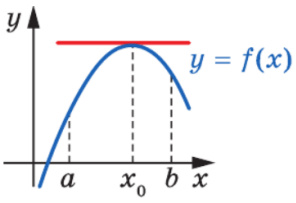
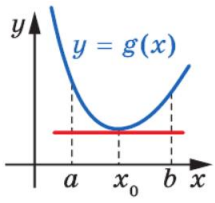
6 МОНОТОННІСТЬ ФУНКЦІЇ

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка на відрізку $[a;b]$ в точці x_0 приймає найбільше значення, та функцію $y=g(x)$, яка на цьому ж відрізку в цій же точці приймає найменше значення (див. рис.):





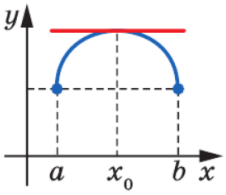
$$\max_{[a;b]} f(x)=f(x_0),\ \min_{[a;b]} g(x)=g(x_0).$$

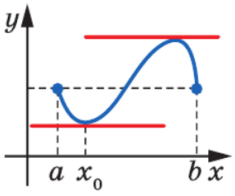
Нехай задані функції є і диференційовними в точці x_0. Тоді до їх графіків у точці з абсцисою x_0 можна провести дотичні. З наочних міркувань зрозуміло, що ці дотичні будуть горизонтальними прямими. З того, що кутовий коефіцієнт горизонтальних прямих дорівнює нулю, робимо висновок, що

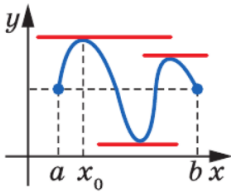
$$f'(x_0)=0,\ g'(x_0)=0.$$

Теорема *(теорема Ферма[1])*. Нехай функція $y=f(x)$, визначена на проміжку $[a;b]$, у точці $x_0\in(a;b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо задана функція є диференційованою в точці x_0, то $f'(x_0)=0$.

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка є диференційованою на проміжку $[a;b]$ та на кінцях цього проміжку набуває однакових значень.





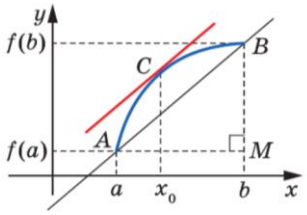


З рисунків видно, що існує щонайменше одна така точка $x_0\in(a;b)$, в якій дотична, проведена до графіка функції $y=f(x)$, є горизонтальною прямою.

Теорема *(теорема Ролля[2])*. Якщо функція $y=f(x)$ є диференційованою на відрізку $[a;b]$, причому $f(a)=f(b)$, то існує така точка $x_0\in(a;b)$, що

$$f'(x_0)=0.$$

Розглянемо функцію $y=f(x)$, що є диференційованою на відрізку $[a;b]$. Проведемо пряму AB, як показано на рисунку. З прямокутного ΔAMB знайдемо кутовий коефіцієнт цієї прямої:



[1] П'єр Ферма (17.08.1601-12.01.1665) – французький математик, засновник аналітичної геометрії та теорії чисел.
[2] Мішель Ролль (21.04.1652-08.11.1719) – французький математик, член Паризької академії наук. Основні праці присвячені методам чисельного розв'язування рівнянь.

$$k = \operatorname{tg}\angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

На дузі AB існує така точка C, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB. А тоді кутові коефіцієнти дотичної та прямої AB рівні, тобто

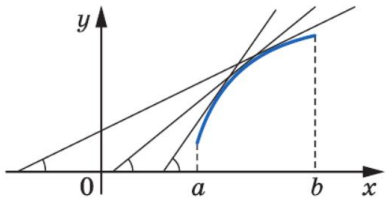
$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема ***(теорема Лагранжа[3])***. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на відрізку $[a;b]$, то існує така точка $x_0 \in (a;b)$, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

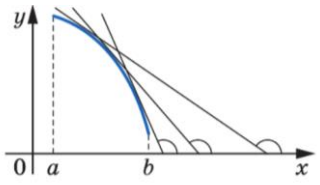
Теорема ***(ознака сталості функції)***. Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x) = 0$, то функція $y = f(x)$ є константою на вказаному проміжку I.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка є диференційована на проміжку $[a;b]$ та зростає на цьому відрізку. Цей графік має властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис. Оскільки тангенс гострого кута є додатним число, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, згідно з геометричним змістом похідної



$$f'(x) > 0,\ x \in (a;b).$$

Розглянемо спадну та диференційовану на проміжку $[a;b]$ функцію $y = f(x)$. Будь-яка дотична утворює до графіка утворює тупий кут з додатним напрямком осі Ox. Оскільки тангенс тупого кута від'ємний, то і кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також від'ємний, а тоді



$$f'(x) < 0,\ x \in (a;b).$$

Теорема ***(ознака зростання/спадання функції)***. Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0\ (f'(x) < 0)$, то функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на цьому проміжку.

---

[3] Жозеф Луї Лагранж (25.01.1736-10.04.1813) – французький математик, фізик та астроном італійського походження. Зробив великий внесок у математичний аналіз, теорію чисел, класичну та небесну механіку.

Зауваження. Справедливим є й обернене твердження: якщо функція зростає (спадає) на деякому проміжку I, то для всіх x із цього проміжку виконується нерівність $f'(x)>0\,(f'(x)<0)$.

Зауваження. Проміжки зростання/спадання функції називаються ***проміжками монотонності*** функції

Приклад 1. Знайти проміжки зростання та спадання функції:

1) $f(x)=-\frac{3}{4}x^4+4x^3-6x^2+5$;

2) $f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x-1}$;

3) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$;

4) $f(x)=x+\frac{9}{x}$;

5) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-7$;

6) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$.

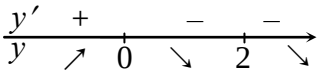
Розв'язання. 1) Знайдемо похідну функції:

$$f'(x)=-3x^3+12x^2-12x.$$

Розв'яжемо рівняння $f'(x)=0$:

$$-3x^3+12x^2-12x=0,$$
$$-3x\left(x^2-4x+4\right)=0,$$
$$-3x=0,\,|:3 \quad \text{або} \quad (x-2)^2=0,$$
$$x_1=0, \qquad x-2=0,$$
$$x_2=2.$$

Дослідимо знак похідної на кожному з отриманих проміжків: $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$:



Таким чином, функція зростає на проміжку $(-\infty;0)$; і спадає на $(0;2)$ та $(2;+\infty)$, тобто $(0;+\infty)$.

Відповідь. $f\searrow:\ x\in(0;+\infty)$, $f\nearrow\ x\in(-\infty;0)$.