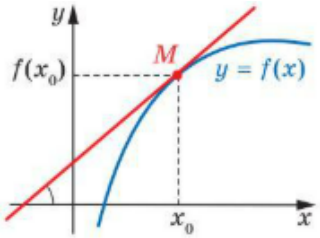
5 РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$, що є диференційованою в точці x_0.



Тоді до графіка цієї функції в точці x_0 можна провести невертикальну дотичну, рівняння якої $y = kx + b$, де k – кутовий коефіцієнт цієї прямої.

З геометричного змісту похідної будемо мати, що

$$k = f'(x_0).$$

А тоді рівняння дотичної приймає вигляд:

$$y = f'(x_0)x + b. \qquad (1)$$

Ця дотична, згідно з побудовою, має проходити через точку $M(x_0; f(x_0))$, а, отже, координати цієї точки, задовольняють рівняння дотичної. тобто при підстановці координат точки M в рівняння дотичної (1) отримаємо правильну рівність:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

А тоді рівняння дотичної (1) приймає вигляд:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Після зведення подібних, отримуємо ***рівняння дотичної, проведеної до графіка функції*** $y = f(x)$ ***в точці з абсцисою*** x_0:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Приклад 1. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = 2 - 4x - 3x^2,\ x_0 = -2;$

2) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3,\ x_0 = 9;$

3) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ x_0 = \frac{\pi}{2};$

4) $f(x) = \frac{x}{x+1},\ x_0 = -2.$

Розв'язання. 1) Для заданої задачі:

$$x_0 = -2;$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = 2 + 8 - 12 = -2;$$

$$f'(x) = \left(2 - 4x - 3x^2\right)' = 0 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2x = -4 - 6x \Rightarrow f'(x_0) = f'(-2) = 8.$$

Підставляємо знайдені числові значення в рівняння дотичної, будемо мати:

$$y = 8(x-(-2))+(-2),$$
$$y = 8(x+2)-2,$$
$$y = 8x+16-2,$$
$$y = 8x+14.$$

Відповідь. $y = 8x+14$.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, якщо ця дотична паралельна заданій прямій l:

1) $f(x) = \dfrac{x+4}{x-4}, l: y = -2x+4;$ 2) $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2}, l: y = 3x.$

Розв'язання. 1) Оскільки дотична паралельна прямій l, то кутові коефіцієнти цих прямих рівні. Кутовий коефіцієнт заданої прямої

$$k_l = -2.$$

Кутовий коефіцієнт дотичної, згідно до геометричного змісту похідної

$$k = f'(x_0) = -2,$$

де x_0 – абсциса точки дотику.

Маємо, що

$$f'(x) = \left(\frac{x+4}{x-4}\right)' = \frac{(x+4)'\cdot(x-4)-(x+4)\cdot(x-4)'}{(x-4)^2} =$$
$$= \frac{1\cdot(x-4)-(x+4)\cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{\cancel{x}-4-\cancel{x}-4}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2};$$
$$f'(x_0) = -\frac{8}{(x_0-4)^2} = -2,$$
$$(x_0-4)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0-4=2, \\ x_0-4=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=6, \\ x_0=2. \end{array}\right.$$

Отже, графіку функції $f(x)$ належить дві точки, у яких дотичні паралельні прямій l.

При $x_0 = 6$ маємо, що $f(x_0) = \dfrac{6+4}{6-4} = \dfrac{10}{2} = 5$, тоді шукане рівняння дотичної

$$y = -2(x-6)+5 \Rightarrow y = -2x+17;$$

при $x_0 = 2$: $f(x_0) = \dfrac{2+4}{2-4} = -3$, а тоді маємо:

$$y = -2(x-2)+(-3) \Rightarrow y = -2x+1.$$

Відповідь. $y = -2x+17$, $y = -2x+1$.