку [0;1].

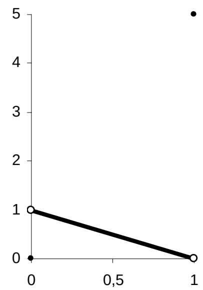


Рис.3.26.

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 3.26. Застосуємо формулу (3.7):

$$a=c_0=0, b=c_1=1,$$

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=\left|f(c_0+0)-f(c_0)\right|+\left|f(c_1-0)-f(c_0+0)\right|+$$

$$+\left|f\left(c_1\right)-f\left(c_1-0\right)\right|=|1-0|+|0-1|+|5-0|=7. \blacksquare$$

Приклад 3.204. Обчислити варіацію функції

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ 5, & \text{при} \quad x=1, \\ x+3, & \text{при} \quad x\in(1;2] \end{cases}$$

на відрізку $\left[0;2\right]$.

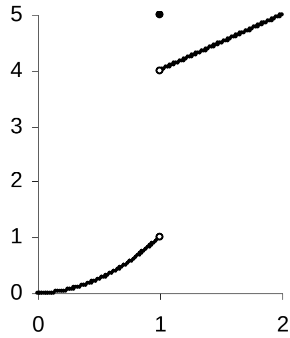


Рис. 3.27.

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 3.27. За формулою (3.7)

$$a=c_0=0, c_1=1, b=c_2=2;$$

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}\left(f\right)=\left|f\left(c_0+0\right)-f\left(c_0\right)\right|+$$

$$+\left|f\left(c_1-0\right)-f\left(c_0+0\right)\right|+\left|f\left(c_1\right)-f\left(c_1-0\right)\right|+$$

$$+\left|f\left(c_1+0\right)-f\left(c_1\right)\right|+\left|f\left(c_2-0\right)-f\left(c_1+0\right)\right|+$$

$$+\left|f\left(c_2\right)-f\left(c_2-0\right)\right|=0+1+4+1+1+0=7. \blacksquare$$

Приклад 3.205. Знайти варіацію функції

$$f\left(x\right)=\begin{cases} 1, \text{якщо} & x\neq 1,2,3, \\ 5, \text{якщо} & x=1,2,3 \end{cases}$$

на відрізку $[0;4]$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (3.8):

$$\overset{4}{\underset{0}{V}}\left(f\right)=\left|f\left(1\right)-f\left(1-0\right)\right|+\left|f\left(1+0\right)-f\left(1\right)\right|+\left|f\left(2-0\right)-f\left(2\right)\right|+$$

$$+\left|f\left(2\right)-f\left(2+0\right)\right|+\left|f\left(3-0\right)-f\left(3\right)\right|+\left|f\left(3\right)-f\left(3+0\right)\right|=$$

$$=4+4+4+4+4+4=24. \blacksquare$$

Приклад 3.206. Знайти варіацію функцій

$$f(x)=\left[x^2\right] \text{ і } g(x)=\left\{x^2\right\}$$

на відрізку $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t; $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Усі можливі точки розриву знаходимо, розв'язуючи рівняння $x^2 = n,\ n \in \mathbb{Z}$ в межах заданого відрізка $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$:

$$x^2 = n, \quad n = 0,1,2,3,4;$$
$$x = \pm\sqrt{n}, \quad n = 0,1,2,3,4;$$
$$x = -\sqrt{2},-1,0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}.$$

Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 3.28. Точка $x = 0$ є точкою неперервності цієї функції.

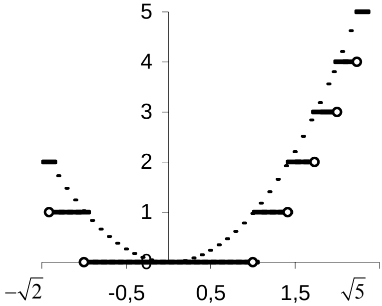


Рис. 3.28.

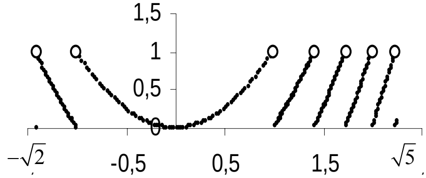


Рис. 3.29.

Розіб'ємо відрізок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{5}\right]$ на два відрізки $\left[-\sqrt{2};0\right]$ і $\left[0,\sqrt{5}\right]$, на кожному з яких функція $f(x)$ монотонна, тому

$$\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{0}(f) = 2 - 0 = 2; \quad \mathop{V}_{0}^{\sqrt{5}}(f) = 5 - 0 = 5;$$

$$\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}(f) = \mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{0}(f) + \mathop{V}_{0}^{\sqrt{5}}(f) = 2 + 5 = 7.$$

Графік функції $g(x)$ зображено на рис. 3.29. Для обчислення варіації цієї функції застосуємо формулу (3.7):

$$\mathop{V}_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}(g) = \left|g\left(-\sqrt{2}+0\right) - g\left(-\sqrt{2}\right)\right| + \left|g(-1-0) - g\left(-\sqrt{2}+0\right)\right| + \underbrace{\left|g(-1-0) - g(-1)\right|}_{=0} +$$

$$+\left|g(-1+0) - g(-1)\right| + \left|g(0) - g(-1+0)\right| + \left|g(1-0) - g(0)\right| + \left|g(1) - g(1-0)\right| +$$

$$+\underbrace{\left|g(1+0)-g(1)\right|}_{=0}+\left|g\left(\sqrt{2}-0\right)-g(1)\right|+\left|g\left(\sqrt{2}\right)-g\left(\sqrt{2}-0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\sqrt{3}-0\right)-g\left(\sqrt{2}\right)\right|+\left|g\left(\sqrt{3}\right)-g\left(\sqrt{3}-0\right)\right|+\left|g(2-0)-g\left(\sqrt{3}\right)\right|+\left|g(2)-g(2-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\sqrt{5}-0\right)-g(2)\right|+\left|g\left(\sqrt{5}\right)-g\left(\sqrt{5}-0\right)\right|=14. \quad \blacksquare$$

Приклад 3.207. Знайти варіацію функцій $f(x)=[\ln x]$ і $g(x)=\{\ln x\}$ на відрізку $[0,1;10]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Спочатку знайдемо значення функції $\ln x$ на кінцях відрізка:

$$\ln 0,1=-\ln 10\approx -2,3;\ \ \ln 10\approx 2,3\,.$$

Можливі точки розриву в межах заданого відрізка знаходимо для цілих n, що змінюються від цілої частини $[-2,3]=-3$ до $[2,3]=2$:

$$\ln x=n,\quad n=-3;-2;-1;0;1;2;$$

$$x=\frac{1}{e^2};\frac{1}{e};0;e;e^2\in[0,1;10];\quad x=\frac{1}{e^3}\notin[0,1;10].$$

Графіки функцій зображено на рис. 3.30 і рис. 3.31.

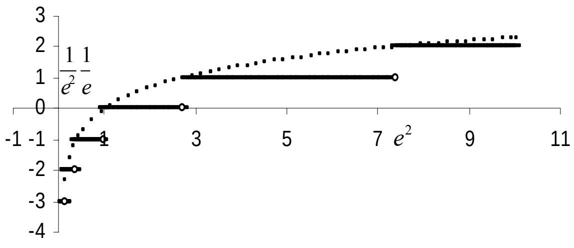


Рис. 3.30.

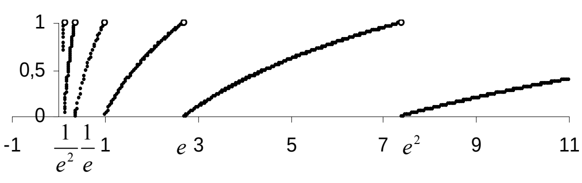


Рис. 3.31.

Функція $f(x)$ зростає на відрізку $[0,1;10]$, тому

$$\mathop{V}_{0,1}^{10}(f)=[\ln 10]-[\ln 0,1]=2-(-3)=5\,.$$

Зважаючи на те, що

$$\{\ln 0,1\}=\{-\ln 10\}=-\ln 10-[-\ln 10]=-\ln 10+3,$$

$$\{\ln 10\}=\ln 10-[\ln 10]=\ln 10-2,$$

за формулою (3.7) отримаємо

$$\mathop{V}_{0,1}^{10}(g)=\underbrace{\left|g(0,1+0)-g(0,1)\right|}_{=0}+\left|g\left(\frac{1}{e^2}-0\right)-g(0,1)\right|+\left|g\left(\frac{1}{e^2}\right)-g\left(\frac{1}{e^2}-0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{e}-0\right)-g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{e}\right)-g\left(\frac{1}{e}-0\right)\right|+\left|g(1-0)-g\left(\frac{1}{e}\right)\right|+\left|g(1)-g(1-0)\right|+$$

$$+\left|g(e-0)-g(1)\right|+\left|g(e)-g(e-0)\right|+\left|g\left(e^2-0\right)-g(e)\right|+\left|g\left(e^2\right)-g\left(e^2-0\right)\right|+$$

$$+\left|g(10)-g\left(e^2\right)\right|=\left|1-(3-\ln 10)\right|+9+\left|(\ln 10-2)-0\right|=2\ln 10+5.\quad\blacksquare$$

Приклад 3.208. Знайти варіацію функцій

$$f(x)=\left[\sin\pi x\right]\ \text{ і }\ g(x)=\left\{\sin\pi x\right\}$$

на відрізку $[-1;5]$ (тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. Можливі точки розриву в межах заданого відрізка:

$$\sin\pi x=n,\quad n=-1,0,1,$$

$$\begin{array}{ccc}
\sin\pi x=-1, & \sin\pi x=0, & \sin\pi x=1,\\
x=-\dfrac{1}{2}+2k, & x=m, & x=\dfrac{1}{2}+2l,\\
k\in\mathbb{Z}, & m\in\mathbb{Z}, & l\in\mathbb{Z};
\end{array}$$

$$x=-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\frac{9}{2},5.$$

Графіки функцій зображено на рис. 3.32 і рис. 3.33.

Застосовуємо формулу (3.8):

$$\mathop{V}_{-1}^{5}(f)=\left|f(-1+0)-f(-1)\right|+\left|f(0)-f(0-0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2}+0\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+$$

$$+\left|f(1+0)-f(1)\right|+\left|f(2)-f(2-0)\right|+\left|f\left(\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{5}{2}+0\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)\right|+$$

$$+\left|f(3+0)-f(3)\right|+\left|f(4)-f(4-0)\right|+\left|f\left(\frac{9}{2}\right)-f\left(\frac{9}{2}-0\right)\right|+\left|f\left(\frac{9}{2}+0\right)-f\left(\frac{9}{2}\right)\right|=12.$$

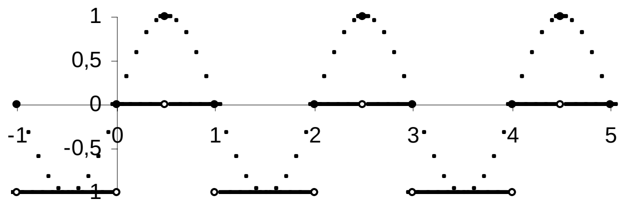


Рис. 3.32.

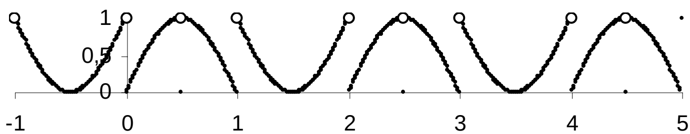


Рис. 3.33.

А тепер – формулу (3.7):

$$\mathop{V}_{-1}^{5}(g)=|g(-1+0)-g(-1)|+\left|g\left(-\frac{1}{2}\right)-g(-1+0)\right|+\left|g(0-0)-g\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g(0)-g(0-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{2}-0\right)-g(0)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}+0\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g(1)-g\left(\frac{1}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{1}{2}-0\right)-g(0)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{1}{2}+0\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)\right|+\left|g(1)-g\left(\frac{1}{2}+0\right)\right|+$$

$$+|g(1)-g(1+0)|+\left|g\left(\frac{3}{2}\right)-g(1+0)\right|+\left|g(2-0)-g\left(\frac{3}{2}\right)\right|+|g(2)-g(2-0)|+$$

$$+\left|g\left(\frac{5}{2}-0\right)-g(2)\right|+\left|g\left(\frac{5}{2}\right)-g\left(\frac{5}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{5}{2}+0\right)-g\left(\frac{5}{2}\right)\right|+\left|g(3)-g\left(\frac{5}{2}+0\right)\right|+$$

$$+\left|g(3+0)-g(3)\right|+\left|g\left(\frac{7}{2}\right)-g(3+0)\right|+\left|g(4-0)-g\left(\frac{7}{2}\right)\right|+\left|g(4)-g(4-0)\right|+$$

$$+\left|g\left(\frac{9}{2}-0\right)-g(4)\right|+\left|g\left(\frac{9}{2}\right)-g\left(\frac{9}{2}-0\right)\right|+\left|g\left(\frac{9}{2}+0\right)-g\left(\frac{9}{2}\right)\right|+\left|g(5)-g\left(\frac{9}{2}+0\right)\right|=24. \blacksquare$$

Приклад 3.209 [**38**]. Довести, що характеристична функція $\chi_E(x)$ множини $E\subset[a,b]$, тобто функція вигляду

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & \text{при } x\in E,\\ 0, & \text{при } x\notin E,\end{cases}$$

має обмежену варіацію на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли множина E має лише скінченну кількість межових точок.

Доведення. У випадку, коли E має лише скінченне число межових точок, то $\chi_E(x)$ має обмежену варіацію на $[a;b]$. Дійсно, кожна межова точка множини E може стати точкою розриву її характеристичної функції. Якщо в такій точці розрив I роду, то модуль стрибка дорівнює 1, якщо в точці усувний розрив, то сума модулів правого й лівого стрибків дорівнює 2. Отже,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\chi_E)\le 2K,$$

де K – кількість межових точок множини.

У випадку, коли E має нескінченну множину межових точок, то $\chi_E(x)$ має необмежену варіацію на відрізку $[a;b]$. Дійсно, оберемо довільне натуральне число N і з множини всіх межових точок, що лежать всередині (a,b), розглянемо N точок, розташовуючи їх у порядку зростання:

$$a<x_1<x_2<...<x_N<b.$$

Навколо цих точок побудуємо околи, що попарно не перетинаються, $V(x_1), V(x_2), ..., V(x_N)$ і в кожному із цих околів візьмемо по дві точки $\zeta_i \in E,\ \eta_i \notin E$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\chi_E) \geq \sum_{i=1}^{N} \left|\chi_E(\eta_i) - \chi_E(\zeta_i)\right| = N .$$

Отже, варіація функції $\chi_E(x)$ на відрізку $[a;b]$ більша за будь-яке натуральне число N; таким чином, вона дорівнює нескінченності. ■

Приклад 3.210 [**38**]. **а)** Навести приклад, що показує хибність твердження: «Якщо $|f(x)|$ має обмежену варіацію на $[a;b]$, то і $f(x)$ має обмежену варіацію на цьому відрізку».

б) Довести, що для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції наведене в пункті а) твердження вірне.

Розв'язання. а) Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тоді $|f(x)| = 1\ \forall x$, тому $|f(x)|$ має обмежену варіацію на $[a,b]$ ($\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) = 0$), тоді як $f(x)$ – функція необмеженої варіації на тому ж відрізку. Обґрунтування цього здійснюється аналогічно попередньому прикладу. Дійсно, оберемо довільне натуральне число N і розглянемо N раціональних чисел, розташовуючи їх у порядку зростання:

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_N < b .$$

Навколо цих точок побудуємо околи, що попарно не перетинаються $V(x_1), V(x_2), ..., V(x_N)$ і в кожному із цих околів візьмемо по два ірраціональних числа таких, що $\zeta_i < x_i < \eta_i$. Тоді

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq \sum_{i=1}^{N} \left(\left|f(x_i) - f(\zeta_i)\right| + \left|f(\eta_i) - f(x_i)\right| \right) = 4N .$$

Отже, варіація функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ більша за будь-яке число $4N$; таким чином, вона дорівнює нескінченності.

б) Розглянемо довільне розбиття відрізка $[a;b]$

$$R:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_n = b\,.$$

Позначимо $V(f,R) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$, $V\left(\left|f\right|, R\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\| f(x_k) \right| - \left| f(x_{k-1}) \right\|$.

На тих відрізках розбиття $\left[x_{k-1}; x_k\right]$, на кінцях яких функція $f(x)$ не змінює знак (тобто $f(x_k)\cdot f(x_{k-1}) \geq 0$), модулі приростів функцій $f(x)$ і $\left|f(x)\right|$ однакові, тобто

$$\left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = \left\| f(x_k) \right| - \left| f(x_{k-1}) \right\|.$$

Нехай на кінцях деякого відрізка $\left[x_{k_0-1}; x_{k_0}\right]$ функція $f(x)$ змінює знак (тобто $f(x_{k_0})\cdot f(x_{k_0-1}) < 0$). Тоді, за першою теоремою Больцано-Коші про проходження неперервної функції через нуль при зміні знака [**3**, с. 183-184; **4**, с.168], існує точка $\xi_{k_0} \in \left(x_{k_0-1}; x_{k_0}\right)$, в якій $f\left(\xi_{k_0}\right) = 0$. Порівняємо модулі приростів функцій $f(x)$ і $\left|f(x)\right|$:

$$\left| f(x_{k_0}) - f(x_{k_0-1}) \right| \leq \left| f(x_{k_0}) - f(\xi_{k_0}) \right| + \left| f(\xi_{k_0}) - f(x_{k_0-1}) \right| =$$

$$/\ f(x_{k_0})\cdot f(\xi_{k_0}) \geq 0 \ \text{ і } \ f(\xi_{k_0})\cdot f(x_{k_0-1}) \geq 0\ /$$

$$= \left\| f(x_{k_0}) \right| - \left| f(\xi_{k_0}) \right\| + \left\| f(\xi_{k_0}) \right| - \left| f(x_{k_0-1}) \right\|.$$

Додаючи до розбиття R ті точки ξ_k із відрізків $\left[x_{k-1}; x_k\right]$, для яких $f(x_k)\cdot f(x_{k-1}) < 0$ і $f\left(\xi_k\right) = 0$, і не додаючи жодної точки з відрізків, для яких $f(x_k)\cdot f(x_{k-1}) \geq 0$, отримаємо нове розбиття R'. Для розбиттів R та R' сума модулів приростів функцій $f(x)$ і $\left|f(x)\right|$ відповідно будуть такими, що $V(f,R) \leq V\left(\left|f\right|, R'\right)$. Оскільки $\sup\limits_{R} V\left(\left|f\right|, R\right) = \mathop{V}\limits_{a}^{b}\left(\left|f\right|\right) < \infty$, то $V\left(\left|f\right|, R'\right) \leq \mathop{V}\limits_{a}^{b}\left(\left|f\right|\right)$.

Отже, нерівність $V(f,R) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|)$ виконується для довільного розбиття R. Звідси

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|).$$

Таким чином, функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ має обмежену варіацію. ■

Приклад 3.211 [38]. Довести, що якщо функція $f(x)$ має обмежену варіацію на $[a;b]$, то її абсолютна величина $|f(x)|$ також має обмежену варіацію на цьому відрізку.

Доведення. Це випливає з нерівності $|\alpha-\beta| \ge \big||\alpha|-|\beta|\big|$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Розглянемо розбиття $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ відрізка $[a;b]$, тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \le \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \overset{b}{\underset{a}{V}} f.$$

Після переходу до точної верхньої межі отримаємо

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

Отже, функція $|f(x)|$ має обмежену варіацію на $[a;b]$. ■

Приклад 3.212 [**38**]. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x \in [0;1), \\ 5, & \text{при} \quad x = 1, \\ x+3, & \text{при} \quad x \in (1;2] \end{cases}$$

подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на $[0;2]$.

Розв'язання. Наслідуючи елементи доведення *теореми 1.47*, функцію $f(x)$ подамо у вигляді різниці зростаючих $f(x) = \pi(x) - \varphi(x)$, де, $\pi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \overset{x}{\underset{0}{V}}(f), & x \ne 0, \end{cases}$ $\varphi(x) = \pi(x) - f(x)$. При побудові функції $\pi(x)$ бачимо, що варіація $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ заданої функції $f(x)$ для $x \in [0;1]$ зростає так само, як і функція $f(x)$. При $x=1+h\in(1;2]$ варіація дорівнює $\mathop{V}\limits_0^x(f)=6+h=6+(x-1)=x+5$. Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases}x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 5, & \text{при} \quad x=1,\\ x+5, & \text{при} \quad x\in(1;2],\end{cases}$$

тоді

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\in[0,1],\\ 2, \text{ при } x\in(1;2].\end{cases}$$

На рис. 3.34 зображено графіки усіх трьох функцій. ■

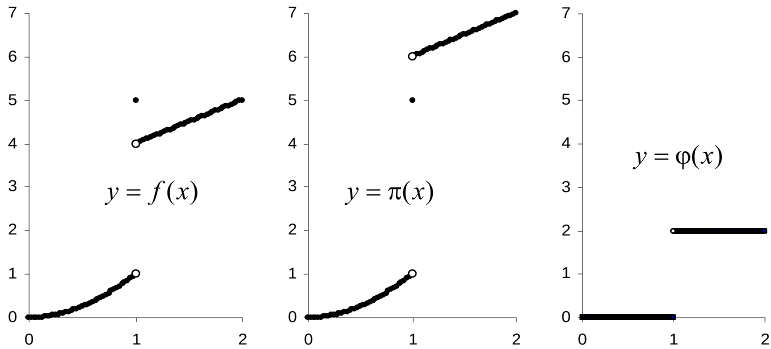


Рис. 3.34.

Приклад 3.213. Функцію

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{при} \quad x\in[0;1),\\ 1, & \text{при} \quad x=1,\\ 3-x, & \text{при} \quad x\in(1;2]\end{cases}$$

подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на $[0;2]$.

Розв'язання. Функцію $f(x)$ подамо у вигляді різниці зростаючих функцій $f(x)=\pi(x)-\varphi(x)$. Якщо $x\in[0,1)$, то $\mathop{V}\limits_0^x(f)$ лінійно зростає від 0 до значень, близьких до 1, тому $\mathop{V}\limits_0^x(f)=x$. Якщо $x=1$, то $\mathop{V}\limits_0^x(f)=2$. Якщо

$x \in (1;2]$, то $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f)$ лінійно зростає від значень, близьких до 3, до значення 4, тому $\overset{x}{\underset{0}{V}}(f) = x + 2$. Отже,

$$\pi(x) = \begin{cases} x, & \text{при} \quad x \in [0;1), \\ 2, & \text{при} \quad x = 1, \\ x+2, & \text{при} \quad x \in (1;2]; \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \pi(x) - f(x) = 2x - 1 .$$

Рекомендуємо читачеві побудувати графіки всіх трьох функцій. ■

Приклад 3.214. Функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0, \\ 1 - x, & \text{при } 0 < x < 1, \\ 5, & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

подати у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[0;1]$.

Розв'язання. В цьому прикладі мова йде про застосування *теореми 1.48*. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, *функція стрибків* визначається співвідношеннями:

$$s_f(a) = 0,$$
$$s_f(x) = f(a+0) - f(a) + \sum_{x_k < x} \left[f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \right] + f(x) - f(x-0),$$

де $\{x_k\}_k \subset (a,b)$ – точки розриву цієї функції.

Побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0,1), \\ 1+5=6, & x = 1. \end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x) = f(x) - s_f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ -x, & x \in (0,1), \\ -1, & x = 1; \end{cases} \quad \varphi(x) = -x$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x) = s_f(x) + \varphi(x)$.

На рис. 3.35 зображено графіки всіх трьох функцій. ■

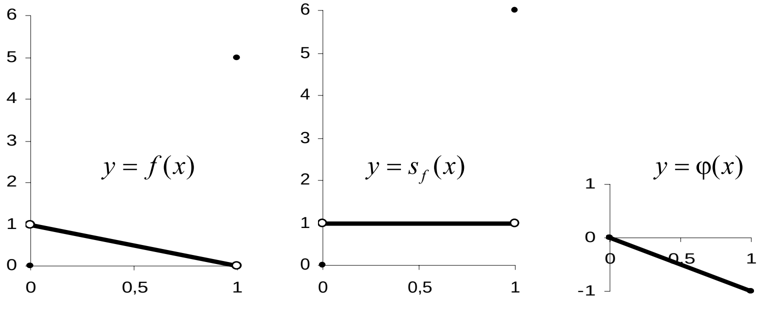


Рис. 3.35.

Приклад 3.215. Функцію $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2, & \text{при} \quad x\in[0;1), \\ 5, & \text{при} \quad x=1, \\ x+3, & \text{при} \quad x\in(1;2] \end{cases}$

подати у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[0;2]$.

Розв'язання. Функція стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0,1), \\ 4, & x=1, \\ 4-1=3, & x\in(1;2]. \end{cases}$$

Неперервна на $[0;2]$ функція:

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1), \\ 1, & x=1, \\ x, & x\in(1;2], \end{cases}=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1], \\ x, & x\in(1;2]. \end{cases}$$

На рис. 3.36 зображено графіки трьох функцій. ■

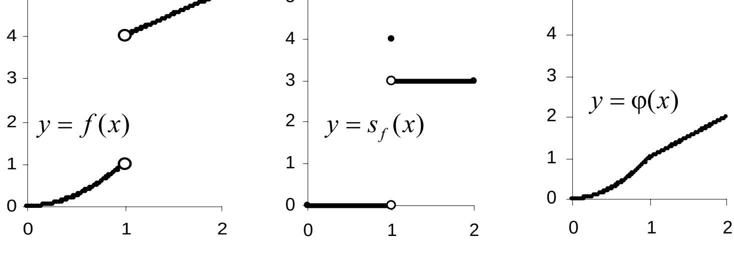


Рис. 3.36.

Приклад 3.216. Функцію

$$f(x)=\begin{cases} x^2, \quad \text{при} \quad x\in(-3;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3), \\ 5, \quad \text{при} \quad x\in\{\pm3;\pm2;\pm1\}, \\ 2-|x-1|, \ \text{при} \quad x\in(-2;-1)\cup(1;2) \end{cases}$$

подати у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції на $[-3;3]$.

Розв'язання. Графік заданої функції див. на рис. 3.37. Шукані функції мають вигляд:

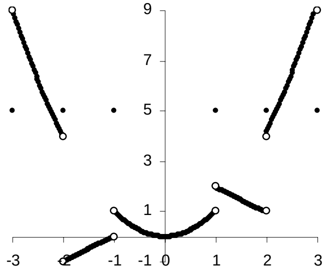


Рис. 3.37.

$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x=-3, \\ 4, & x\in(-3;-2), \\ 4+1=5, & x=-2, \\ 5-6=-1, & x\in(-2;-1), \\ -1+5=4, & x=-1, \\ 4-4=0, & x\in(-1;1), \\ 0+4=4, & x=1, \\ 4-3=1, & x\in(1;2), \\ 1+4=5, & x=2, \\ 5-1=4, & x\in(2;3), \\ 4-4=0, & x=3, \end{cases}$$

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x\in[-3;-2), \\ 3-|x-1|, & x\in[-2;-1), \\ x^2, & x\in[-1;1], \\ 1-|x-1|, & x\in(1;2], \\ x^2-4, & x\in(2;3]. \end{cases}$$

На рис. 3.38 зображено графіки обох шуканих функцій. ■

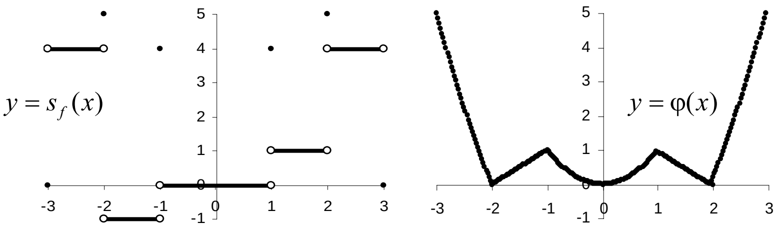


Рис. 3.38.

2. Інтеграл Рімана-Стілтьєса

Приклад 3.217. Обчислити інтеграл Стілтьєса $(S)\int\limits_0^{0,75}\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)}{x+1}$.

Розв'язання. В цьому випадку $f(x)=\frac{1}{x+1}$, $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Функція $f(x)$ – неперервна на $[0;0,75]$, функція $g(x)$ має неперервну, а тому інтегровну на $[0;0,75]$ похідну $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Застосовуємо теорему про зв'язок між інтегралом Стілтьєса і Рімана:

$$(S)\int\limits_0^{0,75}\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)}{(x+1)}=(R)\int\limits_0^{0,75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\left\|\begin{array}{ll} t=\frac{1}{x+1}, & dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ x=\frac{1}{t}-1, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 0,75 \\ \hline t & 1 & 4/7\end{array}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\limits_1^{\frac{4}{7}}\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}}=-\int\limits_{4/7}^{1}\frac{-dt}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+2}}=\int\limits_{4/7}^{1}\frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}}=$$

$$=\int\limits_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{2\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|\Bigg|_{4/7}^{1}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln\left|\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right|-\ln\left|\frac{1}{14}+\frac{5}{7\sqrt{2}}\right|\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{4\sqrt{2}+9}{7}. \quad \blacksquare$$

Приклад 3.218. Обчислити інтеграл Стілтьєса $(S)\int\limits_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)$.

Розв'язання. Формально застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int\limits_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=\left(x^3\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)\Big|_0^a-(S)\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)=$$

$$=-(S)\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right).$$

Розглянемо інтеграл $(S)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)$. Тут $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ – неперервна на $[0,a]$, а функція $g(x)=x^3$ має неперервну похідну на $[0,a]$, тому інтеграл Стілтьєса існує. Отже, формальне застосування формули інтегрування частинами є коректним. Крім того, можна застосувати формулу зв'язку між інтегралами Стілтьєса і Рімана:

$$(S)\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,d\left(x^3\right)=$$

$$=(R)\int_0^a 3x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left\|\begin{matrix} x=a\sin t, \\ dx=a\cos t dt, \\ a^2-x^2=a^2\cos^2 t \end{matrix}\quad \left|\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\left|\begin{matrix} a \\ \pi/2 \end{matrix}\right.\right\|=$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2\cos^2 t}\,a\cos t dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\sin^2 t\cos^2 t dt=3\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt=$$

$$=3\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=3\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi a^4}{16}.$$

Отже, $(S)\int_0^a x^3 d\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=-\dfrac{3\pi a^4}{16}$. ■

Приклад 3.219 [7]**.** Обчислити інтеграли:

а) $(S)\int_{-1}^3 x dg(x)$, де $g(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x=-1, \\ 1, & \text{при } -1<x<2, \\ -1, & \text{при } 2\le x\le 3; \end{cases}$

б) $(S)\int_0^2 x^2 dg(x)$, де $g(x)=\begin{cases} -1, & \text{при } 0\le x<\dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2}, \\ 2, & \text{при } x=\dfrac{3}{2}, \\ -2, & \text{при } \dfrac{3}{2}<x\le 2. \end{cases}$

Розв'язання. а) В цьому прикладі задано кусково-сталу функцію $g(x)$ і неперервну функцію $f(x)=x$ на $[-1;3]$, тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.58).

Функція $g(x)$ має стрибок 1 при $x=-1$ і стрибок –2 при $x=2$, причому $f(-1)=-1,\ f(2)=2$. Тому

$$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = f(-1)\cdot\left[g(-1+0)-g(-1)\right]+f(2)\cdot\left[g(2+0)-g(2-0)\right]=$$

$$=(-1)\cdot 1+2\cdot(-2)=-5.$$

б) За тих же причин, що і в *прикладі 1.30 а)*, застосовуємо формулу (1.58). При $x=\dfrac{1}{2}$ функція $g(x)$ має стрибок 1, а при $x=\dfrac{3}{2}$ її стрибок дорівнює -2 (значення функції $g(x)$ при $x=\dfrac{3}{2}$ не впливає на результат). Маємо:

$$(S)\int_{-0}^{2} x^2 dg(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot(-2)=-\frac{17}{4}. \ \blacksquare$$

Приклад 3.220 [7]**.** Обчислити інтеграли $(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)$ і $(S)\int_{-2}^{2} g(x)df(x)$, де

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=\begin{cases} 1, & -2<x<-1; \\ 2, & x=-2;\ x=-1; \\ 3, & -1<x<0; \\ 0, & x=0;\ x=1;\ x=2; \\ -1, & 0<x<1;\ 1<x<2. \end{cases}$$

Розв'язання. При $x=-2$ функція $g(x)$ має правий стрибок –1, при $x=-1$ її повний стрибок дорівнює 2, при $x=1$ повний стрибок дорівнює 0, а при $x=2$ лівий стрибок дорівнює 1. Застосуємо формулу (1.58)

$$(S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x)=(-2)^2\cdot(-1)+(-1)^2\cdot 2+0+1^2\cdot 0+2^2\cdot 1=2\ ,$$

а тепер – формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int_{-2}^{2} g(x)\,df(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - (S)\int_{-2}^{2} f(x)dg(x) =$$

$$= f(2)g(2) - f(-2)g(-2) - 2 = 2^2\cdot 0 - (-2)^2\cdot 2 - 2 = -10\,. \quad \blacksquare$$

Приклад 3.221 [7]. Обчислити інтеграли:

а) $\int_{-2}^{2} xdg(x)$, **б)** $\int_{-2}^{2} x^2dg(x)$, **в)** $\int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dg(x)$,

де $g(x) = \begin{cases} x+2, & \text{при} -2 \le x \le -1, \\ \quad 2, & \text{при} -1 < x < 0, \\ x^2+3, & \text{при } 0 \le x \le 2. \end{cases}$

Розв'язання. В цьому прикладі задано функцію $g(x)$ так, що $\exists g'(x)$ – інтегровна за Ріманом у всіх точках відрізка $[-2;2]$, окрім двох точок $x=-1$ і $x=0$. Функції $f(x)$ неперервні на цьому відрізку. Тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.59).

Функція $g(x)$ має стрибки, що дорівнюють 1, при $x=-1$ і $x=0$. Похідна цієї функції:

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } -2 \le x < -1, \\ 0, & \text{при } -1 < x < 0, \\ 2x, & \text{при } \ 0 < x \le 2. \end{cases}$$

Тому

а) $\int_{-2}^{2} xdg(x) = \int_{-2}^{-1} xdx + \int_{0}^{2} x\cdot 2xdx + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 = 2\frac{5}{6}$,

б) $\int_{-2}^{2} x^2dg(x) = \int_{-2}^{-1} x^2dx + \int_{0}^{2} x^2\cdot 2xdx + (-1)^2\cdot 1 + 0^2\cdot 1 = 11\frac{1}{3}$,

в) $\int_{-2}^{2} (x^3+1)dg(x) = \int_{-2}^{-1} (x^3+1)dx + \int_{0}^{2} (x^3+1)\cdot 2xdx + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 15\frac{1}{20}$. $\blacksquare$

Приклад 3.222. Обчислити інтеграли

а) $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\{x\}$; **б)** $(S)\int\limits_{-2}^{2} x\, d\{\sin \pi x\}$

(тут $[t]$ – ціла частина дійсного числа t, а $\{t\} = t - [t]$ – дробова частина числа t).

Розв'язання. а) Маємо:

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\{x\} = (S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\left(x - [x]\right) = (S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d(x) - (S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d[x],$$

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx = (R)\int\limits_{-2}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{-2}^{2} = 0.$$

Функція $[x]$ має стрибки, рівні 1, у всіх точках розриву $x = -1, 0, 1, 2$ з відрізку $[-2; 2]$. Застосуємо формулу (1.58)

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d[x] = (-1)^3 \cdot 1 + 0 + 1^3 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 = 8.$$

Звідки $(S)\int\limits_{-2}^{2} x^3 d\{x\} = 0 - 8 = -8$.

б) Маємо

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} xd\{\sin \pi x\} = (S)\int\limits_{-2}^{2} xd(\sin \pi x) - (S)\int\limits_{-2}^{2} xd[\sin \pi x],$$

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} xd(\sin \pi x) = x\sin \pi x\Big|_{-2}^{2} - (S)\int\limits_{-2}^{2} \sin \pi x dx = -(R)\int\limits_{-2}^{2} \sin \pi x dx = 0.$$

На рис. 3.32 зображено графік функції $y = [\sin \pi x]$ на відрізку $[-1; 4]$. Побудуйте самостійно ✍ графік цієї функції на $[-2; 2]$. В точках розриву $x = -\frac{3}{2}$ і $x = \frac{1}{2}$ повний стрибок цієї функції дорівнює 0, в точках $x = \pm 1$ стрибок дорівнює -1, у точці $x = 0$ він дорівнює 1, а в точці $x = 2$ лівий стрибок дорівнює 1. Застосовуючи формулу (1.58), отримаємо

$$(S)\int\limits_{-2}^{2} x\, d[\sin \pi x] = (-1)\cdot(-1) + 0 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 = 2.$$

Звідки $(S)\int\limits_{-2}^{2} x\,d\{\sin\pi x\} = 0-2=-2$. ■

Приклад 3.223. Подати функціонал $F(f)$ інтегралом Стілтьєса $(S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,d(g(x))$ й обчислити повну варіацію $\overset{1}{\underset{-1}{V}}(g)$ функції $g(x)$ на відрізку $[-1;1]$, якщо

а) $F(f)=\int\limits_{-1}^{1} x\,f(x)dx + f(0)+\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$,

б) $F(f)=\int\limits_{-1}^{1} x\,f(x)dx + f(0)-\dfrac{f(-1)+f(1)}{2}$.

Розв'язання. а) Розглядаючи вигляд функціонала й формулу (1.59), можна прийти до висновку: $g'(x)=x$, повний стрибок функції $g(x)$ в точці $x=0$ дорівнює 1, у точках $x=-1$ і $x=1$ відповідно правий і лівий стрибки дорівнюють $\dfrac{1}{2}$.

Оскільки $g'(x)=x$, то $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+C$. Зважаючи на значення стрибків, як функцію $g(x)$ можна обрати таку функцію:

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x=-1; \\ \dfrac{x^2}{2}, & -1<x<0; \\ \dfrac{x^2}{2}+1, & 0\le x<1; \\ 2, & x=1. \end{cases}$$

Графік див. на рис. 3.39.

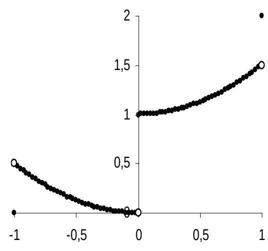


Рис. 3.39.

Тоді $F(f)=(S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)d(g(x))$. Обчислимо повну варіацію $\overset{1}{\underset{-1}{V}}(g)$ функції $g(x)$ на відрізку $[-1;1]$:

$$\overset{2}{\underset{-1}{V}}(g)=|g(-1+0)-g(-1)|+|g(0-0)-g(-1+0)|+$$

$$+|g(0)-g(0+0)|+|g(1-0)-g(0)|+|g(1)-g(1-0)|=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3\,.\ \blacksquare$$

б) Повний стрибок функції $g(x)$ в точці $x=0$ дорівнює 1, у точках $x=-1$ і $x=1$ відповідно правий і лівий стрибки дорівнюють $-\frac{1}{2}$. Оскільки $g'(x)=x$, то $g(x)=\frac{x^2}{2}+C$. Зважаючи на значення стрибків, за функцію $g(x)$ можна обрати таку функцію:

$$g(x)=\begin{cases}1, & x=-1;\\ \dfrac{x^2}{2}, & -1<x<0;\\ \dfrac{x^2}{2}+1, & 0\le x<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

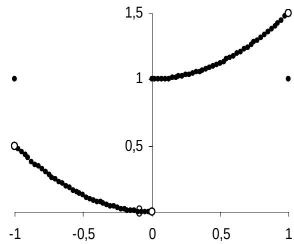


Рис. 3.40.

Графік див. на рис. 3.40.

Тоді $F(f)=(S)\int\limits_{-1}^{1} f(x)d(g(x))$. Варіація $\overset{1}{\underset{-1}{V}}(g)$ функції $g(x)$ на відрізку $[-1;1]$ дорівнює:

$$\overset{1}{\underset{-1}{V}}(g)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3\,.\ \blacksquare$$

Розділ 4. ІНДИВІДУАЛЬНЕ ТИПОВЕ ЗАВДАННЯ

§1. Невизначений інтеграл

1. Варіанти індивідуальних типових завдань

Знайти інтеграли:

ВАРІАНТ 1

1. $\int \frac{(x+1)^3}{\sqrt{x}} dx$

2. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} dx}{\sin^2 x}$

3. $\int e^{-x^4} x^3 dx$

4. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$

5. $\int \frac{x+1}{2x-x^2} dx$

6. $\int \frac{(x^2-5)dx}{(x^2-4x+5)(x^2+9)}$

7. $\int \frac{dx}{(x-2)^3(x^2-2x+2)^2}$

8. $\int e^{4x} \cos 4x dx$

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

10 $\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$

11. $\int x^{-2/3}\left(1+x^{1/3}\right)^{-3} dx$

12. $\int \frac{dx}{3-4\sin 2x+2\cos^2 x}$

ВАРІАНТ 2

1. $\int \left(x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right) dx$

2. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1+e^{4x}}}$

3. $\int 2^{x^2} x dx$

4. $\int x^2 \operatorname{arctg} 4x dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2-8x+14}$

6. $\int \frac{(x+1)dx}{x(x^4+6x^2+8)}$

7. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$

8. $\int e^{5x} \sin 5x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} dx$

10 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

11. $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2} dx$

12. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$

ВАРІАНТ 3

1. $\int \frac{\left(\sqrt{x}+x\right)^3}{5x} dx$

2. $\int \frac{\ln(\arccos x) dx}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$

3. $\int e^{x^2-2} x dx$

4. $\int x^3 \sin 5x dx$

5. $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+x}$

6. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+4)^2}$

7. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^3}$

8. $\int x^2 e^x \sin x dx$

9. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$

10 $\int \frac{(x^3+2x^2+x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

11. $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(x-4)}}$

12. $\int \frac{dx}{4+\operatorname{ctg} x-4\operatorname{tg} x}$

13. $\int \frac{3\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} dx$

14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$

15. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$

13. $\int \frac{3}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x} dx$

14. $\int \sin^2 2x \cos^4 2x dx$

15. $\int \frac{\ln(\operatorname{tg} x) dx}{\sin 2x}$

13. $\int \frac{7}{2\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x} dx$

14. $\int \sin^2 3x \cos^4 3x dx$

15. $\int e^{\sqrt{x}} dx$

ВАРІАНТ 4

1. $\int \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{x} dx$

2. $\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)^3} dx$

3. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

4. $\int \operatorname{arctg}(7x+2) dx$

5. $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x} dx$

6. $\int \frac{(3x^3+2x^2+1)dx}{x(x+1)^2(x^2+4)}$

7. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x^2+16)^3}$

8. $\int e^{3x} \sin x dx$

9. $\int \frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}} dx$

10 $\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+3}} dx$

11. $\int x^{1/2}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2} dx$

ВАРІАНТ 5

1. $\int \left(\frac{3}{25+x^2} - 3^x\right) dx$

2. $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

3. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}}$

4. $\int x \arcsin x\, dx$

5. $\int \frac{xdx}{x^2+5x+8}$

6. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)}$

7. $\int \frac{(x^3+2x-1)dx}{x^2(x^2+2x+5)^2}$

8. $\int e^{3x} \cos x dx$

9. $\int x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx$

10 $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

11. $\int x^{1/4}\left(1+x^{1/3}\right)^{-2} dx$

ВАРІАНТ 6

1. $\int \frac{3-2\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

2. $\int \frac{\ln(\arcsin x)}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} dx$

3. $\int e^{3x^2-5} x dx$

4. $\int x^2 e^{2x} dx$

5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$

6. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2} dx$

7. $\int \frac{(x-1)dx}{(x^2-2x+5)^3}$

8. $\int e^x \sin 2x dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+2)^5(x-1)^3}}$

10 $\int \frac{(x^3-2x^2+1)dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$

11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

12. $\int \frac{2\cos x - 3\sin x}{2\sin x + 3\cos x}dx$

13. $\int \frac{\operatorname{ch} x + 2}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}dx$

14. $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x}\cos^3 2x dx$

15. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)dx$

12. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

13. $\int \frac{\operatorname{sh} x + 2}{2\operatorname{sh} x + 5\operatorname{ch} x}dx$

14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

15. $\int \frac{dx}{e^x + \sqrt{e^x}}$

12. $\int \frac{3\cos x + 7\sin x}{5\sin x + 2\cos x}dx$

13. $\int \frac{\operatorname{sh} x - 2}{2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}dx$

14. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$

15. $\int \cos^7 x dx$

ВАРІАНТ 7

1. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$

2. $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx$

3. $\int \frac{3x^2 dx}{x^6 - 25}$

4. $\int 2^{-x} x dx$

5. $\int \frac{x dx}{2x^2 - x + 1}$

6. $\int \frac{(3x^2 + 4x - 1)dx}{(x^2 + 4x + 29)^2}$

7. $\int \frac{(x^3 - 2x^2 + x + 6)dx}{x(x-1)^2(x^2 + 4x + 5)}$

8. $\int e^x \cos 2x dx$

9. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$

10 $\int \frac{(x^2 + 4x)dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

ВАРІАНТ 8

1. $\int \frac{5}{\sin^2 x \cos^2 x}dx$

2. $\int e^{2x^2 + \ln x}dx$

3. $\int \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x}dx$

4. $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$

5. $\int \frac{dx}{6x^2 + 6x + 19}$

6. $\int \frac{(x+2)dx}{(x-1)^2 x(x^2 + 4)}$

7. $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 10)^2}dx$

8. $\int e^{2x}\cos 3x dx$

9. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}dx$

10 $\int \frac{(x^3 - x - 1)dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

ВАРІАНТ 9

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$

2. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x} + \operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}dx$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

4. $\int x^2 \ln x dx$

5. $\int \frac{(9x+13)dx}{(x+3)(x^2+2x+3)}$

6. $\int \frac{(x^4 - 1)dx}{(x^2 + 9)(x^3 + x^2)}$

7. $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2 - 4x + 5)^3}$

8. $\int e^{2x}\sin 3x dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x+1}}$

10 $\int x^2\sqrt{x^2 + 4}dx$

11. $\int \sqrt[3]{x+2x^3}\,dx$

12. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}$

13. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}dx$

14. $\int \frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

15. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

11. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$

12. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+7\cos^2 x}$

13. $\int \frac{\operatorname{th} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}dx$

14. $\int \sin^5 x\cdot\cos^4 x\,dx$

15. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$

11. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$

12. $\int \frac{(1+\cos x)^2 dx}{1+\sin x}$

13. $\int \frac{\operatorname{ch} x+1}{2\operatorname{sh} x-5\operatorname{ch} x}dx$

14. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$

15. $\int \frac{x\arccos(x/a)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

ВАРІАНТ 10

1. $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$

2. $\int \sqrt{\sin x}\cos^5 x dx$

3. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

4. $\int (x+2)\cos 3x dx$

5. $\int \frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$

6. $\int \frac{(x^3-2x^2+3x-1)dx}{(x^2+8x+17)(x^2+6x+34)}$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+5)^2}$

8. $\int e^{2x+1}\sin x dx$

9. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

ВАРІАНТ 11

1. $\int \frac{x^3(x+1)}{\sqrt{x}}dx$

2. $\int \frac{x^3 dx}{x^8-18}$

3. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

4. $\int (x^2-2x+3)\ln(x+1)dx$

5. $\int \frac{(3x+4)dx}{4x^2-12x+13}$

6. $\int \frac{(x+5)dx}{(x+2)^2(x^4-1)}$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+16)^3}$

8. $\int e^{2x+1}\cos x dx$

9. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

ВАРІАНТ 12

1. $\int \frac{x^6+1}{x^2}dx$

2. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

3. $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}dx$

4. $\int \arccos(3x-2)dx$

5. $\int \frac{(2x^3+3)dx}{(4x^2-1)(x^2+6x)}$

6. $\int \frac{x^4+4x^3+3x^2+12x+20}{x^2+4x+5}dx$

7. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^2(x^2-6x+58)^2}$

8. $\int e^{4x}\sin 4x dx$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-7)^7(x-5)^5}}$

10 $\int \frac{(x^3-6x^2+11x-6)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$	10 $\int \frac{(1-x+x^2)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$	10 $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$
11. $\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{-10}dx$	11. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$	11. $\int \frac{\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$
12. $\int \frac{\sin^2 2x\,dx}{(\sin^3 x+\cos^3 x)^2}$	12. $\int \frac{5\sin x-3\cos x}{7\sin x+2\cos x}dx$	12. $\int \frac{\sin x\sin 2xdx}{\sin x+\cos x}$
13. $\int \frac{\operatorname{ch} x-1}{2\operatorname{sh} x-5\operatorname{ch} x}dx$	13. $\int \frac{\operatorname{sh} x-1}{2\operatorname{sh} x+5\operatorname{ch} x}dx$	13. $\int \frac{3\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}dx$
14. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$	14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$	14. $\int \sqrt[3]{\cos^2 2x}\sin^3 xdx$
15. $\int x^3\sqrt{x^2-1}dx$	15. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}}$	15. $\int \frac{(2x^2+2x+13)dx}{(x^2+1)(x^3-2x^2+x-2)}$

2. Приклад виконання індивідуального завдання

У наступних прикладах обчислити невизначені інтеграли.

Приклад 4.1. $I_1=\int \frac{x^2+2x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Цей інтеграл обчислюється безпосереднім інтегруванням і при застосуванні формули (1) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$I_1=\int \frac{x^2+2x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x}}+\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+2x+3x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x^2+6\sqrt{x}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 4.2. $I_2=\int e^x\sin(e^x)dx$.

Розв'язання. Внесемо функцію e^x під диференціал:

$$I_2=\int\sin(e^x)\cdot e^x dx=\left\|d(e^x)=e^x dx\right\|=\int\sin(e^x)\cdot d(e^x),$$

після чого застосуємо формулу (5) розширеної таблиці основних інтегралів:

$$I_2 = -\cos\left(e^x\right) + C\ . \ ■$$

Приклад 4.3. $I_3 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{3-2x^3}}$.

Розв’язання. Оскільки $d\left(3-2x^3\right) = -6x^2 dx$, то $x^2 dx = -\frac{1}{6} d\left(3-2x^3\right)$. Звідки отримаємо

$$I_3 = -\frac{1}{6}\int \frac{d\left(3-2x^3\right)}{\sqrt{3-2x^3}} = -\frac{1}{6}\int \left(3-2x^3\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(3-2x^3\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{\left(3-2x^3\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{3-2x^3} + C.\ ■$$

Приклад 4.4. $I_4 = \int (x^2-5)\cos 4x dx$.

Розв’язання. Цей інтеграл відноситься до першого класу функцій, що інтегруються частинами. Для його обчислення двічі застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_4 = \int (x^2-5)\cos 4x dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2-5, \ du = 2x\,dx, \\ dv = \cos 4x, v = \frac{1}{4}\sin 4x. \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\left(x^2-5\right)\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{2}\int x\sin 4x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x, \qquad du = dx, \\ dv = \sin 4x, v = -\frac{1}{4}\cos 4x. \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4}\left(x^2-5\right)\sin 4x -$$

$$-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(x^2-5\right)\sin 4x + \frac{1}{8}x\cos 4x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.\ ■$$

Приклад 4.5. $I_5 = \int \frac{x-1}{x^2-6x+8}dx$.

Розв’язання. Знайдемо похідну від квадратного тричлена в знаменнику: $\left(x^2-6x+12\right)' = 2x-6$. Представимо чисельник сумою:

$$x-1 = \frac{1}{2}(2x-6) + \left(\frac{1}{2}\cdot 6 - 1\right) = \frac{1}{2}(2x-6) + 2\ .$$

Тоді

$$I_5 = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-6)+2}{x^2-6x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)\,dx}{x^2-6x+8} + 2\int \frac{dx}{x^2-6x+8} = I_{5,1} + I_{5,2}\,.$$

Перший інтеграл обчислимо за допомогою внесення під диференціал квадратного тричлена, а другий – виділенням повного квадрата в квадратному тричлені:

$$I_{5,1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-6)\,dx}{x^2-6x+12} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2-6x+12\right)}{x^2-6x+12} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+12\right| + C\,,$$

$$I_{5,2} = 2\int \frac{dx}{x^2-6x+12} = \left\| \begin{aligned} &x^2-6x+12 = \\ &= \underline{x^2-2\cdot 3x+9} + (-9+12) = \\ &= (x-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \end{aligned} \right\| =$$

$$= 2\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}} + C.$$

В результаті отримаємо:

$$I_5 = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+12\right| + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}} + C\,. \blacksquare$$

Приклад 4.6 [**2**]. $I_6 = \int \frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-1\right)^2}\,.$

Розв'язання. Підінтегральна функція являє собою раціональний дріб. Степінь чисельника менша за степінь знаменника, тому цей дріб є правильним. Це означає, що немає потреби у виділенні цілої частини. Розкладемо підінтегральну функцію в суму простих дробів:

$$\frac{x}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-1\right)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{\left(x-1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{A(x-1)\left(x^2+2x+2\right) + B\left(x^2+2x+2\right) + (Cx+D)\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x-1\right)^2}\,.$$

Коефіцієнти обчислюємо за методом невизначених коефіцієнтів

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C \;\;=0, \\ x^2 & A+B-2C+D \;\;=0, \\ x^1 & 2B+C-2D \;\;=1, \\ x^0 & -2A+2B+D \;\;=0; \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A \;\;=1/25, \\ B \;\;=1/5, \\ C \;\;=-1/25, \\ D \;\;=-8/25. \end{cases}$$

Таким чином, отримаємо

$$I_6 = \int\left(\frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{5\left(x-1\right)^2} - \frac{1}{25}\cdot\frac{x+8}{x^2+2x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{25}\int\frac{1/2(2x+2)+7}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50}\ln(x-1)^2 - \frac{1}{50}\ln\left(x^2+2x+2\right) - \frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1) + C =$$

$$= -\frac{1}{5(x-1)} + \frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1) + C\,. \blacksquare$$

Приклад 4.7. $I_7 = \int\frac{\left(x^5+x^2-5\right)dx}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральний раціональний дріб є правильним, розкладемо його в суму простих дробів:

$$\frac{x^5+x^2-5}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{\left(x+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{\left(x^2+4\right)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)\left(x^2+4\right)^2 + B\left(x^2+4\right)^2 + (Cx+D)(x+1)^2\left(x^2+4\right) + (Ex+F)(x+1)^2}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)\left(x^4+8x^2+16\right) + B\left(x^4+8x^2+16\right)}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2} +$$

$$+\frac{(Cx+D)\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+4\right)+(Ex+F)(x^2+2x+1)}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+4\right)^2}.$$

Коефіцієнти обчислюємо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+C=1, \\ A+B+2C+D=0, \\ 8A+5C+2D+E=0, \\ 8A+8B+8C+5D+2E+F=1, \\ 16A+4C+8D+E+2F=0, \\ 16A+16B+4D+F=-5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\dfrac{1}{25},\ B=-\dfrac{1}{5}, \\ C=\dfrac{26}{25},\quad D=-\dfrac{46}{25}, \\ E=-\dfrac{6}{5},\quad F=\dfrac{31}{5}. \end{cases}$$

Отже,

$$I_7=\int\left(-\frac{1}{25\left(x+1\right)}-\frac{1}{5\left(x+1\right)^2}+\frac{26x-46}{25\left(x^2+4\right)}+\frac{-6x+31}{5\left(x^2+4\right)^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{25}\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{5\left(x+1\right)}+\frac{13}{25}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}-\frac{46}{25}\int\frac{dx}{x^2+4}-\frac{3}{5}\int\frac{2x\,dx}{\left(x^2+4\right)^2}+$$

$$+\frac{31}{5}\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=-\frac{1}{25}\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{5\left(x+1\right)}+\frac{13}{25}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-\frac{23}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{3}{5}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{31}{5}\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=-\frac{1}{25}\ln\left|x+1\right|+\frac{1}{5\left(x+1\right)}+\frac{13}{25}\ln\left(x^2+4\right)-$$

$$-\frac{23}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{3}{5\left(x^2+4\right)}+\frac{31}{5}\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}.$$

Для обчислення останнього інтегралу застосуємо рекурентну формулу:

$$K_\lambda=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2\lambda-3}{2\left(\lambda-1\right)}K_{\lambda-1}+\frac{x}{2\left(\lambda-1\right)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right]\ (\lambda\in\mathbb{N}),$$

де $K_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$. Для цього оберемо $\lambda=2$, $a=2$, отримаємо:

$$K_2 = \int \frac{dx}{\left(x^2+2^2\right)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}K_1 + \frac{x}{2\left(x^2+4\right)}\right] = \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{x}{8\left(x^2+4\right)} + C .$$

В результаті одержуємо:

$$I_7 = -\frac{1}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{13}{25}\ln\left(x^2+4\right) - \frac{23}{25}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} +$$

$$+\frac{3}{5\left(x^2+4\right)} + \frac{31}{5}\left(\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{x}{8\left(x^2+4\right)}\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{13}{25}\ln\left(x^2+4\right) + \frac{31x+24}{40\left(x^2+4\right)} - \frac{213}{400}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C . \blacksquare$$

Приклад 4.8. $I_8 = \int e^x \cos 5x dx$.

Розв'язання. Заданий інтеграл належить до третього класу функцій, що інтегруються частинами. Для його обчислення двічі застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$I_8 = \int e^x \cos 5x dx = \left\| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \cos 5x, & v = \frac{1}{5}\sin 5x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}\int e^x \sin 5x dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \sin 5x, & v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right\| = \frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{5}e^x \cos 5x + \frac{1}{5}\int e^x \cos 5x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^x \sin 5x + \frac{1}{25}e^x \cos 5x - \frac{1}{25}I_8.$$

Звідси

$$I_8 + \frac{1}{25}I_8 = \frac{1}{5}e^x \sin 5x + \frac{1}{25}e^x \cos 5x ,$$

$$I_8 = \int e^x \cos 5x dx = \frac{5}{26}e^x \sin 5x + \frac{1}{26}e^x \cos 5x + C . \blacksquare$$

Приклад 4.9. $I_9 = \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6 (x+2)^4}}$.

Розв'язання. Зробимо перетворення з метою виділення під інтегралом дробово-лінійної ірраціональності:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^6(x+2)^4}} = \int \left(\sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}}\right)^4 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Уведемо заміну $t = \sqrt[5]{\frac{x-1}{x+2}}$, тоді $x = \frac{2t^5+1}{1-t^5}$, $x-1 = \frac{3t^5}{1-t^5}$, $dx = \frac{15t^4 dt}{\left(1-t^5\right)^2}$.

Звідси

$$I_9 = \int t^4 \cdot \frac{\left(1-t^5\right)^2}{9t^{10}} \cdot \frac{15t^4 dt}{\left(1-t^5\right)^2} = \frac{5}{3}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{5}{3t} + C = -\frac{5}{3}\sqrt[5]{\frac{x+2}{x-1}} + C. \ \blacksquare$$

Приклад 4.10. $I_{10} = \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Інтеграл такого типу розглянуто в розділі 1, §1, п.8.1. Оскільки многочлен у чисельнику підінтегральної функції $P(x) = x^4$ має четвертий степінь, тому многочлен $Q(x)$ із невизначеними коефіцієнтами у формулі (1.7) потрібно обирати третього степеня. Отже, представимо цей інтеграл у вигляді:

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти. Для цього спочатку продиференціюємо обидві частини останньої рівності:

$$\frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\sqrt{x^2+4x+5} +$$

$$+\frac{\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4x+5}},$$

потім помножимо обидві частини на квадратичну ірраціональність $\sqrt{x^2+4x+5}$:

$$x^4 = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\left(x^2+4x+5\right) + \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)(x+2) + \lambda.$$

Коефіцієнти знаходимо методом невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 14A + 3B = 0, \\ 15A + 10B + 2C = 0, \\ 10B + 6C + D = 0, \\ 5C + 2D + \lambda = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4},\ B = -\dfrac{7}{6}, \\ C = \dfrac{95}{24},\ D = -\dfrac{145}{12},\ \lambda = \dfrac{35}{8}. \end{cases}$$

Таким чином,

$$I_{10} = \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{95}{24}x - \frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{35}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{95}{24}x - \frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{35}{8}\int\frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{95}{24}x - \frac{145}{12}\right)\sqrt{x^2+4x+5} + \frac{35}{8}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right| + C. \ \blacksquare$$

Приклад. 4.11. $I_{11} = \int\dfrac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$ **.**

Розв'язання. Підінтегральна функція є біноміальним диференціалом, тому

$$I_{11} = \int x^{-1}\left(1+x^6\right)^{-1/6}dx = \left\| \begin{matrix} a = 1, b = 1, & p \notin \mathbb{Z}, \\ m = -1, n = 6, & \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{0}{6} = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{випадок 2} \\ p = -1/6, & \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 + x^6 = t^6 \Rightarrow x = \left(t^6 - 1\right)^{1/6}, \\ dx = \dfrac{t^5 dt}{\left(t^6-1\right)^{5/6}} \end{matrix} \right\| = \int \frac{\dfrac{t^5 dt}{\left(t^6-1\right)^{5/6}}}{\left(t^6-1\right)^{1/6} t} = \int\frac{t^4 dt}{\left(t^6-1\right)} =$$

$$= \int\frac{t^4 dt}{(t-1)(t+1)\left(t^2+t+1\right)\left(t^2-t+1\right)} = \int\left(\frac{\frac{1}{6}}{t-1} - \frac{\frac{1}{6}}{t+1} + \frac{-\frac{1}{6}t + \frac{1}{6}}{t^2+t+1} + \frac{\frac{1}{6}t + \frac{1}{6}}{t^2-t+1}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{6}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln|t+1|+\int\left(\frac{-\frac{1}{12}(2t+1)+\frac{1}{4}}{t^2+t+1}+\frac{\frac{1}{12}(2t-1)+\frac{1}{4}}{t^2-t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{12}\ln\left(t^2+t+1\right)+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}+\frac{1}{12}\ln\left(t^2-t+1\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t-1/2)^2+\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\frac{t^2-t+1}{t^2+t+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+1/2}{\sqrt{3}/2}+$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt[6]{1+x^6}+1}\right|+\frac{1}{12}\ln\frac{\sqrt[3]{1+x^6}-\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt[3]{1+x^6}+\sqrt[6]{1+x^6}+1}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{1+x^6}+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{1+x^6}-1}{\sqrt{3}}+C.\ \blacksquare$$

Приклад 4.12. $I_{12}=\int\frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x}$.

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків функцій $\sin x$ та $\cos x$ підінтегральна функція не змінює знака, то застосуємо підстановку $\operatorname{tg} x=t$:

$$I_{12}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x)}=\int\frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x}=$$

$$=\left\|t=\operatorname{tg} x\right\|=\int\frac{dt}{t^2+3t}=\int\frac{dt}{t(t+3)}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+3}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|t|-\ln|t+3|\right)+C==\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t}{t+3}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3}\right|+C.\ \blacksquare$$

Приклад 4.13. Обчислити інтеграл $I_{13}=\int\frac{\operatorname{ch} x+5\operatorname{sh} x}{2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x}dx$.

Розв'язання. Представимо чисельник підінтегральної функції $\left(\operatorname{ch} x+5\operatorname{sh} x\right)$ у вигляді лінійної комбінації знаменника $\left(2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x\right)$ та його похідної $\left(2\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x\right)$, тобто

$$\operatorname{ch} x+5\operatorname{sh} x=A\left(2\operatorname{sh} x-\operatorname{ch} x\right)+B\left(2\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x\right).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\operatorname{sh} x$ та $\operatorname{ch} x$ у обох частинах заданого рівняння, маємо:

$$\begin{cases} 2A - B = 5, \\ -A + 2B = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{11}{3}, \\ B = \dfrac{7}{3}. \end{cases}$$

$$I = \frac{11}{3}\int \frac{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x} dx + \frac{7}{3}\int \frac{d\left(2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\right)}{2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x} = \frac{11}{3} x + \frac{7}{3}\ln\left|2\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x\right| + C\ .\blacksquare$$

Приклад 4.14. $I_{14} = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^3 x dx$.

Розв'язання. $I_{14} = \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\cos^2 x(\cos x dx) =$

$$= \int \sqrt[3]{\sin^2 x}\left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) = \left\| t = \sin x \right\| = \int \sqrt[3]{t^2}\left(1 - t^2\right) dt =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{t^5}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{t^{11}}}{11} + C = \frac{3\sqrt[3]{\sin^5 x}}{5} - \frac{3\sqrt[3]{\sin^{11} x}}{11} + C\ .\ \blacksquare$$

Приклад 4.15. $I_{15} = \int x^2\sqrt{a^2 + x^2} dx$.

Розв'язання. Обчислимо цей інтеграл методом інтегрування частинами:

$$I_{15} = \int x \cdot x\sqrt{a^2 + x^2} dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = x\sqrt{a^2 + x^2} dx = \dfrac{1}{2} d\left(a^2 + x^2\right)\sqrt{a^2 + x^2}, & v = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 - \frac{1}{3}\int \left(a^2 + x^2\right)\sqrt{a^2 + x^2} dx =$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\int \sqrt{a^2 + x^2} dx - \frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2 + x^2} dx =$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^3 - \frac{a^2}{3}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right|\right) - \frac{1}{3} I_{15}.$$

Звідки одержимо

$$I_{15} = \int x^2\sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x\left(a^2 + 2x^2\right)}{8}\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C\ .$$

Зауважимо, що цей інтеграл також можна інтегрувати тригонометричними або гіперболічно-тригонометричними підстановками. ■

§2. Визначений та невласний інтеграли

1. Варіанти індивідуальних типових завдань

1. Для заданої функції $f(x)$ знайти верхню та нижню суми Дарбу на відрізку $[a,b]$, розділяючи його на n рівних частин та знайти їх границі при $n \to \infty$.
2. Знайти значення інтеграла.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій.
4. Обчислити довжину дуги кривої.
5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ($Ox - V_x$, $Oy - V_y$) фігури, обмеженої графіками функцій.
6. Чи є функція $f(x)$ інтегровною на $[0,1]$?
7. Довести, використавши теорему про середнє.

8, 9. Обчислити невласний інтеграл.

10, 11. Дослідити невласний інтеграл на збіжність.

ВАРІАНТ 1	ВАРІАНТ 2	ВАРІАНТ 3
1. $f(x)=(x-1)(x+2)x$, $a=-1$, $b=0$.	1. $f(x)=x^3+x^2+x+1$, $a=0$, $b=2$.	1. $f(x)=(x+1)(x^2+1)$, $a=3$, $b=4$.
2.а) $\int\limits_0^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4x dx$	2. а) $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x dx$	2. а) $\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg} x\cdot\ln\cos x\, dx$
б) $\int\limits_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{37}}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{6\operatorname{tg}x dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}$	б) $\int\limits_{\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0}\frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg}x+7}dx$	б) $\int\limits_{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}}\frac{(2\operatorname{tg}x+5)dx}{(5-\operatorname{tg}x)\sin 2x}$

в) $\int\limits_{2}^{9}\frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$	в) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$	в) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^2 xdx}{\sqrt[3]{x^2}}$
г) $\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^4 3x\cos^4 3xdx$	г) $\int\limits_{0}^{\pi}2^4\sin^2\frac{x}{2}\cos^6\frac{x}{2}dx$	г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0}2^8\sin^4 x\cos^8 xdx$
д) $\int\limits_{0}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}dx$	д) $\int\limits_{0}^{3}\frac{dx}{\left(9+x^2\right)^{3/2}}$	д) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$
3. $y=\mathrm{arctg}\sqrt{x}$, $y+x^2=0$, $x=1$.	3. $y=\frac{10}{x^2+4}$, $y=\frac{x^2+5x+4}{x^2+4}$.	3. $y=4^{-x}$, $y=-\log_4 x$, $y=0$, $x=0$.
4. а) $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$, $c^2=a^2-b^2$ (еволюта еліпса)	4. а) $x=\int\limits_0^t\cos\varphi^2 d\varphi$, $y=\int\limits_0^t\sin\varphi^2 d\varphi$, $0\le t\le t_0$ (клотоїда)	4. а) $x=a\left(\cos t+\ln tg\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$, $0<t_0\le t\le\frac{\pi}{2}$ (трактриса).
б) $\rho=\frac{a}{\cos^4\frac{\varphi}{4}}$ (довжина петлі)	б) $\rho=a\sin^4\frac{\varphi}{4}$	б) $\rho=a(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}$
5. $y=e^x+6$, $y=e^{2x}$, $x=0$. Знайти V_y	5. $y=3x-x^2$, $y=0$. Знайти V_x	5. $y=\sin x$, $y=0$, $0\le x\le\pi$. Знайти V_y
6. $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\ne 0,\\ 0, \quad x=0\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}x, \text{ якщо } \exists n\in\mathbb{N}: x=\frac{1}{n};\\ 0, \text{ якщо } \forall\, n\in\mathbb{N}\ x\ne\frac{1}{n}\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}, x\ne 0,\\ 0, \quad x=0\end{cases}$

7. $\lim\limits_{n} \int\limits_{n}^{n+\ln n} \frac{\sin x}{x} dx = 0$

8. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x+1}}$

9. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$

10. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\ln x dx}{\sqrt{\sin x}}$

11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^n}$

ВАРІАНТ 4

1. $f(x) = 2^x + x^3$,

$a = 1$, $b = 2$.

2. а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2 + 17{,}5\right) \sin 2x dx$

б) $\int\limits_{-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}}^{0} \frac{3\,\mathrm{tg}\, x + 1}{2\sin 2x - 5\cos 2x + 1} dx$

в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 + x}{x^4 + 1} dx$

г) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} 2^8 \sin^2 x \cos^6 x dx$

д) $\int\limits_{0}^{\sqrt{5}/2} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

7. $\lim\limits_{n} \int\limits_{\sin\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos x}{x} dx = 0$

8. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x} + x}$

9. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 - 1}$

10. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{\arcsin x}$

11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

ВАРІАНТ 5

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$,

$a = -2$, $b = -1$.

2. а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \left(3x - x^2\right) \sin 2x dx$

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}\, 3} \frac{1 + \mathrm{ctg}\, x}{(\sin x + 2\cos x)^2} dx$

в) $\int\limits_{\pi/4}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$

г) $\int\limits_{0}^{\pi} 2^4 \sin^4\left(\frac{x}{2}\right) \cos^4\left(\frac{x}{2}\right) dx$

д) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$

7. $\lim\limits_{n} \int\limits_{1}^{e} \frac{e^x \ln x}{\sin x} dx \le \frac{e^e - e}{\sin e}$

8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x}}$

9. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{\left(x^3+1\right)^4}$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x(1-x)^3}}$

11. $\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x}\right) dx$

ВАРІАНТ 6

1. $f(x) = 2x^3 + 1$, $a = -3$,

$b = -1$.

2. а) $\int\limits_{0}^{2} (x+1)^2 \ln^2(x+1) dx$

б) $\int\limits_{-\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}}^{0} \frac{(11 - 3\,\mathrm{tg}\, x) dx}{\mathrm{tg}\, x + 3}$

в) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2^8 \sin^6 x \cos^2 x dx$

г) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x - (\mathrm{arctg}\, x)^4}{1 + x^2} dx$

д) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}$

3. $y=2x^2e^x$, $y=-x^3e^x$.	3. $x=y^2(y-1)$, $x=0$.	3. $y=3^x$, $y=9$, $y=\frac{9}{4}(3^{-x}+1)+\frac{8}{3}$.
4. а) $x=\sin^4 t$, $y=\cos^2 t$, $0\le t\le \pi/2$	4. а) $x=t-\frac{\text{sh}2t}{2}$, $y=2\,\text{ch}\,t$, $0\le t\le t_0$	4. а) $x=a(\text{sh}\,t-t)$, $y=a(\text{ch}\,t-1)$, $0\le y\le 7a$, $x\ge 0$
б) $\rho=\frac{a}{\sin^3(\varphi/3)}$ (довжина петлі)	б) $\rho=a\,\text{th}\frac{\varphi}{2}$, $0\le\varphi\le\varphi_0$	б) $\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi}$, $\lvert\varphi\rvert\le\frac{\pi}{2}$, $p>0$
5. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$, $0\le x\le\pi$. Знайти V_y	5. $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$, $y=\frac{a}{2}$. Знайти V_y	5. $y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-3}}$, $-1\le x\le 1$, $y=0$. Знайти V_x
6. $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, \text{ якщо } \exists n\in\mathbb{N}: x=\frac{1}{n};\\ 0, \text{ якщо } \forall\, n\in\mathbb{N}\ x\ne\frac{1}{n}.\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ для } x=0 \vee x=\frac{2}{\pi(2n+1)},\\ \text{tg}\frac{1}{x}, \text{ у іншому випадку}\end{cases}$ $n\in\mathbb{N}$
7. Довести існування границі $\lim\limits_{n}\int_1^n\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ за допомогою критерію Коші	7. Нехай $\varphi(b)=\int_1^b e^{\cos x}\ln x dx$. Довести, що $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{\varphi(b)}{b^2}=0$	7. Нехай $\varphi(b)=\int_1^b e^{\sin x}\ln x dx$. Довести, що $\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{\varphi(b)}{b}=\infty$
8. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{\lvert x^2-1\rvert}}$	8. $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt{x}+x}$	8. $\int_0^\pi tg\,x\,dx$
9. $\int_1^{+\infty}\frac{\text{arctg}\,x}{x^2}dx$	9. $\int_2^{+\infty}\frac{xdx}{x^3-1}$	9. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$

10. $\int_0^1 \frac{\ln\frac{1}{x}}{1+x}dx$

11. $\int_0^{+\infty} x^{-2}\operatorname{arcrtg}\frac{x^3}{1+x^2}dx$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$

11. $\int_0^{+\infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$

10. $\int_0^1 x^{\alpha-1}\cdot e^{-x}dx, \alpha>0$

11. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2\sin^2 x}$

<u>ВАРІАНТ 7</u>

1. $f(x)=e^x+x$, $a=1$, $b=e$.

2.а) $\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

б) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

в) $\int_{-\pi/2}^{0} 2^8\sin^2 x\cos^4 xdx$

г) $\int_0^{\pi/4} \frac{(7+3\operatorname{tg}x)dx}{(\sin x+2\cos x)^2}$

д) $\int_1^{e^2} \frac{\ln^2 xdx}{\sqrt{x}}$

3. $x^2+y^2=2$, $y^2=2x-1$, $x\ge\frac{1}{2}$.

4. а) $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(t^2-2)\cos t-2t\sin t$, $0\le t\le\pi$

<u>ВАРІАНТ 8</u>

1. $f(x)=1+x+2^{-x}$, $a=1$, $b=2$.

2. а) $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg}x-22}{4-\operatorname{tg}x}dx$

в) $\int_0^{\pi} 2^4\sin^2 2x\cos^6 2xdx$

г) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$

д) $\int_0^1 (x+1)\ln^2(x+1)dx$

3. $y=x^2$, $y=x^2+x-1$, $y=\frac{\sqrt{5x}}{2}$, $y\le x^2$.

4. а) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le t_0\le\frac{\pi}{2}$

<u>ВАРІАНТ 9</u>

1. $f(x)=x^3+x^2+1$, $a=1$, $b=2$.

2. а) $\int_1^e \sqrt{x}\ln^2 xdx$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4-7\operatorname{tg}x}{2+3\operatorname{tg}x}dx$

в) $\int_0^{\pi} 2^4\sin^4 x\cos^4 xdx$

г) $\int_0^2 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

д) $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

3. $y=2-4x^2+4x^3-x^4$, $y=0$, $x=x_1$, $x=x_2$, де x_1 і x_2 – точки максимуму функції.

4. а) $x=2t^3(1-t^2)$, $y=t^4\cdot\sqrt{15}$ (довжина петлі)

б) $\rho = a\varphi^3$, $0 \le \varphi \le 4$	б) $\rho = a\varphi^4$, $0 \le \varphi \le 3$.	б) $\rho = a\cos^5\dfrac{\varphi}{5}$
5. $y = e^{\alpha x}\sin \pi x$, $n-1 \le x \le n$, $y = 0$, $n \in N$. Знайти V_x	5. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$. Знайти V_y	5. $(x-R)^2+(y-R)^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $x \le R$, $y \le R$. Знайти V_x
6. $f(x) = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ (ціла частина)	6. $f(x) = \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$ (дробова частина)	6. $f(x) = \begin{cases} sh\dfrac{1}{x}, x \ne 0 \\ 0, \quad x = 0 \end{cases}$
7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n) = \dfrac{1}{\ln n}$ при $n \in N \setminus \{1\}$. Довести: $\dfrac{1}{2} \le \int\limits_n^{n^2} \dfrac{f(x)}{x}dx \le 1 \; \forall n \in N$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n) = \dfrac{1}{n}$ при $n \in N$. Довести: $\lim\limits_n \int\limits_n^{n^2} \dfrac{f(x)}{x}dx = 0$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n) = \dfrac{1}{\ln(\ln n)}$ при $n \in N \setminus \{1,2\}$. Довести: $\lim\limits_n \int\limits_n^{n^2} \dfrac{f(x)}{x}dx = +\infty$
8. $\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\lvert\cos x\rvert\, dx}{\sqrt{\sin x}}$	8. $\int\limits_0^{e} \dfrac{dx}{e^x - 1}$	8. $\int\limits_{-1}^{0} e^{\frac{1}{x}} \dfrac{dx}{x^3}$
9. $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$	9. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\left(x^2+12\right)dx}{\left(x^2+1\right)^2}$	9. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{arctg}(1-x)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$
10. $\int\limits_0^{1} \dfrac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$	10. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}}dx$	10. $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)\dfrac{dx}{\sqrt{x}}$
11. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x^5)}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}dx$	11. $\int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{x}} - e^{-\frac{4}{x^2}}\right)dx$	11. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

ВАРІАНТ 10

1. $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$, $a=0$, $b=1$.

2. а) $\int\limits_{2}^{3}(x-1)^3\ln^2(x-1)dx$

б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{5\,\mathrm{tg}\,x+2}{2\sin 2x+5}dx$

в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$

г) $\int\limits_{0}^{\pi}2^8\sin^2 x\cos^6 x dx$

д) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$

3. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=0$.

4. а) $x=\sqrt{3}t^2/2$, $y=t\left(\frac{1}{4}-t^2\right)$ (довжина петлі)

б) Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho=2\,(1-\cos\varphi)$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$

ВАРІАНТ 11

1. $f(x)=x^3-x+1$, $a=1$, $b=3$.

2. а) $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+3)e^{3x}dx$

б) $\int\limits_{0}^{\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}}\frac{3\,\mathrm{tg}^2 x+1}{\mathrm{tg}^2 x+4}dx$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{8}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^2\sin^2 x\cos^2 x dx$

д) $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{12x-\mathrm{arctg}\,3x}{1+9x^2}dx$

3. $y=\sin 2x$, $y=2x$, $0\le x\le\pi$.

4. а) $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$

б) Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho=e^{a\varphi}$, яка знаходиться всередині кола $\rho=1$, ($a>0$)

ВАРІАНТ 12

1. $f(x)=(x-2)^2(x+1)$, $a=2$, $b=4$.

2. а) $\int\limits_{-1}^{1}x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$

б) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\mathrm{tg}^2 x dx}{4+3\cos 2x}$

в) $\int\limits_{1}^{4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2^8\sin^6 x\cos^2 x dx$

д) $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

3. $y=|\log_a x|$, $y=0$, $x=1/a$, $x=a$, $a>1$.

4. а) $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)$, $y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\varphi_0$ (евольвента круга)

б) Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho=5\varphi$, яка знаходиться всередині кола $\rho=10\pi$

5. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $x^2-\frac{y^2}{15}=1$, $x\ge 1$. Знайти V_x.	5. $y=x\sqrt{\frac{3+3x}{3-x}}$, $0\le x\le 2$, $y=6$, $x=0$. Знайти V_y.	5. $y=\sqrt{\frac{9+x}{9-3x}}$, $0\le x\le \frac{3}{2}$, $y=0$. Знайти V_x.
6. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right), x\ne 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}\ln\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$
7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n\in\mathbb{N}$. Довести: $\lim\limits_{n}\int\limits_{n}^{n^2} f(x)\ln x\,dx=+\infty$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{n^3}$ при $n\in\mathbb{N}$. Довести: $\lim\limits_{n}\int\limits_{n}^{n^2} f(x)\ln x\,dx=0$	7. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n)=\frac{1}{\ln n}$ при $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Довести: $\lim\limits_{n}\int\limits_{n}^{n+1} f(x)\ln x\,dx=1$
8. $\int\limits_0^1 e^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^3}$	8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3}$	8. $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$
9. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}$	9. $\int\limits_0^1 x\ln x dx$	9. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\ln x dx}{\left(x^2+1\right)^2}$
10. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$	10. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}}dx$	10. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\operatorname{sh} x\,dx}{e^{x^2}-\cos x}$
11. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(1/x)}{\left(x-\cos(\pi/x)\right)^2}dx$	11. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1+\arcsin(1/x)}{1+x\sqrt{x}}dx$	11. $\int\limits_2^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)dx$

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 4.16. Для функції $f(x)=\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x+2\right)$ знайти верхню та нижню суми Дарбу на відрізку $[-1,0]$, розділяючи його на n рівних частин та знайти їх границі при $n\to\infty$.

Розв'язання. Для того, щоб дізнатися, в яких точках відрізків розбиття функція приймає найбільше та найменше значення, дослідимо її на монотонність на відрізку $[-1,0]$:

$$f(x)=x^3+x^2-x+2\,,$$

$$f'(x)=3x^2+2x-1\,,$$

$$3x^2+2x-1=0\,,$$

$$x_1=-1\,,\ x_2=\frac{1}{3}\,,$$

$f'(x)<0$ на відрізку $[-1,0]$ $\Rightarrow$ на відрізку $[-1,0]$ функція спадає.

Поділимо відрізок $[-1,0]$ на n рівних частин. Отримаємо n елементарних відрізків $[x_k\,;\,x_{k+1}]$, де точки поділу мають вигляд $x_k=-1+\dfrac{k}{n},\ k=0,1,2,...,n$. Оскільки $f(x)$ монотонно спадає на проміжку інтегрування, то на кожному елементарному відрізку $[x_k\,;\,x_{k+1}]$

$$\min_{[x_k\,;\,x_{k+1}]} f(x)=f\left(x_{k+1}\right)=f\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)=$$

$$=\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)^3+\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)^2-\left(-1+\frac{k+1}{n}\right)+2=$$

$$=\frac{(k+1)^3}{n^3}-2\cdot\frac{(k+1)^2}{n^2}+3=m_k\,.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\,,\ \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

то отримуємо нижню інтегральну суму Дарбу:

$$\underline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^3}{n^3} - 2\cdot\frac{(k+1)^2}{n^2} + 3\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2 + 3n\right) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 3\,.$$

Функція $f(x)$ на кожному з елементарних відрізків $[x_k\,;\,x_{k+1}]$ досягає свого максимального значення в точці x_k. Тут

$$\max_{[x_k\,;\,x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = f\left(-1+\frac{k}{n}\right) = \left(-1+\frac{k}{n}\right)^3 + \left(-1+\frac{k}{n}\right)^2 - \left(-1+\frac{k}{n}\right) + 2 =$$

$$= \frac{k^3}{n^3} - 2\cdot\frac{k^2}{n^2} + 3 = M_k\,.$$

Застосовуючи формули

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4},\quad \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\,,$$

знайдемо верхню інтегральну суму Дарбу:

$$\overline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k^3}{n^3} - 2\cdot\frac{k^2}{n^2} + 3\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^3 - \frac{2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 + 3n\right) = \frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2} + 3.$$

Знайдемо границі верхньої та нижньої сум Дарбу при $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} + 3\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{31}{12}\,.$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)^2}{4n^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{3n^2} + 3\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{31}{12}\,.$$

Таким чином, у цьому прикладі $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\overline{S_n} = \frac{31}{12}$. ■

Приклад 4.17. Знайти значення інтеграла

а) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx$ [**2**], **б)** $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2-x^2}}$, **в)** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \cos^4 x dx$,

г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} dx$ [**2**], **д)** $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Розв'язання. а) Для обчислення заданого інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\, dx = \left\| \begin{matrix} \ln x \ge 0, & \ln x < 0, \\ x \ge 1, & x < 1, \\ |\ln x| = \ln x, & |\ln x| = -\ln x \end{matrix} \right\| = \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} (-\ln x) dx + \int\limits_{1}^{e} \ln x dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right\| = -\left(x \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} - \int\limits_{\frac{1}{e}}^{1} x \cdot \frac{dx}{x} \right) + \left(x \ln x \Big|_{1}^{e} - \int\limits_{1}^{e} x \cdot \frac{dx}{x} \right) =$$

$$= -\left(\ln 1 - \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} - x \Big|_{\frac{1}{e}}^{1} \right) + \left(e \ln e - \ln 1 - x \Big|_{1}^{e} \right) = -\left(\frac{1}{e} - \left[1 - \frac{1}{e} \right] \right) +$$

$$+ \left(e - [e-1] \right) = 2\left[1 - \frac{1}{e} \right]. \blacksquare$$

б) Застосовуємо формулу заміни змінної під знаком визначеного інтеграла:

$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{2-x^2}} = \left\| \begin{matrix} t = \dfrac{1}{x+2}, & dx = -\dfrac{dt}{t^2}, \\ x = \dfrac{1}{t} - 2, & \begin{array}{c|c|c} x & -1 & 0 \\ \hline t & 1 & 0{,}5 \end{array} \end{matrix} \right\| = \int\limits_{1}^{0,5} \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{2 - \left(\dfrac{1}{t} - 2 \right)^2}} =$$

$$= -\int\limits_{0,5}^{1} \frac{-dt}{t\sqrt{-\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{4}{t} - 2}} = \int\limits_{0,5}^{1} \frac{dt}{\sqrt{-1 + 4t - 2t^2}} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{2\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - (t-1)^2 \right]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{2}\,(t-1) \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}. \blacksquare$$

в) Під знаком інтеграла $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \cos^4 x dx$ спочатку здійснимо заміну, яка зведе інтегрування в першу чверть, потім застосуємо формули зведення й основну тригонометричну тотожність:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \cos^4 x dx = \left\| \begin{array}{l} t = x - \dfrac{\pi}{2}, \quad x = t + \dfrac{\pi}{2}, \quad dt = dx; \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0, \quad x = \pi \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2^8 \sin^8 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) \cos^4 \left(t + \frac{\pi}{2} \right) dt = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2^8 \cos^8 t \sin^4 t \, dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2^8 \cos^8 t \left(1 - \cos^2 t \right)^2 dt = 2^8 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t \left(1 - 2\cos^2 t + \cos^4 t \right) dt =$$

$$= 2^8 \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t \, dt - 2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} t \, dt + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{12} t \, dt \right).$$

Для подальшого обчислення застосовуємо формулу *з приклада 3.140*:

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

за допомогою якої отримаємо:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \sin^8 x \cos^4 x dx = 2^8 \left(\frac{7!!}{8!!} - 2 \cdot \frac{9!!}{10!!} + \frac{11!!}{12!!} \right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{8}. \ ■$$

г) Застосуємо формулу заміни змінної:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{4\cos^2 x - \sin 2x + 1} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{5\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x} dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}} \frac{4\operatorname{tg} x - 5}{5 - 2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left\| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x,\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x};\ \ x = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1,\ x = \arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \\ t = \operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{\sin\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2 \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{4t-5}{5-2t+t^2}dt = 2\int\limits_1^2 \frac{2t-2}{t^2-2t+5}dt - \int\limits_1^2 \frac{d(t-1)}{(t-1)^2+2^2} = \left(2\ln\left|t^2-2t+5\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= 2\ln\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}. \ ■$$

д) Під знаком інтеграла $\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ зручно здійснити тригонометричну підстановку $x = 2\sin t$. А саме:

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left\| \begin{array}{l} x = 2\sin t, dx = 2\cos t\, dt, 4 - x^2 = 4\cos^2 t; \\ x = 0 \Rightarrow t = 0,\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\| =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{16\sin^4 t}{8\cos^3 t} \cdot 2\cos t dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1-\cos^2 t\right)^2}{\cos^2 t} dt = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 2 + \cos^2 t\right) dt =$$

$$= \left(4\operatorname{tg} t - 8t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \cos 2t\right) dt == 4 - 2\pi + 2\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 5 - \frac{3\pi}{2}. \ ■$$

Приклад 4.18 [**2**]. Знайти площу фігури, що обмежена кривими:

а) $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \le y \le 1$); **б)** $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3. \end{cases}$

Розв'язання. а) Задану фігуру D зображено на рис. 4.1. Її площу можна обчислювати двома способами:

Перший спосіб полягає в необхідності розбиття області на дві частини віссю ординат. Ліва з цих частин є криволінійною трапецією, що обмежена віссю абсцис, графіком функції $y = (x+1)^2$ і вертикальними прямими $x = -1$ і $x = 0$. Права частина обмежена знизу гілкою синусоїди, що виражається через обернену тригонометричну функцію за формулою $y=\frac{1}{\pi}\arcsin x$, а зверху іншою гілкою – $y=1-\frac{1}{\pi}\arcsin x$, а також вертикальними прямими $x=0$ і $x=1$. Площа області D буде дорівнювати сумі площ двох утворених частин, тому

$$S=\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}\left[\left(1-\frac{1}{\pi}\arcsin x\right)-\frac{1}{\pi}\arcsin x\right]dx\ .$$

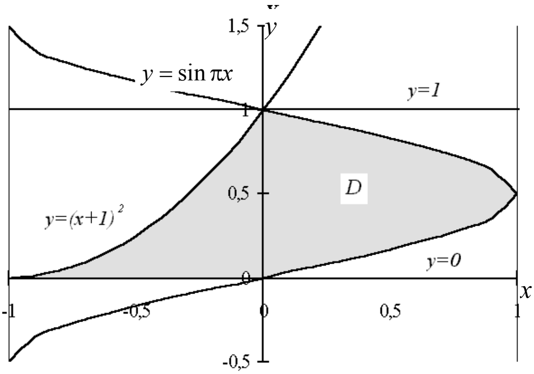


Рис. 4.1.

Перший інтеграл обчислюється як інтеграл від степеневої функції, а другий – частинами. Не будемо зупинятися на його обчисленні й запропонуємо це зацікавленому читачеві.

Наведемо більш простий *другий спосіб*. Оскільки ця фігура зліва обмежена гілкою (правою) параболи, справа – синусоїдою, а також горизонтальними прямими $y=0$ і $y=1$, то її площу можна обчислити також за формулою $S=\int_{c}^{d}(x_1(y)-x_2(y))dy$, де $c=0$, $d=1$, $x_1(y)=\sin\pi y$, рівняння правої гілки параболи, в якому *x* виражене через *y*, утворює рівняння кривої $x_2(y)$. Якщо $y=(x+1)^2$, то звідси $x=\pm\sqrt{y}-1$. Знак „+” дає праву гілку параболи, а „–” – ліву, тому $x_2(y)=\sqrt{y}-1$. Таким чином,

$$S=\int_{0}^{1}(\sin\pi y-\sqrt{y}+1)dy=\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi y-\frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+y\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{2}{\pi}-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{2}{\pi}\ .\ ■$$

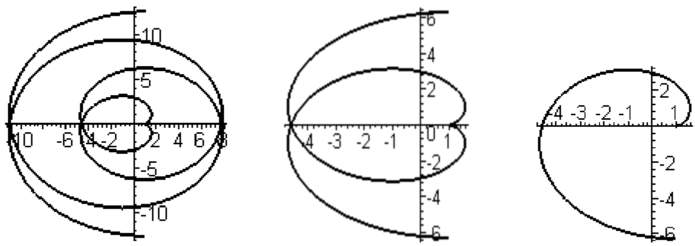
Для допомоги студентові у виконанні індивідуальних завдань на рис. 4.2 – 4.5 наведено графіки деяких кривих, що задані параметрично:

1) на рис. 4.2 зображено графік розгортки кола $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ при $-4\pi \le t \le 4\pi$ (рис. 4.2 а), $-2\pi \le t \le 2\pi$ (рис. 4.2 б), $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 4.2 в);

2) на рис. 4.3 – графік циклоїди $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ при $-4\pi \le t \le 4\pi$;

3) на рис. 4.4 – графік астроїди $\begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^3 t \end{cases}$ при $0 \le t \le 2\pi$;

4) на рис. 4.5 – графік кривої $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}$ при $0 \le t \le 2$.



а б в

Рис. 4.2.

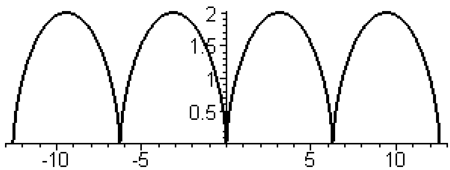
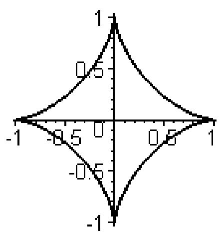


Рис. 4.3.



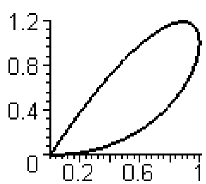


Рис. 4.4. Рис. 4.5.

б) Щоб дізнатись, яким значенням параметра t відповідає петля $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ потрібно знайти точку (x^*, y^*) самоперетину графіка цієї функції і два значення t_1 і t_2 параметра t, що їй відповідають, тобто $\begin{cases} x^* = x(t_1) = x(t_2), \\ y^* = y(t_1) = y(t_2). \end{cases}$

У нашому випадку це точка (0,0), і їй відповідають два значення параметра t_1=0 і t_2=2. Коли значення параметра збільшується від 0 до 2, петля оббігає область, яку обмежує, проти руху стрілки годинника. Графік цієї кривої зображено на рис. 4.5. Отже, маємо:

$$S = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2t - t^2)' dt = -\int_0^2 (2t^2 - t^3)(2 - 2t) dt = -\int_0^2 (4t^2 - 6t^3 + 2t^4) dt =$$

$$= -\left(\frac{4t^3}{3} - \frac{6t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} \right)\Bigg|_0^2 = -\left(\frac{32}{3} - 24 + \frac{64}{5} \right) = \frac{8}{15} . \ \blacksquare$$

Приклад 4.19 [**2**]. Обчислити довжину дуги кривої.

а) $y = e^x \ (0 \le x \le x_0)$ **;** **б)** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ **;** **в)** $\rho = \sin^5 \frac{\varphi}{5}, \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le \frac{7\pi}{2}$ **.**

Розв'язання. а) Крива визначається функцією $y = e^x \ (0 \le x \le x_0)$, що задана явно. Тому

$$|L| = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \left\| \begin{matrix} t = \sqrt{1 + e^{2x}}, \ dx = \dfrac{2tdt}{2(t^2 - 1)}, \ x = \dfrac{1}{2}\ln(t^2 - 1); \\ x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}, \quad x = x_0 \Rightarrow t = \sqrt{1 + e^{2x_0}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2xo}}} \frac{t \cdot tdt}{t^2 - 1} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt =$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} \ln\left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^{2x_0}}} = \sqrt{1 + e^{2x_0}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x_0}} + 1} -$$

$$-\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{1+e^{2x_0}}-1\right)^2}{e^{2x_0}}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=$$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{1+e^{2x_0}}-1\right)-x_0-\ln\left(\sqrt{2}-1\right).\ \blacksquare$$

б) Розглянемо криву, що визначається рівнянням $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Потрібно ввести таку тригонометричну параметризацію, яка після підстановки в ліву частину виділяє в ній тригонометричну одиницю. Такою параметризацією буде $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$ При зростанні параметра t від 0 до 2π крива робить повний оббіг проти руху стрілки годинника і замикається в точці $(a,0)$. Ця крива називається астроїдою; при $a=1$ її графік зображено на рис. 4.4. Скористаємось симетрією кривої, отримаємо

$$|L|=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[a\cos^3 t\right]'^2+\left[a\sin^3 t\right]'^2}\,dt=$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt=$$

$$=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=6a.\ \blacksquare$$

Для допомоги студентові у виконанні індивідуальних завдань на рис. 4.6 – 4.10 наведено графіки деяких кривих, що задані в полярній системі координат:

1) на рис. 4.6 зображено графік кардіоїди $\rho=1+\cos\varphi$;
2) на рис. 4.7 – графік трилисника $\rho=\sin 3\varphi$;
3) на рис. 4.8 – графіки лемніскат а) $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$, б) $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$;
4) на рис. 4.9 – графік кривої $\rho=\cos^4\dfrac{\varphi}{4}$ при а) $-2\pi\le\varphi\le 2\pi$; б) $-\pi\le\varphi\le\pi$, в) $\pi\le\varphi\le 3\pi$;

5) на рис. 4.10 – графіки кривих а) $\rho = \dfrac{1}{\cos^4 \dfrac{\varphi}{4}}$ при $-\pi \le \varphi \le \pi$; б) $\rho = \sin^5 \dfrac{\varphi}{5}$ при $\dfrac{3\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{7\pi}{2}$; в) $\rho = \dfrac{1}{\cos^5 \dfrac{\varphi}{5}}$ при $-\pi \le \varphi \le \pi$.

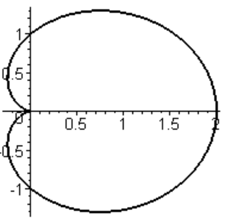


Рис. 4.6.

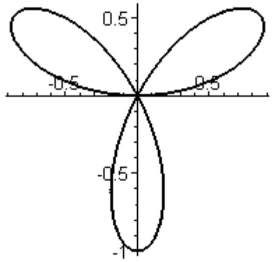
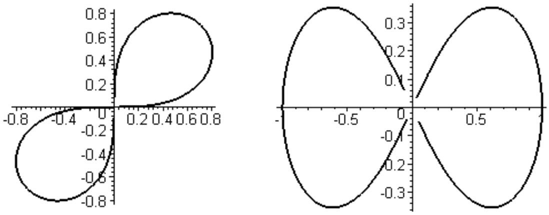
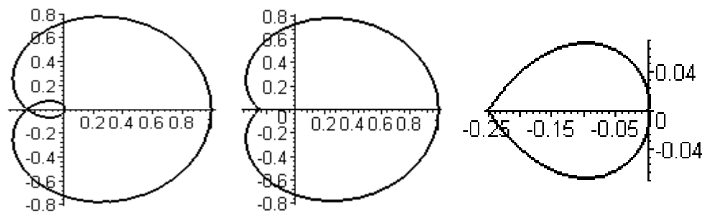


Рис. 4.7.



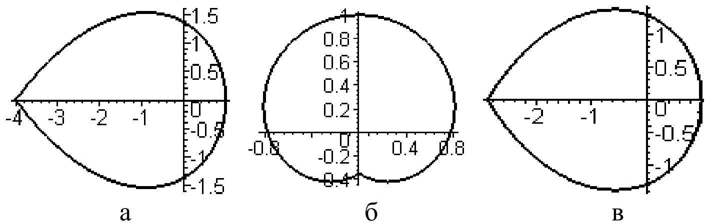
а б

Рис. 4.8.



а б в

Рис. 4.9.



а б в

Рис. 4.10.

в) Задану петлю кривої $\rho=\sin^5\dfrac{\varphi}{5}$ при $\dfrac{3\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{7\pi}{2}$ зображено на рис. 4.10, б. Скористаємось симетрією цієї петлі , отримаємо

$$|L|=2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sqrt{[\rho(\varphi)]^2+[\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi=2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sqrt{\left[\sin^5\frac{\varphi}{5}\right]^2+\left[\sin^4\frac{\varphi}{5}\cos\varphi\right]^2}\,d\varphi=$$

$$=2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\sin^4\frac{\varphi}{5}d\varphi=\frac{1}{4}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\left(\cos\frac{4\varphi}{5}-4\cos\frac{2\varphi}{5}+3\right)d\varphi=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\sin\frac{4\varphi}{5}-10\sin\frac{2\varphi}{5}+3\varphi\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}$$

$$=-\frac{5}{16}\sin\frac{6\pi}{5}+\frac{5}{2}\sin\frac{3\pi}{5}+\frac{3\pi}{4}\,.\ \blacksquare$$

Приклад 4.20 [**2**]. Знайти об'єм тіла, що обмежене поверхнею, утвореною обертанням ділянок кривих:

а) $y=\sin x,\ \ y=0\ \ (0\le x\le\pi)$ навколо осі Ox;

б) $y=\sin x,\ \ y=0\ \ (0\le x\le\pi)$ навколо осі Oy;

в) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ навколо осі Ox;

г) $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ навколо осі Oy.

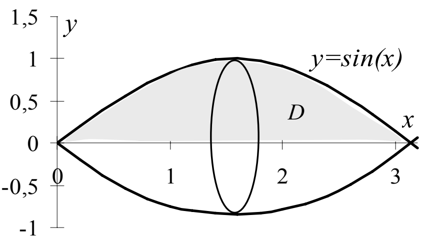


Рис. 4.11.

Розв'язання. а) На рис.4.11. зображено відповідну криволінійну трапецію *D,* що обертається навколо осі *Ох* і схему цього обертання. Об'єм утвореного тіла дорівнює

$$V_x=\pi\int_0^{\pi}y^2(x)dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 xdx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.\ \blacksquare$$

б) Відповідну криволінійну трапецію і схему її обертання навколо осі *Оу* зображено на рис. 4.12, а об'єм утвореного тіла дорівнює

$$V_y = 2\pi\int_0^{\pi} xy(x)dx = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right\| =$$

$$= 2\pi\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x dx \right) =$$

$$= 2\pi\left(\pi + \sin x\Big|_0^{\pi}\right) = 2\pi^2 . \blacksquare$$

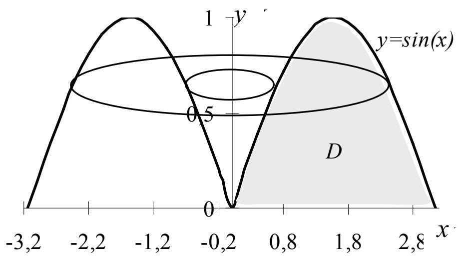


Рис. 4.12.

в) При $a = 1$ графік циклоїди зображено на рис. 3.7. Знайдемо об'єм тіла, що утворюється обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена циклоїдою і віссю абсцис навколо осі *Ox*. При обчисленні застосуємо формулу (4.1).

$$V_x = \pi\int_0^{2\pi} y^2(t)x'(t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = 8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}dt =$$

$$= \left\| \begin{matrix} z = t/2,\ dt = 2dz,\ t = 2z; \\ t = 0 \Rightarrow z = 0,\ t = 2\pi \Rightarrow z = \pi \end{matrix} \right\| = 16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 z dz = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z dz \overset{(4.1)}{=}$$

$$= 32\pi a^3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{5!!}{6!!} = 5\pi^2 a^3 . \ \blacksquare$$

г) Знайдемо об'єм тіла, що утворюється обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена циклоїдою й віссю абсцис навколо осі *Oy*:

$$V_y = 2\pi\int_0^{2\pi} x(t)y(t)x'(t)dt = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + 2\sin t\cos t - \sin t\cos^2 t)dt =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - 2t\cos t + \frac{t}{2} + \frac{t}{2}\cos 2t - \sin t + \sin 2t - \sin t\cos^2 t)dt = 2\pi a^3 \times$$

$$\times\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2} - 2(t\sin t + \cos t) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t\right) + \cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{\cos^3 t}{3} \right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{(2\pi)^2}{2} = 6\pi^3 a^3 . \ \blacksquare$$

Приклад 4.21. Чи є функція $f(x)$ інтегровною на $[0,1]$?

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}, \text{ якщо } x\neq 0 \wedge x\neq \dfrac{1}{\pi n}, \\ 0, \text{ у іншому випадку}\end{cases}$ $(n\in\mathbb{N})$,

б) $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}\right)$, **в)** $f(x)=\left\{\sin\dfrac{1}{x}\right\}$, **г)** $f(x)=\left\{\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}\right\}$.

Тут $\{x\}=x-[x]$ – дробова частина дійсного числа x, де $[x]$ – ціла частина дійсного числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x.

Розв'язання. Перші дві функції мають на відрізку $[0,1]$ розриви в точках, де $\sin\dfrac{1}{x}=0$, тобто в точках $x=\dfrac{1}{\pi n}$ $(n\in\mathbb{N})$, і в точці $x=0$.

а) Функція цього прикладу є необмеженою, наприклад, у околі точки $x=\dfrac{1}{\pi}$, оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}}\sin\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{\pi}}\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}=\infty$. Звідси випливає, що функція не задовольняє *необхідну умову інтегровності функції*, тому не є інтегровною на відрізку $[0,1]$.

б) Функція $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}\right)$ набуває трьох значень –1, 0 і 1, звідки випливає її обмеженість на відрізку $[0,1]$.

Визначимо множину точок розриву даної функції. Ця функція на відрізку $[0,1]$ має розриви першого роду в точках, де $\sin\dfrac{1}{x}=0$, тобто в точках $x=\dfrac{1}{\pi n}$ $(n\in\mathbb{N})$, і при переході через ці точки вона змінює значення з –1 на 1 або навпаки. Крім того, вона має розрив у точці $x=0$. Отже, множина точок розриву цієї функції $A = \left\{ \frac{1}{\pi n} : n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \{0\}$. Ця множина є зчисленною, тому має лебеґову міру нуль (див. *приклад 1.17* випадок 3). Застосовуючи критерій Лебеґа інтегровності функції на відрізку, приходимо до висновку про інтегровність цієї функції на $[0,1]$.

в) Функція $f(x) = \left\{ \sin \frac{1}{x} \right\}$ набуває значення з півінтервалу $[0,1)$, тому є обмеженою. Вона має розрив у точці $x = 0$ і може мати розриви в точках, де $\sin \frac{1}{x}$ набуває цілих значень, а саме:

$\sin \frac{1}{x} = 0$, тобто в точках $x = \frac{1}{\pi n}$ $\left(n \in \mathbb{N} \right)$,

$\sin \frac{1}{x} = \pm 1$, тобто в точках $x = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ $\left(n \in \mathbb{N} \right)$.

Позначимо через $B = \left\{ \frac{1}{\pi n}, \frac{2}{\pi(2n+1)} : n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \{0\}$ множину знайдених вище точок, а через A множину всіх точок розриву заданої функції на відрізку $[0,1]$. Множина B є зчисленною, тому має лебеґову міру нуль. Множина A, як підмножина множини лебеґової міри нуль, також має лебеґову міру нуль; це безпосередньо випливає із означення лебеґової міри нуль (доведіть це ✍**!**).

Отже, виконуються всі умови критерія Лебеґа, звідки випливає інтегровність цієї функції на відрізку $[0,1]$.

У цьому прикладі ми не з'ясовували характер точок розриву функції. Навіть залишили відкритим питання про те, чи всі точки множини B будуть точками розриву. Для відповіді на поставлене питання ці подробиці не знадобилися завдяки властивості повноти міри Лебеґа.

г) Із означення дробової частини випливає, що функція $f(x) = \left\{ \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} \right\}$ є обмеженою, оскільки $0 \le f(x) < 1 \quad \forall x \in [0,1]$. Знайдемо множину можливих точок розриву функції. Для цього потрібно знайти, в яких точках задана функція набуває цілих значень:

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{x}} = m, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{m}, \ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$$x = \frac{1}{(-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{m} + \pi n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Знаходимо точки, в яких знаменник дорівнює нулю: $x = \dfrac{1}{\pi n}$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$, а також не забудемо про точку $x = 0$. Всі ці точки разом утворюють зчисленну множину, як зчисленне об'єднання зчисленних множин, до яких додається одноточкова множина $\{0\}$ [**35**, с. 18–19], тобто

$$B = \bigcup_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{(-1)^n \cdot \arcsin\frac{1}{m} + \pi n}, \ n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ \frac{1}{\pi n}, \ n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \{0\}.$$

Отже, множина B має лебеґову міру нуль, а разом із нею нульову міру має і множина точок розриву цієї функції як підмножина B. Усі умови критерію Лебеґа виконуються, отже, ця функція є інтегровною на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 4.22. Нехай $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$ і $f(n) = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ при $n \in \mathbb{N}$. Довести: $\lim\limits_{n} \displaystyle\int_n^{n^2} \frac{f(x)}{x} dx = 0$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ не зростає на $[1;+\infty)$, то вірною є імплікація: $n \le x \le n^2 \quad \Rightarrow \quad f\left(n^2\right) \le f(x) \le f(n)$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Застосовуючи умову $f(n) = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, отримаємо

$$\frac{1}{n^3} \le f(x) \le \frac{1}{n^{3/2}} \quad \forall x \in \left[n,\, n^2\right].$$

Розглянемо підінтегральну функцію. Подамо її у вигляді добутку $\dfrac{f(x)}{x} = f(x) \cdot g(x)$, де $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Функція $g(x) = \dfrac{1}{x}$ невід'ємна на відрізку інтегрування, також вона неперервна на ньому, тому інтегровна (*теорема 1.9*). Функція $f(x)$ не зростає й обмежена на відрізку $\left[n,\, n^2\right]$, отже, інтегровна на ньому (*теорема 1.12*). Оскільки всі припущення властивості 11° виконуються, має місце оцінка інтеграла:

$$\frac{1}{n^3} \cdot \int_n^{n^2} \frac{dx}{x} \le \int_n^{n^2} \frac{f(x)}{x} dx \le \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \int_n^{n^2} \frac{dx}{x}.$$

Тепер застосуємо теорему про двостороннє обмеження (про «двох міліціонерів») [**3**, с. 94; **4**, с. 57], отримаємо при $n \to \infty$

$$\frac{\ln n}{n^3} \le \int_n^{n^2} \frac{f(x)}{x} dx \le \frac{\ln n}{n^{3/2}}$$

$$\searrow \qquad \Downarrow \qquad \swarrow$$

$$0$$

Таким чином, $\lim\limits_{n} \int_n^{n^2} \dfrac{f(x)}{x} dx = 0$, що й треба було довести. ■

Приклад 4.23 [**2**]. Обчислити невласний інтеграл або довести його розбіжність:

а) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$; **б)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2 + \sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання. **а)** Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$. ЗЗнаменник підінтегральної функції на множині інтегрування в жодній точці проміжку $[2; +\infty)$ не дорівнює нулю, тому скінченних особливих точок ця функція не має. Обчислення проведемо згідно з означенням невласного інтеграла першого роду:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{(x+0,5)^2-(1,5)^2}=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x+0,5-1,5}{x+0,5+1,5}\right|\Bigg|_2^A=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{A-1}{A+2}\right|-\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}(\ln 1+\ln 4)=\frac{\ln 4}{3}.\ \blacksquare$$

б) Розглянемо інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$. З урахуванням того, що особливою є точка $x=0$, яка є внутрішньою точкою відрізка інтегрування, інтеграл подамо у вигляді:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_{-1}^{\varepsilon_1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx\ .$$

Знайдемо невизначений інтеграл з урахуванням множини визначення підінтегральної функції: $2+\sqrt[3]{x}>0$. Отримаємо:

$$\int\frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx=\left\|\begin{matrix}t=\sqrt[3]{x},\ x=t^3,\\ dx=3t^2dt\end{matrix}\right\|=\int\frac{\ln\left(2+t\right)}{t}\cdot 3t^2dt=3\int t\ln\left(2+t\right)dt=$$

$$=\left\|\begin{matrix}u=\ln\left(2+t\right), & du=\dfrac{dt}{2+t},\\ dv=t\,dt, & v=\dfrac{t^2}{2}\end{matrix}\right\|=\frac{3t^2}{2}\ln\left(2+t\right)-\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{2+t}=\frac{3t^2}{2}\ln\left(2+t\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\int\left(t-2+\frac{4}{2+t}\right)dt=\frac{3t^2}{2}\ln\left(2+t\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{t^2}{2}-2t+4\ln\left(2+t\right)\right)+C=$$

$$=\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\sqrt[3]{x}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\right)+C.$$

Після чого одержимо:

$$I=\lim_{\varepsilon_1\to0}\left(\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\sqrt[3]{x}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\right)\right)\Bigg|_{-1}^{\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to0}\left(\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-2\sqrt[3]{x}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\right)\right)\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1}=$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{(\varepsilon_1)^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_1}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(\varepsilon_1)^2}}{2}-2\sqrt[3]{\varepsilon_1}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_1}\right)\right)\right)+\frac{3}{4}+3-$$

$$-\frac{9}{2}\ln 3-\frac{3}{4}+3-\lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left(\frac{3\sqrt[3]{(\varepsilon_2)^2}}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt[3]{(\varepsilon_2)^2}}{2}-2\sqrt[3]{\varepsilon_2}+4\ln\left(2+\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)\right)\right)=$$

$$=-\frac{9}{2}\ln 3+6. \ \blacksquare$$

Приклад 4.24 [**2**]. Дослідити невласні інтеграли на збіжність:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$, **б)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$, **в)** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)dx}{x^3}$.

Розв'язання. а) Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$ розбиваємо на суму невласних інтегралів першого й другого роду:

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx=\int\limits_0^{1}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx.$$

Нехай $x \to +0$, тоді, застосовуючи наслідок із першої істотної границі, отримаємо $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} \sim \frac{ax}{x^n} \sim \frac{a}{x^{n-1}}$. З ознаки порівняння в граничній формі отримаємо, що перший із інтегралів суми (він є невласним інтегралом другого роду) збігається, якщо $n-1<1$, тобто $n<2$.

Нехай $x \to +\infty$, тоді з нерівності $\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n} \le \frac{\pi/2}{x^n}$ і ознаки порівняння отримаємо, що із збіжності інтеграла від функції, яка стоїть в цій нерівності справа буде випливати збіжність інтеграла від функції, що стоїть зліва. Оскільки невласний інтеграл першого роду $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ збігається за умови $n>1$, то за тією ж умовою буде збігатися й інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}dx$.

Для збіжності заданого інтеграла потрібно, щоб обидва інтеграли суми збігалися одночасно, тобто повинна задовольнятися система нерівностей $\begin{cases} n > 1, \\ n < 2. \end{cases}$ Її розв'язком є подвійна нерівність $1 < n < 2$. ■

б) Невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$ записуємо у вигляді суми $\int\limits_0^{+\infty} \ldots = \int\limits_0^{1} \ldots + \int\limits_1^{+\infty} \ldots$.

Нехай $x \to +0$, тоді $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x^2+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ і в ознаці порівняння (для невласного інтеграла другого роду) $\lambda = 1/2 < 1$, тому перший інтеграл суми збігається.

Нехай $x \to +\infty$, тоді $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ і в ознаці порівняння (для невласного інтеграла першого роду) $\lambda = 3/2 > 1$, тому другий інтеграл суми збігається.

Висновок: заданий інтеграл збігається. ■

в) Невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)dx}{x^3}$ записуємо у вигляді суми $\int\limits_0^{+\infty} \ldots = \int\limits_0^{1} \ldots + \int\limits_1^{+\infty} \ldots$.

Нехай $x \to +0$, тоді, використовуючи наслідок з другої істотної границі $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, отримаємо: $\frac{\ln(1+x)}{x^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$. В ознаці порівняння для невласного інтеграла другого роду $\lambda = 2 \geq 1$, тому перший інтеграл суми розбігається.

Оскільки перший інтеграл суми розбігається, то даний невласний інтеграл розбігається. ■

Приклад 4.25 [**2**]. Дослідити невласні інтеграли на збіжність:

а) $\int\limits_0^1 \ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$, **б)** $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$.

Розв'язання. а) Інтеграл $\int\limits_0^1 \ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx$ на відрізку інтегрування містить одну особливу точку $x=\frac{\pi}{6}$, яка є внутрішньою точкою відрізка $[0,1]$. Тому подамо інтеграл сумою двох невласних інтегралів другого роду: $\int\limits_0^1 \ldots = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ldots + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^1 \ldots$.

Розглянемо перший інтеграл суми. Перепишемо його у вигляді:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left|1-4\sin^2 x\right|dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(1+2\sin x\right)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}-\varepsilon} \ln\left(1-2\sin x\right)dx .$$

Перший інтеграл у правій частині є визначеним інтегралом від неперервної функції на відрізку інтегрування, тому він існує (*теорема 1.9*). Розглянемо другий доданок. Зробимо перетворення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}-\varepsilon} \ln\left(1-2\sin x\right)dx = \left\|\begin{array}{l} t=\frac{\pi}{6}-x,\quad x=\frac{\pi}{6}-t,\ dx=-dt, \\ x=0 \Rightarrow t=\frac{\pi}{6},\ \ x=\frac{\pi}{6}-\varepsilon \Rightarrow t=\varepsilon \end{array}\right\| =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(1-2\sin\left(\frac{\pi}{6}-t\right)\right)dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt.$$

Розглянемо границю:

$$A = \lim_{t\to +0}\frac{\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)}{\ln t} = \lim_{t\to +0}\left(\frac{\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\right)}{\ln t} + \frac{\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)}{\ln t}\right);$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\right)}{\ln t}=0;$$

$$\underset{\exists}{\lim_{t\to+0}\frac{\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)}{\ln t}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{\underset{\Leftarrow}{=}}\lim_{t\to+0}\frac{\left(\ln\left(\sin\frac{t}{2}\right)\right)'}{(\ln t)'}=\underset{\exists}{\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\cdot t}{\sin\frac{t}{2}}}=1;$$

Отже, шукана границя $A=1$. Тоді, за ознакою порівняння в граничній формі, інтеграли $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt$ і $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt$ збігаються або розбігаються одночасно. Розглянемо інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt=\left\|\begin{matrix}u=\ln t,\ du=\dfrac{dt}{t},\\ dv=dt,\ v=t\end{matrix}\right\|=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(t\ln t\Big|_\varepsilon^{\frac{\pi}{6}}-\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{6}}dt\right)=$$

$$=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}$$

$$=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}}=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon=\frac{\pi}{6}\ln\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}.$$

Отже, інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln t\,dt$ збігається, а разом із ним збігається й інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\left(4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\right)dt$. Таким чином, інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\ln\left|1-4\sin^2x\right|dx$ збігається. Аналогічно доводиться збіжність інтеграла $\int_{\frac{\pi}{6}}^{1}\ln\left|1-4\sin^2x\right|dx$. В результаті приходимо до висновку про збіжність цього інтеграла.

б) Подамо інтеграл $\int_0^{+\infty}x^ne^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$ сумою $\int_0^{+\infty}\ldots=\int_0^1\ldots+\int_1^{+\infty}\ldots$.

Нехай $x \to +\infty$. Для оцінки підінтегральної функції застосуємо нерівність $e^x \geq x^p$, яка є вірною для кожного показника степеня $p > 0$ при достатньо великих $x > 0$. Покажемо справедливість цього твердження. Для цього до границі $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^p}$ застосуємо правило Лопіталя $[p]+1$ разів (тут $[p]$ – ціла частина числа p), отримаємо:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{px^{p-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{p(p-1)x^{p-2}}=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-[p]-p}e^x}{p(p-1)\cdot...\cdot(p-[p])}=+\infty .$$

Тепер застосуємо означення границі за Коші:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \Rightarrow \text{ для } E=1\ \exists\Delta>0:\forall x>0:\quad x>\Delta\Rightarrow\frac{e^x}{x^p}>E=1 .$$

Це означає, що при $x > \Delta$ виконується нерівність $e^x \geq x^p$.

Застосовуючи доведену нерівність, отримаємо при $x > \Delta$:

$$x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{x^n}{e^{x^2+\frac{1}{x^2}}}\leq\frac{x^n}{e^x}\leq\frac{x^n}{x^p}=\frac{1}{x^{p-n}} .$$

Оскільки $p > 0$ може набувати будь-якого значення, то обираючи $p = |n| + 2$, одержимо

$$x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\leq\frac{1}{x^{|n|-n+2}}\leq\frac{1}{x^2} .$$

Звідки випливає, що, за частковою ознакою порівняння, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx$ збігається при будь-яких n.

Розглянемо інтеграл

$$\int_0^1 x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}dx=\left\|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x},\ x=\dfrac{1}{t}, \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2},\ \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & +\infty & 1 \end{array} \end{array}\right\|=\int_1^{+\infty} t^{-n-2}e^{-\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}dt .$$

Із оцінки

$$t^{-n-2}e^{-\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}=\frac{t^{-n-2}}{e^{t^2+\frac{1}{t^2}}}\le\frac{t^{-n-2}}{e^t}\le\frac{t^{-n-2}}{t^p}=\left\|p=|n|+2>0\right\|=\frac{1}{t^{|n|+n+4}}\le\frac{1}{t^4}$$

випливає, що він збігається при будь-яких $n\in\mathbb{R}$.

Висновок: заданий інтеграл збігається для будь-яких $n\in\mathbb{R}$. ■

§ 3. Наближене обчислення інтегралів

1. Варіанти індивідуальних типових завдань

Обчислити визначений інтеграл із точністю до 10^{-3} методом прямокутників (варіанти 1-10); методом трапецій (варіанти 11-20); методом Сімпсона (варіанти 21-30). Оцінити похибку.

1. $\int\limits_0^2\frac{dx}{4+x^2}$ 2. $\int\limits_0^2\sqrt{1+x^3}\,dx$ 3. $\int\limits_0^2 x^2e^{3x}dx$

4. $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ 5. $\int\limits_2^3\frac{dx}{\ln x}$ 6. $\int\limits_2^4 x^4\ln x\,dx$

7. $\int\limits_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}}dx$ 8. $\int\limits_0^1\sqrt[3]{x}\cos x\,dx$ 9. $\int\limits_0^{\pi}x^2\sin x\,dx$

10. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ 11. $\int\limits_1^4\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ 12. $\int\limits_0^1 x\cos x\,dx$

13. $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{5+x^6}}$ 14. $\int\limits_1^2\sin^2x\cos^3x\,dx$ 15. $\int\limits_0^1 e^{3x}\cos^3x\,dx$

16. $\int\limits_1^{1,5}\frac{dx}{x\sqrt{3+2x}}$ 17. $\int\limits_1^4\frac{1+\sqrt{x^3}}{x^2}dx$ 18. $\int\limits_2^3 e^{5x}\sin^2x\,dx$

19. $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^2\sqrt{4x-2}}$ 20. $\int\limits_1^4 x^2\sqrt{6-x^2}\,dx$ 21. $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin x}$

22. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1-\sin 2x}$ 23. $\int\limits_2^{\pi}\sin^4 5x\,dx$ 24. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{5x}dx$

25. $\int\limits_{1}^{\pi}\frac{xdx}{1+\sin 3x}$ 26. $\int\limits_{0,5}^{1}\frac{\cos\pi x}{x^3}dx$ 27. $\int\limits_{2}^{\pi}\frac{dx}{2+3\cos x}$

28. $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{5+2e^{3x}}$ 29. $\int\limits_{1}^{2}\frac{3^{2x}}{x}dx$ 30. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\cos^3\pi x\sin^2\pi x}$.

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 4.26. Обчислити наближено $\int\limits_{0}^{2}\frac{e^{-x}}{1+x}dx$, застосовуючи формули прямокутників, трапецій, Сімпсона з похибкою $\varepsilon = 0,05$.

Розв'язання. Спочатку визначимо крок h, з яким необхідно розбити відрізок [0;2], щоб отримати задану точність. З огляду на формули (1.37), (1.38), (1.42) знайдемо максимальні значення другої та четвертої похідної підінтегральної функції $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+x}$ на відрізку [0;2].

Друга похідна дорівнює $f''(x)=e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2}{(1+x)^2}+\frac{2}{(1+x)^3}\right)$, вона матиме екстремуми, якщо $f'''(x)=0$. Маємо

$$f'''(x)=-e^{-x}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{3}{(1+x)^2}+\frac{6}{(1+x)^3}+\frac{6}{(1+x)^4}\right).$$

Тут множник $-e^{-x}\neq 0$ для будь-яких значень $x\in[0;2]$. А вираз у дужках являє собою суму додатних доданків на відрізку [0;2], тому вираз у дужках не дорівнює 0. Таким, чином, на відрізку [0;2] $f'''(x)\neq 0$. Тому максимального за модулем значення на [0;2] функція $f''(x)$ досягає на кінцях відрізка. Маємо $f''(0)=5$, $f''(2)=\frac{17}{27e^2}$, звідки $M_2=\max\limits_{[0;2]}|f''(x)|=5$.

З формули (1.34) та враховуючи, що $h=\frac{b-a}{n}$, маємо

$$n_\text{п} \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\varepsilon}}, \; n_\text{п} \geq \sqrt{\frac{5(2-0)^3}{24 \cdot 0,05}} \approx 5,77,$$

приймаємо $n_\text{п} = 6$, тоді $h_\text{п} = 0,3333$.

З формули (1.37) маємо

$$n_\text{т} \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12\varepsilon}}, \; n_\text{т} \geq \sqrt{\frac{5(2-0)^3}{12 \cdot 0,05}} \approx 8,16,$$

візьмемо $n_\text{т} = 9$, тоді $h_\text{т} = 0,2222$.

Четверта похідна дорівнює

$$f^{IV}(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{12}{(1+x)^3} + \frac{24}{(1+x)^4} + \frac{24}{(1+x)^5}\right).$$

вона матиме локальні екстремуми, якщо $f^{V}(x) = 0$. Маємо:

$$f^{V}(x) = -e^{-x}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{5}{(1+x)^2} + \frac{20}{(1+x)^3} + \frac{60}{(1+x)^4} + \frac{120}{(1+x)^5} + \frac{120}{(1+x)^6}\right).$$

Тут множник $-e^{-x} \neq 0$ при всіх значеннях $x \in [0;2]$. Вираз у дужках є сумою додатних доданків на відрізку [0;2], тому вираз у дужках не дорівнює нулю. Таким, чином, $f^{V}(x) \neq 0$ на відрізку [0;2]. Тому максимального за модулем значення на [0;2] функція $f^{IV}(x)$ досягає на кінцях відрізка. Маємо $f^{IV}(0) = 65$, $f^{IV}(2) = \dfrac{131}{81e^2}$, звідки $M_4 = \max\limits_{[0;2]}\left|f^{IV}(x)\right| = 65$.

З формули (1.42) маємо

$$n_\text{C} \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{2880\varepsilon}}, \; n_\text{C} \geq \sqrt[4]{\frac{65 \cdot (2-0)^5}{2880 \cdot 0,05}} \approx 1,95,$$

обираємо $n_\text{C} = 2$, тоді $h_\text{C} = 1$.

Складемо таблиці значень для $y = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$ при $n_\text{п} = 6$, $n_\text{т} = 9$ и $n_\text{C} = 2$ (див. табл. 4.1).

Таблиця 4.1 –

i	x_i	$x_{i-\frac{1}{2}}$	$y_{i-\frac{1}{2}}$
0	0		
		0,167	0,726
1	0,333		
		0,5	0,404
2	0,667		
		0,833	0,237
3	1		
		1,167	0,144
4	1,333		
		1,5	0,089
5	1,667		
		1,833	0,056
6	2		
Σ			1,656

i	x_i	y_i	
0	0	1	
1	0,222		0,655
2	0,444		0,444
3	0,667		0,308
4	0,889		0,218
5	1,111		0,156
6	1,333		0,113
7	1,556		0,083
8	1,778		0,061
9	2	0,045	
Σ		1,045	2,038

i	x_i	$x_{i-½}$	y_i	$y_{i-½}$
0	0		1	
		0,5		0,404
1	1		0,184	
		1,5		0,089
2	2		0,045	
Σ				0,493

Проведемо обчислення за формулою прямокутників (1.36), отримуємо:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx 0,333\cdot 1,656 = 0,552 .$$

Використовуючи формулу трапецій (1.37), маємо:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx 0,222\cdot\left(\frac{1,045}{2}+2,038\right) = 0,568 .$$

Застосовуючи формулу Сімпсона (1.41), отримуємо:

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x}dx \approx \frac{1}{6}\left(1+0,045+4\cdot 0,494+2\cdot 0,184\right)=0,564 .$$

§4. Функції обмеженої варіації та інтеграл Рімана-Стілтьєса

1. Варіанти індивідуальних типових завдань

Тут N – номер прізвища студента в журналі академічної групи, g – остання цифра номера групи. Якщо t – дійсне число, то $[t]$ – ціла частина числа t, а $\{t\}=t-[t]$ – дробова частина числа t.

1. Побудувати монотонну функцію, що має N точок розриву на відрізку $[0;(N+1)\cdot g]$.
2. Чи мають функції обмежену варіацію?

а) $f(x)=\begin{cases} x^{N+g}\sin\dfrac{\pi}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

б) $f(x)=(Nx^2+gx)\cos 3x$ на відрізку $[0;\pi]$,

в) $f(x)=\begin{cases} \left[x^{-\frac{N}{g}}\right], & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

г) $f(x)=\begin{cases} \log_{N+1}^{g} x, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$?

3. Знайти варіацію функцій

а) $f(x)=\begin{cases} 3x+g, & 0\le x<1,\ 2<x<3; \\ N, & x=1,2,3; \\ \left(x-g\right)^2, & 1<x<2; \\ \sin\pi x, & 3<x<4; \\ N-g, & x=4 \end{cases}$ на відрізку $[0;4]$;

б) $f(x)=\begin{cases}\left\{\sin\dfrac{2\pi x}{g}\right\}, 0<x<2g;\\ N, \qquad\qquad x=0,2g,3g;\\ \left(\dfrac{x}{g}-1\right)^2, \ 2g<x<3g\end{cases}$ на відрізку $[0;3g]$.

4. Подати кожну з функцій прикладу 3 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.
5. Подати функцію

$$f(x)=\begin{cases}x+g, & \text{при} -2\le x\le -1,\\ 2, & \text{при} -1<x<0,\\ N-x, & \text{при } 0\le x\le 2\end{cases}$$

у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

6. Обчислити

а) $(S)\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{3g}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2g}}}\dfrac{1}{\sin gx^2}\,d(gx^2)$; б) $(S)\int\limits_0^1\left(Nx+g\right)d(\mathrm{arctg}(Nx+g))$;

в) $(S)\int\limits_0^1\dfrac{1}{Nx+g}\,d(\mathrm{arctg}(Nx+g))$; г) $(S)\int\limits_0^{\pi}(gx+N)^2\,d(\cos x)$.

7. Обчислити інтеграли:

а) $(S)\int\limits_{-1}^{3}x\,dh(x)$, де $h(x)=\begin{cases}g, & \text{при } x=-1,\\ N, & \text{при} -1<x<2,\\ N+g, & \text{при } 2\le x\le 3;\end{cases}$

б) $(S)\int\limits_0^2 x^2\,dh(x)$, де $h(x)=\begin{cases}-g, & \text{при } 0\le x<\dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{при } \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{3}{2},\\ N+2, & \text{при } x=\dfrac{3}{2},\\ N-2, & \text{при } \dfrac{3}{2}<x\le 2.\end{cases}$

Знайти варіацію функції $h(x)$ на відрізку а) $[-1;3]$, б) $[0;2]$.

8. Обчислити інтеграли $(S)\int_{-2}^{2} f(x)dh(x)$ і $(S)\int_{-2}^{2} h(x)df(x)$, де

$$f(x)=\cos\pi x\,,\ h(x)=\begin{cases} g+1, & -2<x<-1; \\ N+2, & x=-2;\ x=-1; \\ g+3, & -1<x<0; \\ N, & x=0;\ x=1;\ x=2; \\ g-1, & 0<x<1;\ 1<x<2. \end{cases}$$

Обчислити варіації кожної з функцій на відрізку $[-2;2]$.

9. Обчислити $(S)\int_{a}^{b} h(x)d(f(x))$ і $(S)\int_{a}^{b} f(x)d(h(x))$, якщо

а) $f(x)=\begin{cases} 3x+g, & 0\le x<1,\ 2<x<3; \\ N, & x=1,2,3; \\ (x-g)^2, & 1<x<2; \end{cases}$, $h(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, $[a;b]=[0;3]$;

б) $f(x)=\log_2 x$; $h(x)=\begin{cases} -x+g, & \dfrac{1}{2}\le x<1,\ 2<x<4; \\ N, & x=1,2,8; \\ (x-5)^2, & 1<x<2,\ 4<x<8. \end{cases}$ $[a;b]=\left[\dfrac{1}{2};8\right]$.

Обчислити варіацію кожної функції на відрізку $[a;b]$.

10. Обчислити інтеграл $(S)\int_{1}^{N+1}\dfrac{1}{x}d\{\log_{N+1}x\}$.

2. Приклад виконання індивідуального завдання

Приклад 4.27. Чи мають функції обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$?

а) $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x, & \text{якщо } x\neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x=0; \end{cases}$

б) $f(x)=x^3+2x+3-\sin(5x+1)-(3x^2+7x)\cos 4x$;

в) $f(x)=\begin{cases}[\ln x], & \text{якщо } x\neq 0;\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$

Розв'язання. а) При розв'язанні будемо застосовувати *теорему 1.42* про обмеженість варіації у монотонної функції та наслідок із *теореми 1.46* про адитивність повної варіації.

Дослідження на монотонність проведемо за допомогою похідної. Знайдемо похідну заданої функції в точці $x=0$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot\ln\Delta x-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\ln\Delta x=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\Delta x}{(\Delta x)^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=[\text{правило Лопіталя}]\overset{?}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{-1}}{-(\Delta x)^{-2}}=-\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

При $x\in(0;1]$

$$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1).$$

Отже,

$$f'(x)=0;\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\ 2\ln x+1=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=\dfrac{1}{\sqrt{e}};\end{array}\right.$$

$$f'(x)\geq 0 \text{ при } x\in\left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right]\Rightarrow f(x)-\nearrow \text{ на }\left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right];$$

$$f'(x)\leq 0 \text{ при } x\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]\Rightarrow f(x)-\searrow \text{ на }\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right].$$

Таким чином, унаслідок *теореми 1.42*, на кожному з відрізків $\left[0;\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ та $\left[\frac{1}{\sqrt{e}};1\right]$ функція має обмежену варіацію, а тому має обмежену варіацію на відрізку $[0;1]$ (*за наслідком 1.14*). ■

б) Похідна функції $f(x)$ на відрізку $[0,1]$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 - 5\cos(5x+1) - (6x+7)\cos 4x + 4(3x^2+7x)\sin 4x$$

є функцією, неперервною на відрізку $[0,1]$. Тоді, за першою теоремою Вейєрштрасса [**3**, с.186; **4**, с.175], $f'(x)$ – обмежена на $[0,1]$.

Отже, за *наслідком 1.12*, задана функція має обмежену варіацію на відрізку $[0,1]$.

в) Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln x\right] = -\infty$, то задана функція необмежена в околі точки 0, тому для неї не виконується *необхідна умова обмеженості варіації*. Отже, ця функція має необмежену варіацію на відрізку $[0,1]$. ■

Приклад 4.28. Знайти повну варіацію функцій

а) $$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{при } x = -2; \\ x+4, & \text{при } x \in (-2;-1); \\ 4, & \text{при } x = -1; \\ -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, & \text{при } x \in (-1;1); \\ 2, & \text{при } x = 1; \\ x, & \text{при } x \in (1;2); \\ 1, & \text{при } x = 2 \end{cases}$$

на відрізку $[-2;2]$;

б) $$f(x) = \begin{cases} 1+4(x+0,5)^2, & \text{при } x \in (-1;-0,5)\cup(-0,5;0); \\ 3, & \text{при } x = -1,\ x = 0,5,\ x = 5; \\ 1, & \text{при } x = 0,\ x = 4; \\ \{\sin \pi x\}, & \text{при } x \in (0;3]; \\ x-2, & \text{при } x \in (3;4) \\ 7-x, & \text{при } x \in (4;5) \end{cases}$$

на відрізку $[-1;5]$.

Розв'язання. а) Графік заданої функції побудовано на рис. 4.13.

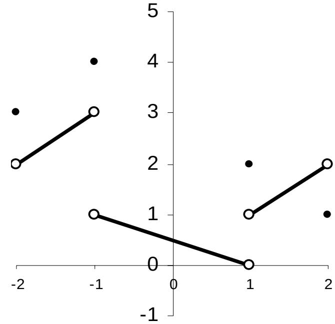


Рис. 4.14.

Для обчислення варіації цієї функції знайдемо значення величин, які наведено в табл. 4.2:

Таблиця 4.2 –

Зміна функції на інтервалі	Лівий стрибок	Правий стрибок
		$\left\|f(-2)-f(-2+0)\right\|=1$
$\left\|f(-2+0)-f(-1-0)\right\|=1$		
	$\left\|f(-1-0)-f(-1)\right\|=1$	$\left\|f(-1)-f(-1+0)\right\|=3$
$\left\|f(-1+0)-f(1-0)\right\|=1$	$\left\|f(1-0)-f(1)\right\|=2$	$\left\|f(1)-f(1+0)\right\|=1$
$\left\|f(1+0)-f(2-0)\right\|=1$	$\left\|f(2-0)-f(2)\right\|=1$	

Застосовуючи формулу (3.7), що потребує підсумовування усіх значень із таблиці, отримаємо: $\overset{2}{\underset{-2}{V}}(f)=12$.

б) В прикладі 3.208 викладено подробиці щодо побудови графіка функції $y=\{\sin \pi x\}$, який зображено на рис. 3.31. Графік такої функції побудовано на рис. 4.15.

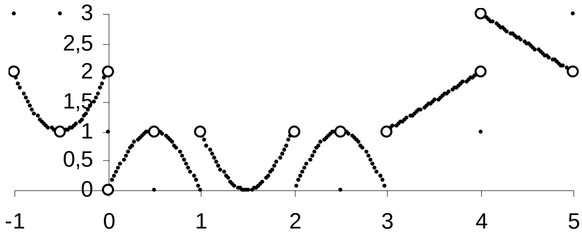


Рис. 4.15.

Для обчислення варіації функції $f(x)$ знайдемо значення величин, які зведемо в табл. 4.3:

Таблиця 4.3 –

Зміна функції на інтервалі чи півінтервалі	Лівий стрибок	Правий стрибок
		$\lvert f(-1)-f(-1+0)\rvert=1$
$\lvert f(-1+0)-f(-0,5-0)\rvert=1$		
	$\lvert f(-0,5-0)-f(-0,5)\rvert=2$	$\lvert f(-0,5)-f(-0,5+0)\rvert=2$
$\lvert f(-0,5+0)-f(0-0)\rvert=1$	$\lvert f(0-0)-f(0)\rvert=1$	$\lvert f(0)-f(0+0)\rvert=1$
$\lvert f(0+0)-f(0,5-0)\rvert=1$	$\lvert f(0,5-0)-f(0,5)\rvert=1$	$\lvert f(0,5)-f(0,5+0)\rvert=1$
$\lvert f(0,5+0)-f(1)\rvert=1$		$\lvert f(1)-f(1+0)\rvert=1$
$\lvert f(1+0)-f(1,5)\rvert=1$		
$\lvert f(1,5)-f(2-0)\rvert=1$	$\lvert f(2-0)-f(2)\rvert=1$	
$\lvert f(2)-f(2,5-0)\rvert=1$	$\lvert f(2,5-0)-f(2,5)\rvert=1$	$\lvert f(2,5)-f(2,5+0)\rvert=1$
$\lvert f(2,5+0)-f(3)\rvert=1$		$\lvert f(3)-f(3+0)\rvert=1$
$\lvert f(3+0)-f(4-0)\rvert=1$	$\lvert f(4-0)-f(4)\rvert=1$	$\lvert f(4)-f(4+0)\rvert=2$
$\lvert f(4+0)-f(5-0)\rvert=1$	$\lvert f(5-0)-f(5)\rvert=1$	

Застосовуючи формулу (3.7), отримаємо: $\overset{5}{\underset{-1}{V}}(f)=28$. ■

Приклад 4.29. Подати кожну з функцій прикладу 4.28 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.

Розв'язання. В цьому прикладі мова йде про застосування *теореми 1.48*. Для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a,b]$, *функція стрибків* визначається співвідношеннями:

$$s_f(a)=0,$$

$$s_f(x)=f(a+0)-f(a)+\sum_{x_k<x}\left[f\left(x_k+0\right)-f\left(x_k-0\right)\right]+f(x)-f(x-0),$$

де $\{x_k\}_k\subset(a,b)$ – точки розриву функції $f(x)$.

а) У табл. 4.2 наведено значення модулів усіх односторонніх стрибків заданої функції. Враховуючи напрям стрибка («вгору» або «вниз»), побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

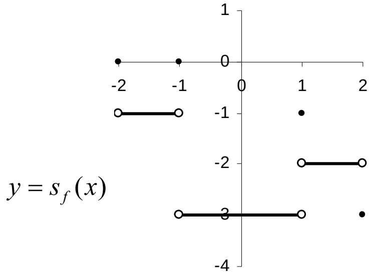
$$s_f(x)=\begin{cases} 0, & x=-2,\\ -1, & x\in(-2,-1),\\ -1+1=0, & x=-1,\\ 0+(-3)=-3, & x\in(-1,1),\\ -3+2=-1, & x=1,\\ -1+(-1)=-2, & x\in(1,2),\\ -2+(-1)=-3, & x=2.\end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x)=f(x)-s_f(x)=\begin{cases} 3-0=3, & x=-2;\\ x+4-(-1)=x+5, & x\in(-2;-1);\\ 4-0=4, & x=-1;\\ \left(-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)-(-3)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}, & x\in(-1;1);\\ 2-(-1)=3, & x=1;\\ x-(-2)=x+2, & x\in(1;2);\\ 1-(-3)=4, & x=2;\end{cases} =$$

$$=\begin{cases} x+5, & x\in[-2;-1];\\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}, & x\in(-1;1];\\ x+2, & x\in(1;2].\end{cases}$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x)=s_f(x)+\varphi(x)$.



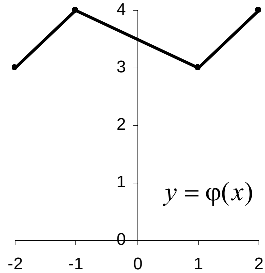


Рис. 4.16.

На рис. 4.16 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■

б) Враховуючи значення модулів стрибків, наведених у табл. 4.3 та їхній напрям, побудуємо функцію стрибків функції $f(x)$:

$$s_f(x) = \begin{cases} 0, & x = -1; \\ -1, & x \in (-1; -0,5); \\ -1 + 2 = 1, & x = -0,5; \\ 1 + (-2) = -1, & x \in (-0,5; 0); \\ -1 + (-1) = -2, & x = 0; \\ -2 + (-1) = -3, & x \in (0; 0,5); \\ -3 + (-1) = -4, & x = 0,5; \\ -4 + 1 = -3, & x \in (0,5; 1]; \\ -3 + 1 = -2, & x \in (1; 2); \\ -2 + (-1) = -3, & x \in [2; 2,5); \\ -3 + (-1) = -4, & x = 2,5; \\ -4 + 1 = -3, & x \in (2,5; 3]; \\ -3 + 1 = -2, & x \in (3; 4); \\ -2 + (-1) = -3, & x = 4; \\ -3 + 2 = -1, & x \in (4; 5); \\ -1 + 1 = 0, & x = 5. \end{cases}$$

Тоді

$$\varphi(x) = f(x) - s_f(x) = \begin{cases} 2 + 4(x + 0,5)^2, & x \in [-1; 0]; \\ \sin \pi x + 3, & x \in (0; 3]; \\ x, & x \in (3; 4]; \\ 8 - x, & x \in (4; 5] \end{cases}$$

є неперервною на $[0;1]$. Отже, $f(x) = s_f(x) + \varphi(x)$.

$y = s_f(x)$

$y = \varphi(x)$

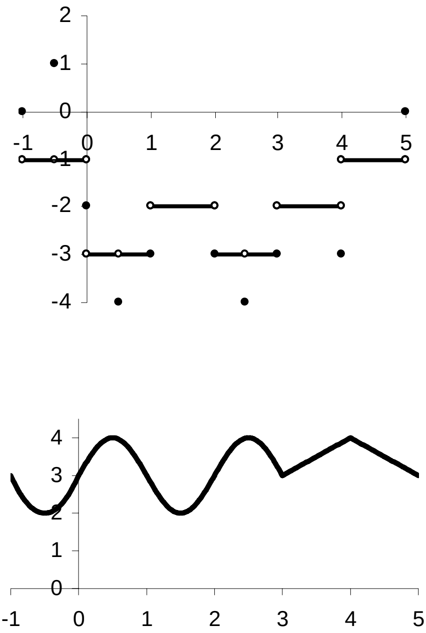


Рис. 4.17.

На рис. 4.17 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі.

■

Приклад 4.30. Функцію з прикладу 4.28 а подати у вигляді різниці двох зростаючих функцій на відрізку $[-2;2]$.

Розв'язання. З *теореми 1.47* випливає, що функцію $f(x)$ можна подати у вигляді різниці зростаючих $f(x) = \pi(x) - \varphi(x)$, де

$$\pi(x) = \mathop{V}_{-2}^{x}(f), \quad \varphi(x) = \pi(x) - f(x), \quad x \in [-2;2].$$

За означенням, $\pi(0) = 0$. Якщо $x \in (-2;-1)$, то $\mathop{V}_{-2}^{x}(f)$ лінійно зростає від значень, близьких до 1, до значень, близьких до 2, тому $\mathop{V}_{-2}^{x}(f) = x + 3$. Якщо

$x=-1$, то $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=3$. При $x=-1+h\in(-1;1)$ варіація дорівнює $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=6+\frac{1}{2}h=6+\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}$. Для $x=1$ маємо: $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=9$. Для $x=1+h\in(1;2)$ варіація дорівнює $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=10+h=10+(x-1)=x+9$. Нарешті, при $x=1$ маємо: $\overset{x}{\underset{-2}{V}}(f)=12$.Отже,

$$\pi(x)=\begin{cases} 0, & x=-2; \\ x+3, & x\in(-2;-1); \\ 3, & x=-1; \\ \frac{1}{2}x+\frac{13}{2}, & x\in(-1;1); \\ 9, & x=1; \\ x+9, & x\in(1;2); \\ 12, & x=2, \end{cases}$$

тоді

$$\varphi(x)=\pi(x)-f(x)=\begin{cases} 0-3=-3, & x=-2; \\ (x+3)-(x+4)=-1, & x\in(-2;-1); \\ 3-4=-1, & x=-1; \\ \left(\frac{1}{2}x+\frac{13}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=x+6, & x\in(-1;1); \\ 9-2=7, & x=1; \\ x+9-x=9, & x\in(1;2); \\ 12-1=11, & x=2; \end{cases}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases} -3, & x=-2; \\ -1, & x\in(-2;-1]; \\ x+6, & x\in(-1;1]; \\ 9, & x\in(1;2); \\ 11, & x=2. \end{cases}$$

На рис. 4.18 зображено графіки функцій, що вимагалися умовою задачі. ■

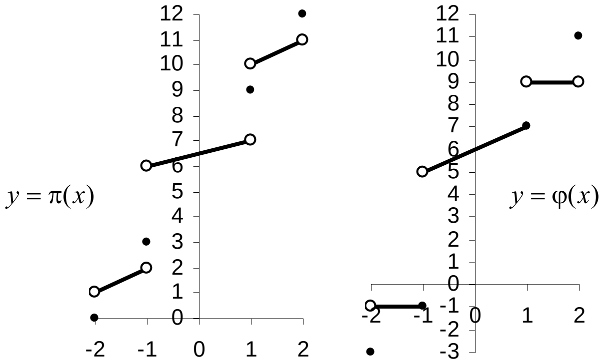


Рис. 4.18.

Приклад 4.31. Обчислити інтеграли Стілтьєса

а) $(S)\int\limits_0^1 \frac{d\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+2}$, **б)** $(S)\int\limits_0^1 \left(x^2+1\right) d\left(e^{5x-3}\right)$.

Розв'язання. **а)** В даному випадку $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $g(x)=\ln\left(x+1\right)$. Функція $f(x)$ – неперервна на $[0;1]$, функція $g(x)$ має неперервну, а тому інтегровну на $[0;1]$ похідну $g'(x)=\frac{1}{x+1}$. Тому застосовуємо теорему про зв'язок між інтегралом Стілтьєса й Рімана:

$$(S)\int\limits_0^1 \frac{d\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+2}=(R)\int\limits_0^1 \frac{\left(\ln\left(x+1\right)\right)'}{x+2}dx=(R)\int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=$$

$$=(R)\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=\ln\frac{4}{3}.$$

б) Формально застосуємо двічі формулу інтегрування частинами:

$$(S)\int\limits_0^1 \left(x^2+1\right) d\left(e^{5x-3}\right)=\left(\left(x^2+1\right)\cdot e^{5x-3}\right)\Big|_0^1-(S)\int\limits_0^1 2x\,d\left(e^{5x-3}\right)=$$

$$=2e^2-e^{-3}-\left(2x\cdot e^{5x-3}\right)\Big|_0^1+(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=-e^{-3}+(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right).$$

Розглянемо інтеграл $(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)$. Тут $f(x)=2$ – неперервна на $[0,a]$, а функція $g(x)=e^{5x-3}$ має неперервну похідну на $[0,a]$, тому інтеграл Стілтьєса існує. Отже, формальне застосування формули інтегрування частинами є коректним. Крім того, можна застосувати формулу зв'язку між інтегралами Стілтьєса й Рімана:

$$(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=(R)\int\limits_0^1 2\left(e^{5x-3}\right)'dx=2e^{5x-3}\Big|_0^1=2e^2-2e^{-3}.$$

В результаті отримаємо:

$$(S)\int\limits_0^1\left(x^2+1\right)d\left(e^{5x-3}\right)=-e^{-3}+(S)\int\limits_0^1 2\,d\left(e^{5x-3}\right)=2e^2-3e^{-3}.\ ■$$

Приклад 4.32. Обчислити інтеграл:

$$(S)\int\limits_0^3\left(x-1\right)^2 dg(x),\ \text{де}\ g(x)=\begin{cases}-1, & \text{при } 0\le x<1,\\ 0, & \text{при } 1\le x<2,\\ 2, & \text{при } x=2,\\ -2, & \text{при } 2<x\le 3.\end{cases}$$

Розв'язання. В цьому прикладі задано кусково-сталу функцію $g(x)$ і неперервну функцію $f(x)=\left(x-1\right)^2$ на $[0;3]$, тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.58).

При $x=1$ функція $g(x)$ має стрибок 1, а при $x=2$ її стрибок дорівнює -2 (значення функції $g(x)$ при $x=2$ не впливає на результат). Причому $f(1)=0,\ f(2)=1$. Маємо:

$$(S)\int\limits_0^3\left(x-1\right)^2 dg(x)=f(1)\cdot\left[g(1+0)-g(1)\right]+f(2)\cdot\left[g(2+0)-g(2-0)\right]=$$

$$=0\cdot1+1\cdot(-2)=-2.\ ■$$

Приклад 4.33. Обчислити інтеграл $\int\limits_a^b xdg(x)$, де $g(x)-$ функції із прикладу 4.28 на відрізках $[a;b]$, що відповідають умові цього прикладу.

Розв'язання. В цьому прикладі задано функції $g(x)$ так, що $\exists g'(x)$ – інтегровні за Ріманом у всіх точках відрізку $[a;b]$, окрім скінченної кількості. Функція $f(x)=x$ неперервна на цьому відрізку. Тому для обчислення будемо застосовувати формулу (1.59).

а) Функція $g(x)$ має такі стрибки:

в точці $x=-2$ стрибок (правий) дорівнює -1,

в точці $x=-1$ стрибок (повний) дорівнює -2,

в точці $x=1$ стрибок (повний) дорівнює 1,

в точці $x=2$ стрибок (лівий) дорівнює -1.

Похідна цієї функції:

$$g'(x)=\begin{cases}1, & x\in(-2;-1);\\ -\dfrac{1}{2}, & x\in(-1;1);\\ 1, & x\in(1;2).\end{cases}$$

Тому

$$\int_{-2}^{2} x\,dg(x)=\int_{-2}^{-1} x\,dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx+\int_{1}^{2} x\,dx+$$

$$+(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+1\cdot1+2\cdot(-1)=\frac{9}{2}. \blacksquare$$

б) Похідна цієї функції:

$$g'(x)=\begin{cases}8(x+0,5), & \text{при } x\in(-1;-0,5)\bigcup(-0,5;0);\\ \pi\cos\pi x, & \text{при } x\in(0;3)/\{0,5;\,1;\,2;\,2,5\};\\ 1, & \text{при } x\in(3;4);\\ -1, & \text{при } x\in(4;5).\end{cases}$$

З урахуванням формули (1.59) і значень стрибків, модулі яких внесені до табл. 4.2, отримаємо:

$$\int_{-2}^{2} x\,dg(x)=8\int_{-1}^{0} x\left(x+0,5\right)dx+\pi\int_{0}^{3} x\cos\pi x\,dx+\int_{3}^{4} x\,dx-\int_{4}^{5} x\,dx+$$

$$+(-1)\cdot(-1)+(-0,5)\cdot0+0\cdot(-2)+0,5\cdot0+1\cdot1+2\cdot(-1)+2,5\cdot0+$$

$$+3\cdot 1+4\cdot 1+5\cdot 1=20\frac{2}{3}-\frac{2}{\pi}. \ ■$$

Приклад 4.34. Обчислити інтеграл $(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left\{x^2\right\}$.

Розв'язання. Маємо

$$(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left\{x^2\right\}=(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left(x^2\right)-(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left[x^2\right],$$

$$(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left(x^2\right)=(R)\int\limits_1^2 \frac{2x}{x^2+5}dx=\int\limits_1^2 \frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5}=\ln\left(x^2+5\right)\Big|_1^2=\ln\frac{3}{2}.$$

На рис. 3.26 зображено графік функції $y=\left[x^2\right]$. В точках розриву $x=1$, $x=\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}$ і $x=2$ стрибок цієї функції дорівнює 1. Застосувавши формулу (1.58), отримаємо:

$$(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left[x^2\right]=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{7}\cdot 1+\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{1}{9}\cdot 1=\frac{275}{504}.$$

Звідки $(S)\int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+5}d\left\{x^2\right\}=\ln\frac{3}{2}-\frac{275}{504}$. ■

Розділ 5. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

§ 1. Теоретичні питання

1. Поняття первісної функції, невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла.
2. Таблиця інтегралів.
3. Інтегрування підстановкою (заміною змінної) під знаком невизначеного інтеграла. Приклади. Розширена таблиця основних інтегралів.
4. Інтегрування частинами під знаком невизначеного інтеграла. Основні групи функцій, що інтегруються частинами. Рекурентна формула обчислення інтеграла $K_\lambda = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\lambda}$.
5. Інтегрування раціональних функцій. Приклади. Метод невизначених коефіцієнтів і метод закреслювання.
6. Поняття раціональної функції двох аргументів. Інтегрування функції $R(\sin x, \cos x)$ основною тригонометричною підстановкою. Приклад.
7. Інтегрування дробово-лінійної ірраціональності.
8. Інтегрування квадратичних ірраціональностей підстановками Ейлера.
9. Зведення інтегралів від квадратичних ірраціональностей до інтегралів типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.
10. Обчислення інтегралів типу $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Приклад.
11. Обчислення інтегралів типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Приклад.
12. Обчислення інтегралів вигляду $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{(2\lambda+1)/2}}dx$, підстановка Абеля. Приклад.

13. Обчислення інтегралів типу $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda \sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Приклади.
14. Обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx, \int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)dx$, $\int \sin^\nu x \cdot \cos^\mu x dx, \quad \int \operatorname{sh}^\nu x \cdot \operatorname{ch}^\mu x dx \quad (\nu, \mu \in \mathbb{Q})$.
15. Інтегрування біноміальних диференціалів. Приклад.
16. Метод Остроградського інтегрування раціональних функцій.
17. Поняття визначеного інтеграла Рімана. Необхідна умова інтегровності функції.
18. Верхні та нижні інтегральні суми Дарбу, їх властивості та геометричний зміст.
19. Критерій Дарбу інтегровності функції за Ріманом.
20. Класи інтегровних за Ріманом функцій.
21. Приклад інтегровної за Ріманом функції, що має нескінченну кількість точок розриву.
22. Множини лебеґової і жорданової міри нуль. Критерій Лебеґа інтегровності функції.
23. Властивості інтеграла Рімана, що виражаються рівностями. Адитивність інтеграла Рімана.
24. Властивості інтеграла Рімана, що виражаються нерівностями. Перша теорема про середнє.
25. Друга теорема про середнє.
26. Визначений інтеграл як функція верхньої межі.
27. Формула Ньютона-Лейбніца. Формула заміни змінної під знаком визначеного інтеграла. Приклад.
28. Формули інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла. Формула для обчислення інтеграла $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Формула Валліса.

29. Поняття простої плоскої кривої, параметризовної кривої, зімкненої кривої, напрямку на кривій, гладкої кривої. Спрямлювані криві та їх властивості.
30. Спрямлюваність і довжина простої гладкої кривої. Випадок лінії, що задана явно. Випадок лінії, що задана в полярній системі координат. Приклади. Диференціал дуги.
31. Поняття квадровної плоскої області. Критерії квадровності.
32. Обчислення площі криволінійної трапеції й криволінійного сектора (випадок полярних координат).
33. Поняття кубовного тіла. Критерії кубовності тіл.
34. Кубовність і об’єм циліндра, східчастого тіла, тіла обертання.
35. Площі поверхонь обертання.
36. Загальна схема застосування визначеного інтеграла. Статичні моменти та центр мас плоскої кривої. Перша теорема Гюльдена .
37. Статичні моменти та центр мас криволінійної трапеції. Друга теорема Гюльдена.
38. Механічна робота.
39. Наближене обчислення визначених інтегралів за формулою прямокутників. Точність формули.
40. Наближене обчислення визначених інтегралів за формулою трапецій. Точність формули.
41. Наближене обчислення визначених інтегралів за формулою Сімпсона.
42. Невласні інтеграли I роду. Критерій Коші.
43. Достатні ознаки збіжності невласних інтегралів I роду: ознаки порівняння.
44. Абсолютна й умовна збіжності невласних інтегралів I роду. Ознака Дирихле-Абеля .
45. Невласні інтеграли II роду (означення, критерій Коші, зведення невласного інтеграла II роду до невласного інтеграла I роду, ознаки порівняння).
46. Головне значення невласних інтегралів. Приклади.
47. Означення монотонної функції, стрибка функції в точці, функції стрибків. Приклади. Довести, що монотонна функція може мати точки розриву лише I

роду.

48. Теорема про потужність множини точок розриву монотонної функції.
49. Довести, що різниця між монотонною функцією й функцією її стрибків є неперервною, монотонною функцією.
50. Приклад монотонної неперервної функції, що має нульову похідну в майже усіх точках, коливання якої на відрізку визначення не дорівнює нулю.
51. Теорема про існування монотонної, неперервної на відрізку функції, яка має нескінченну похідну в точках наперед заданої множини лебеґової міри нуль.
52. Означення функції з обмеженою варіацією.
53. Теорема про обмеженість варіації монотонної функції.
54. Теорема про обмеженість варіації функції, що задовольняє умову Ліпшица і наслідок з неї.
55. Необхідна умова обмеженості варіації функції.
56. Арифметичні операції над функціями обмеженої варіації.
57. Адитивність повної варіації.
58. Теорема про подання функції обмеженої варіації різницею двох зростаючих функцій.
59. Теорема про потужність множини точок розриву функції скінченної варіації.
60. Теорема про подання функції обмеженої варіації сумою функції її стрибків і неперервної функції.
61. Означення інтеграла Рімана-Стілтьєса, приклади.
62. Основні властивості інтеграла Стілтьєса. Формула інтегрування частинами.
63. Теорема про існування інтеграла Стілтьєса.
64. Теорема про зв’язок інтеграла Стілтьєса та інтеграла Рімана.
65. Обчислення інтеграла Стілтьєса від неперервної функції за кусково-сталою функцією.
66. Обчислення інтеграла Стілтьєса від неперервної функції по функції, що має обмежену варіацію й має інтегровну за Ріманом похідну у всіх точках, окрім скінченної кількості.

67. Застосування інтеграла Стілтьєса у фізиці.

§ 2. Задачі для самоперевірки практичних навичок

5.1–5.20. Використовуючи таблицю й властивості, знайти невизначені інтеграли:

5.1. $\int\left(x^4-3x^2+2x+1\right)dx$.

5.2. $\int\frac{\left(x^2-2\right)^2}{x}dx$.

5.3. $\int\frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

5.4. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

5.5. $\int\frac{dx}{5x+2}$.

5.6. $\int\sqrt{1+4x}dx$.

5.7. $\int\frac{\left(x+1\right)^2}{x^2+1}\,dx$.

5.8. $\int\frac{dx}{4x^2+1}$.

5.9. $\int\left(3^x+4^x\right)^2 dx$.

5.10. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$.

5.11. $\int\sqrt{1+\sin 2x}dx,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

5.12. $\int\sqrt[15]{\left(2x-3\right)}dx$.

5.13. $\int\operatorname{ctg}^2 x dx$.

5.14. $\int\sin^2\frac{x}{4}dx$.

5.15. $\int\frac{4+2x}{x-1}dx$.

5.16. $\int 2^x\cdot 4^x\cdot 8^x\,dx$.

5.17. $\int\left(\frac{1+x}{x}\right)^3 dx$.

5.18. $\int\frac{1}{\left(3x+7\right)^{2013}}dx$.

5.19. $\int\frac{4^x-1}{2^x-1}dx$.

5.20. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

5.21–5.40. Знайти інтеграли:

5.21. $\int\sin^3 x\cos x dx$.

5.22. $\int\frac{x^3dx}{x^4+9}$.

5.23. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$. **5.24.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

5.25. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5\cos x+1}} dx$. **5.26.** $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

5.27. $\int \frac{(\arcsin 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$. **5.28.** $\int x\left(5x^2-3\right)^7 dx$.

5.29. $\int x\sqrt{x^2-4}dx$. **5.30.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$.

5.31. $\int \frac{\cos ax\, dx}{\sqrt{a^2+\sin^2 ax}}$. **5.32.** $\int \frac{\sin^3 x\, dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$.

5.33. $\int \frac{1}{\sqrt{\text{x}}} \cos\sqrt{x}\, dx$. **5.34.** $\int (x+3)\sqrt{x-3}\, dx$.

5.35. $\int x\sin(x^2)dx$. **5.36.** $\int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx$.

5.37. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x \cdot \mathrm{ch}^2 x}$. **5.38.** $\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{2\mathrm{tg}x+1}{\mathrm{tg}x+2} dx$.

5.39. $\int \frac{dx}{\sin x}$. **5.40.** $\int \frac{x-\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.

5.41–5.60. Знайти інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами:

5.41. $\int \ln x dx$. **5.42.** $\int \mathrm{arctg} x dx$.

5.43. $\int \left(x^2-4\right)\sin 2x dx$. **5.44.** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

5.45. $\int x\ln^2 x dx$. **5.46.** $\int x^2 e^{3x} dx$.

5.47. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. **5.48.** $\int x\arcsin x dx$.

5.49. $\int \sin(\ln x)dx$. **5.50.** $\int 3^x \cos 2x dx$.

5.51. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$. **5.52.** $\int e^{2x}\sin 3x dx$.

5.53 [**19**]. $\int \frac{x \cdot \arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.54 [**19**]. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

5.55 [**19**]. $\int \frac{x \cdot \cos x dx}{\sin^3 x}$.

5.56 [**19**]. $\int \arcsin^2 x dx$.

5.57 [**19**]. $\int x^2 \mathrm{arctg} 4x dx$.

5.58 [**19**]. $\int e^{-x} \sin^2 x dx$.

5.59 [**19**]. $\int \mathrm{arctg} x \cdot \frac{x^4}{x^2+1} dx$.

5.60 [**1**]. $\int x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$.

5.61 [**33**]. Використовуючи формулу узагальненого інтегрування частинами, обчислити інтеграли:

а) $\int \left(3x^2+x-2\right)\sin^2\left(3x+1\right)dx$; б) $\int \frac{x^2-7x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

5.62 [**19**]. Обчислити методом невизначених коефіцієнтів інтеграли:

а) $\int \left(x^2+x-2\right)e^{-3x}dx$; б) $\int \left[\left(x^2+1\right)\cos 2x - \left(x^2+4\right)\sin 2x\right]dx$.

5.63 [**33**]. Отримати рекурентні формули для обчислення інтегралів:

а) $\int x^n e^{-x} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^n x}$; в) $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}} dx$.

5.64. Застосовуючи рекурентні співвідношення, обчислити інтеграли:

а) $\int x^4 e^{-2x} dx$; б) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2+4}}$; в) $\int \frac{dx}{\left(x^2+8\right)^4}$.

5.65–5.76. Знайти інтеграл від дробу, знаменник якого містить квадратний тричлен:

5.65. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

5.66. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$.

5.67. $\int \frac{x\, dx}{x^2-7x+13}$.

5.68. $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2-4x+5}$.

5.69. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-6x+10}$.

5.70. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+9}}$.

5.71. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

5.72. $\int \frac{(2x-8)dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

5.73 [18]. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}}$.

5.74. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - 4\sin x + \cos^2 x}} dx$.

5.75 [18]. $\int \frac{\ln x + 2}{x\sqrt{1 - \ln x - \ln^2 x}} dx$.

5.76 [18]. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 5}$.

5.77–5.96. Знайти інтеграли від раціональних дробів:

5.77. $\int \frac{x + 3}{x^2 + 2x + 2} dx$.

5.78. $\int \frac{x - 1}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$.

5.79. $\int \frac{3x + 1}{x^3 + 4x} dx$.

5.80. $\int \frac{x^3 + 3}{x^2 - 4} dx$.

5.81. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$.

5.82. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$.

5.83. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

5.84. $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx$.

5.85. $\int \frac{7x + 3}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)} dx$.

5.86 [8]. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$.

5.87 [8]. $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^4}$.

5.88 [8]. $\int \frac{x^9}{(x^4 - 1)^2} dx$.

5.89.**[8].** $\int \frac{x^5 dx}{(x-1)^2 (x^2 - 1)}$.

5.90 [8]. $\int \frac{(x^5 + x^4 - 8) dx}{x^3 - 4x}$.

5.91 [8]. $\int \frac{(x^2 - 1)^2 dx}{(x+1)(x^2 + 1)^3}$.

5.92 [8]. $\int \frac{dx}{x^4 (x^3 + 1)^2}$.

5.93 [18]. $\int \frac{dx}{x^4 (x^6 + 1)}$.

5.94 [18]. $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$.

5.95 [18]. $\int \frac{x^9}{(x^4 - 1)^2} dx$.

5.96 [18]. $\int \frac{dx}{x^4 (x^2 + 2x + 2)^2} dx$.

5.97–5.116. Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

5.97. $\int \sin 2x \cos 5x \, dx$.

5.98. $\int \sin^3 x dx$.

5.99. $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$.

5.100. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$.

5.101. $\int \cos^4 x \, dx$.

5.102. $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x}$.

5.103 [9]. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

5.104 [9]. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

5.105 [9]. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$.

5.106 [9]. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg}\, x}}$.

5.107 [16]. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx$.

5.108 [16]. $\int \frac{\cos x \cdot \sin x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

5.109 [16]. $\int \left(\mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x\right)^3 dx$.

5.110 [13]. $\int \frac{dx}{\left(a^2 + b^2\right) - \left(a^2 - b^2\right)\cos x}$.

5.111 [13]. $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$.

5.112. $\int \frac{\cos x dx}{2 - \cos x}$.

5.113 [18]. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$.

5.114 [18]. $\int \frac{dx}{\left(\sin x + \cos x + 1\right)^2}$.

5.115 [1]. $\int \frac{\sin x \, dx}{2\sin x + 3\cos x}$.

5.116. $\int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{2\sin x + 3\cos x}$.

5.117–5.128. Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

5.117. $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}}$.

5.118. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

5.119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

5.120. $\int \frac{dx}{2 + \sqrt{x - 1}}$.

5.121. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + 9\right)^3}}$.

5.122 [16]. $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt[4]{x^3} + 1}$.

5.123 [16]. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}$.

5.124 [16]. $\int \frac{\sqrt[4]{x-3}\,dx}{\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x-3}}$.

5.125 [16]. $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

5.126 [16]. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

5.127 [16]. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{x+1}$.

5.128 [18]. $\int x\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}dx$.

5.129–5.134. Знайти інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

5.129 [16]. $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

5.130 [16]. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{4+2x+x^2}}$.

5.131 [16]. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$.

5.132 [16]. $\int \sqrt{x^6-x^4}\,dx$.

5.133 [16]. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

5.134 [33]. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$.

5.135–5.142. Знайти інтеграли від біноміальних диференціалів:

5.135 [33]. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$.

5.136 [33]. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

5.137 [33]. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

5.138 [33]. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+x^{-1}}}$.

5.139 [12]. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

5.140 [12]. $\int \frac{\sqrt{1-x^{-\frac{1}{3}}}}{\sqrt{x}}dx$.

5.141 [12]. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}dx$.

5.142 [16]. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^{15}+x^{14}}}$.

5.143 [33]. Методом невизначених коефіцієнтів знайти інтеграли:

а) $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$; б) $\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx$.

5.144. – 5.163. Використовуючи різні методи, знайти інтеграли:

5.144 [16]. $\int (2x+1)e^{\operatorname{arctg} x}dx$.

5.145 [16]. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

5.146 [16]. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x\,dx}{1+x^2}$.

5.147 [16]. $\int \frac{\ln\left(e^x+1\right)dx}{e^x}$.

5.148 [12]. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

5.149 [12]. $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx$.

5.150 [12]. $\int \frac{\ln(x+2)\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

5.151 [18]. $\int \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{\frac{5}{2}}}$.

5.152 [1]. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$.

5.153 [18]. $\int \frac{dx}{\sin x-5\cos x}$.

5.154 [18]. $\int \frac{dx}{x^5\left(1+x^8\right)}$.

5.155 [8]. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}dx$.

5.156 [18]. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}$.

5.157 [18]. $\int \left|1-4x^2\right|dx$.

5.158 [18]. $\int \min\left(\sqrt{x},2\right)dx$.

5.159 [18]. $\int \max\left(|x|,4\right)dx$.

5.160 [8]. $\int \frac{e^x\,dx}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}$.

5.161 [8]. $\int \sqrt{\operatorname{th} x}\,dx$.

5.162 [8]. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\operatorname{sh}^4 x}$.

5.163 [8]. $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

5.164. Знайти нижню та верхню інтегральні суми Дарбу для функції $f(x)=x^2-4x+9$ на $[1;3]$.

5.165 [33]. За допомогою граничного переходу від інтегральних сум обчислити інтеграл $I=\int\limits_1^4 x^3\,dx$, розбиваючи відрізок інтегрування: а) на рівні частини; б) точками, що утворюють геометричну прогресію. Для кожного з випадків за проміжні точки вибрати середини елементарних відрізків.

5.166 [19]. Обчислити інтеграли, використовуючи означення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; в) $\int\limits_0^{10} 2^x\, dx$; в) $\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right) dx$; г) $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Зауваження. В останньому випадку доцільно поділити відрізок інтегрування на частини точками, що утворюють геометричну прогресію.

5.167 [19]. Оцінити інтеграли:

а) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+7\sin x}$; б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$; в) $\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} x\cdot \mathrm{arctgx}\, dx$.

5.168 [19]. Знайти похідні функцій:

а) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \cos\left(t^2\right) dt$; б) $\int\limits_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos 2t}{t}\, dt$; в) $\int\limits_{\sqrt{\ln x}}^2 e^{-x^2}\, dx$.

5.169 [**16**]**.** Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{x^2} \sin\sqrt{t} dt}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int\limits_0^x \mathrm{arctg}^2 t\, dt}{\sqrt{x^2+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^{2x^2} \left(1+\sin 3t\right)^{\frac{1}{t}}\, dt}{x\sin x}$.

5.170–5.187. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, обчислити інтеграли.

5.170. $\int\limits_1^2 \left(x^3+3x^2+1\right) dx$.

5.171. $\int\limits_0^2 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right) dx$.

5.172. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

5.173. $\int\limits_0^1 \frac{y^3}{y+1} dy$.

5.174. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$.

5.175. $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

5.176. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{2+3x+x^2}$.

5.177 [**33**]. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

5.178 [**33**]**.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

5.179 [**33**]. $\int\limits_0^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$.

5.180 [33]. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$.

5.181 [16]. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$.

5.182 [16]. $\int\limits_0^8 |4-x|\, dx$.

5.183 [16]. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

5.184 [19]. $\int\limits_{-1}^1 \frac{4}{3}\sqrt{x^{\frac{2}{3}}}\, dx$.

5.185 [19]. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$.

5.186 [19]. $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$.

5.187 [19]. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\, dx$.

5.188 – 5.191 [16]. Знайти границі послідовностей $\{S_n\}$:

5.188. $S_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$.

5.189. $S_n = \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

5.190. $S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$.

5.191. $S_n = n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right)$.

5.192 [16]. Провести дослідження та побудувати графіки функцій: а) $f(x) = \int\limits_0^1 t|x-t|\, dt$; б) $f(x) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1+2x\cos t + x^2}\, dt$.

5.193–5.202. Застосовуючи заміну змінної, обчислити інтеграли:

5.193 [9]. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{5-4x}}$.

5.194 [9]. $\int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

5.195. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

5.196. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

5.197. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$. **5.198.** $\int\limits_2^3 \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2+3}}dx$.

5.199 [9]. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$. **5.200 [19].** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

5.201 [33]. $\int\limits_0^6 \sqrt{6x - x^2}dx$. **5.202 [33].** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^4)}dx$.

5.203–5.209. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, обчислити визначені інтеграли:

5.203. $\int\limits_1^e \ln x dx$. **5.204.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$. **5.205.** $\int\limits_0^1 x^2 e^{-x}dx$.

5.206 [33]. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. **5.207 [33].** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\operatorname{tg} x)dx$.

5.208 [33]. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)dx$. **5.209 [33].** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

5.210–5.227. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

5.210. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. **5.211.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$.

5.212. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}$. **5.213.** $\int\limits_0^1 x\ln x dx$.

5.214. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **5.215 [1].** $\int\limits_3^{+\infty} \frac{2xdx}{(x^2-1)^2}$.

5.216 [1]. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$. **5.217 [1].** $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)(2x-1)}$.

5.218 [1]. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+11}$. **5.219 [1].** $\int\limits_2^{+\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-7}dx$.

5.220 [1]. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}, ab \neq 0$.

5.221 [1]. $\int\limits_0^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

5.222 [16]. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$.

5.223 [16]. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

5.224 [1]. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

5.225 [1]. $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x} \, dx}{\sqrt{1-x}}$.

5.226 [1]. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x \, dx}{\sqrt[7]{\cos^5 x}}$.

5.227 [1]. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

5.228–5.237. Дослідити на збіжність інтеграли від невід'ємних функцій:

5.228 [16]. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$.

5.229 [16]. $\int\limits_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{|1-x|} dx$.

5.230 [19]. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$.

5.231 [19]. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-\sin x}$.

5.232 [19]. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x} dx$.

5.233 [1]. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos^3 x}{x^2} dx$.

5.234 [1]. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

5.235 [1]. $\int\limits_0^2 \frac{x}{|1-x|^\alpha} dx$.

5.236 [1]. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x-3|}} dx$.

5.237 [1]. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{x^5+2x^3}} dx$.

5.238–5.245 [**1**]**.** Дослідити на абсолютну та умовну збіжність інтеграли:

5.238. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin 4x}{k^2+x^2} dx$.

5.239. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+3x}} dx$.

5.240. $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos\left(e^x\right) dx$.

5.241. $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2+\sin x\right) dx$.

5.242. $\int\limits_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} dx$.

5.243. $\int\limits_0^1 \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{x(1-x)^p} dx$.

5.244. $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x+\sin x} dx$. **5.245.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x+1}{x^{\alpha}} \cdot \sin x \, dx$.

5.246–5.249 [**16**]**.** Знайти головні значення заданих невласних інтегралів:

5.246. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2+1}} dx$. **5.247.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2-2x+5} dx$.

5.248. $\int\limits_{0,5}^{2} \frac{dx}{x \ln x} dx$. **5.249.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\alpha - \sin x} dx, \quad 0 < \alpha < 1$.

5.250 [**1**]**.** Знайти площу області, обмеженої кривими $y = \frac{2a}{3}\cos x$, $y = a\,\mathrm{tg}x$ та $y = 0$.

5.251 [**1**]**.** Знайти площу області, обмеженої кривими $y = x\ln^2 x$ та $y = x\ln x$.

5.252 [**16**]**.** Знайти площу області, обмеженої кривими $y = 4x - x^2$, $y = |x-2| + 4$ та $x = 0$.

5.253 [**12**]**.** Переходячи до полярних координат, знайти площу фігури, обмеженої кривою $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)a^2$.

5.254 [**12**]**.** Знайти площу фігури, обмеженої віссю Ox та трактрисою

$$\begin{cases} x = a\left(-\cos t + \ln\dfrac{1+\cos t}{\sin t}\right), \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

5.255 [**16**]**.** Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = \sin^2\frac{\varphi}{2}$, що знаходиться справа від променя $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

5.256 [**18**]**.** Знайти площу фігури, обмеженої заданою кривою, попередньо зводячи її рівняння $(x+y)^3 = axy$ до параметричного вигляду.

5.257 [12]. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої синусоїдою $y = \sin x$ та прямою $y = \frac{2}{\pi} x$.

5.258 [12]. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y = e^{2x}$, $-\infty < x \le 0$.

5.259 [18]. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури, що є спільною частиною кругів $x^2 + y^2 = 2ax$ та $x^2 + y^2 = 2ay$ навколо: а) осі Ox; б) прямої $y = x$.

5.260 [19]. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою $\rho = a\cos^3\varphi$.

5.261 [18]. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні області, обмеженої кривою $x = 2a\sin 2t, y = 2a\cos t$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

5.262 [12]. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox трактриси (задача 5.254).

5.263 [19]. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = a\cos\frac{\pi x}{2b}, |x| \le b$.

5.264 [19]. Знайти площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кола $\rho = 4\sin\varphi$.

5.265 [19]. Знайти периметр фігури, обмеженої лініями $y = 4$ та $x^2 = (y+1)^3$.

5.266 [19]. Знайти довжину евольвенти кола

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$

5.267 [18]. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \cos^4\frac{\varphi}{4}$.

5.268 [18]. Знайти периметр фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$.

5.269 [12]. Знайти центр мас однорідної дуги ланцюгової лінії $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$ від точки з абсцисою $x = 0$ до точки з абсцисою $x = x_0$.

5.270 [19]. Знайти статичні моменти однорідної дуги параболи $y^2 = 2x$ при $y > 0$ від точки з абсцисою $x = 0$ до точки з абсцисою $x = 2$ відносно координатних осей.

5.271 [19]. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої еліпсом $x^2 + 4y^2 = 4$ та колом $x^2 + y^2 = 4$, розташованої в першій чверті.

5.272 [12]. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої прямою $y = \dfrac{2x}{\pi}$ та синусоїдою $y = \sin x$ при $x \geq 0$.

5.273 [**12**]**.** Котел, що має форму півкулі радіуса R, заповнено водою. Знайти роботу, яку потрібно витратити, щоб викачати воду з цього котла.

5.274 [**16**]**.** Матеріальна точка рухається по прямій під дією сили, пропорційної відстані від точки до місця початку руху. Визначити роботу цієї сили щодо переміщення точки на 15 м від її початкового положення, якщо на відстані 3 м сила дорівнює 1 Н.

5.275 [**16**]**.** Яку роботу потрібно докласти для зупинки залізної кулі радіуса R, яка обертається з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра?

5.276 – **5.281** [**16**]**.** Визначити, чи існують інтеграли Стілтьєса функцій f за мірою g і, якщо існують, обчислити ці інтеграли:

5.276. $f(x) = x^3,\ g(x) = \operatorname{arctg} x,\ x \in [0; 1]$.

5.277. $f(x) = [x],\ g(x) = x^2,\ x \in [-1; 1]$.

5.278. $f(x) = x^3,\ g(x) = [x],\ x \in [0; 5]$.

5.279. $f(x) = \operatorname{sign} x,\ g(x) = [x],\ x \in [-1; 1]$.

5.280. $f(x) = e^{-x},\ g(x) = [x],\ x \in [0; 1]$.

5.281. $f\left(x\right)=x^4$, $g\left(x\right)=\ln x$, $x\in\left[1;5\right]$.

5.282. Чи мають функції обмежену варіацію?

а) $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{\pi}{x^2}, x\neq 0 \\ 0, \quad x=0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$;

б) $f(x)=(x^4-7x)\cos 7x$ на відрізку $[0;\pi]$;

в) $f(x)=\begin{cases} \left[x^{-2}\right], & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$ на відрізку $[0;1]$.

5.283. Знайти повну варіацію функцій

а) $f(x)=\begin{cases} -x+2, & 0\le x<1, 2<x<3; \\ 4, & x=1,2,3; \\ \left(x-1,5\right)^2, & 1<x<2; \\ \cos\pi x, & 3<x<4; \\ -2, & x=4 \end{cases}$ на відрізку $[0;4]$;

б) $f(x)=\begin{cases} \left\{\cos\dfrac{2\pi x}{3}\right\}, & 0<x<6; \\ -2, & x=0,4,6; \\ \left(x-5\right)^2, & 4<x<6 \end{cases}$ на відрізку $[0;6]$.

5.284. Подати кожну з функцій прикладу 5.283 у вигляді суми функції її стрибків і неперервної функції.

5.285. Подати функцію

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{при} -2\le x\le -1, \\ 2, & \text{при} -1<x<0, \\ \left(1-x\right)^2, & \text{при } 0\le x\le 2 \end{cases}$$

у вигляді різниці двох зростаючих функцій.

5.286. Обчислити інтеграл Рімана-Стілтьєса:

$$(S)\int\limits_0^3 \sin\frac{\pi x}{2}\,dg(x)\text{, де } g(x)=\begin{cases}-3, & \text{при } 0\le x<1,\\ 2, & \text{при } 1\le x<2,\\ 5, & \text{при } x=2,\\ -2, & \text{при } 2<x\le 3.\end{cases}$$

5.287. Обчислити інтеграл $(S)\int\limits_a^b x^2 dg(x)$, де $g(x)$ – функції з прикладу 5.283 на відрізках $[a,b]$, що відповідають умові цього прикладу.

5.288. Подати функціонал $F(f)$ інтегралом Стілтьєса $(S)\int\limits_{-1}^1 f(x)\,d(g(x))$ й обчислити повну варіацію $\mathop{V}\limits_{-1}^{1}(g)$ функції $g(x)$ на відрізку $[-1;1]$, якщо

$$F(f)=\pi\int\limits_{-1}^1 (x-1)\cdot f(x)dx+2f(0)-\frac{1}{2}f(-1)-f(1).$$

5.289. Обчислити наближено $\int\limits_1^2 \frac{\sin x}{x}dx$, застосовуючи формули прямокутників, трапецій, Сімпсона із похибкою $\varepsilon=0,05$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна:

1. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / *И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий // Под общ. ред. В.А. Садовничего.* – М.: Факториал, 1996. – 477 с.
2. *Демидович Б.П.*[1] Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П. Демидович.* – М.: Наука,1990. – 624 с.
3. *Ильин В.А.* Математический анализ / *В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов.* – М.: Наука, 1979. – 720 с.
4. *Фихтенгольц Г.М.*[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.1. – М.: Физматлит, 1969. – 607 с.
5. *Фихтенгольц Г.М.*[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.1. – М.: Физматлит, 2003. – 680 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
7. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. / *Г.М. Фихтенгольц.* – Т.3. – М.: Наука, 1966. – 656 с.

Додаткова:

8. *Берман Г.Н.*[2] Сборник задач по курсу математического анализа / *Г.Н. Берман.* – М.: Наука, 1985. – 383 с.
9. *Бутузов В.Ф.* Математический анализ в вопросах и задачах / *В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин //* Под ред. В.Ф. Бутузова. – М.: Физматлит, 2001. – 480 с.
10. *Гливенко В.И.*[1] Интеграл Стильтьеса / *В.И.Гливенко* – Л.: ОНТИ, 1936. – 216 с.
11. *Давидов М.О.* Курс математичного аналізу / *М.О. Давидов.* – Ч.1. Функції однієї змінної. – К.: Вища шк. – 1990. – 380 с.

[1] http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm
[2] http://techlibrary.ru/

12. *Давыдов Н.А.*[2] Сборник задач по математическому анализу / *Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, Б.Н. Никольский.* – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
13. *Данко Л.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах / *Л.Е.Данко, А.Г. Попов.*– Ч.1. – М.: Высшая школа, 1974. – 416 с.
14. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / *Б.П. Демидович.* – М.: Астрель, 2003. – 558 с.
15. *Дороговцев А.Я.* Избранные задачи по математическому анализу / *А.Я. Дороговцев.* – К.: Вища школа, 1982. – 104 с.
16. *Дюженкова Л.І.,* Математичний аналіз у задачах і прикладах / *Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль.* – Частина 1. – К.: Вища школа, 2002. – 462с.
17. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. *Б.П. Демидовича*. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
18. Задачи и упражнения по математическому анализу: учеб. пособие: В 2 кн. / *И. А. Виноградова* [и др.]. – Кн. 1: Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. – М.: Высшая школа, 2002. – 724 с.
19. Задачник по курсу математического анализа. Часть 1. / Под ред. *Н.Я. Виленкина*[1]. – М.: Просвещение, 1971. – 343 с.
20. *Запорожец Г.И.*[2] Руководство к решению задач по математическому анализу / *Запорожец Г.И.* – М.: Высш.шк., 1966. – 460 с.
21. *Зорич В.А.*[2] Математический анализ: В 2 ч. / *В.А. Зорич.* – Ч.1. –М.: Фазис. – 1997. – 554 с.
22. *Ильин В.А.*[2] Основы математического анализа: В 2 ч. / *В.А. Ильин, Э.Г. Позня.* –М.: Физматлит. – Ч.1. – 2005. – 648 с.
23. *Каплан И.А.* [2] Практические занятия по высшей математике: В 5 ч. / *И.А. Каплан.* – Ч. 3. – Харьков: Изд-во Харьковского гос. университета, 1974. – 374 с.
24. *Колмогоров А.Н.* [1] Элементы теории функций и функционального анализа / *А..Н Колмогоров, С.В. Фомин.* – М.: Наука, 1989. –624 с.

[1] http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

25. *Коши Г.А.Л.*[1] Дифференциальное и интегральное исчисление / *Г.А.Л. Коши*. – СПб: Императорская Академия Наук, 1831. – 245 с.
26. *Кудрявцев Л. Д*[1]. Краткий курс математического анализа. В. 2 т. / *Л. Д. Кудрявцев*. – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды. – М.: Физматлит, 2005. – 400 с.
27. *Кудрявцев Л.Д.* [2] Курс математического анализа: В 2 т. / *Л.Д. Кудрявцев.* – Т.1. – М.: Высш.шк., 1988. – 712 с.
28. *Кудрявцев Л.Д.*[2] Сборник задач по математическому анализу. – Т.1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость *Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехов, М.И. Щабунин* // Ред. А.Д. Кутасова. – М.: Физматлит, 2003. – 496 с.
29. *Кудрявцев Л.Д.* Сборник задач по математическому анализу. Т.2 Интегралы. Ряды / *Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др.* –М.: Наука, 1986. – 528 с.
30. *Лопиталь Г.Ф.*[1] Анализ бесконечно малых / *Г.Ф. Лопиталь*. – М.-Л.: Гостехтеориздат, 1935. – 431 с.
31. *Ляшко І.І.* Математичний аналіз: У 2 ч. / *І.І. Ляшко, В.Ф. Ємельянов, О.К. Боярчук.* – Ч.1. – К.: Вища шк. – 1992. – 494 с.
32. *Ляшко И.И.*[1] Математический анализ: Введение в анализ, производная, интеграл. Справочное пособие по математическому анализу: В 5 т. / *И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Л.Г. Гай, Г.П. Головчак.* – Т.1 – М.: Едиториал УРСС, 2001. – 360 с.
33. *Марон И.А.* [2] Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной / *И.А. Марон.* – М.: Наука, 1973. – 400 с.
34. Математический анализ: учебник для студ. вузов, обучающихся по спец. "Математика", "Прикладная математика" и "Информатика": В 2 ч. / *В.А. Ильин* [и др.] // Ред. А. Н. Тихонов. – Ч. 1. – М.: Издательство Проспект, 2007. – 660 с.
35. *Натансон И.П.*[1] Теория функций вещественной переменной / *И.П. Натансон.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.

---

[1] http://techlibrary.ru/
[2] http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm

36. *Никольский С.М.* Курс математического анализа / *С.М. Никольский.* – Т.1. – М.: Наука. – 1990. – 528 с.
37. *Окунев П.Я.* Высшая алгебра / *П.Я. Окунев.* – М.: Просвящение, 1966. – 336 с.
38. *Очан Ю.С.* Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций / *Ю.С. Очан.* // Под ред. М.Ф.Бокштейна – М.: Просвящение, 1981. – 271 с.
39. *Райхмист Р.Б.* Графики функций / *Р.Б. Райхмист.* – М.: Высш.шк., 1991. – 160 с.
40. *Шунда Н.М.* Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення / *Н.М. Шунда, А.А. Томусяк.* – К.: Вища шк., 1993. – 375 с.
41. *Эйлер Л.*[1] Интегральное исчисление, том 1 / *Л. Эйлер* – М.: ГИ Физматлит, 1956. – 415 с.
42. *Trench W.F.*[1] Introduction to Real Analysis / *W.F. Trench.* – Pearson Education, 2003. – 574 p.

Додаток А

Деякі тригонометричні формули

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\quad \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $\quad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$,

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Функції кратних кутів

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\quad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\quad \operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$,

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\quad \operatorname{ctg} 2x = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$.

Функції суми й різниці кутів

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\quad \operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$,

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$, $\quad \operatorname{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$.

Формули зниження степеня

$\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$, $\quad \cos^2 x = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$,

$\sin^3 x = \dfrac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$, $\quad \cos^3 x = \dfrac{1}{4}\left(3\cos x + \cos 3x\right)$,

$\sin^4 x = \dfrac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$, $\quad \cos^4 x = \dfrac{1}{8}\left(\cos 4x + 4\cos 2x + 3\right)$.

Сума й різниця тригонометричних функцій

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$, $\quad \cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$, $\quad \cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$,

$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$, $\quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm\dfrac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}$.

Добуток тригонометричних функцій

$\sin x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$, $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$,

$\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$.

Зв'язок між оберненими тригонометричними функціями

$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Нескінченно малі (великі) функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці $x=a$ еквівалентні, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Позначення: $f(x)\overset{x\to a}{\sim} g(x)$ або $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$.

Дві істотні границі й наслідки з них [**3**, с. 172–176; **4**, с. 122-125, 164]	Еквівалентні нескінченно малі функції
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;	$\sin x\sim x$, $\operatorname{tg} x\sim x$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$;	$\arcsin x\sim x$, $\operatorname{arctg} x\sim x$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;	$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$;	
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;	$e^x-1\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$ $(x\to 0)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.	$a^x-1\sim x\ln a$ $(x\to 0)$.

Таблиця похідних

$\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$;	$C'=0$, $(x)'=1$, $\left(x^2\right)'=2x$, $\left(x^3\right)'=3x^2$;
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\neq 0$;	$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$; $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x\neq 0$;
$(a^x)'=a^x\ln a$, $0<a\neq 1$;	$(e^x)'=e^x$;
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, $x>0$;	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $x>0, 0<a\neq 1$;
$(\sin x)'=\cos x$;	$(\cos x)'=-\sin x$;
$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq\pi n, n\in\mathbb{Z}$;	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$;
$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;	$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;
$(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	$(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x\neq 0$;
$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$;	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$;

Розширена таблиця основних інтегралів. Нехай $a>0$

№ пп	$\int f(x)dx = F(x)+C$	№ пп	$\int f(x)dx = F(x)+C$
1.	$\forall\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $x\in(0;+\infty)$, $\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$ $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,		$\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$, $x\in\mathbb{R}$,
		2.	$\int\dfrac{dx}{x-a}=\ln\lvert x-a\rvert+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,
3.	$\int e^x dx=e^x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	4.	$\forall a>0, a\neq1$ $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$, $x\in\mathbb{R}$,
5.	$\int\sin x dx=-\cos x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	6.	$\int\cos x dx=\sin x+C$, $x\in\mathbb{R}$,
7.	$\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$ на кожному з проміжків $\left(-\pi/2+\pi n;\pi/2+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$,	8.	$\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$ на кожному з проміжків $\left(\pi n;\pi+\pi n\right), n\in\mathbb{Z}$,
9.	$\int\operatorname{sh}x dx=\operatorname{ch}x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	10.	$\int\operatorname{ch}x dx=\operatorname{sh}x+C$, $x\in\mathbb{R}$,
11.	$\int\dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C$, $x\in\mathbb{R}$,	12.	$\int\dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$,
13.	$\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C,\\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}+C,\end{cases}$ $x\in\mathbb{R}$	14.	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\begin{cases}\arcsin\dfrac{x}{a}+C,\\ -\arccos\dfrac{x}{a}+C,\end{cases}$ $x\in(-1;1)$,
15.	$\int\dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$ на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$,	16.	$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;a)$, $(a;+\infty)$; для знака плюс $x\in\mathbb{R}$),
17.	$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$ $\left(\lvert x\rvert\le a\right)$, $x\in[-a;a]$,		
18.	$\int\sqrt{x^2\pm a^2}dx=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\dfrac{a^2}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert+C$ (для знака мінус на кожному з проміжків $(-\infty;-a]$, $[a;+\infty)$; для знака плюс $x\in\mathbb{R}$).		

Рекурентна формула обчислення інтеграла $K_\lambda=\int\dfrac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}$:

$$K_\lambda=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^\lambda}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{2\lambda-3}{2(\lambda-1)}K_{\lambda-1}+\frac{x}{2(\lambda-1)\left(x^2+a^2\right)^{\lambda-1}}\right]\ (\lambda\in\mathbb{N}),$$

де $K_1=\int\dfrac{dx}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$.

Інтегрування частинами. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні на X, тоді

1) з існування на X невизначеного інтеграла $\int u(x)d(v(x))$ випливає існування інтеграла $\int v(x)d(u(x))$,

2) має місце формула

$$\boxed{\int u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) - \int v(x)d(u(x))}$$

Основні класи функцій, що інтегруються частинами

Клас	Види інтегралів	Перша функція-множник	Друга функція-множник під інтегралом	Заміни	Зауваження
А.	$\int P_n(x)f(x)dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$	$f(x) = \left[\begin{array}{l}\sin(bx),\\ \cos(bx),\\ e^{bx}, a^{bx},\\ \dfrac{1}{\cos^2(bx)},\\ \dfrac{1}{\sin^2(bx)},\\ \text{і т.п.}\end{array}\right]$	$u = P_n(x)$, $dv = f(x)dx$.	Формула інтегрування частинами застосовується n разів
Б.	$\int g(x)P_n[\varphi(x)]dx$ або $\int g(x)\,\varphi[f(x)]dx$ та інтеграли, що зводяться до них	$g(x)$ – дробово-лінійна функція, зокрема многочлен	$\varphi(x) = \left[\begin{array}{l}\arcsin(bx),\\ \arccos(bx),\\ \mathrm{arctg}(bx),\\ \mathrm{arcctg}(bx),\\ \ln(bx),.\end{array}\right]$ $P_n(x)$ – многочлен, $\deg P_n = n$	$u = P_n[\varphi(x)]$, $dv = g(x)dx$, відповідно $u = \varphi[f(x)]$, $dv = g(x)dx$ (або методом підстановки $t = \varphi(x)$, відповідно $t = \varphi[f(x)]$)	У першому випадку інтегрувати частинами n разів
В.	$\int e^{ax}\cos bxdx,$ $\int e^{ax}\sin bxdx$ та інтеграли, що зводяться до них			Двічі $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$ $(dv = \sin bx\,dx)$ або двічі $u = \cos bx$ $(u = \sin bx)$, $dv = e^{ax}dx$	Двічі інтегрувавти частинами. Див. приклад 2.5, 3)

	Деякі інтеграли, що «не беруться» в елементарних функціях
	1) *інтеграл Пуассона* (інтеграл помилок) $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, 2) *інтеграли Френеля* $\int \cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx, \quad \int \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$, 3) *інтегральний логарифм* $\int \frac{dx}{\ln x}, x>0, x\neq 1$, 4) *інтегральні косинус і синус* $\int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx$

Інтегрування підстановкою. Якщо функція $t=\varphi(x)$ визначена й диференційовна на множині X і має множину визначення $T=\varphi(X)$, а для функції $g(t)$ на множині T існує первісна $G(t)$, тобто $\int g(t)dt=G(t)+C$, тоді на X функція $g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ має первісну, що дорівнює $G(\varphi(t))$, тобто

$$\boxed{\int g(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=G(\varphi(x))+C}$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x,\cos x)dx$ в загальному випадку знаходиться *універсальною тригонометричною підстановкою:* $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)$.

Окремі випадки:

1) $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \Rightarrow$ заміна $t=\cos x$,

2) $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x) \Rightarrow$ заміна $t=\sin x$,

3) $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x) \Rightarrow$ заміна $t=\operatorname{tg} x$.

Інтеграл типу $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)dx$ знаходиться підстановкою $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}$.

Для ***інтеграла типу*** $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ універсальними є *підстановки Ейлера:*

перша підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t$, якщо $a>0$;

друга підстановка Ейлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt$, якщо $c>0$;

третя підстановка Ейлера $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$.

Окремі випадки:

Інтеграл типу $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, *де* $\deg P(x)=n$ знаходиться поданням його сумою $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $Q(x)-$

многочлен з невизначеними коефіцієнтами такий, що $\deg Q(x) = n-1$, а λ – невизначений коефіцієнт.

Інтеграл типу $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$, $k \in \mathbb{N}$ знаходиться заміною $t = \frac{1}{x-\alpha}$.

Інтеграл типу $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+pq+q\right)^{\lambda} \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \lambda \in \mathbb{N}$ знаходиться за допомогою *заміни Абеля* $t = \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' = \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}$ та інших.

Біноміальний диференціал $\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$, $m,n,p \in \mathbb{Q}$, $a,b \in \mathbb{R}$ знаходиться за допомогою *замін І. Ньютона–П.Л. Чебишева*:

1) якщо $p \in \mathbb{Z}$, λ – спільний знаменник дробів m,n, тоді $t = \sqrt[\lambda]{x}$;

2) якщо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, ν – знаменник дробу p, тоді $t = \sqrt[\nu]{a+bx^n}$;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, ν – знаменник дробу p, тоді $t = \sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}$.

Основна теорема інтегрального числення, ***формула Ньютона-Лейбніца)***. Якщо $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, а $F(x)$ – одна з її первісних, то має місце формула

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$

Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - \text{неперервна на } [a,b]; \\ x = \varphi(t) - \text{неперервно диференційовна на } [\alpha,\beta]; \\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b, \\ \varphi[\alpha,\beta] = [a,b] \text{ (образ відрізка } [\alpha,\beta] \text{ збігається з відрізком } [a,b]); \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}.$$

Інтегрування частинами під знаком визначеного інтеграла. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервно диференційовні на $[a,b]$, тоді виконується формула:

$$\boxed{\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)}$$

Формули обчислення інтеграла від $\sin^n x$ і $\cos^n x$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot D_n, \quad D_n = \begin{cases} 1, & n - \text{непарне}, \\ \frac{\pi}{2}, & n - \text{парне}, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}}$$

Формули для обчислення довжин кривих:

гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_0,T]$ ($\varphi(t)$ і $\psi(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0,T]$)	$\lvert L\rvert = \int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{(\varphi'(t))+(\psi'(t))}dt. = \int\limits_{t_0}^{T}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt;$
гладка крива задана явно: $y=f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a,b]$	$\lvert L\rvert=\int\limits_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx;$
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho=\rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$	$\lvert L\rvert=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла Рімана. Визначений інтеграл Рімана від неперервної невід'ємної на $[a,b]$ функції $f(x)$ – це площа криволінійної трапеції D, утвореної графіком цієї функції, віссю абсцис і прямими $x=a$, $x=b$ (рис. А.1), тобто

$$\boxed{S(D)=\int\limits_a^b f(x)dx}$$

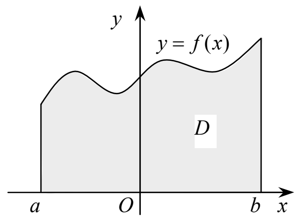


Рис. А.1.

Площа плоскої фігури D, що обмежена на <u>декартовій площині</u> графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, де $f_2(x)\le f_1(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ (рис. А.2), обчислюється за формулою

$$\boxed{S=\int\limits_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx}$$

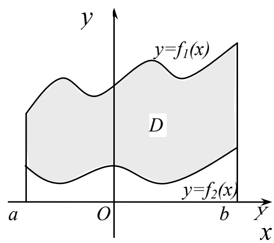


Рис. А.2.

Криволінійний сектор *OAB* (рис. А.3), обмежений графіком неперервної функції $\rho=\rho(\varphi)$ <u>у полярній системі координат</u> і двома півпрямими $\varphi=\alpha$ і $\varphi=\beta$ ($\alpha<\beta$), є квадровною областю, **площа** якого дорівнює

$$\boxed{S(D)=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi}$$

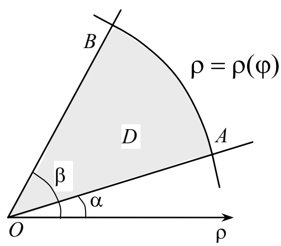


Рис. А.3.

Якщо тіло T утворене обертанням криволінійної трапеції $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b\wedge 0\le y\le f(x)\}$ (тут $f(x)$ – неперервна функція на $\left[a,b\right]$) **навколо осі** Ox**,** то це тіло T є кубовним, а його **об'єм** дорівнює

$$\boxed{V_x = V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)dx}$$

Об’єм тіла, утвореного обертанням **навколо осі** Ox плоскої фігури D, що обмежена на декартовій площині графіками неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $0 \le f_2(x) \le f_1(x)$, відрізками прямих $x = a$, $x = b$ (фігуру D див на рис. А.2), обчислюється за формулою

$$\boxed{V_x = \pi\int_a^b \left(f_1^2(x) - f_2^2(x)\right)dx}$$

Об’єм тіла, утвореного обертанням **навколо осі** Oy криволінійної трапеції $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \wedge 0 \le y \le f(x)\}$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція на $[a,b]$, дорівнює

$$\boxed{V_y = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)dx}$$

Формули для обчислення площ поверхонь обертання навколо осі абсцис гладких кривих ($y \ge 0$):

загальний випадок: $\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \end{cases}$ $s \in [0, \lvert L \rvert]$ ($x(s)$ і $y(s)$ – неперервно диференційовні на $[0, \lvert L \rvert]$, s – параметр довжини дуги)	$P_x = 2\pi \cdot \int_0^{\lvert L \rvert} y(s)ds$;
гладка крива задана параметрично: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, T]$ ($x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні на $[t_0, T]$)	$P_x = 2\pi \cdot \int_{t_0}^{T} y(t)\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$;
гладка крива задана явно: $y = f(x)$ – неперервно диференційовна на $[a,b]$	$P_x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$;
гладка крива задана в полярній системі координат: $\rho = \rho(\varphi)$ – неперервно диференційовна на $[\alpha,\beta]$	$P_\rho = 2\pi \cdot \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}\,d\varphi$

Збіжність невласних інтегралів від степеневих функцій:

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$	збігається при $\lambda > 1$,	$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$	збігається при $\lambda < 1$,
($a > 0$)	розбігається при $\lambda \le 1$,		розбігається при $\lambda \ge 1$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ – позначення, яке слід читати так: «якщо за означенням…» або «називається за означенням…».

$\overset{def}{=}$ – рівність за означенням; величина, що визначається, стоїть в лівій частині рівності

🗐 – повторити

🗁 – означення

■ – завершення доведення твердження чи розв’язання прикладу

☝ – зверніть увагу, запам’ятайте!

✍ – виконати завдання самостійно

$\exists$ – квантор існування

$\forall$ – квантор загальності

$\wedge$ – логічна операція, кон’юнкція

$\vee$ – логічна операція, диз’юнкція

$\left.\begin{matrix}\Rightarrow, \\ \Leftarrow\end{matrix}\right\}$ – логічна імплікація

$\Leftrightarrow$ – логічна еквівалентність (рівносильність)

$\bigcup$ – множинна операція, об’єднання

$\bigcap$ – множинна операція, перетин

$\in$ – символ належності елемента деякій множині

$\varnothing$ - порожня множина

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

т. – точка

непер. – неперервна (функція)

обм. – обмежена (функція)

н.м. або н.м.ф. – нескінченно мала (функція)

інт. – інтегровна (функція)

зб. – збіжний (невласний інтеграл)

$k=\overline{1,n}$ – змінна k приймає значення із множини $\{1,2,3,...,n\}$

$\nearrow$ – зростаюча функція

$\searrow$ – спадна функція

$\deg P(x)$ – степінь многочлена $P(x)$

$\sup M$, $\inf M$ – відповідно точна верхня і нижня межа множини M

D_f або $D(f)$ – множина визначення функції $f(x)$

$x_n \to a$ – послідовність x_n прямує (збігається) до a

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ – границя послідовності x_n дорівнює a

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ – границя функції $f(x)$ в точці a дорівнює b

Навчальне видання
(українською мовою)

Гребенюк Сергій Миколайович
Клименко Михайло Іванович
Д'яченко Наталія Миколаївна
Красікова Ірина Володимирівна
Тітова Ольга Олександрівна
Леонтьєва Вікторія Володимирівна

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів

Частина 2

Редактор *С.М. Гребенюк*
Технічний редактор *С.О. Борю*
Коректор *Ю.П. Крайнова*

Підп. до друку 02.12.2013. Формат 60×90/16. Папір офсетний.
Друк ризографічний. Гарнітура Таймс. Умовн. друк. арк. 30,9.
Замовлення № 346. Тираж 300 прим.

Запорізький національний університет

69600, м. Запоріжжя, МСП-41
вул. Жуковського, 66
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2952 від 30.08.2007