Теоретичні відомості до виконання індивідуального завдання

Псевдоевклідові простори

План.

1. Псевдоевклідів тривимірний простір індексу 1.
2. Координатні формули. Класифікація прямих і площин псевдоевклідового простору.
3. Простір Мінковського (псевдоевклідів чотиривимірний простір індексу 1).

1. Псевдоевклідів тривимірний простір індексу 1

Псевдоевклідів тривимірний простір індексу 1, який будемо позначати символом ${}^1R_3$, можна визначити як множину елементів двох родів, які називаються точками й векторами, з уведеними ***операціями додавання векторів, множення вектора на дійсне число, відкладання вектора від точки і скалярного добутку векторів***, що задовольняють аксіомам 1, 2, 3, 5 груп, аксіомам 4.1, 4.2, 4.3 аксіоматики Вейля й новій аксіомі 4.4^*.

Аксіома 4.4^*. Існують три вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ такі, що $\bar{a}_1{}^2 < 0, \bar{a}_2{}^2 > 0, \bar{a}_3{}^2 > 0$.

Увага! Геометрію, побудовану на базі вказаної системи аксіом, природно називати ***неевклідовою.*** Які ще неевклідові геометрії ви знаєте (в контексті аксіоматичного методу)?

Введення такої аксіоматики свідчить про те, що афінна геометрія евклідового простору повністю переноситься в геометрію псевдоевклідового простору.

Відповідно до аксіоматики псевдоевклідової площини, площина псевдоевклідового простору, що містить два вектори різних типів (легко довести, що вони лінійно незалежні), є псевдоевклідовою площиною. Для псевдоевклідової площини псевдоевклідового простору залишаємо без зміни всі прийняті в аксіоматичній теорії псевдоевклідової площини визначення.

Домовимось, як і в евклідовому просторі, називати два вектора ***ортогональними***, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Візьмемо базис $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ простору ${}^1R_3$, у якому $\bar{a}^2<0$, $\bar{b}^2>0$, $\bar{c}^2>0$. Його існування випливає з аксіоми 4.4*. Будь-яка площина з напрямними векторами $\bar{a}$ та $\bar{c}$ є псевдоевклідовою. У ній існує вектор $\bar{p}\neq\bar{0}$, ортогональний вектору $\bar{a}$, такий, що $\bar{p}^2>0$ (скалярні квадрати ненульових неізотропних ортогональних векторів мають різні знаки.). Так само, у площині векторів $\bar{b}$ й $\bar{a}$ існує вектор $\bar{q}\neq\bar{0}$, ортогональний вектору $\bar{a}$, такий, що $\bar{q}^2>0$. Вектори $\bar{p}$ та $\bar{q}$ лінійно незалежні, тому що інакше були б лінійно залежні вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Знайдемо вектор $\bar{r}\neq\bar{0}$, компланарний з векторами $\bar{p}$ та $\bar{q}$ й ортогональний вектору $\bar{p}$: $\bar{r}=\bar{q}+x\bar{p}$, $\bar{p}\bar{r}=0$. Звідси $x=-\dfrac{\bar{p}\bar{q}}{\bar{p}^2}$, і тому $\bar{r}=\bar{q}-\dfrac{\bar{p}\bar{q}}{\bar{p}^2}\bar{p}$. Очевидно, $\bar{r}\neq\bar{0}$, тому що в противному випадку вектори $\bar{p}$ і $\bar{q}$ були б лінійно залежні. Оскільки $\bar{a}\bar{q}=\bar{a}\bar{p}=0$, то й $\bar{a}\bar{r}=0$. Звідси виходить $\bar{r}^2>0$. Отже, побудована трійка попарно ортогональних ненульових векторів $\bar{p}$, $\bar{r}$, $\bar{a}$ таких, що $\bar{p}^2>0$, $\bar{r}^2>0$, $\bar{a}^2<0$. Вони утворюють ортогональний векторний базис 3-вимірного псевдоевклідового простору. Нормуємо вектори цього базису, покладаючи

$$\frac{\bar{a}}{\sqrt{-\bar{a}^2}}=\bar{i},\quad \frac{\bar{p}}{\sqrt{\bar{p}^2}}=\bar{j},\quad \frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{r}^2}}=\bar{k}\ . \tag{1.1}$$

Тоді $\bar{i}^2=-1$, $\bar{j}^2=1$, $\bar{k}^2=1$, $\bar{i}\bar{j}=\bar{i}\bar{k}=\bar{j}\bar{k}=0$.

Базис $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$ називається ***ортонормованним базисом*** псевдоевклідового простору.

Теорема 1.1 (закон інерції ортогональних базисів). Число векторів з додатними (від'ємними) скалярними квадратами одне й те саме у всіх ортогональних базисах псевдоевклідового простору.

Довдення. Допустимо, що поряд з ортогональним базисом $(\bar{p},\bar{r},\bar{c})$ при $\bar{p}^2>0$, $\bar{r}^2>0$, $\bar{c}^2<0$ існує деякий ортогональний базис $(\bar{p}_1,\bar{r}_1,\bar{c}_1)$ такий, що, скажімо, $\bar{p}_1{}^2>0$, $\bar{r}_1{}^2<0$, $\bar{c}_1{}^2<0$. Вектори $\bar{p}$, $\bar{r}$, $\bar{r}_1$, $\bar{c}_1$ лінійно залежні (аксіома III_2), тобто має місце рівність $\alpha\bar{p}+\beta\bar{r}=\gamma\bar{r}_1+\delta\bar{c}_1$ при дійсних коефіцієнтах, хоча б один із яких ненульовий. З огляду на те, що $\bar{p}\bar{r}=\bar{r}_1\bar{c}_1=0$,

піднесенням до квадрату одержуємо: $\alpha^2\bar{p}^2+\beta^2\bar{r}^2=\gamma^2\bar{r}_1^2+\delta^2\bar{c}_1^2$. Ця рівність суперечлива: її ліва частина невід'ємна, а права недодатня, причому одночасна рівність їх нулю неможлива.

Легко довести істинність таких тверджень:

Твердження 1.1 Для кожного вектора псевдоевклідового простору існує ортогональний йому вектор.

Твердження 1.2 Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ лінійно незалежні й ортогональні вектору $\bar{r}$, то всякий вектор, лінійно залежний з векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$, необхідно ортогональний до $\bar{r}$.

Твердження 1.3 Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ортогональні вектору $\bar{p}\neq\bar{0}$, то вони лінійно залежні (компланарні).

Доведемо, наприклад, твердження 1.3. Для цього використаємо наступний критерій лінійної залежності векторів: вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ лінійно залежні тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} \bar{a}^2 & \bar{a}\bar{b} & \bar{a}\bar{c} \\ \bar{b}\bar{a} & \bar{b}^2 & \bar{b}\bar{c} \\ \bar{c}\bar{a} & \bar{c}\bar{b} & \bar{c}^2 \end{vmatrix}=0. \qquad (1.2)$$

(Цей визначник називається визначником Грама системи векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$).

Справді, рівність $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}=\bar{0}$ помножимо послідовно скалярно на $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$:

$$\begin{aligned} &\alpha\bar{a}^2+\beta\bar{a}\bar{b}+\gamma\bar{a}\bar{c}=0,\\ &\alpha\bar{b}\bar{a}+\beta\bar{b}^2+\gamma\bar{b}\bar{c}=0,\\ &\alpha\bar{c}\bar{a}+\beta\bar{c}\bar{b}+\gamma\bar{c}^2=0. \end{aligned} \qquad (1.3)$$

Система (1.3) має ненульовий розв'язок (α,β,γ) тоді й тільки тоді, коли її визначник (1.2) дорівнює нулю.

Переходимо до доведення твердження 1.3. За аксіомою 3.1 аксіоматики Вейля маємо $x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}+t\bar{p}=\bar{0}$ при $x^2+y^2+z^2+t^2\neq0$. Якби $x=y=z=0$, то при $\bar{p}\neq\bar{0}$ було б $t=0$, що неможливо. Отже, трійка дійсних чисел (x,y,z) ненульова. Помноживши рівність $x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}+t\bar{p}=\bar{0}$ скалярно послідовно на $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ й з огляду на те, що $\bar{a}\bar{p}=\bar{b}\bar{p}=\bar{c}\bar{p}=0$, одержуємо:

$$x\bar{a}^2 + y\bar{a}\bar{b} + z\bar{a}\bar{c} = 0,$$
$$x\bar{b}\bar{a} + y\bar{b}^2 + z\bar{b}\bar{c} = 0,$$
$$x\bar{c}\bar{a} + y\bar{c}\bar{b} + z\bar{c}^2 = 0.$$

Оскільки ця система має ненульовий розв'язок, то її визначник (1.2) дорівнює нулю, звідки й випливає лінійна залежність векторів. ■

Означення. Вектори простору ${}^1R_3$, скалярні квадрати яких додатні, називаються *евклідовими* векторами. Вектори з від'ємними скалярними квадратами називаються *псевдоевклідовими* векторами. Ненульові вектори, скалярні квадрати яких дорівнюють 0, називаються *ізотропними* векторами.

Згідно з визначенням ізотропних векторів два колінеарних ізотропних вектора ортогональні.

Довжину вектора будемо визначати, як і в евклідовому просторі, формулою $|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x}^2}$. Так як в просторі ${}^1R_3$ скалярні квадрати векторів можуть бути додатними, від'ємними та рівними нулю, то з формули довжини вектора випливає, що ненульові вектори в цьому просторі можуть мати дійсну довжину (якщо $\bar{x}^2 > 0$), уявну довжину (якщо $\bar{x}^2 < 0$) та нульову довжину (якщо $\bar{x}^2 = 0$).

У псевдоевклідовому просторі при нормуванні евклідового вектора будемо використовувати формулу $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2}}$, а при нормуванні псевдоевклідового вектора – формулу $\bar{x}_0 = \dfrac{\bar{x}}{\sqrt{-\bar{x}^2}}$.

Нормовані евклідові вектори прийнято називати ***одиничними***, а нормовані псевдоевклідові вектори – ***уявно одиничними***. Всі ізотропні вектори будемо вважати нормованими.

Із аксіоми 4.4^* випливає, що в просторі ${}^1R_3$ завжди існує ортонормований базис, який складається з одного уявно одиничного і двох одиничних векторів. Умовимося уявно одиничний вектор вибирати першим вектором базису. За законом інерції ортогональних базисів всі ортогональні базиси простору складаються з одного псевдоевклідового і двох евклідових векторів.

2. Координатні формули. Класифікація прямих і площин псевдоевклідового простору

Будемо зображати точки псевдоевклідового простору в евклідовому просторі за тим же принципом що й у випадку псевдоевклідової площини, тобто зображати точки псевдоевклідового простору точками евклідового простору з тими ж самими координатами.

Перейдемо до питання про класифікацію прямих та площин простору ${}^1R_3$. Її зручно проводити з використанням поняття ізотропного конуса. Відкладемо всі вектори $\bar{r} = x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$ простору ${}^1R_3$ від початку координат. Тоді кінці ізотропних векторів будуть належати поверхні

$$-x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 0,$$

яку називають *ізотропним конусом* (рис.1.1). Кінці евклідових радіус-векторів лежать у зовнішній області ізотропного конуса, а кінці псевдоевклідових радіус-векторів – в його внутрішній області.

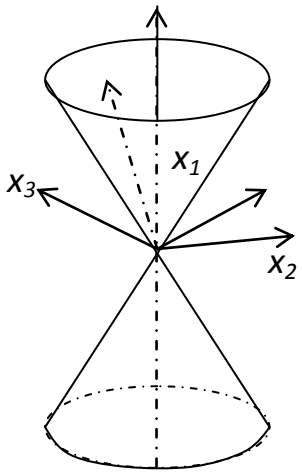

Рисунок 1.1

Дійсно, для псевдоевклідових векторів буде $x_2{}^2 + x_3{}^2 < x_1{}^2$. Вони знаходяться у внутрішній області ізотропного конуса, оскільки на зображенні відстань їх кінців до вісі конуса менша за відстань від площини Ox_2x_3: $|x_1| > \sqrt{x_2{}^2 + x_3{}^2}$. Евклідові вектори задовольняють умову $x_2{}^2 + x_3{}^2 > x_1{}^2$ й з аналогічної причини лежать зовні ізотропного конуса.

Оскільки кожна пряма визначається напрямним вектором, то у просторі ${}^1R_3$ існує три типи прямих.

а) евклідові прямі. Напрямний вектор є вектором дійсної довжини. Наприклад, координатна пряма з напрямним вектором $\bar{j}$. Евклідові прямі, що проходять через початок координат, лежать зовні ізотропного конуса;

б) псевдоевклідові прямі. Напрямний вектор є вектором уявної довжини. Наприклад, координатна пряма з напрямним вектором $\bar{i}$. Псевдоевклідові прямі, що проходять через початок координат, лежать у внутрішній області ізотропного конуса;

в) ізотропні прямі. Напрямний вектор є ізотропним вектором. Наприклад, пряма з напрямним вектором $\bar{i} + \bar{j} = (1,1,0)$. Ізотропні прямі, що містять вершину ізотропного конуса, є його твірними. Через кожну точку простору проходить лише одна ізотропна пряма заданого напрямку. Вона паралельна певній твірній ізотропного конуса. Тому для кажної точки простору існує конус ізотропних прямих з вершиною в цій точці.

Паралельні прямі належать до одного типу, що відповідає типу їх напрямних векторів.

Для класифікації двовимірних площин дослідимо властивості ортогональних векторів. У просторі ${}^1R_3$ ортогональними можуть бути пара евклідових векторів, евклідів і псевдоевклідів вектори, евклідів і ізотропний вектори.

Завдання. Навести приклади пар ізотропних векторів.

Розглянемо в просторі ${}^1R_3$ двовимірні площини (далі площині), в яких всі вектори евклідові й площини, в яких є вектори всіх трьох типів. Називатимемо їх відповідно *евклідовими* і *псевдоевклідовими* площинами. Евклідові та псевдоевклідові площині називаються *неізотропними*. У просторі ${}^1R_3$ можливі також площини, в яких є тільки евклідові та ізотропні вектори. Вони називаються *ізотропними площинами*. Розглянемо два неколінеарних вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ в просторі ${}^1R_3$. Вони утворюють направляючий підпростір деякої двовимірної площини. Щоб визначити тип цієї площини, потрібно розглядати всілякі лінійні комбінації векторів. Але якщо на базі цих векторів побудувати ортогональну систему векторів, то в разі евклідової площини, ця система обов'язково складається з евклідових векторів, у разі псевдоевклідової площини – з псевдоевклідового і евклідового векторів, у

випадку ізотропної площини – з ізотропного і евклідового векторів. Тобто тип площини легко розпізнавати по набору з двох ортогональних направляючих векторів.

Зауважимо, що площина, яка містить вершину ізотропного конуса й не має з ізотропним конусом інших спільних точок, є евклідовою. Якщо ж вона перетинає ізотропний конус по двом твірним, то така площина псевдоевклідова. Площина, яка дотикається ізотропного конуса по твірній, є ізотропною.

Паралельні площини належать до одного типу.

Оскільки афінні властивості евклідового та псевдоевклідового просторів однакові, то й рівняння прямих та площин у цих просторах теж однакові. Наприклад, загальне рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz + D = 0$.

Знайдемо критерій для визначення типу площини за її рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Достатньо розглянути лише площини $Ax + By + Cz = 0$, що проходять через початок координат й знайти критерії для розпізнавання випадків їх розташування відносно ізотропного конуса. Цю задачу можна розв'язати на зображенні псевдоевклідового простору в евклідовому просторі, приймаючи до уваги той фокт, що твірні конуса (**на зображенні**) утворюють з його віссю кут 45°.

Площина перетинає конус по двох твірних, дотикається до нього або не має з ним спільних твірних тоді й тільки тоді, коли кут ψ між віссю конуса й цією площиною відповідно менший, дорівнює або більший за 45°, тобто відповідно

$$\sin\psi < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ или } \sin\psi > \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (2.1)$$

Тому нерівності (2.1) еквівалентні відповідно нерівностям:

$$\frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

які, в свою чергу, еквівалентні відповідно нерівностям

$$C^2 + B^2 < A^2, \quad C^2 + B^2 = A^2, \quad C^2 + B^2 > A^2.$$

Повертаючись до сенсу цих нерівностей для площини $Ax + By + Cz + D = 0$ у псевдоевклідовому просторі, маємо наступні критерії:

$$C^2 + B^2 > A^2 \Leftrightarrow \text{площина псевдоевклідова},$$

$$A^2 + B^2 = C^2 \Leftrightarrow \text{площина ізотропна}, \qquad (2.2)$$

$$C^2 + B^2 < A^2 \Leftrightarrow \text{площина евклідова}.$$

Твердження 2.1 Для площини $Ax + By + Cz + D = 0$ псевдоевклідового простору вектор $\bar{n}(-A, B, C)$ є ортогональним до цієї площини.

Доведення. Дійсно, якщо $M(x, y, z)$ – довільна точка площини $Ax + By + Cz = 0$, то $\bar{n} \cdot \overline{OM} = -(-Ax) + By + Cz = 0$, тобто вектор $\bar{n}$ ортогональний до будь-якого вектора (прямої) площини $Ax + By + Cz = 0$. За означенням ортогональності вектора (прямої) та площини цей вектор ортогональний цій площині, а також й паралельній їй площині $Ax + By + Cz + D = 0$.

Враховуючи критерії (2.2) для типів площин, отримуємо такий результат:

Вектор, ортогональний евклідовій (псевдоевклідовій) площині, є псевдоевклідовим (евклідовим) вектором (тобто належить типу, протилежному до типу площини). Вектор, ортогональний ізотропній площині, є ізотропним (отже, паралельним) цій площині.

Відстань від точки до неізотропної площини визначимо як довжину перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Координати векторів в ортонормованому базисі будемо так само, як і в евклідовому просторі, називати ***декартовими***.

Нехай $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ та $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ відносно ортонормованого базиса $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$, де $\bar{i}^2 = -1$, $\bar{j}^2 = 1$, $\bar{k}^2 = 1$, $\bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$. Тоді

$$\bar{a}\bar{b} = -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.3}$$

Зокрема для $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ отримаємо

$$\bar{r}^2 = -x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.4}$$

Формулою (2.4) підтверджується, що в псевдоевклідовому просторі існують вектори всіх трьох типів: евклідові ($\bar{r}^2 > 0$), псевдоевклідові ($\bar{r}^2 < 0$) та ізотропні ($\bar{r}^2 = 0$ при $\bar{r} \neq \bar{0}$). **Колінеарні вектори належать до одного типу.**

Завдання. 1) Вивести формули (2.3) та (2.4).

2) Навести приклади всіх типів векторів псевдоевклідового простору.

Якщо $\bar{r} = \overline{AB}$ й $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$|AB| = \sqrt{-(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.5}$$

Теорема. Для будь-яких двох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ *евклідової* площини псевдоевклідового простору має місце нерівність

$$(\vec{a}\vec{b})^2 \leq \vec{a}^2\vec{b}^2, \tag{2.6}$$

Для будь-яких двох векторів $\vec{a}, \vec{b}$ псевдо*евклідової* площини псевдоевклідового простору

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 \geq \vec{a}^2\vec{b}^2, \tag{2.7}$$

причому в нерівностях (2.6) й (2.7) знак рівності має місце лише для колінеарних векторів.

Доведення. Якщо задані вектори $\vec{a}\left(x_1, y_1, z_1\right)$ й $\vec{b}\left(x_2, y_2, z_2\right)$ не колінеарні, то площина $\left(O, \vec{a}, \vec{b}\right)$ має рівняння

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z = 0.$$

Її нормальний вектор $\vec{n}$ має координати

$$-\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для будь-яких дійсних чисел має місце тотожність

$$\begin{aligned} &\left(-x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right)^2 - \left(-x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)\left(-x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) = \\ &= -\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2. \end{aligned}$$

Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{n}$ псевдоевклідового простору воно означає, що

$$\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 = \vec{n}^2.$$

Таким чином, для евклідової площини буде $\vec{n}^2 < 0$, для псевдоевклідової $\vec{n}^2 > 0$ й для ізотропної $\vec{n}^2 = 0$. Залишилось розглянути випадок $\vec{a} // \vec{b}$. Тоді всі три визначника дорвнюють нулю, й тому для площини кожного типу буде $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$. **Теорема доведена.**

З теореми випливає, що для знаходження кута між векторами псевдоевклідового простору, треба спочатку з'ясувати, яку площину (евклідову чи псевдоевклідову) ці вектори визначають. У випадку евклідової площини користуємось формулою $\cos\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$, а у випадку псевдоевклідової площини – формулою $ch\varphi = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Завдання. Визначити кут між векторами $\bar{a} = (1,2,3)$ й $\bar{b} = (0,4,-2)$ псевдоевклідового простору.

Увага! Легко перевірити, що обидва вектори евклідові, але це ще не означає, що вони визначають евклідову площину. Пам'ятаємо, що тип площини розпізнають по набору з двох ортогональних напрямних векторів.

Завдання. 1) Визначити тип площини, паралельної векторам $\bar{a} = (3,4,1)$, $\bar{b} = (4,0,2)$.

Розв'язання. Нехай $\bar{n} = (x, y, z)$ – нормальний вектор площини, тоді

$$\begin{cases}(\bar{n},\bar{a}) = 0,\\(\bar{n},\bar{b}) = 0,\end{cases}, \begin{cases}-3x+4y+z=0,\\-4x+2z=0,\end{cases}, \begin{cases}x=4y,\\z=2x,\end{cases}, \begin{cases}y=\frac{1}{4}x,\\z=2x,\end{cases} \Rightarrow \bar{n} = (4,1,8) \text{ при } x = 4.$$

$\bar{n}^2 = -16+1+64 > 0$ – евклідів, значить площина псевдоевклідова.

2) Дано площину $2x+3y+4z-2=0$. Визначити її тип.

Розв'язання. Застосуємо критерій. Оскільки $16+9>4$, то площина псевдоевклідова. Її нормальним вектором є $\bar{n}=(-2,3,4)$, для якого $\bar{n}^2=-4+9+16>0$, отже, нормальный вектор евклідів.

Теорема. Відстань від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{-A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.8}$$

Доведення. Пряма, що містить точку M_0 й перпендикулярна площині, має параметричні рівняння $x=x_0+At$, $y=y_0+Bt$, $z=z_0-Ct$. Знайшовши координати точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ перетину цієї прямої з площиною, отримаємо

$$d^2=-(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{-A^2+B^2+C^2},$$

звідки й випливає (2.8). ■

Наприклад, відстань від точки $M(1,-1,3)$ до площини $2x+3y+4z-2=0$ (псевдоевклідової) дорівнює

$$d=\frac{|2\cdot1+3\cdot(-1)+4\cdot3-2\cdot1|}{\sqrt{-4+9+16}}=\frac{9}{\sqrt{21}}$$

і є дійсним числом, а від цієї ж точки до площини $5x-2y+z-3=0$ (евклідової) відстань є уявним числом:

$$d=\frac{|5\cdot1-2\cdot(-1)+1\cdot3-3|}{\sqrt{-25+4+1}}=\frac{3}{2\sqrt{5}i}.$$

3. Простір Мінковського (псевдоевклідів чотиривимірний простір індексу 1) (для самостійного опрацювання)

Простором Мінковського називається чотиривимірний псевдоевклідовий простір індексу 1. Герман Мінковський запропонував

даний простір у 1908 році як геометричну інтерпретацію простору-часу спеціальної теорії відносності.

Інтервал у просторі Мінковского відіграє роль, аналогічну ролі відстані в геометрії евклідових просторів. Він інваріантний при заміні однієї инерціальної системи відліку на іншу, так само, як відстань інваріантна при поворотах, відображеннях і зрушеннях початку координат в евклідовому просторі.

Після просто евклідових просторів найбільший інтерес представляють евклідові простори індексу $k=1$ (або псевдоевклідові простори). Евклідовий простір індексу 1 становить інтерес із погляду теорії диференціальних рівнянь (хвильове рівняння з n аргументами) і особливо з погляду теорії відносності. В останньому випадку відіграє роль саме чотиривимірний евклідовий простір індексу 1. Цей простір може бути отриманий на базі чотиривимірного аффінного простору A_4, за допомогою введення скалярного множення векторів спеціальним чином.

Нехай $R=\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4\}$ деякий репер аффінного простору A_4, де $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3+a_4\vec{e}_4$, $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3+b_4\vec{e}_4$.

Введемо скалярне множення за формулою:

$$(\vec{a},\vec{b})=-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4. \qquad (3.1)$$

Простір A_4, для векторів якого введене скалярне множення за формулою (3.1) називається *чотиривимірним псевдоевклідовим простором індексу 1* або *простором Мінковського.* Позначається ${}^1R_4$.

Скалярний квадрат вектора визначається за формулою

$$\vec{a}^2=-a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2 \qquad (3.2)$$

(відносно базиса $\vec{e}_1{}^2=-1$, $\vec{e}_2{}^2=\vec{e}_3{}^2=\vec{e}_4{}^2=1$, $(e_i,e_j)=0$, $i\neq j$)

Означення 3.1. Довжиною вектора $\vec{a}$ в просторі Мінковського будемо називати число: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{-a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2}$

Означення 3.2. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ простору Мінковського називаються ортогональними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Таким чином, у просторі ${}^1R_4$ будуть існувати вектори трьох типів.

- Вектори дійсної довжини при $a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2>a_1{}^2$.

Наприклад, $\vec{a} = (2,1,1,2)$.

- Вектори уявної довжини при $a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 < a_1{}^2$.

Наприклад, $\vec{a} = (3,1,1,1)$.

- Ненульові вектори нульової довжини при $a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2 = a_1{}^2$.

Наприклад, $\vec{a} = (6,2,4,4)$. Такі вектори називаються *ізотропними.* Вони паралельні твірним ізотропного конуса. Такий конус також називають світловим.

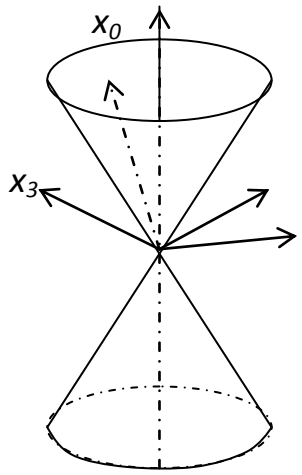

Рисунок 3.1 – Ізотропний конус простору Мінковського

Рівняння конуса буде мати вигляд

$$-(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 0.$$

Прямі псевдоевклідового простору ${}^1R_4$ діляться на три типи:

- евклідові, якщо довжина направляючого вектора дійсна. Наприклад, $e = [0, \vec{e}_2]$;
- псевдоевклідові, якщо довжина напрямного вектора уявна. Наприклад, $e = [0, \vec{e}_1]$;
- ізотропні, якщо довжина напрямного вектора дорівнює 0. Наприклад, $e = [0, \vec{e}_1 + \vec{e}_2]$.

У просторі ${}^1R_4$ існує три типи 2 – вимірних площин.

- площини, в яких всі вектори евклідові, будемо називати евклідовими і позначати R_2. Наприклад, евклідовою площиною є площина з

напрямними векторами $\vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$. Для будь-якого вектора $\vec{x} = x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ цієї площини $\vec{x}^2 = x_2^2 + x_3^2 > 0$, тобто він є евклідовим;

- площини, в яких є вектори усіх трьох типів (евклідові, псевдоевклідові, ізотропні), будемо називати псевдоевклідовими і позначати ${}^1R_2$. Наприклад, псевдоевклідовою є координатна площина з напрямними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$. Для будь - якого вектора $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$ цієї площини $\vec{x}^2 = -x_1^2 + x_2^2$. Очевидно, $\vec{x}^2$ може бути додатним, від'ємним числом або нулем. Якщо $|x_1| < |x_2|$, то $\vec{x}$ - евклідів вектор. Якщо $|x_1| > |x_2|$, то $\vec{x}$ - псевдоевклідів вектор. Якщо $|x_1| = |x_2|$, то $\vec{x}$ - ізотропний вектор. Тобто в цій площині є вектори усіх трьох типів;
- площини, в яких кожен із векторів або евклідовий або ізотропний, будемо називати ізотропними та позначати R_2^1. Наприклад, ізотропною є площина, що проходить через початок координат і має напрямні вектори $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$. Для вектора $\vec{x}$ цієї площини $\vec{x} = x_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + x_2\vec{e}_3$ і $\vec{x}^2 = -x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_2^2$. Якщо $x_2 = 0$, то вектор $\vec{x}$ - ізотропний. Якщо $x_2 \neq 0$, то вектор $\vec{x}$ - евклідів.

Зауваження. При визначенні типу двовимірної площини дуже важливо побудувати пару ортогональних векторів цієї площини. Дійсно, якщо ми маємо, наприклад, два неколінеарних евклідових вектора, то вони можуть бути векторами евклідової, або псевдоевклідової, або ізотропної площини. Тобто однозначної відповіді дати неможливо, поки не побудуємо ортонормований базис.

Для тривимірних площин маємо наступні визначення:

- В евклідовій площині уві вектори евклідові;
- В псевдоевклідовій площині є вектори всі трьох типів;
- В ізотропній площині кожен вектор або евклідовий або ізотропній.

Наприклад, серед координатних 3–площин простору ${}^1R_4$ є евклідові і псевдоевклідові площини:

1) евклідовою 3-площиною є 3-площина $\sum_3 = [0, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$. Для векторів цієї 3-площини $\vec{x} = x_1\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3 + x_3\vec{e}_4$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_3 + y_3\vec{e}_4$. Тоді $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3 + x_3\vec{e}_4, y_1\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_3 + y_3\vec{e}_4) =$ $x_1y_1\vec{e}_2{}^2 + x_2y_2\vec{e}_3{}^2 + x_3y_3\vec{e}_4{}^2 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

2) площиною ${}^1R_3$ є площина $\sum_3 = [0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$. Для векторів цієї 3-площини $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Одержуємо $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) =$ $x_1y_1\vec{e}_1{}^2 + x_2y_2\vec{e}_2{}^2 + x_3y_3\vec{e}_3{}^2 = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

3) ізотропною 3-площиною є 3-площина $\sum_2 = [0, \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$. Вектори, що її визначають, утворюють ортонормований базис, в якому перший вектор ізотропний, а два інших – евклідові. Для векторів цієї 3-площини $\vec{x} = x_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + x_2\vec{e}_3 + x_3\vec{e}_4$, $\vec{y} = y_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + y_2\vec{e}_3 + y_3\vec{e}_4$ одержимо $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + x_2\vec{e}_3 + x_3\vec{e}_4, y_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + y_2\vec{e}_3 + y_3\vec{e}_4) =$
$x_1y_1(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)^2 + x_2y_2\vec{e}_3{}^2 + x_3y_3\vec{e}_4{}^2 = x_2y_2 + x_3y_3$.

Вище було сказано, що афінні властивості в просторах R_4 і ${}^1R_4$ однакові. В просторі R_4 гіперплощина (3 – вимірна площина) задається рівнянням $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$, де не всі a_1, a_2, a_3, a_4 дорівнюють 0, а 2 – вимірна площина може розглядатися як перетин двох гіперплощин, тобто її можна задати системою рівнянь: $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b_1, \\ c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 = b_2. \end{cases}$

Відстань $\rho(M, N)$ між точками $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ і $N(y_1, y_2, y_3, y_4)$ у просторі ${}^1R_4$ визначається як довжина вектора $\overline{MN}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, y_4 - x_4)$ й дорівнює

$$\rho(M, N) = \left|\overline{MN}\right| = \sqrt{-(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2} \qquad (3.3)$$