ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
„ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРІЇНИ

О.М. Штейнле, Ю.М. Стреляєв

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для студентів біологічного факультету

Частина 2

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № 8 від 24.02.2010р.

Запоріжжя 2010

УДК: 51(075.8)

Штейнле О.М., Стреляев Ю.М. Вища математика: Навчально-методичний посібник для студентів біологічного факультету. Ч.2. – Запоріжжя: ЗНУ, 2010. – 115 с.

Навчально-методичний посібник призначений для студентів I курсу усіх спеціальностей біологічного факультету денної та заочної форм навчання. Посібник охоплює наступні теми: „Інтегральне числення”, „Функції багатьох змінних”, „Теорія функцій комплексної змінної”, „Диференціальні рівняння”, містить теоретичний матеріал, приклади розв’язання задач та варіанти індивідуальних завдань для вдосконалення практичних навичок студентів.

Рецензент С.М. Гребенюк, к.т.н., доцент

Відповідальний за випуск С.М. Гребенюк, к.т.н., доцент

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс вищої математики є основою для вивчення загальнотеоретичних та спеціальних дисциплін. Метою вивчення курсу є оволодіння основними методами дослідження та розв'язання математичних задач.

Даний посібник містить необхідний теоретичний матеріал, приклади розв'язання задач. У посібнику подана велика кількість задач для індивідуальної роботи студентів з метою вдосконалення їх навичок. Метою даного посібника є забезпечення проведення поточного контролю студентів.

За підсумком вивчення курсу „Вища математика” студент повинен знати: основні поняття і теореми лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу; вміти: формулювати основні означення та теореми курсу, розв'язувати основні види типових задач.

При виконанні та оформленні індивідуальних завдань необхідно дотримуватися наступних правил:

1. Робота виконується в окремому зошиті, на якому чітко вказані прізвище студента, його ініціали, номер групи та номер варіанта;
2. При розв'язанні індивідуальних завдань необхідно вказувати номер та вихідні данні задачі;
3. Розв'язок задачі повинен бути акуратним, без скорочень.

Індивідуальні завдання, які виконанні з порушенням цих правил не враховуються. Якщо робота не зарахована, то вона повинна бути виконана знову.

Типове завдання вважається зарахованим, коли виконані всі індивідуальні завдання з нього.

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

1. Первісна та неозначений інтеграл.
2. Заміна змінної при інтегруванні.
3. Інтегрування частинами.
4. Інтегрування раціональних функцій.
5. Інтегрування функцій, що містять квадратній тричлен
6.Інтегрування ірраціональних функцій.
7. Інтегрування тригонометричних функцій.
8. Означений інтеграл та його застосування.

1. Первісна та неозначений інтеграл

Функцію $F(x)$ називають *первісною функції* $f(x)$ на деякому проміжку, якщо $F(x)$ неперервна на цьому проміжку і має диференціал у кожній його внутрішній точці, причому $F'(x) = f(x)$. Сукупність усіх первісних $\{F(x)+C, C \in R\}$ функції називають неозначеним інтегралом функції $f(x)$ та пишуть $\int f(x)dx = F(x)+C.$

Основні правила інтегрування

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x)+C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ \ a = const, a \neq 0$.
5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
6. $\int f(ax+b) = \dfrac{1}{a}F(ax+b)+C.$
7. Якщо $\int f(x)dx = F(x)+C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C.$

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int du = u + C.$

2. $\int u^{\alpha} dx = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1.$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C, \ \ a > 0, \ a \neq 1.$

5. $\int e^{u} dx = e^{u} + C.$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C.$

7. $\int \cos u du = \sin u + C.$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^{2} u} = tgu + C.$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^{2} u} = -ctgu + C.$

10. $\int chudu = shu + C.$

11. $\int shudu = chu + C.$

12. $\int \dfrac{du}{ch^{2} u} = thu + C.$

13. $\int \dfrac{du}{sh^{2} u} = -cthu + C.$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^{2}}} = \begin{cases} \arcsin u + C \\ -\arccos u + C. \end{cases}$

15. $\int \dfrac{du}{1+u^{2}} = \begin{cases} arctgu + C \\ -arcctgu + C. \end{cases}$

16. $\int \dfrac{du}{u^{2}+a^{2}} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + C, \ \ a \neq 0$

17. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C, \ \ a \neq 0$

18. $\int \frac{udu}{a^2 \pm u^2} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| a^2 \pm u^2 \right| + C.$

19. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{|a|} + C, \ \ a > 0$

20. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C, \ \ a > 0$

21. $\int \frac{udu}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm u^2} + C, \ \ a > 0$

22. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C, \ a > 0$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C, \ \ a > 0$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm 1}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm 1} \right| + C.$

25. $\int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C.$

Безпосереднє інтегрування передбачає застосування таблиці і властивостей неозначеного інтегралу.

Для обчислення інтегралів виду:

$$\int \sin mx \cos nx dx; \ \int \cos mx \cos nx dx; \ \int \sin mx \sin x dx$$

обчислюються після перетворення добутку тригонометричних функцій в алгебраїчну суму за допомогою відомих формул тригонометрії:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right],$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

При знаходженні інтегралу виду:

$$\int\cos^p x\cdot\sin^q xdx$$

можливі наступні випадки:

а) одне з чисел p або q непарне, наприклад $p=2k+1$, тоді

$$\int\cos^p x\cdot\sin^q xdx=\int\cos^{2k} x\cdot\sin^q x\cdot\cos xdx=$$
$$=\int(1-\sin^2 x)^{2k}\cdot\sin^q xd(\sin x),$$

тобто отримали інтеграли від степеневих функцій;

b) обидва числа p та q – парні, тоді використовуємо формули, які дозволяють знизити степінь тригонометричних функцій.

2. Заміна змінної при інтегруванні

Нехай на деякому проміжку визначена складна функція $f(\varphi(x))$ і функція $t=\varphi(x)$ неперервна на цьому проміжку. Тоді:

$$\int f(t)dt=\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx \qquad (1)$$

Формулу (1) називають формулою заміни змінної при інтегруванні.
Приклад:

$$\int (x^2\sqrt{x^3+1})dx = \left| \begin{matrix} x^3+1=t \\ 3x^2dx=dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

3. Інтегрування частинами

Метод інтегрування частинами опирається на рівність:

$$\int u dv = uv - \int v du, \qquad (2)$$

яку називають *формулою інтегрування частинами*.

Застосування формули (2) доцільно у тих випадках, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ вдається представити у вигляді добутку двох множників u і dv таким чином, щоб інтегрування виразів dv та vdu стало задачею більш простою, ніж інтегрування початкового виразу.

По відомому диференціалу dv функція v визначається неоднозначною, але у формулі (2) за v може бути вибрана будь-яка функція, що має диференціал dv (тобто довільну сталу при знаходженні v випускають).

Іноді для обчислення інтегралу формулу інтегрування по частинам доводиться застосовувати декілька разів.

4. Інтегрування раціональних функцій

Раціональною функцією $R(x)$ називається функція, яка дорівнює відношенню двох многочленів: $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$.

Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь чисельника менша за степінь знаменника.

До *найпростіших раціональних дробів* відносяться раціональні дроби вигляду

$$\frac{A}{(x-a)^{\alpha}} \text{ і } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}},\ p^2-4q<0.$$

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним чином розкласти в суму найпростіших раціональних дробів, тобто

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(s)}}{x-a_s} + \ldots + \frac{A_{\alpha_s}^{(s)}}{\left(x-a_1\right)^{\alpha_s}} +$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\lambda_1}} + \ldots + \frac{M_1^{(r)}x+N_1^{(r)}}{x^2+p_rx+q_r} + \ldots + \frac{M_{\lambda_r}^{(r)}x+N_{\lambda_r}^{(r)}}{\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{\lambda_r}}$$

де $n<m$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_s+2(\lambda_1+\ldots+\lambda_r)=m$.

Тому інтегрування раціональних дробів зводиться до розкладу раціональної функції на елементарні дроби та до інтегрування елементарних дробів та многочленів. Інтегрування елементарних дробів провадиться таким чином:

1) $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln\left|x-a\right| + C;$

2) $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C,\ \ n\neq 1;$

3)

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C;$$

4)

$$\int\frac{(Mx+N)}{(x^2+px+q)^n}dx=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n},$$

$n>1$.

Останній інтеграл підстановкою $t=x+\frac{p}{2}$ зводиться до інтегралу I_n (1.4).

5. Інтегрування функцій, що містять квадратній тричлен

Розглянемо інтеграл виду:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx.$$

Якщо $A\neq 0$, тоді з чисельника можна виділити доданок $2x+b$, який дорівнює похідній квадратного тричлена, що знаходиться в знаменнику. Тоді в результаті простих перетворень отримаємо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+b)+(2B/A-b)}{x^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+b)}{x^2+bx+c}dx + (B-Ab/2)\int \frac{dx}{x^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + (B-Ab/2)\int \frac{dx}{x^2+bx+c}.$$

Для обчислення останнього інтеграла виділимо в квадратному тричлені повний квадрат, тобто надамо вигляду:

$$x^2+bx+c = (x+b/2)^2 + c - b^2/4$$

та в залежності від знаку виразу $c-b^2/4$ отримаємо один з табличних інтегралів $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$.

Методи розв’язання інтеграла виду:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

аналогічні розглянутім віще, тільки в результаті отримаємо інші табличні інтеграли.

При $A \neq 0$ маємо:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b-b+2Ba/A}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + (B-Ab/2a)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c} + (B-Ab/2)\int \frac{dx}{\sqrt{a(x+b/2a)^2+(c-b^2/4a)}}.$$

Тоді при $c \neq b^2 / 4a,\ a > 0$ останній інтеграл можна привести до виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C,$$

а при $c > b^2 / 4a,\ a < 0$ – до виду $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin u + C.$

6. Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо інтеграли від деяких ірраціональних функцій, які за допомогою певних підстановок зводяться до інтегралів від раціональних функцій нової змінної.

Інтеграл виду:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad (a,\ b,\ c,\ d = const)$$

Приводиться за допомогою підстановкою $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, звідки

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a},\ dx = \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{\left(ct^n - a\right)^2} dt.$$

Розглянемо інтеграл виду:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

де $P_n(x)$ - многочлен степені n

Даний інтеграл завжди можна представити у вигляді:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

де $Q_{n-1}(x)$ - многочлен степеня $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами, λ - невизначений коефіцієнт.

Диференціюємо рівність, в результаті отримаємо тотожність. З якої визначаємо коефіцієнти многочленна $Q_{n-1}(x)$ ти число λ.

Інтеграл від диференціального біному

$$\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx ,$$

де m,n,p - раціональні числа, може бути зведений до інтегрування раціональних функцій лише у трьох наступних випадках за допомогою підстановок Чебишева.

1) якщо p - ціле, то покладають $x=t^N$, де N - спільний знаменник дробів m і n;
2) якщо $\dfrac{m+1}{n}$ - ціле, покладають $a+bx^n=t^N$, де N - знаменник дробу p;
3) якщо $\dfrac{m+1}{n}+p$ - ціле, покладають $ax^{-n}+b=t^N$, де N - знаменник дробу p.

Інтегрування квадратичних ірраціональностей

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

здійснюється підстановками Ейлера, які у даному випадку є універсальними:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t$, якщо $a>0$;
2) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$;
3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{c}+xt$.

7. Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграл виду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

реалізується *універсальною тригонометричною підстановкою* $t = tg\frac{x}{2}$, після уведення якої отримаємо

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

тому $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$.

Розглянемо можливі випадки:

1) Якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то уводять заміну $t = \cos x$.
2) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то уводять заміну $t = \sin x$.
3) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то уводять заміну $t = tgx$.

8. Означений інтеграл та його застосування

Нехай функція $f(x)$ визначена на сегменті $[a;b]$ і $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ – довільне розбиття цього сегменту на n частин. Позначимо $\Delta x_i = x_{i+1}, \chi = \max \Delta x_i$ (рис. 1). Виберемо на кожному із сегментів $[x_i; x_{i+1}]$ $(i = 0,1\ldots,n-1)$ точку $\zeta_i \in [x_i; x_{i+1}]$ і складемо вираз:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta x_i,$$

який назвемо інтегральною сумою. Якщо існує скінчена границя $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$, яка не залежить від способу розбиття Π сегмента $[a;b]$ і вибору точок ζ_i, то число I називають означеним інтегралом функції $f(x)$ на сегменті $[a;b]$ і позначають символом

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

а функцію $f(x)$ називають *інтегрованою по Ріману* на цьому сегменті.

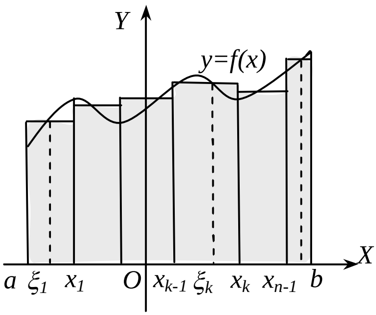


Рис. 1

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а $F(x)$ - первісна функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формула (3) називається *формулою Ньютона-Лейбниця.*

Властивості означеного інтегралу:

1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$

2. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_b^a f(x)dx \ (c = const)$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad a < c < b$;

5. Якщо $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$;

6. Якщо $f(x) \leq g(x)$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$;

7. *Теорема про середнє*: якщо $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то має місце оцінка

$$\inf_{[a,b]} f(x) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq \sup_{[a,b]} f(x) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx,$$

а якщо, крім того, $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, то існує таке значення $c \in [a,b]$, що

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Заміна змінної під знаком означеного інтегралу. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\varphi[\alpha,\beta] = [a,b]$, та функція $x = \varphi(t)$ неперервно диференційована на $[\alpha,\beta]$, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Інтегрування частинами в означеному інтегралі. Якщо функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на $[a;b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Цю формулу називають *формулою інтегрування частинами.*

Застосування означеного інтегралу

1. *Обчислення площ плоских фігур.* Нехай функція $y = y(x)$ неперервна і невід'ємна на сегменті $[a;b]$. Площа фігури Φ (рис. 2), обмеженої графіком функції $y = y(x)$, відрізком $[a;b]$ осі OX і відповідними відрізками прямих $x = a$ та $x = b$ дорівнює

$$S = \int_a^b y(x)dx$$

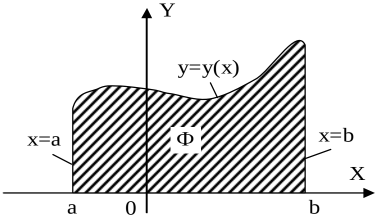


Рис. 2

Фігуру Φ називають *криволінійною трапецією.*

Функція $y = y(x)$ може бути задана параметричними рівняннями $x = x(t),\quad y = y(t),\quad t \in [\alpha;\beta]$, де функція $x(t)$ має неперервну невід'ємну похідну на $[\alpha;\beta]$, $x(\alpha) = a,\quad x(\beta) = b,$ а функція $y(t)$ неперервна і невід'ємна на $[\alpha;\beta]$, тоді площа фігури Φ обчислюється по формулі: $S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$

Нехай задана функція $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [a;b]$, де $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, неперервна і невід'ємна на $[\alpha;\beta]$. Площа сектора Φ (рис. 3), обмеженого графіком функції $\rho(\varphi)$ в полярних координатах і відповідними відрізками

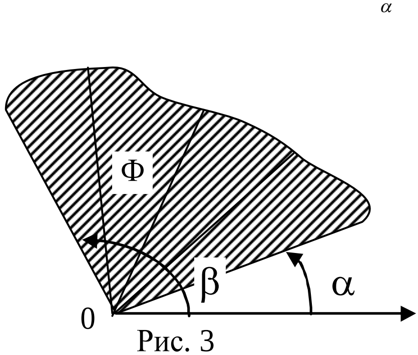


Рис. 3

променів $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

2. *Обчислення довжин плоских дуг.* Для функції, що задана явно $y = y(x), x \in [a,b]$ і має неперервну на $[a,b]$ похідну, довжина відповідної плоскої кривої, дорівнює

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx\,.$$

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ і кожна з координатних функцій має неперервні на $[\alpha,\beta]$ похідну, то довжина відповідної плоскої кривої, дорівнює

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

Якщо функція задана в полярній системі координат $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha,\beta]$ і має неперервну на $[\alpha,\beta]$ похідну, то довжина відповідної плоскої кривої, дорівнює

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\rho(\varphi)]^2 + [\rho'(\varphi)]^2}\,d\varphi\,.$$

3. *Обчислення об'ємів тіл обертання***.** Об'єм кільця, утвореного обертанням навколо вісі *Ox* фігури $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, де $y_1(x)\,і\,y_2(x)$ - неперервні невід'ємні функції, дорівнює

$$V_x = \pi\int_a^b \left[y_1^2(x) - y_2^2(x)\right]dx.$$

Об'єм кільця, утвореного обертанням навколо вісі *Oy* фігури $a \le x \le b$, $0 \le y \le y(x)$, де $y(x)$ - однозначна неперервна функція, дорівнює

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)dx.$$

Якщо функція задана параметрично $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$, до того ж функція $x(t)$ має неперервну невід'ємну похідну на $[\alpha, \beta]$ і $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, а функція $y(t)$ неперервна на $[\alpha, \beta]$, то об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції $D = \{a \le x \le b, 0 \le y \le y(x^{-1}(t))\}$ навколо вісі *Ox*, дорівнює

$$V_x = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)x'(t)dt.$$

Питання для самоконтролю

1. Поняття неозначеного та означеного інтегралу.
2. Властивості неозначеного та означеного інтегралу.
3. Основні методи інтегрування.
4. Застосування означеного інтегралу.

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. Поняття функції багатьох змінних. Частині похідні.
2. Повний диференціал. Диференціювання складної та неявної функції.
3. Частині похідні вищих порядків. Дотична площина та нормаль до поверхні.
4. Екстремум функції двох змінних.

1. Поняття функції багатьох змінних. Частині похідні

Змінна z називається *функцією двох змінних* x і y, якщо кожній парі чисел (x,y) з деякої області D за визначеним законом ставиться відповідно одне значення змінної z.
При цьому змінні x і y називаються незалежними змінними чи аргументами, а змінна z – залежною змінною чи функцією.
Той факт, що змінна z є функцією змінних x і y записують у вигляді

$$z = f(x, y)$$

для явного завдання функції, і

$$F(x, y, z) = 0$$

для неявного завдання функції.
Частинне значення функції $z = f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ звичайно записують у вигляді $f(x_0, y_0)$ чи $z\big|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$.

Областю визначення функції називається сукупність пар чисел (x, y), при яких функція z існує.

Геометрично область визначення функції двох змінних є або частина координатної площини xOy або вся площина xOy.
Н а п р и к л а д : Знайти область визначення функції

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} .$$

Функція визначена при $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ чи $x^2 + y^2 \leq 1$. Графічно область визначення даної функції зображується точками кола $x^2 + y^2 = 1$ і внутрішньої частини її кола (рис. 4).

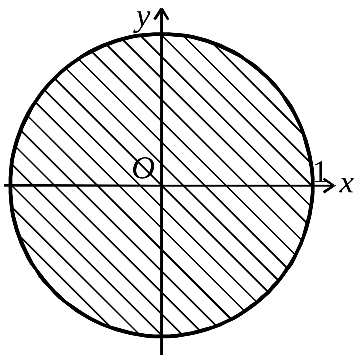


Рис. 4

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина усіх точок площини *xOy*, в яких функція набуває стале значення.
Рівняння лінії рівня має вигляд

$$f(x, y) = c \quad (c = \text{const}).$$

Даючи в цьому рівнянні різні припустимі значення сталої *c*, будемо одержувати різні лінії рівня.
Так, для функції $z = x^2 + y^2$ лініями рівня є концентричні кола $x^2 + y^2 = c$, $(c \geq 0)$ (рис. 5).
При c=0 коло вироджується в точку.
Для функції $z = x + y$ лініями рівня будуть прямі $x + y = c$, $-\infty < c < \infty$ (рис. 6).

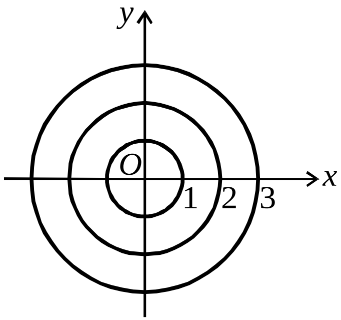


Рис. 5

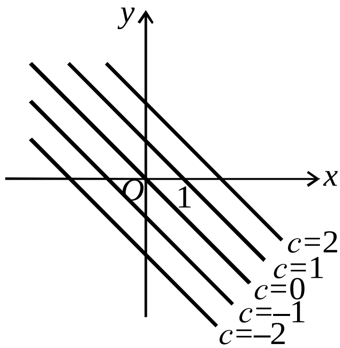


Рис. 6

Лінії рівня використовуються при складанні географічних карт (лінії рівня – лінії, в яких висота точок земної поверхні над рівнем моря однакова), при складанні метеорологічних карт (лінії рівня – лінії однакових температур) і т.д.

Для визначення границі функції введемо поняття околу точки $M_0(x_0, y_0)$.

δ–*околом точки* M_0 будемо називати множину точок M, віддалених від точки M_0 на відстань, що менше числа δ ($\delta>0$), тобто внутрішні точки кола радіуса δ з центром у точці M_0.

Число A називається *границею функції* $z = f(M) = f(x, y)$ при $M \to M_0$ $(x \to x_0, y \to y_0)$, якщо для кожного, як завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε знайдеться такий δ-окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, що для будь-якої точки $M(x, y)$ з цього околу виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$. Позначають $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ чи $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$.

Усі теореми про границі, доведені для функції однієї змінної поширюються і на функції двох змінних.

Функція $z = f(M)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо виконується рівність $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ або, більш докладно, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, тобто значення неперервної функції в точці M_0 і її границя при $M\to M_0$ збігаються.

На випадок функції двох змінних переносять властивості неперервних функцій однієї змінної: сума, різниця, добуток двох неперервних у точці M_0 функцій неперервні; частка $\dfrac{f_1(M)}{f_2(M)}$ двох неперервних у точці M_0 функцій неперервна, якщо $f_2(M_0)\neq 0$. Аналогічно узагальнюється властивість неперервності складної функції.

Функція $z=f(M)$, неперервна в кожній точці деякої області D, називається неперервною в цій області.

Основні властивості функції двох змінних, неперервної в замкнутій обмеженій області D.

1. Функція обмежена в області D.
2. Функція досягає свого найменшого m і найбільшого M значень.
3. Функція набуває хоча б в одній точці області D будь-яке значення, що лежить між m і M.

Якщо змінній x надати деякий приріст Δx, а y залишити постійним, тоді функція $z=f(x,y)$ отримає приріст $\Delta_x z$, що називається *частинним приростом функції* $z=f(x,y)$ *по змінній* x*:*

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

Аналогічно частинним приростом функції $z=f(x,y)$ по y називається приріст, отриманий функцією за умови, що міняється тільки змінна y, тобто

$$\Delta_y z=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Частинною похідною по x від функції $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0,y_0)$ називається границя відношення частинного приросту функції за аргументом x до приросту аргументу x за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Позначається частинна похідна по x так: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x, y)$.

Так що $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$.

Частинною похідною по y від функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається границя відношення частинного приросту функції за аргументом y до приросту аргументу y за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Позначається частинна похідна по y так: $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, $f'_y(x, y)$.

Отже, $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$.

З визначення частинних похідних випливає, що частинна похідна по будь-якій змінній є звичайною похідною цієї функції по обраній змінній, за умови, що інша змінна є сталою.

Тому обчислення частинних похідних не вимагає нових формул і правил диференціювання, крім тих, які відомі з диференціального числення функції однієї змінної.

Диференціал функції $z = f(x, y)$, знайдений при умові, що одна з незалежних змінних змінюється, а друга залишається сталою, називається *частинним диференціалом*, тобто

$$d_x z = f_x'(x, y)dx, \quad d_y z = f_y'(x, y)dy,$$

де $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

2. Повний диференціал. Диференціювання складної та неявної функції

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ називається різниця

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Головна частина повного приросту функції $z = f(x, y)$ лінійно залежна від приросту незалежних змінних Δx *та* Δy, називається *повним диференціалом функції* та позначається dz. Якщо функція має неперервні частинні похідні, то повний диференціал існує і дорівнює

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy ,$$

де $dx = \Delta x, dy = \Delta y$ – довільні прирости незалежних змінних, що називаються їх диференціалами.

Для функції n змінних $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ повний диференціал визначається по формулі:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n.$$

Повний диференціал застосовують в наближених обчисленнях значень функції, тобто

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y . \qquad (4)$$

Наприклад: Обчислити приблизно $1{,}04^{2{,}03}$.
Отримуємо $x+\Delta x=1{,}04$; $x=1$; $\Delta x=0{,}04$; $y+\Delta y=2{,}03$; $y=2$; $\Delta y=0{,}03$.
Для функції $z = x^y$, $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$.
За формулою (4) маємо:

$$(x + \Delta x)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x\Delta y .$$

Підставляючи зазначені значення x, y, Δx, Δy, одержуємо

$$1{,}04^{2{,}03} \approx 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}04 + 1^2 \ln 1 \cdot 0{,}03 = 1 + 0{,}08 = 1{,}08 .$$

Функція $z = f(u, v)$, де $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, називається *складною функцією* змінних x та y. Для знаходження частинних похідних складної функції застосовують формули:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

У випадку, коли $u=\varphi(x), v=\psi(x)$, отримаємо:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Якщо $u=x, v=\psi(x)$ маємо:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В останній формулі $\frac{dz}{dx}$ називається *повною похідною функції.*

Якщо рівняння $F(x, y)=0$ задає деяку функцію $y(x)$ у неявному вигляді та $F_y'(x, y)\neq 0$, тоді

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'(x, y)}{F_y'(x, y)}.$$

Якщо рівняння $F(x, y, z)=0$ задає функцію двох змінних $z(x, y)$ у неявному вигляді та $F_z'(x, y, z)\neq 0$, тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}.$$

3. Частині похідні вищих порядків. Дотична площина та нормаль до поверхні

Якщо функція $z = f(x,y)$ визначена в деякій області *D*, то її частинні похідні $f'_x(x,y)$ й $f'_y(x,y)$ у свою чергу будуть функціями двох змінних *x* і *y*, визначеними в тій же області *D*. Будемо називати їх частинними похідними першого порядку. Частинні похідні по *x* і *y* від функцій $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$ якщо вони існують, називають частинними похідними другого порядку від функції $z = f(x,y)$ в цій точці і позначають так:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

За визначенням $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)$ і т.д.

Частинні похідні третього, четвертого і т.п. порядків вводяться аналогічно.

Частинна похідна будь-якого порядку, узята по різним змінним, наприклад, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial x}$ і т.п. називається змішаною.

Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x,y)$, то *рівняння дотичної площини* в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до даної поверхні має вигляд:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а *рівняння нормалі*, що проведена через точку $M_0(x_0, y_0)$ поверхні:

$$\frac{z - z_0}{-1} = \frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)}.$$

У випадку, коли рівняння поверхні задано у неявному вигляді: $F(x, y, z) = 0$ та $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, то *рівняння дотичної площини* в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ має вид:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

а *рівняння нормалі* –

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

4. Екстремум функції двох змінних

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ задана в деякій області *D*.

Функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ області *D* максимум, якщо $f(M_0) > f(M)$ для всіх точок $M(x, y)$, які лежать у деякому околі точки M_0 і відмінні від точки M_0.

Аналогічно, функція $z = f(x, y) = f(M)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ області *D* мінімум, якщо $f(M_0) < f(M)$ для всіх точок *M*, які лежать у деякому околі точки M_0 і відмінні від точки M_0.

Максимум і мінімум функції $z = f(x, y)$ називають *екстремумами функції*.

Необхідні умови екстремуму.

Якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, то частинні похідні першого порядку цієї функції обертаються в точці екстремуму в нуль, чи не існують.

Точки, в яких перші частинні похідні функції $z = f(x,y)$ дорівнюють нулю чи не існують, називають *критичними точками цієї функції*.

Екстремум функції може бути лише в критичних точках, тобто якщо функція не має критичних точок, то вона не має екстремуму. З існування критичних точок ще не випливає існування екстремумів, тобто необхідні умови екстремуму не є достатніми.

Достатні умови екстремуму.

Обчислимо значення змішаних похідних другого порядку функції $z = f(x,y)$ в критичній точці і позначимо $f''_{xx}(M_0) = A$, $f''_{xy}(M_0) = B$, $f''_{yy}(M_0) = C$.

Складемо вираз $\Delta = AC - B^2$. Якщо в критичній точці $M_0(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2 > 0$, то функція має екстремум у точці M_0: мінімум при $A>0$ (чи $C>0$) і максимум при $A<0$ (чи $C<0$).

Якщо в критичній точці M_0, $\Delta<0$, то в точці екстремуму функції немає.

Якщо ж у критичній точці $\Delta=0$, то екстремум може бути, а може і не бути, потрібні додаткові дослідження.

Наприклад: Дослідити на екстремум функцію

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Для даної функції $z'_x = 4x^3 - 4x + 4y$, $z'_y = 4y^3 + 4x - 4y$. Знайдемо критичні точки функції, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Додавання рівнянь системи зведе до рівняння $x^3 + y^3 = 0$, звідси випливає $y = -x$. Підставляючи в перше рівняння $y = -x$, одержимо $x^3 - 2x = 0$, звідки маємо $x_1=0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$. Відповідно $y_1=0$, $y_2 = -\sqrt{2}$, $y_3 = \sqrt{2}$.

Одержимо три критичні точки: $M_1(0;0)$, $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Обчислимо другі частинні похідні функції: $z''_{xx} = 12x^2 - 4$, $z''_{xy} = 4$, $z''_{yy} = 12y^2 - 4$.

Для точки $M_1(0;0)$ $A = z''_{xx}(M_1) = -4$, $B = z''_{xy}(M_1) = 4$, $C = z''_{yy}(M_1) = -4$.

Тоді $\Delta = AC - B^2 = (-4)(-4) - 4^2 = 0$.

Достатня умова не дає відповіді на питання про існування екстремуму в точці $M_1(0;0)$. Дослідимо поведінку функції навколо точки.

Наприклад, в околі точки M_1 на прямій y=0 функція набуває вигляду $z(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ і є від'ємною. На прямій x=0 функція набуває вигляду $z(0,y) = y^4 - 2y^2 = y^2(y^2 - 2)$ і також є від'ємною. На прямій $y = x$ функція набуває вигляду $z(x, y = x) = 2x^4$ і є додатною.

Отже, в околі точки $M_1(0;0)$ не виконується визначення ні мінімуму, ні максимуму, отже, в точці екстремуму немає.

Для точки $M_2(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ $A = z''_{xx}(M_2) = 20$, $B = z''_{xy}(M_2) = 4$, $C = z''_{yy}(M_2) = 20$, $\Delta = AC - B^2 = 20 \cdot 20 - 16 = 384 > 0$ отже, екстремум є. Оскільки A>0 (C>0), то це мінімум: $z_{\min}(M_2) = -8$.

Аналогічно переконуємося в тому, що в точці $M_3(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ функція також має мінімум: $z_{\min}(M_3) = -8$.

Диференційована функція в обмеженій замкнутій області D досягає свого *найбільшого (найменшого) значення* або в стаціонарній точці, що лежить всередині області D, або на границі цієї області. Для знаходження найбільшого та найменшого значення функції в замкненій області D необхідно знайти всі критичні точки, що лежать в середині області та на її границі, обчислити значення функції в цих точках, а також в усіх інших точках границі, а потім шляхом порівняння отриманих чисел обрати найбільше та найменше з них.

Питання для самоконтролю

1. Поняття функції багатьох змінних.
2. Диференціювання складної та неявної функції.
3. Частині похідні вищих порядків.
4. Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.
4. Знаходження екстремуму функції двох змінних.
5. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції в замкненій області.

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1. Комплексні числа і дії над ними в алгебраїчній формі.
2. Тригонометрична та показникова форма комплексного числа.
3. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.

1. Комплексні числа і дії над ними в алгебраїчній формі

У множині дійсних чисел не кожне рівняння степені вище першої має розв'язок. Так, рівняння $x^2+1=0$ не має дійсних коренів, оскільки не існує дійсного числа, квадрат якого дорівнює числу –1. Це привело до розширення множини дійсних чисел шляхом уведення так званих уявних чисел.

Число, що задовольняє рівність $x^2+1=0$, позначають буквою i та називають *уявною одиницею*. Таким чином, $i^2=-1$.

Комплексним числом z називають вираз $x+iy$, де x і y дійсні числа.

При цьому x називається *дійсною частиною комплексного числа*, y – *уявною частиною*. Запис числа z у вигляді $x+iy$ називається *алгебраїчною формою комплексного числа*.

Комплексні числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ вважаються рівними, якщо відповідно рівні їх дійсні і уявні частини, тобто $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Комплексні числа не порівнюються, тобто поняття "більше", "менше" для них не існує.

Якщо $y=0$, то комплексне число набуває вигляду $z=x$ і називається дійсним числом. Якщо $x=0\left(y\neq 0\right)$, то комплексне число набуває вигляду $z=iy$. Його називають *чисто уявним числом*.

Якщо x=0 і y=0, то комплексне число z=0+i0 скорочено записують z=0 і називають нулем.

Два комплексних числа $x+iy$ і $x-iy$ називаються *комплексно-спряженими*. Якщо $z=x+iy$, то спряжене число $x-iy$ прийнято позначати $\bar{z}$.

Сумою комплексних чисел $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ є комплексне число

$$z = \left(x_1 + x_2\right) + i\left(y_1 + y_2\right) \ . \qquad (5)$$

При додаванні комплексних чисел додаються їх дійсні і уявні частини.

Добутком двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ є число

$$z = z_1 \cdot z_2 = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right) \ . \qquad (6)$$

Неважко помітити, що з урахуванням $i^2 = -1$, рівність (6) може бути формально отримана за звичайним правилом множення двочлена на двочлен.

Добутком двох спряжених чисел z і $\bar{z}$ є дійсне число.

$$z\bar{z} = \left(x + iy\right)\left(x - iy\right) = x^2 + y^2 \ . \qquad (7)$$

Ділення комплексних чисел – це дія, зворотна множенню. Часткою від ділення числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на число $z_2 = x_2 + iy_2$ називається таке число $z_3 = x_3 + iy_3$, що

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ . \qquad (8)$$

Піднесення комплексного числа z до натуральної степені n розглядається як окремий випадок множення комплексних чисел. При цьому $i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1,$ і взагалі $i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$.

2. Тригонометрична та показникова форма комплексного числа

Комплексне число $z = x + iy$ геометрично зображується точкою з координатами x, y на площині xOy (рис. 7).

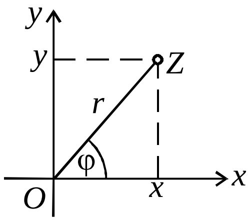


Рис. 7

Площина xOy, що служить для зображення комплексних чисел, називається *комплексною площиною*. Оскільки кожне комплексне число $z = x + iy$ визначається його дійсною частиною x і уявною частиною y єдиним чином, то кожному комплексному числу буде відповідати єдина точка в комплексній області. Очевидно, що справедливо і зворотне твердження, тобто, що кожній точці площини xOy відповідає єдине комплексне число. Отже, між комплексними числами і точками комплексної площини існує взаємно однозначна відповідність.

Якщо комплексне число має вигляд $z = x + 0i$, тобто є дійсним числом, то йому відповідає точка (x;0) на осі абсцис, яка називається дійсною віссю.

Якщо комплексне число має вигляд $z = 0 + iy$, тобто є число уявним, йому відповідає точка (0;y) на осі ординат, що називається уявною віссю.

Якщо кожній точці z комплексної області поставити у відповідність радіус-вектор $\overrightarrow{OZ}$, то з'явиться можливість представляти комплексні числа векторами.

Це дозволяє геометрично інтерпретувати додавання комплексних чисел. Нехай у комплексній площині дані два числа z_1 і z_2 (рис. 8). Побудуємо радіуси-вектори чисел $\overrightarrow{OZ_1}$ і $\overrightarrow{OZ_2}$. При додаванні комплексних чисел додаються їх дійсні і уявні частини, а при додаванні векторів додаються відповідні координати. Це дозволяє додавання комплексних чисел представляти у вигляді додавання векторів. Вектор $\overrightarrow{OZ_3}$, що є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах чисел $\overrightarrow{OZ_1}$ і $\overrightarrow{OZ_2}$ і представляє комплексне число $z_3 = z_1 + z_2$.

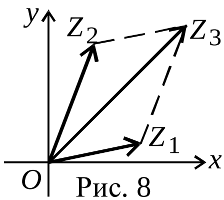


Рис. 8

Виберемо на площині xOy полярну систему координат так, щоб полюс збігся з початком координат, а полярна вісь – з віссю абсцис. Позначимо полярний радіус точки $z = x + iy$ через r, а полярний кут через φ (рис. 7). Полярний радіус r називається *модулем комплексного числа* і позначається $|z|$. Полярний кут φ називається *аргументом комплексного числа* і позначається $\arg z$, якщо береться головне значення кута $\left(0 \le \arg z < 2\pi\right)$ і $\operatorname{Arg} z$, якщо береться безліч усіх кутів для зазначеного положення полярного радіуса. Таким чином,

$$r = |z|, \quad \operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k \ , \tag{9}$$

де k – довільне ціле число, а φ – кожне зі значень аргументу.
Оскільки $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то $z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, або

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right). \tag{10}$$

Вираз (10) називається *тригонометричною формою комплексного числа*.
Показникова форма комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$, де

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \text{ для точок I та IV квадрантів;} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} \pm \pi, \text{ для точок II та III квадрантів.} \end{cases}$$

Наприклад:

$$2 + 2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}},$$

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$-3 = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 3e^{i\pi}.$$

3. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Додавання і віднімання комплексних чисел простіше і зручніше проводити, коли вони задані в алгебраїчній формі. Для інших дій більш зручна тригонометрична форма.

Якщо два комплексних числа дані в тригонометричній формі

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то добуток $z = z_1 \cdot z_2$ можна записати у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Таким чином, $r = r_1 r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, тобто

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|; \quad \mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg} z_1 + \mathrm{Arg} z_2 .$$

При множенні комплексних чисел їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються. Звідси, при зворотній дії діленні, виконуються рівності

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2 .$$

Правило множення комплексних чисел автоматично поширюється на будь-яке число співмножників. Якщо, зокрема, узяти всі співмножники рівними, одержуємо

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} \qquad (11)$$

Формула (11) називається *формулою Муавра* за ім’ям англійського математика, що винайшов її в 1707 р.

Коренем *n-ої* степені з комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ є таке число $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, що $z = z_1^n = r_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$.

Порівнюючи числа z і z_1^n, одержуємо

$$r_1^n = r, \quad n\varphi_1 = \varphi + 2n\pi \quad \left(k = 0,1,2\ldots\right).$$

Звідки $r_1 = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi_1 = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$. Отже,

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (12)$$

Додаючи k значення 0,1,2,..., одержуємо можливі значення для кореня z_1, z_2, ...

Отже, корінь *n-ої* степені з комплексного числа має n різних значень, і обчислюється за формулою (12) шляхом додання числу k значень 0,1,2,...(n–1).

Єдиним виключенням є число $z = 0$, усі корені якого дорівнюють нулю.

За допомогою комплексних чисел Л. Ейлер у 1743 р. встановив співвідношення, що пов’язує показникову і тригонометричну функції:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

яке називається формулою Ейлера.

Питання для самоконтролю

1. Поняття комплексного числа. Зображення на координатній площині.
2. Модуль та аргумент комплексного числа.
3. Операції над комплексними числами.
4. Показникові та тригонометрична форма запису комплексного числа.
5. Формула Мавра.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Основні поняття. Диференціальні рівняння першого порядку.
2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернулі.
3. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.
5. Системи диференціальних рівнянь.

1. Основні поняття. Диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння називається *диференціальним* відносно деякої шуканої функції, якщо воно містить хоча б одну похідну цієї функції. Якщо шукана функція y являється функцією одного аргументу x, тоді диференціальне рівняння називається *звичайним*. Якщо шукана функція залежить від кількох аргументів, тоді диференціальне рівняння називається *рівнянням в частинних похідних*.

В загальному випадку *диференціальним рівнянням n-го порядку* називається рівняння, що зв'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію *y* і її похідні y', y'', ..., $y^{(n)}$:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ . \qquad (13)$$

При цьому функція *F* може явно не містити у собі *x*, *y*, y', y'',..., $y^{(n-1)}$, але обов'язково повинна містити – $y^{(n)}$.

Порядком диференціального рівняння будемо називати порядок найвищої похідної, що входить у нього.

Розв'язком диференціального рівняння називається усяка функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє його.

Наприклад: Функція $y = \cos x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$, тому що $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ і, підставляючи *y* та y'' у рівняння, одержуємо $-\cos x + \cos x = 0$, що вірно для будь-якого *x*.

Розв'язок диференціального рівняння, заданий неявно, називають *інтегралом цього рівняння*.

Графік розв'язку диференціального рівняння називається його *інтегральною кривою*.

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 . \tag{14}$$

Якщо співвідношення (14) розв’язати відносно y', то одержимо рівняння вигляду

$$y' = f(x, y), \tag{15}$$

яке називається *диференціальним рівнянням першого порядку, розв’язаним відносно похідної*. Таке рівняння завжди можна записати в диференціальній формі

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 . \tag{16}$$

Якщо диференціальне рівняння записане у формі (16), і якщо $Q(x, y) \neq 0$, то його завжди можна розв’язати щодо похідної:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

тобто записати у вигляді $y' = f(x, y)$.

Диференціальне рівняння першого порядку має, взагалі, не один, а незліченну множину розв'язків.

Розв'язок диференціального рівняння $y = \varphi(x, C)$, що містить у собі довільну сталу, будемо називати *загальним розв'язком диференціального рівняння*. Загальний розв'язок, не розв’язаний щодо шуканої функції y, називають *загальним інтегралом диференціального рівняння*. Розв'язок, отриманий із загального при конкретному значенні довільної сталої будемо називати *частинним розв'язком*. Так, для диференціального рівняння $y' = -\frac{y}{x}$ розв'язок

$y=\frac{C}{x}$ є загальним, а розв'язки $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $y=-\frac{10}{x}$ – частинними розв'язками.

Графіком частинного розв'язку диференціального рівняння є *інтегральна крива* , графіком загального розв'язку – сім'я інтегральних кривих.

На рис. 8 зображена сім'я інтегральних кривих диференціального рівняння $y'=-\frac{y}{x}$.

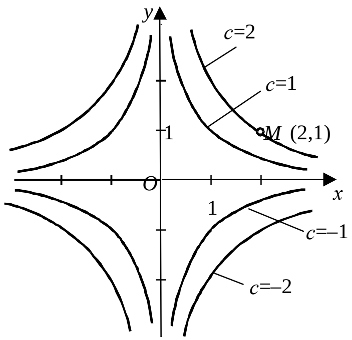


Рис. 8

Для того, щоб із загального розв'язку виділити визначений частинний розв'язок, приходиться задавати значення шуканої функції y_0 при деякім значенні аргументу x_0. Пари чисел x_0, y_0 називають *початковими* умовами чи початковими даними розв'язку.

Геометрично задання початкових умов рівнозначно заданно точки (x_0, y_0) – "початкової точки" на площині xOy. Будемо говорити, що розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння $y'=f(x,y)$ задовольняє початковій умові x_0, y_0, якщо $\varphi(x_0)=y_0$, тобто, якщо графік цього розв'язку проходить через точку (x_0, y_0).

Відшукання розв'язку диференціального рівняння $y'=f(x,y)$, що задовольняє заданим початковим умовам x_0, y_0, є однією з найважливіших задач теорії диференціальних рівнянь і називається *задачею Коші*.

Розглянемо рівняння вигляду

$$f_1(x)dx=f_2(y)dy\,,$$

яке називається *рівнянням з поділеними змінними*. Дане рівняння є рівністю двох диференціалів деяких функцій, з чого випливає, що функції або рівні, або розрізняються на довільну сталу. Розв'язок рівняння одержимо, проінтегрувавши рівність

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C .$$

Рівняння з подільними змінними має вигляд

$$f_1(x) f_2(y) dx = f_3(x) f_4(y) dy .$$

Поділимо змінні, тобто перетворимо рівняння так, щоб біля диференціала *dx* стояла множником функція аргументу *x*, а біля диференціала *dy* відповідно функція аргументу *y*. Для цього поділимо рівняння на добуток функцій, що стоять біля “чужих” диференціалів $f_2(y) f_3(x) \neq 0$, одержимо рівняння з подільними змінними

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx = \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy .$$

Проінтегрувавши, прийдемо до розв'язку у вигляді

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx = \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy .$$

Рівняння $y' = f(x, y)$ є рівнянням з подільними змінними, тільки якщо $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, тоді замінивши y' на $\frac{dy}{dx}$ і, помноживши рівняння на *dx*, одержимо рівняння з поділеними змінними, розв'язок якого має такий вигляд:

$$y' = f_1(x) f_2(y),$$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y),$$

$$dy = f_1(x) f_2(y) dx ,$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C\,.$$

Наприклад: Знайти розв'язок диференціального рівняння $ydy = -\sqrt{1-y^2}\,dx$, що задовольняє початковій умові $y(3)=1$. Зобразити графічно загальний і знайдений частинний розв'язки рівняння.

Дане рівняння є рівнянням з подільними змінними. Поділимо ліву і праву частину рівності на $-\sqrt{1-y^2} \neq 0$, одержимо

$$-\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = dx,$$

$$\int \frac{-ydy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx + C,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1-y^2\right)}{\sqrt{1-y_2}} = x + C,$$

або

$$\sqrt{1-y^2} = x + C,$$

$$1-y^2 = (x+C)^2.$$

Звідки $(x+C)^2 + y^2 = 1$ – загальний інтеграл диференціального рівняння. Графіком загального інтеграла даного диференціального рівняння є сім’я кіл з центром у точці $(-C;0)$ на осі абсцис і радіусом $R=1$. Надаючи C різні значення, одержимо різні інтегральні криві сім’ї. Щоб знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє умові $x_0=3$, $y_0=1$, підставимо значення $x_0=3$, $y_0=1$ у загальний розв'язок і обчислимо відповідне значення C:

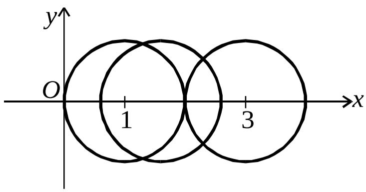


Рис. 9

$$\left(3+C\right)^2+1=1.$$

Звідки $\left(3+C\right)^2=0$, або $C=-3$.

Отже, частинним розв'язком рівняння, що задовольняє умові $y(3)=1$ є функція $\left(x-3\right)^2+y^2=1$, яка графічно зображується, як коло з центром у точці (3;0) радіусом R=1 (рис. 9).

Диференціальне рівняння $y'=f\left(x,y\right)$ називається *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною нульового порядку.

Можна показати, що однорідна функція нульового порядку може бути зведена до функції вигляду $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Наприклад: $\frac{y-x}{x}=\frac{y}{x}-1$, $\frac{x^2-2xy}{x^2+y^2}=\frac{1-2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

У такому випадку диференціальне рівняння набуває вигляду

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (17)$$

Підстановкою $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u'x+u$ рівняння можна звести до рівняння з подільними змінними. Дійсно, замість заданого рівняння (17) після підстановки одержимо рівняння $u'x+u=\varphi(u)$ або $u'x=\varphi\left(u\right)-u$.

Оскільки $u'=\frac{du}{dx}$, то поділяємо змінні, і, інтегруючи, прийдемо до розв'язку $\int\frac{du}{\varphi\left(u\right)-u}=\int\frac{dx}{x}+C=\ln\left|x\right|+C$, де C – довільна стала.

Замінюючи в цьому розв'язку допоміжну функцію u на $\frac{y}{x}$ приходимо до відповіді.

Наприклад: Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}$.

Рівняння зводиться до вигляду $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2$, ввівши заміну $\frac{y}{x} = u,\quad y = ux,\quad y' = u'x + u.$ Після підстановки в рівняння нової змінної, одержимо $u'x + u = u^2 - 2$ або $u'x = u^2 - u - 2$ – диференціальне рівняння з подільними змінними , де u – шукана функція.

Після поділу змінних прийдемо до виразу $\frac{du}{u^2 - u - 2} = \frac{dx}{x}$.

Оскільки $\int \frac{du}{u^2 - u - 2} = \int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| + C,$

то одержимо розв'язок у вигляді $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-2}{u+1}\right| = \ln|x| + C$ чи $\frac{u-2}{u+1} = cx^3$.

Оскільки $u = \frac{y}{x}$, остаточний розв'язок приймає вигляд $\frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x} + 1} = cx^3$ або

$\frac{y - 2x}{y + x} = cx^3$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (18)$$

буде однорідним, якщо $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ однорідні функції одного порядку.

Дійсно, розв'язуючи рівняння (18) відносно y', одержимо

$$y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

де $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ – однорідна функція нульового порядку.

Наприклад: Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y^2dx - (xy + x^2)dy = 0$, якщо $y(2)=1$.

У даному рівнянні $P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = -(xy + x^2)$ однорідні функції другого порядку. Розділимо рівняння на dx і розв'яжемо його відносно $\dfrac{dy}{dx} = y'$, одержимо

$$y' = \frac{y^2}{xy + x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} + 1}.$$

Замінимо $\dfrac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u$, отримаємо $u'x + u = \dfrac{u^2}{u+1}$ або $u'x = -\dfrac{u}{u+1}$.

Після поділу змінних прийдемо до рівняння $\dfrac{u+1}{u}du = -\dfrac{dx}{x}$. Звідки

$$\int \frac{u+1}{u}du = -\int \frac{dx}{x} + C \text{ або } u + \ln|u| = -\ln|x| + C.$$

Замінюючи $u = \dfrac{y}{x}$, одержимо $\dfrac{y}{x} + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = -\ln|x| + C$ або $\dfrac{y}{x} + \ln|y| = C$ – загальний інтеграл рівняння. Підставимо в загальний розв'язок початкові умови x=2, y=1 і знайдемо значення $C = \dfrac{1}{2}$.

Отже, частинний розв'язок заданого рівняння, що задовольняє початковій умові $y(2)=1$, має вигляд $\dfrac{y}{x} + \ln|y| = \dfrac{1}{2}$.

2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернулі

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де $p(x)$, $q(x)$ – відомі функції аргументу x, y – шукана функція.

Рівняння називається лінійним тому, що y і y' входять у нього лінійно, тобто в першій степені. Виключимо випадок, коли $q(x)$=0, інакше одержимо рівняння з подільними змінними.

Метод розв'язання такого рівняння запропонував Бернуллі Іоганн I. Метод полягає в наступному: знайдемо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій $u(x)v(x)$. Підберемо функції $u(x)$ і $v(x)$ так, щоб їх добуток uv задовольняв рівняння. Підставивши в рівняння $y=uv$, $y' = u'v + v'u$, одержимо

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x).$$

Одну з функцій підберемо так, щоб

$$v'u + p(x)uv = 0\,.$$

Помітимо, що $u\neq 0$, інакше функція $y\equiv 0$.
Тому $v' + p(x)v = 0$ і $u'v = q(x)$.
Одержали систему двох рівнянь з подільними змінними:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases} \qquad (19)$$

Розв'яжемо перше рівняння системи відносно функції $v(x)$. Оскільки $v' = \dfrac{dv}{dx}$, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

або після поділу змінних

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx\ .$$

Звідки $\ln|v| = -\int p(x)dx$, $v = e^{-\int p(x)dx}$ (для простоти подальших перетворень приймемо C=0).

Підставимо знайдену функцію v у друге рівняння системи (19) і розв'яжемо його відносно функції u.

Одержимо $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ або $du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Звідки $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$.

Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд

$$y = uv = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}\ .$$

Наприклад: Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + 2y = x^2 + 1$.

Дане рівняння є лінійним, тому що в ньому y і y' входять у першій степені.

Приведемо його до стандартного вигляду, розділивши на $x\neq 0$, одержимо

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{x^2+1}{x}.$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді $y=uv$.

Підставимо в рівняння $y=uv$, $y' = u'v + v'u$ і підберемо функції u і v так, щоб рівняння перетворювалося в правильну рівність:

$$u'v+v'u+\frac{2uv}{x}=\frac{x^2+1}{x},$$

або
$$u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x}.$$

Нехай $v'+\frac{2v}{x}=0$.

Тоді $u'v=\frac{x^2+1}{x}$.

Розв’яжемо систему $\begin{cases} v'+\frac{2v}{x}=0, \\ u'v=\frac{x^2+1}{x}. \end{cases}$

З першого рівняння знайдемо $\ln|v|=-2\ln|x|$ $(C=0)$ і $v=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$.

Підставляючи в друге рівняння системи знайдену функцію *v*, одержуємо $u'\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x}$ або $du=\left(x^3+x\right)dx$.

Звідки $u=\int\left(x^3+x\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C.$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y=uv=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+C\right)\frac{1}{x^2}=\frac{1}{4}x^2+\frac{C}{x^2}+\frac{1}{2}.$$

Рівняння Бернуллі має вигляд

$$y'+p(x)y=q(x)y^n.$$

Як бачимо, рівняння відрізняється від лінійного тільки множником y^n у правій частині рівняння. Покажемо, що це рівняння приводиться до лінійного. Поділимо рівняння на y^n

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=q(x)$$

і замінимо $y^{1-n}=z(x)$, тоді

$$z'=(1-n)y^{-n}y'=(1-n)\frac{y'}{y^n}.$$

Оскільки $\frac{y'}{y^n}=\frac{1}{1-n}z'$, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{1-n}z'+p(x)z=q(x),$$

тобто одержали лінійне рівняння відносно функції z.
Наприклад: Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'-\frac{2y}{x}=x^3y^2.$$

Дане рівняння є рівнянням Бернуллі $(n=2)$.
Знайдемо розв'язок у вигляді $y=uv$.

Підберемо u і v так, щоб їх добуток задовольняв рівняння. Підставимо в рівняння $y=uv$, $y'=u'v+v'u$, одержимо

$$u'v+v'u-\frac{2uv}{x}=x^3u^2v^2,$$

$$u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=x^3u^2v^2.$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} v'-\frac{2v}{x}=0, \\ u'v=x^3u^2v^2. \end{cases}$$

Розв’язуючи перше рівняння системи, знайдемо

$$v = x^2 .$$

Підставляючи знайдену функцію $v = x^2$ в друге рівняння системи, одержуємо $u'x^2 = x^7u^2$ чи $\frac{du}{u^2} = x^5 dx$. Звідки $-\frac{1}{u} = \frac{1}{6}x^6 + C$,

$$u = -\frac{6}{x^6 + 6C} = \frac{6}{\overline{C} - x^6} .$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \frac{6x^2}{\overline{C} - x^6}$.

Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (20)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції. Його можна записати у вигляді

$$dF(x, y) = 0 ,$$

де $F(x, y)$ така функція, що $dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння (20) у неявному вигляді визначається рівнянням

$$F(x, y) = C ,$$

де C – довільна стала.

Таким чином, розв'язання рівняння зводиться до знаходження такої функції $F(x, y)$, диференціал якої дорівнює

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{, де } P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x},\ Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} .$$

Оскільки змішані похідні другого порядку функції двох змінних рівні між собою, то для того, щоб вираз

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Інтегруючи співвідношення $\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)$ за *x*, знаходимо

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y), \tag{21}$$

де $C(y)$ – довільна функція від *y*.

Підберемо функцію $C(y)$ так, щоб $\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$.

Для цього продиференціюємо праву частину рівності (21) по *y* і отриману похідну прирівняємо до функції $Q(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)+C'(y)=Q(x,y).$$

З даного рівняння визначаємо $C'(y)$ й інтегруючи, знаходимо $C(y)$. Підставимо знайдену функцію $C(y)$ в співвідношення (21) і одержимо шукану функцію $F(x,y)$.

Н а п р и к л а д : Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\left(2xy-y^2-2\right)dx+\left(x^2-2xy+3\right)dy=0.$$

З в і д к и $P(x,y)=2xy-y^2-2$, $Q(x,y)=x^2-2xy+3$.

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$, то дане рівняння є рівнянням у повних диференціалах

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx+C(y)=\int\left(2xy-y^2-2\right)dx+C(y)=$$
$$=x^2y-y^2x-2x+C(y).$$

Продиференціюємо отриману рівність по *y* і одержимо

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y-y^2x-2x+C(y)\right)=Q(x,y)=x^2-2xy+3$$

чи $x^2-2xy+C'(y)=x^2-2xy+3$.

Звідки $C'(y)=3$, $\frac{dC}{dy}=3$, $dC=3dy$, $C=\int 3dy=3y+\overline{C}$.

Отже, розв'язком рівняння є функція

$$F(x,y)=x^2y-xy^2-2x+3y+\overline{C}.$$

3. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Розглянемо деякі види рівнянь, що допускають зниження порядку.

I. Загальний розв’язок рівняння виду

$$y^n = f(x) \tag{22}$$

знаходимо $n-$кратним інтегруванням. Після інтегрування загальний розв’язок має вигляд

$$y=\varphi_n(x)+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

Наприклад: Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=e^{2x}$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння одержуємо, двічі інтегруючи його послідовно:

$$y'=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1,$$

$$y=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_1\right)dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx+C_1\int dx=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2.$$

II. Рівняння виду

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0 \tag{23}$$

Розв’язується шляхом введення невідомої функції $z = y^{(k)}$, тобто зниженням порядку рівняння на k.

Наприклад: Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + \frac{y'}{x} = x$.

Дане рівняння не містить явно шуканої функції *y*, тому замінимо $y' = z$, $y'' = z'$, одержимо диференціальне рівняння $z' + \frac{z}{x} = x$, що є лінійним рівнянням першого порядку.

Знайдемо допоміжну функцію *z* у вигляді $z = uv$. Тоді $z' = u'v + v'u$. Підставимо значення z і z' в рівняння і підберемо функції *u* і *v* так, щоб виконувалася рівність

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = x \text{ або } u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x.$$

Складемо систему рівнянь для визначення функцій *u* і *v*:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = x. \end{cases}$$

Розв’язуючи перше рівняння, знаходимо, що $v = \frac{1}{x}$.

Підставивши знайдене значення *v* у друге рівняння і розв’язавши його відносно функції *u*, одержимо $u = \frac{1}{3}x^3 + C_1$.

Отже, $z = uv = \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1\right)\frac{1}{x}$ або $z = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x}$.

Але оскільки $z = y'$, то загальний розв'язок заданого рівняння знайдемо, проінтегрувавши функцію

$$y' = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x}.$$

Маємо $y=\int\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{C_1}{x}\right)dx=\frac{1}{9}x^3+C_1\ln|x|+C_2$.

III. Розглянемо диференціальне рівняння $n-$го порядку, що не містить явно аргументу x:

$$F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$$

У даному випадку порядок рівняння можна знизити на одиницю шляхом введення заміни $y'=p(y)$, звідки

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}=p\cdot p',$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=\frac{d}{dx}(p\frac{dp}{dy})=\frac{dp}{dx}\frac{dp}{dy}+p\frac{d^2p}{dxdy}=p\cdot(p')^2+p^2p''.$$

Наприклад: Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$1+(y')^2=2yy''.$$

Дане рівняння не містить у собі явно незалежну змінну *x*. Замінимо $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dy}p$. Одержимо рівняння

$$1+p^2=2yp\frac{dp}{dy},$$

яке є рівнянням з подільними змінними. Після поділу змінних прийдемо до рівняння $\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$, інтегруючи яке маємо $\ln(1+p^2)=\ln|y|+\ln|C_1|$ або $1+p^2=C_1y$. Звідки $p=\sqrt{C_1y-1}$.

Оскільки $p = y' = \frac{dy}{dx}$, то розв'яжемо рівняння $\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1}$ або $\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx$. Інтегруючи, одержуємо $\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = x + C_2$ – загальний інтеграл заданого рівняння.

4. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{24}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ неперервні функції на деякому проміжку; y – шукана функція.

Т е о р е м а . Якщо функції y_1 і y_2 частинні розв'язки рівняння (24), то функція $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ при будь-яких значеннях довільних сталих також є його розв'язком.

Функції y_1 і y_2 називаються лінійно незалежними, якщо їхня лінійна комбінація $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і лінійно залежними, якщо знайдеться хоча б одне відмінне від нуля число λ (λ_1 чи λ_2) таке, що для будь-якого значення аргументу x лінійна комбінація $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$.

Для лінійно незалежних функцій $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \neq 0$, тобто $\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} \neq 0$. А це можливо лише при $y_2' y_1 - y_2 y_1' \neq 0$, що за допомогою визначника другого порядку можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Даний визначник, називається *визначником Вронського* для функцій y_1 і y_2 та позначається $W(x)$.

Отже, для лінійно незалежних функцій y_1 і y_2 визначник Вронського відмінний від нуля для будь-якого значення аргументу x. Аналогічно, якщо функції y_1 і y_2 лінійно залежні, для них $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=0$, тобто $\frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2}=0$. Звідки $y_2' y_1 - y_2 y_1' = 0$, а це означає, що визначник Вронського $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0$ для будь-якого x.

Т е о р е м а . Якщо y_1 і y_2 два лінійно незалежні частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку (24) , то функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 , \tag{25}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі, є його загальним розв'язком.

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0 , \tag{26}$$

де p і q – деякі числа.

Т е о р е м а . Частинний розв'язок диференціального рівняння (26) має вигляд e^{kx} , де число k – корінь рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 .$$

Вираз $k^2 + pk + q = 0$ називається *характеристичним рівнянням*.

Помітимо, що всі коефіцієнти характеристичного рівняння є відповідними коефіцієнтами диференціального рівняння.

Т е о р е м а . Якщо корені характеристичного рівняння:

1) дійсні і різні $(k_1 \neq k_2)$, то загальний розв'язок рівняння (26) має вигляд

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} ; \tag{27}$$

2) дійсні і рівні $(k_1 = k_2 = k)$, то загальний розв'язок рівняння (26) має вигляд

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}; \qquad (28)$$

4) комплексно спряжені ($k_1 = \alpha - \beta i$, $k_2 = \alpha + \beta i$, $i^2 = -1$), то загальний розв'язок рівняння (6.24) має вигляд

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right). \qquad (29)$$

Н а п р и к л а д : Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = 0,$$

якщо відомо, що $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 3k - 4 = 0$ і його корені $k_1 = -4$, $k_2 = 1$ дійсні і різні, тому, застосовуючи формулу (27) загальний розв'язок рівняння запишемо у вигляді

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Після диференціювання загального розв'язку, одержимо

$$y' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Підставляючи в початкові умови $x=0$, $y=2$, $y' = 1$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -4C_1 + C_2 = 1. \end{cases}$$

Звідки знайдемо, що $C_1 = \dfrac{1}{5}$, $C_2 = \dfrac{9}{5}$.

Отже, частинний розв'язок, що задовольняє зазначеним початковим умовам, має вигляд $y = \frac{1}{5} e^{-4x} + \frac{9}{5} e^{x}$.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{30}$$

Знання якого-небудь частинного розв'язку рівняння (30) дозволяє звести задачу про розв'язання цього рівняння до задачі про розв'язання відповідного однорідного рівняння (24).

Теорема. Загальний розв'язок рівняння (6.28) є сумою якого-небудь частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння.

Якщо відомо загальний розв'язок однорідного рівняння (24), то загальний розв'язок рівняння (30) можна обчислити за допомогою так званого *методу варіації довільних сталих*, запропонованого Лагранжем.

Як відомо, загальний розв'язок рівняння (24) має вигляд $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, де C_1, C_2 – довільні сталі, а y_1 і y_2 деякі лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння.

Припустимо, що загальний розв'язок рівняння (30) має такий же вигляд, але C_1 і C_2 – деякі невідомі функції, тобто

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \tag{31}$$

Підберемо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ так, щоб вираз (31) задовольняв рівняння (30).

Диференціюючи рівність (31), одержуємо

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'.$$

Будемо вимагати, щоб

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0. \tag{32}$$

Тоді перша похідна приймає вигляд

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' \text{ і } y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''.$$

Підставляючи в рівняння (30) знайдені за умов (32) значення y' і y'', після перетворень одержуємо

$$C_1\left(y_1'' + p y_1' + q y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p y_2' + q y_2\right) + C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x).$$

Оскільки функції y_1 і y_2 задовольняють рівняння (24), то в останнім рівнянні перші дві дужки дорівнюють нулю і рівняння матиме вигляд

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \tag{33}$$

Отже, для знаходження функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ одержали два рівняння (32) і (33).

Оскільки функції y_1, y_2, $f(x)$ відомі, то маємо систему двох лінійних рівнянь першого степеня з двома невідомими $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases} \tag{34}$$

Зазначимо, що така система має єдиний розв'язок, тому що її визначник є визначником Вронського, який для лінійно незалежних функцій y_1 і y_2 не перетворюється в нуль при будь-яких x.
Розв’язуючи систему, знайдемо $C_1' = C_1'(x)$, $C_2' = C_2'(x)$, звідки

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + \overline{C}_1 = \varphi_1(x) + \overline{C}_1,$$
$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx + \overline{C}_2 = \varphi_2(x) + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ – довільні сталі.

Загальний розв'язок рівняння (30) приймає вигляд

$$y = \overline{C}_1 y_1 + \overline{C}_2 y_2 + \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2, \qquad (35)$$

причому функція $\varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2$ є його частинним розв'язком.

Зазначимо, що метод варіації довільних сталих завжди приводить до розв'язку, але часто буває громіздким через складні інтеграли, за допомогою яких обчислюються функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$.

Наприклад: Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$.

Однорідне диференціальне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному має вигляд $y'' + y = 0$. Його характеристичне рівняння має корені $k_{1,2} = \pm i$, яким відповідають частинні розв'язки $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$.

Знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 .$$

Система (34) для даного рівняння приймає вигляд

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = -\mathrm{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Розв’язуючи систему, одержимо $C_1{}' = -\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$, $C_2{}' = \dfrac{\cos^2 x}{\sin\ x}$.

Знайдемо $C_1(x) = -\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = -\int \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \cos x dx =$

$= -\int \dfrac{1}{\sin^2 x} d(\sin x) + \int \cos x dx = \dfrac{1}{\sin x} + \sin x + \overline{C}_1,$

$C_2(x) = \int \dfrac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \int \dfrac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx = \int \dfrac{dx}{\sin x} - \int \sin x dx =$

$= \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right| + \cos x + \overline{C}_2.$

Загальний розв'язок рівняння

$$y = \left(\frac{1}{\sin x} + \sin x + \overline{C}_1\right)\sin x + \left(\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + \overline{C}_2\right)\cos x$$

або після перетворень $y = \overline{C}_1 \sin x + \overline{C}_2 \cos x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2$.

Розглянемо *лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами*

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad (36)$$

де p і q – деякі числа.

Відповідно до теореми загальний розв'язок такого рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Оскільки відповідне однорідне рівняння завжди розв’язується, то нам залишається лише знайти який-небудь частинний розв'язок даного рівняння.

Для довільної функції $f(x)$ це робиться за методом варіації довільних сталих і частинний розв'язок має вигляд (35).

Але для досить широкого класу функцій $f(x)$ правої частини рівняння частинний розв'язок можна знайти простіше за методом невизначених коефіцієнтів.

Метод застосовується для функцій вигляду

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right),$$

де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ багаточлени відповідно порядків m і n:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m;$$
$$Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n.$$

Дана функція містить у собі декілька більш простих частинних випадків.

Наприклад:

при β=0 функція приймає вигляд $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$;

при $\beta = 0,\ m = 0$ – $f(x) = ae^{\alpha x}$;

при $\beta = 0,\ \alpha = 0$ – $f(x) = P_m(x)$;

при $\alpha = 0$ – $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$;
при $\alpha = 0,\ m = n = 0$ – $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$.

Метод заснований на тому, що частинний розв'язок рівняння (36) має вигляд правої частини рівняння.

Теорема. Якщо число $\alpha + \beta i$, складене за правою частиною рівняння (α – коефіцієнт показника показникової функції, β – коефіцієнт аргументу тригонометричної функції) не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (6.34) має вигляд

$$y^* = e^{\alpha x}\left(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x\right), \tag{37}$$

де $M_s(x), N_s(x)$ – багаточлени з невизначеними коефіцієнтами порядку $S = \max(m,n)$.

Якщо ж число α+βi є коренем характеристичного рівняння один раз, то частинний розв'язок рівняння (6.34) запишеться так:

$$y^* = xe^{\alpha x}\left(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x\right). \tag{38}$$

Якщо ж число α+βi є коренем характеристичного рівняння два рази, то частинний розв'язок рівняння (6.34) має вигляд

$$y^* = x^2e^{\alpha x}\left(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x\right). \tag{39}$$

Наприклад: Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = (x-3)e^{2x}.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = \tilde{y} + y^*$, де $\tilde{y}$ – загальний розв'язок рівняння однорідного, відповідного даному, y^* – частинний розв'язок даного рівняння.

Однорідне рівняння, що відповідає даному, має вигляд

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Його характеристичне рівняння $k^2–3k+2=0$ має корені $k_1=1$, $k_2=2$ (дійсні і різні), тому загальний розв'язок однорідного рівняння $\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Функція правої частини рівняння $f(x)=(x–3)e^{2x}$ – добуток багаточлена першого порядку на показникову функцію e^{2x}. Для неї число $\alpha+\beta i=2$ ($\beta=0$, тому що $f(x)$ не містить тригонометричних функцій) є коренем характеристичного рівняння один раз, тому

$$y^* = x(Ax + B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Підберемо коефіцієнти A і B так, щоб y^* задовольняло рівняння. Обчислимо $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$:

$$y^{*\prime} = (2Ax + B)e^{2x} + 2(Ax^2 + Bx)e^{2x};$$

$$y^{*\prime\prime} = 2Ae^{2x} + 4(2Ax + B)e^{2x} + 4(Ax^2 + Bx)e^{2x}.$$

Підставимо y^*, $y^{*\prime\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в диференціальне рівняння, поділимо його члени на e^{2x} і спростимо, тоді одержимо:

$$2Ax + 2A + B = x - 3$$

Порівнюючи коефіцієнти при x і вільні члени лівої і правої частин рівняння, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + B = -3. \end{cases}$$

Звідки $A = \dfrac{1}{2}$, $\quad B = -4$.

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $y^* = \left(\dfrac{1}{2}x^2 - 4x\right)e^{2x}$, а його загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)e^{2x}.$$

5. Системи диференціальних рівнянь

Системою двох диференціальних рівнянь першого порядку називається сукупність співвідношень

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0, \end{cases} \tag{40}$$

де x – незалежна змінна, а y_1, y_2 – шукані функції.

Розв'язком системи (40) називається всяка пара функцій y_1, y_2, підстановка яких у рівняння (40) перетворює систему у правильні рівності.

Система диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних від невідомих функцій, називається *нормальною системою диференціальних рівнянь*.
Загальний вигляд нормальної системи двох диференціальних рівнянь із двома невідомими функціями y_1 і y_2 такий:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \tag{41}$$

Від системи двох диференціальних рівнянь завжди можна перейти до одного рівняння з однією невідомою функцією, наприклад y_1.

Для цього потрібно кожне рівняння системи продиференціювати та з отриманих чотирьох рівностей, враховуючи на (41), виключити величини y_2, y_2'. Після інтегрування одержуємо загальний розв'язок $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2)$, з якого y_2 знаходиться на основі згаданих вище рівностей.
Наприклад: Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y + z + x. \end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння за x:

$$y'' = y' + z' .$$

Замінивши z' його значенням із другого рівняння системи, одержимо $y'' = y' + y + z + x$.

Підставляючи замість $y+z$ з першого рівняння системи y', маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку $y'' - 2y' = x$.

Знайдемо його розв'язок згідно з $y = \tilde{y} + y^*$. Однорідне рівняння, що відповідає даному, має вигляд $y'' - 2y' = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - 2k = 0$ має корені k_1=0, k_2=2. Загальний розв'язок однорідного рівняння буде $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{2x}$. Функція правої частини рівняння $f(x) = x$ (неповний багаточлен першого порядку). Для неї число $\alpha + i\beta = 0$ (немає ні показникової, ні тригонометричних функцій) зустрічається серед коренів характеристичного рівняння один раз, тому частинний розв'язок рівняння y^* знайдемо у вигляді

$$y^* = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx .$$

Обчислимо похідні $y^{*'}$, $y^{*''}$:

$$y^{*'} = 2Ax + B ; \; y^{*''} = 2A .$$

Підставляючи y^*, $y^{*'}$, $y^{*''}$ у диференціальне рівняння, одержуємо $2A - 4Ax - 2B = x$. Прирівнявши коефіцієнти при x і вільні члени лівої і правої частин рівності, знайдемо, що $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$, $y^* = -\frac{1}{4}x(x+1)$, $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1)$.

Підставляючи знайдене значення y та його похідну $y' = 2C_2 e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ в перше рівняння системи, знаходимо

$$z = 2C_2e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - C_1 - C_2e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$$

або $$z = -C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}\left(x^2 - x - 1\right).$$

Сім’я розв'язків даної системи рівнянь дається функціями

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{4}x(x+1),\ z = -C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}\left(x^2 - x - 1\right),$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Система двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z. \end{cases} \tag{42}$$

Розв'язки цієї системи мають такі властивості.

1. Якщо y, z – розв'язки системи (42), то Cy, Cz – де C – будь-яке число, також є розв'язками системи.

2. Якщо y_1, z_1 і y_2, z_2 – розв'язки системи (6.42), то функції $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$ також будуть розв'язками системи.

З властивостей 1 і 2 випливає, що для будь-яких чисел C_1, C_2 лінійна комбінація розв'язків $C_1y_1 + C_2y_2$, $C_1z_1 + C_2z_2$ також є розв'язком системи.

Будемо шукати ненульові розв'язки системи (42) у вигляді

$$y = \alpha e^{kx},\ z = \beta e^{kx}, \tag{43}$$

де α, β, k – деякі невідомі поки числа, які треба підбирати так, щоб функції (43) задовольняли систему (42).

Підставляючи функції (43) та їх похідні в рівняння системи (42) після скорочення на e^{kx} і перенесення всіх членів в одну частину рівності, одержуємо

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\alpha+a_{12}\beta=0,\\ a_{21}\alpha+(a_{22}-k)\beta=0.\end{cases} \quad (44)$$

Для того, щоб ця система рівнянь мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулю. Таким чином число k повинно задовольняти рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix}=0. \quad (45)$$

Рівняння (45) називається *характеристичним рівнянням системи* (42). Це рівняння другого степеня відносно k. Воно має два корені k_1 і k_2. Кожному з цих коренів відповідає ненульовий розв'язок системи (44).

Позначимо ці розв'язки відповідно α_1, β_1, α_2, β_2.

Тоді ненульові розв'язки даної системи диференціальних рівнянь (42) матимуть вигляд: $y_1=\alpha_1 e^{k_1x}$, $z_1=\beta_1 e^{k_1x}$, $y_2=\alpha_2 e^{k_2x}$, $z_2=\beta_2 e^{k_2x}$.

Лінійна комбінація цих розв'язків з довільними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} y&=C_1\alpha_1 e^{k_1x}+C_2\alpha_2 e^{k_2x},\\ z&=C_1\beta_1 e^{k_1x}+C_2\beta_2 e^{k_2x} \end{aligned} \quad (46)$$

також буде розв'язком системи (42). Якщо корені характеристичного рівняння (45) різні, то можна показати, що цей розв'язок буде загальним розв'язком системи (42). У випадку, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені: $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, то знайдені зазначеним вище методом комплексні розв'язки можна замінити дійсними розв'язками, відокремлюючи дійсні і уявні частини їх складовими функціями.

Н а п р и к л а д : Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y'=2y+z,\\ z'=3y+4z. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння матриці системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} 2-k & 1 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0 .$$

Звідки $(2-k)(4-k)-3=0$.

Після перетворень одержуємо два різних дійсних корені рівняння k_1=1, k_2=5.

Отже, загальний розв'язок заданої системи рівнянь має вигляд (46):

$$y = C_1\alpha_1 e^x + C_2\alpha_2 e^{5x},$$
$$z = C_1\beta_1 e^x + C_2\beta_2 e^{5x}.$$

При k=1 система (44) для визначення чисел α і β перетвориться в систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0, \\ 3\alpha_1 + 3\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що система має незліченну множину розв'язків, яку можна виразити залежністю $\alpha_1 = -\beta_1$. Приймаючи для конкретності $\alpha_1 = 1$, одержуємо $\beta_1 = -1$. При k_2=5 система (6.44) для визначення чисел α і β набуває вигляду

$$\begin{cases} -3\alpha_2 + \beta_2 = 0, \\ 3\alpha_2 - \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Аналогічно попередня система має незліченну множину розв'язків, яку можна виразити залежністю $\beta_2 = 3\alpha_2$, Приймаючи $\alpha_2 = 1$, одержимо $\beta_2 = 3$.

Отже, загальний розв'язок заданої системи рівнянь:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x},$$
$$z = -C_1 e^x + 3C_2 e^{5x}.$$

Питання для самоконтролю

1. Диференціальні рівняння першого роду.
2. Диференціальні рівняння другого роду.
3. Методи розв’язання диференціальних рівнянь другого роду.
4. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.
5. Методи розв’язання систем диференціальних рівнянь.

Типове завдання № 1

Інтегральне числення

Завдання:

1. Обчислити невизначений інтеграл за допомогою таблиці.
2. Обчислити невизначений інтеграл внесенням під диференціал або методом підстановки.
3. Обчислити невизначений інтеграл за допомогою формули інтегрування частинами.
4. Обчислити невизначений інтеграл від дробово-раціональних функцій або від функцій, що містять квадратний многочлен.
5. Обчислити невизначений інтеграл від тригонометричних функцій.
6. Обчислити визначений інтеграл.
7. Розв'язати задачу.

Варіант – 1

1. $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1)dx$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

3. $\int xe^{-x} dx$

4. $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$

5. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$

6. $\int\limits_0^{\pi} \left(8x^2 + 16x + 17\right)\cos 4x dx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена однією аркою циклоїди $x = a(t;-\sin t)$; $y = a(1;-\cos t)$ $t \in [0;2\pi]$ та віссю OX.

Варіант – 2

1. $\int 3^x e^{2x} dx$

2. $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx$

3. $\int x^5 \ln x dx$

4. $\int \frac{7x+1}{x^2-5x+6} dx$

5. $\int \frac{3+2tgx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x - 1} dx$

6. $\int\limits_2^5 \frac{e^{\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}} dx$

7. Обчислити довжину дуги $y = \frac{x^2}{2}$ від початку координат до точки $x = 6$.

Варіант – 3

1. $\int (\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x})dx$

2.

$\int (5x^2 - 3x + 8)^7 (10x - 3)dx$

3. $\int e^x \sin xdx$

4. $\int \frac{5+x}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx$

6. $\int\limits_0^{2\pi} \sin^4 3x\cos^4 3xdx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y=3x^2+1$ та $y=3x+7$.

Варіант – 4

1. $\int (\frac{1}{x}+7x^6-\frac{1}{2\sqrt{x}})dx$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

3. $\int x\sin 2xdx$

4. $\int \frac{3-4x}{4x^2+4x+3}dx$

5. $\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\cdot dx$

6. $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

7. Обчислити довжину першого витка спіралі Архімеда $\rho=5\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Варіант – 5

1.

$\int (3x^2-\sqrt[7]{x^5}+2\cos x+2x)dx$

2. $\int (x^2-3x+1)^9(2x-3)dx$

3. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$

4. $\int \frac{x-2}{\sqrt{5-x^2-2x}}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$

6. $\int\limits_1^e \sqrt{x}\ln^2 xdx$

7. Обчислити об’єм тіла, утворенного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OY

$y=x^2, y=\sqrt{x}$.

Варіант – 6

1. $\int (3x-\sqrt[7]{x^5}+2\sin x-3)dx$

2. $\int \frac{e^{2/x}}{x^2} dx$

3. $\int e^{3x} \cos 3x dx$

4. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2+3x+2}} dx$

5. $\int \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x} dx$

6. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

Варіант – 7

1. $\int (4x^2 - 6\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^3} + x) dx$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

3. $\int x^2 e^{-3x} dx$

4. $\int \frac{3x-4}{x^2+x+1} dx$

5. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

6. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{3} \left(3x - x^2\right) \sin 2x dx$

7. Обчислити довжину дуги $y = \sqrt{(x-2)^3}$ від точки A(2;0) до точки B(6;8).

Варіант – 8

1. $\int 2^x e^{4x} dx$

2. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$

3. $\int \arcsin 5x dx$

4. $\int \frac{4x+1}{x^2+6x+10} dx$

5. $\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

6. $\int\limits_0^1 (x+1) \ln^2 (x+1) dx$

7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Варіант – 9

1. $\int (e^{2x} + e^{-2x}) dx$

2. $\int \frac{(\ln x)^7}{x} dx$

3. $\int \arccos 3x dx$

4. $\int \frac{3-2x}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$

5. $\int \sin^4 x dx$

6. $\int\limits_1^{e^2} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $x^2+y^2=25$ та $16y=3x^2$ при $y\ge 0$.

Варіант – 10

1. $\int (\frac{1}{x}+7x^6-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}})dx$

2. $\int \frac{e^{12/x}}{x^2}dx$

3. $\int \sqrt{x}\ln x dx$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-12}}$

5. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

6. $\int\limits_1^{e} \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$

7. Обчислити довжину дуги $y=\ln x$ від $x=\sqrt{8}$ до $x=\sqrt{15}$.

Варіант – 11

1. $\int (\cos 3x+3\sin x+2^x)dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

3. $\int x\, 2^{-x}dx$

4. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2+5x-3}}dx$

5. $\int \frac{1}{3+5\cos x}dx$

6. $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена лінією $\rho=\cos\varphi+\sin\varphi$.

Варіант – 12

1. $\int \frac{x+1}{x^2-1}dx$

2. $\int e^{3\cos x}\sin x dx$

3. $\int e^{7x}\cos 5x dx$

4. $\int \frac{4-3x}{4x^2+12x+10}dx$

5. $\int \sin^2 x\cos^2 x dx$

6. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігур,

що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OY

$y = \sqrt{x-3}, x = 1, y = 0, y = 3$.

Варіант – 13

1. $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 3\cos x)dx$

2. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} dx$

3. $\int x\, arctg\, 2x dx$

4. $\int \frac{4-x}{(2x-1)(x^2+1)} dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

6. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{12x - arctg 3x}{1+9x^2} dx$

7. Обчислити довжину дуги $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$.

$0 \le t \le \pi$

Варіант – 14

1. $\int 3^x 2^{2x} dx$

2. $\int x(5x+2)^6 dx$

3. $\int x^2 \sin 2x dx$

4. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+6x+8}} dx$

5. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$

6. $\int_0^1 \frac{x - 4arctgx}{1+x^2} dx$

7. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX

$y + 3 = (x-1)^2, \quad y = 0$.

Варіант – 15

1. $\int (3x^8 - \sqrt[7]{x^3} + 2\cos 2x + 2x)dx$

2. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

3. $\int x^4 \ln x dx$

4. $\int \frac{3x-4}{4x^2+12x+10} dx$

5. $\int \frac{1}{\sin x + \cos x} dx$

6. $\int_0^5 arctg\sqrt{4x-1} dx$

7. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX

$$\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

Варіант – 16

1.
$$\int (x^3 - 2\sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2 x})dx$$

2. $\int \frac{\sqrt{x} + \ln x}{x} dx$

3. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

4. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$

5. $\int \sin 3x \cos 4x dx$

6. $\int_0^3 \sqrt{1+5x} dx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = x^2 - 6x + 5$; $x = 0$; $y = 0$.

Варіант – 17

1. $\int 2^x 4^{2x} dx$

2. $\int (x^2 + 5x + 1)^{10} (2x+5) dx$

3. $\int \ln^2 2x dx$

4. $\int \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x} dx$

5. $\int \cos^4 x dx$

6. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{3\sin x + 2} dx$

7. Обчислити довжину дуги $\rho = 1 - \sin\varphi$; $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Варіант – 18

1. $\int (e^{2x} + e^{-2x} + 2^x) dx$

2. $\int x(3x+5)^9 dx$

3. $\int x^2 \cos 3x dx$

4. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x - 1 - x^2}} dx$

5. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$

6. $\int_1^2 arctg \sqrt{2x-1} dx$

7. Обчислити об'єм тіла, утворенного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OY

$x = y^3$, $\quad x = y^2$.

Варіант – 19

1. $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^3} + 1) dx$

2. $\int \frac{\sin 5x}{\cos^6 5x} dx$

3. $\int e^{-\sqrt{x}} dx$

4. $\int \frac{3-x}{-x^2-x+4}dx$

5. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

6. $\int_0^2 (2-x)e^{-2x}dx$

7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX

$$\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}; \quad 0 \le t \le \pi .$$

Варіант – 20

1. $\int \frac{x+2}{x^2-4}dx$

2. $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}dx$

3. $\int x\cos 7x dx$

4. $\int \frac{1-x}{x^2-4x+5}dx$

5. $\int \sin 5x \sin 4x dx$

6. $\int_0^1 \ln(x^2+4)dx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $y = x^2 - 2x - 3$ та $y = -x^2 + 6x - 3$.

Варіант – 21

1. $\int (e^{4x} + e^{-4x})dx$

2. $\int \frac{\cos 6x}{\sin^7 6x}dx$

3. $\int x 12^{-x} dx$

4. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

5. $\int \sin 7x \sin 3x dx$

6. $\int_e^{e^2} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx$

7. Обчислити довжину дуги $3y^2 = x^3$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 8$.

Варіант – 22

1. $\int (\sin 2x + 3\sin x + 2^x)dx$

2.

$\int (3x^2 - 6x + +2)^9 (6x-6)dx$

3. $\int e^{3x} \cos 2x dx$

4. $\int \frac{1+x}{x^2(x-2)}dx$

5. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx$

6. $\int_{-1}^{0} \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^5+8}}$

7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігур,

що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX

$y = 5\sin x, \quad y = 3\sin x;$

$0 \le x \le \pi$

Варіант – 23

1.

$\int (5x^5 - 2\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{1}{\sin^2 x})dx$

2. $\int \frac{\ln tgx}{\sin x \cos x} dx$

3. $\int e^{x} \sin 5x dx$

4. $\int \frac{3 + x^2}{(x-1)(x+2)} dx$

5. $\int \sin x/3 \cos x/4 dx$

6. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{3 + x^6} dx$

7. Обчислити площу фігури, що обмежена кардіоїдою $\rho = 3(1;-\cos\varphi)$.

Варіант – 24

1. $\int (\frac{x+1}{x^2 - 1} + 2\frac{1}{x})dx$

2. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx$

3. $\int \sqrt[4]{x} \ln x dx$

4. $\int \frac{1 + x^2}{(x-4)x} dx$

5. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

6. $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx$

7. Обчислити довжину дуги $\rho = 8\sin\varphi; \ \pi/6 \le \varphi \le \pi/3$.

Варіант – 25

1. $\int (\frac{1}{x} + 7x^6 - \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}})dx$

2. $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$

3. $\int x^2 e^{-x} dx$

4. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2} dx$

5. $\int \frac{1}{2\sin x + \cos x + 3} dx$

6. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx$

7. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігур, що обмежуються графіками наступних функцій, навколо осі OX

$y = -x^2 + 5x - 6, \quad y = 0.$

Зразки розв’язання типового завдання № 1

1. $\int (x^4 - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x})dx$.

$$\int (x^4 - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} + \frac{1}{\cos^2 x})dx = \int x^4 dx + \int x^{3/2} dx + 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^{5/2}}{5} + 2\ln|x| + tgx + C.$$

2. $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx.$

$$\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx = \int \ln^{3/7}(x+2)d(\ln(x+2)) = \frac{7}{10}\ln^{10/7}(x+2) + C =$$

$$= \frac{7}{10}\sqrt[7]{\ln^{10}(x+2)} + C.$$

3. $\int x \ln x dx$

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2}, \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

4. $\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx.$

В чисельнику робимо похідну знаменника, отримаємо

$$\int \frac{3x-6}{2-5x-x^2}dx = \int \frac{-2x+4-5+5}{2-5x-x^2}dx = -\frac{3}{2}\int \frac{-2x-5}{2-5x-x^2}dx -$$

$$-\frac{3}{2}\cdot 9\int \frac{dx}{2-5x-x^2} = -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right| + \frac{27}{2}\int \frac{dx}{(x-5/2)^2 - (\sqrt{33}/2)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right| + \frac{27}{2}\ln\left|\frac{x-5/2-\sqrt{33}/2}{x-5/2+\sqrt{33}/2}\right| = -\frac{3}{2}\ln\left|2-5x-x^2\right| +$$

$$+\frac{27}{2}\ln\left|\frac{2x-5-\sqrt{33}}{2x-5+\sqrt{33}}\right| + C.$$

5. $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

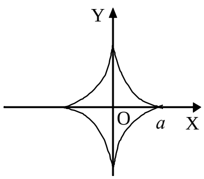
$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left| tg\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4\cdot 2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= \frac{-1}{t+2} + C = \frac{-1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

6. $\int\limits_1^2 3(x-1)^2 dx$

$$\int\limits_1^2 3(x-1)^2 dx = (x-1)^3\Big|_1^2 = (2-1)^3 - (1-1)^3 = 1.$$

7. Обчислити довжину дуги астроїди $x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t,$ $0 \le t \le 2\pi$. Використаємо формулу для знаходження довжини дуги $l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$,



$$l = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 12a\int\limits_0^{\pi/2} \sin t\cos t dt = 12a\int\limits_0^{\pi/2} \sin t d\sin t = 6a\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

Типове завдання № 2

Функції багатьох змінних

Завдання:

1. Обчислити частині похідні для даної функції в заданій точці.
2. Знайти повні диференціали вказаних функцій.
3. Обчислити значення похідної складної функції при $t = t_0$.
4. Обчислити значення похідної функції, заданої неявно, в даній точці.
5. Перевірити виконання рівнянь.
6. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до даної поверхні в точці.

Варіант – 1

1.
$F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos z}$,
$M_0(3, 4, \pi / 2)$

2. $Z = 2x^3 y - 4xy^5$

3. $u = \ln(e^x + e^{-y})$,
$x = t^2, y = t^3, t_0 = -1$

4. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$,
$M_0(2,1,1)$

5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$,

$u = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$

6. $S : x^2 + y^2 - xz - yz = 0$,
$M_0(0,2,2)$

Варіант – 2

1. $F(x, y, z) = arctg(xy^2 + z)$,
$M_0(2,1,0)$

2. $Z = 5xy^4 + 2x^2 y^7$

3. $u = y^x, \quad x = \ln(t - 1)$,
$y = e^{t/2}, \quad t_0 = 2$

4. $x^3 + y^2 + z^2 - xy = 2$,
$M_0(-1,0,1)$

5.
$x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,

$u = \dfrac{y}{x}$

6. $S : x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y -$
$- 2z = 2, M_0(1,1,1)$

Варіант – 3

1. $F(x,y,z)=\dfrac{xz}{x-y}$, $M_0(3,1,1)$
2. $Z=arctgx+\sqrt{y}$
3. $u=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$, $t_0=0$
4. $3x-2y+z=xz+5$, $M_0(2,1,-1)$
5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2$, $u=\dfrac{x}{x+y}$
6. $S: z=x^2+y^2-2xz+2x-y$, $M_0(-1,-1,-1)$

Варіант – 4

1. $F(x,y,z)=27\sqrt[3]{x+y^2+z^3}$, $M_0(3,4,2)$
2. $Z=\arccos(x+y)$
3. $u=x^2e^y$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\pi$
4. $x^2+y^2+z^2-z-4=0$ $M_0(1,1,-1)$
5. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u=\sin^2(x-ay)$

$y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u=x^y$

6. $S: y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z$ $M_0(1,1,1)$

Варіант – 5

1. $F(x,y,z)\ln\cos(x^2y^2+z)$, $M_0(0,0,\dfrac{\pi}{4})$
2. $Z=\arcsin(x+y)$
3. $u=e^{y-2x-1}$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$
4. $e^z+x+2y+z=4$, $M_0(1,1,0)$
5. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$
6. $S: z=x^2-y^2-2xy-x-2y$, $M_0(-1,1,1)$

Варіант – 6

1. $F(x,y,z)=\ln\cos(x^3+2y^2-z^3)$, $M_0(2,1,0)$

2. $Z=x^2 y\sin x-3y$

3. $u=e^{y-2x+2}$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$

4. $x^2+y^2+z^2+2xz=5$, $M_0(0,2,1)$

5. $a^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $u=e^{-\cos(x+ay)}$

6. $S: z=y^2-x^2+2xy-3y$, $M_0(1,-1,1)$

Варіант – 7

1. $F(x,y,z)=(\sin x)^{yz}$, $M_0(\frac{\pi}{6},1,2)$

2. $Z=e^{x+y-4}$

3. $u=\ln(e^x+e^y)$, $x=t^2$, $y=t^3$, $t_0=-1$

4. $x\cos y+y\cos z+z\cos x=\pi/2$, $M_0(0,\frac{\pi}{2},\pi)$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=(x-y)(y-z)(z-x)$

6. $S: 4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9$, $M_0(1,-2,1)$

Варіант – 8

1. $F(x,y,z)=\sqrt{z}\sin(y/x)$, $M_0(2,0,4)$

2. $Z=\ln(3x^2-2y^2)$

3. $u=x^2/(y+1)$, $x=1-2t$, $y=arctgt$, $t_0=0$

4. $x^3+3xyz+3y=7$, $M_0(1,1,1)$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $u=\ln(x^2-y^2)$

6. $S: x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13$, $M_0(3,1,2)$

Варіант – 9

1. $F(x,y,z)=x/\sqrt{y^2+z^2}$, $M_0(1,0,1)$

2. $Z=7x-x^3y^2+y^4$

3. $u = x/y$, $x = e^t$,

$y = 2 - e^{2t}$, $t_0 = 0$

4.

$x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0$

$M_0(1,1,1)$

5. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$,

$u = x\ln\frac{y}{x}$

6.

$S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,$

$M_0(3,1,4)$

Варіант – 10

1.

$F(x,y,z) = \ln(x + \frac{y}{2z}),$

$M_0(1,2,1)$

2. $Z = 7x^3y - \sqrt{xy}$

3. $u = \arcsin(x/y)$,

$x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$

4. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3$,

$M_0(1,2,0)$

5.

$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - xy\frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$,

u=$\frac{y^3}{3x} + \arcsin(xy)$

6.

$S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,$

$M_0(2,1,0)$

Варіант – 11

1. $F(x,y,z) = z/\sqrt{x^2 + y^2}$,

$M_0(0,-1,1)$

2. $Z = 5xy^2 - 3x^3y^4$

3. $u = \arccos(2x/y)$,

$x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$

4. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$,

$M_0(0,1,-1)$

5.

$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xy = 0,$

$u = e^{xy}$

6.

$S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,$

$M_0(1,1,2)$

Варіант – 12

1. $F(x,y,z) = arctg(xz/y^2),$

$M_0(2,1,1)$

2. $Z = arctg(2x - y)$

3. $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, $x = t^2$,

$y = \frac{1}{3}t^3$, $t_0 = 1$

4.

$x^2+y^2+z^2+2xy-yz-4x-3y-z=0$
$M_0(1,-1,1)$

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$

$u=\ln(x^2+y^2+2x+1)$

6.
$S: 2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3,$
$M_0(1,2,1)$

Варіант – 13

1. $F(x,y,z)=-z/\sqrt{x^2+y^2},$
$M_0(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$
2. $Z=\sqrt{x^2+y^2-2xy}$
3. $u=\arcsin(x^2/y)$, $y=\sin t$
$y=\cos t$, $t_0=\pi$
4.
$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=17$
$M_0(-2,-1,2)$
5.
$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,$
$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
6.
$S: x^2+y^2-xz+yz-3x=11,$
$M_0(1,4,-1)$

Варіант – 14

1.
$F(x,y,z)=\sqrt{zx^y}$, $M_0(1,2,4)$
2. $Z=\cos(x^2-y^2)+x^3$
3. $u=\sqrt{x+y^3+3}$, $x=\ln t$,
$y=t^2$, $t_0=1$
4. $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3,$
$M_0(4,3,1)$
5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+u=0,$
$u=\frac{2x+3y}{x^2+y^2}$
6.
$S: x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5,$
$M_0(-2,1,0)$

Варіант – 15

1.
$F(x,y,z)=\ln(x+y^2)-\sqrt{x^2z^2},$
$M_0(5,2,3)$
2. $Z=\sqrt{3x^2-y^2+x}$
3. $u=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$, $x=\sin t$,
$y=\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{4}$

4. $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z+4y^3z=4$ $M_0(2,1,2)$

5. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $u=e^{-(x+3y)}\sin(x+3y)$

6. $S: x^2-y^2-2z^2-2y=0,$ $M_0(-1,-1,1)$

Варіант – 16

1. $F(x,y,z)=y/\sqrt{x^2+z^2},$ $M_0(-1,1,0)$

2. $Z=tg((x+y)/(x-y))$

3. $u=\sqrt{x^2+y+3},\quad x=\ln t,$ $y=t^2,\quad t_0=1$

4. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+6=0$ $M_0(2,1,1)$

5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u,$ $u=(x^2+y^2)tg\,\dfrac{x}{y}$

6. $S: x^2+2y^2+z^2-4xz=8,$ $M_0(0,2,0)$

Варіант – 17

1. $F(x,y,z)=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z},$ $M_0(1,1,2)$

2. $Z=xy^4-3x^2y+1$

3. $u=\arcsin\dfrac{x}{2y},\quad x=\sin 2t,$ $y=\cos t,\quad t_0=\pi$

4. $x^2+2y^2+3z^2=59,$ $M_0(3,1,4)$

5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ $u=arctg\,\dfrac{y}{x}$

6. $S: x^2+y^2-3z^2+xy=-2z,$ $M_0(1,0,1)$

Варіант – 18

1. $F(x,y,z)=z/(x^4+y^2),$ $M_0(2,3,25)$

2. $Z=\ln(y^2-x^2+3)$

3. $u=y^2/x,\quad x=1-2t,$ $y=1+arctgt,\quad t_0=0$

4. $z^2=xy-z+x^2-4,$ $M_0(2,1,1)$

5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

$u = arctg\ \frac{x}{y}$

6.
$S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0,$
$M_0(1,-1,1)$

Варіант – 19

1. $F(x,y,z)=ze^{-(x^2+y^2)/2},$
$M_0(0,0,1)$
2. $Z=arcctg(x-y)$
3. $u=\sqrt{x+y+3},\quad x=\ln t,$
$y=t^2,\ t_0=1$
4.
$x^2-y^2-z^2+6z+2x-4y+12=0$
$M_0(0,1,-1)$
5.
$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$
$u=xe^{y/x}$
6.
$S: z=2x^2-3y^2+4x-2y+10,$
$M_0(-1,1,3)$

Варіант – 20

1.
$F(x,y,z)=\ln(\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{y}-z),$
$M_0(1,1,1)$
2. $Z=ctg(y/x)$
3. $u=y/x,\quad x=e^t,$
$y=1-e^{2t},\ t_0=0$
4. $\ln z=x+2y-z+\ln 3,$
$M_0(1,1,3)$
5. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$

$u=\arcsin\frac{x}{x+y}$

6.
$S: x^2+y^2-z^2+6xy-z=8,$
$M_0(1,1,0)$

Варіант – 21

1.
$F(x,y,z)=-2x/\sqrt{y^2+z^2},$
$M_0(3,0,1)$
2. $Z=2x^2y^2+x^3-y^3$
3. $u=y^x,\ x=\ln(t-1),$
$y=e^{t/2},\ t_0=2$
4.
$x^2-2xy-3y^2+6x-2y+z^2-8z+20=0$
$M_0(0,-2,2)$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$

$u=\ln(x+e^{-x})$

6.

$S: z=x^2+y^2-4xy+3x-15,$

$M_0(-1,3,4)$

Варіант – 22

1.

$F(x,y,z)=1/\sqrt{x^2+y^2-z^2},$

$M_0(1,2,2)$

2. $Z=\arcsin((x+y)/x)$

3. $u=\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x},\quad x=\sin 2t,$

$y=tg^2 t\,\mathrm{t},\quad t_0=\dfrac{\pi}{4}$

4.

$x^3+2y^3+z^3-3xzy-2y-15=0$

$M_0(1,-1,2)$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x+y}{x-y},$

$u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$

6.

$S: z=x^2+y^2-4xy+3x-15,$

$M_0(-1,3,4)$

Варіант – 23

1. $F(x,y,z)=8\sqrt[5]{x^3+y^2+z},$

$M_0(3,2,1)$

2. $Z=\ln(x+xy-y^2)$

3. $u=\ln(e^{-x}+e^{y}),\quad x=t^2,$

$y=t^3,\ t_0=-1$

4. $x+y+z+2=xyz,$

$M_0(2,-1,-1)$

5. $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{u},$

$u=\sqrt{2xy+y^2}$

6.

$S: z=2x^2-3y^2+xy+3x+1,$

$M_0(1,-1,2)$

Варіант – 24

1.

$F(x,y,z)=\ln\sin(x-2y+z/4),$

$M_0(1,1/2,\pi)$

2. $Z=arctg(2x-y)$

3. $u=x^y,\quad x=e^t,\quad y=\ln t,$

$t_0=1$

4. $x^3+3zxy-z^3=27,$

$M_0(3,1,3)$

5. $\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}$,

$u=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$

6. $S: y^2+z^2-5yz+3y=46$, $M_0(1,2,-3)$

Варіант – 25

1. $F(x,y,z)=\ln(x^3+\sqrt[3]{y-z})$, $M_0(2,1,8)$

2. $Z=y^2-3xy-x^4$

3. $u=x^2e^y$, $x=\sin t$, $y=\cos t$, $t_0=\pi$

4. $e^z-xzy-x+1=0$, $M_0(2,1,0)$

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,

$u=\ln(x^2-y^2)$

6. $S: y^2+z^2+x^2-6y+4z+4=0$ $M_0(2,1,-1)$

Зразки розв'язання типового завдання № 2

1. Обчислити частині похідні для функції $F(x,y,z)=\sqrt{xy}\sin z$ в точці $M_0(1,1,\pi/3)$.

$$F'_x(x,y,z)=\frac{y}{2\sqrt{xy}}\sin z,\ F'_x(1,1,\pi/3)=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$F'_y(x,y,z)=\frac{x}{2\sqrt{xy}}\sin z,\ F'_y(1,1,\pi/3)=\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$F'_я(x,y,z)=\sqrt{xy}\cos z,\ F'_x(1,1,\pi/3)=\frac{1}{2}.$$

2. Знайти повний диференціал функції $z=arctg\frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(x/y)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2},$$

Тоді $dz=\dfrac{y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy$.

3. Обчислити значення похідної складної функції $z=\arcsin\dfrac{x^2}{y}$, $x=1+\ln t,\ y=-2e^{-t^2+1}$ при $t=1$.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^4/y^2}}\cdot\frac{2x}{y}\cdot\frac{1}{t}+\frac{1}{\sqrt{1-x^4/y^2}}\cdot\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot(-2e^{-t^2+1})\cdot(-2t).$$

При $t=1$ отримаємо, що $x=1,\ y=-2,\ \left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=1}=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

4. Обчислити значення похідної функції, заданої неявно $x^4+y^4+z^4-e^{xy}-5z+10=0$, в точці $M_0(1,0,1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\frac{4x^3-ye^{xy}}{4z^3-5},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}=-\frac{4y^3-xe^{xy}}{4z^3-5}.$$

Тоді $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=4,\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-1.$

5. Перевірити виконання рівняння $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, якщо $z=x^2\ln(x+y)$.

Знаходимо частині похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cdot\ln(x+y)+\frac{x^2}{x+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{x+y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2x}{x+y}-\frac{x^2}{(x+y)^2}=\frac{2x^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}=\frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x(x+y) - x^2}{(x+y)^2} = \frac{2x^2 + 2xy - x^2}{(x+y)^2} = \frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}.$$

Отримаємо $\frac{x(x+2y)}{(x+y)^2} = \frac{x(x+2y)}{(x+y)^2}$, тобто рівняння виконується.

6. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до даної поверхні $S: z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ в точці $M_0(-1,0,1)$.

Знаходимо частині похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 3x + 2.$$

Обчислюємо значення частинних похідних в точці $M_0(-1,0,1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = -6, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = -1.$$

Отже рівняння дотичної має вигляд $z - 1 = -6(x+1) - y$ та рівняння нормалі $\frac{z-1}{1} = \frac{(x+1)}{6} = \frac{y}{1}$.

Типове завдання № 3

Теорія функцій комплексної змінної

Завдання:

1. Задані числа z_1, z_2, z_3. Знайти z.
2. Комплексному числу надати тригонометричної та показникової форми.
3. Обчислити.
4. Знайти всі значення кореня.
5. Знайти множину точок на площині комплексної змінної z, що визначається наступними умовами (графічно).

Варіант – 1

1. $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 + z_3^{\ 2}}{z_1 + z_2}$, якщо

$z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 1 - 3i$,

$z_3 = 4 + 5i$.

2. $z = -7 - i$
3. $(2-2i)^7$, $i^{\frac{1}{i}}$
4. .
5. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$

Варіант – 2

1. $z = \dfrac{z_1 - z_1 z_2 - z_3^{\ 2}}{z_3 - z_1}$, якщо

$z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 4 + i$,

$z_3 = 1 + i$.

2. $z = 3 + i$
3. $\left(\sqrt{3} - 3i\right)^6$, 1^i
4. $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)}$
5. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$

Варіант – 3

1. $z = \dfrac{z_1 + z_3 z_2 + z_3^{\ 2}}{2 z_3}$, якщо

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$,

$z_3 = 5 - 2i$.

2. $z = 4 + 3i$.
3. $(1 - i)^{20}$, i^i
4. $\sqrt[5]{1 + 7i}$
5. $|z| = \operatorname{Im} z - 1$

Варіант – 4

1. $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 + z_3^{\ 2}}{z_1 + z_3}$, якщо

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$,

$z_3 = 1 + i$.

2. $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

3. $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$, $(-1)^{\sqrt{2}}$

4. $z^3 - 6i\sqrt{3 = 0}$

5. $|z| = \mathrm{Re}(1 + z)$

Варіант – 5

1. $z = \dfrac{z_2^{\ 2} - z_1 + z_3^{\ 2}}{z_2}$, якщо

$z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 3 + 4i$,

$z_3 = 1 + 2i$.

2. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$

3. $\left(\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{30}$, $(1 - i)^{3-3i}$

4. $z^3 + 3 - 2i\sqrt{3 = 0}$

5. $\begin{cases} |z| = 4, \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}$

Варіант – 6

1. $z = \dfrac{z_1 - z_1 z_2 + z_3^{\ 2}}{z_1 + z_3}$, якщо

$z_1 = 12 - 5i$, $z_2 = 3 + 12i$,

$z_3 = 1 + i$.

2. $z = 15^{\sqrt{6}}$

3. $(1 + 3i)^{20}$, 1^{-i}

4. $\sqrt{2 + 3\sqrt{3}i}$

5. $|z| - 3\,\mathrm{Im}\, z = 6$

Варіант – 7

1. $z = \dfrac{z_1 + 2z_2}{z_2 z_3}$, якщо

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 2i$,

$z_3 = 5 - 2i$.

2. $z = -1 - i$

3. $(11 + i)^{22}$, 2^i

4. $\sqrt[3]{2 - 2\sqrt{3}i}$

5. $3|z| - \mathrm{Re}\, z = 12$

Варіант – 8

1. $z = \dfrac{z_1 + 2z_2 + z_3}{z_1 z_2}$, якщо

$z_1 = 5 + i$, $z_2 = 2 + 7i$,

$z_3 = 1 - 2i$.

2. $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

3. $\left(\dfrac{5+4i}{3-4i}\right)^{12}$, $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$

4. $\sqrt[4]{\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3})}$

5. $\operatorname{Re}(\bar{z})^2=1$

Варіант – 9

1. $z=\dfrac{z_1^{\ 2}+z_2+z_3}{z_2}$, якщо

$z_1=4+8i$, $z_2=1-i$,

$z_3=9+13i$.

2. $z=i\cdot 2^{-\sqrt{5}}$

3. $(3-4i)^{12}$, $1^{\sqrt{2}}$

4. $z^6-i=0$

5. $\begin{cases}-\infty<\operatorname{Re}z<9,\\ 0<\operatorname{Im}z<\pi\end{cases}$

Варіант – 10

1. $z=\dfrac{z_1-z_1z_2-z_3^{\ 2}}{z_1+z_3}$, якщо

$z_1=5+4i$, $z_2=4-i$,

$z_3=1-6i$.

2. $z=\sqrt{3}-i$

3. $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{40}$, $(-2)^{\sqrt{2}}$

4. $\sqrt[4]{i}$

5. $\begin{cases}|z|=2,\\ -\dfrac{\pi}{2}<\arg z<0\end{cases}$

Варіант – 11

1. $z=\dfrac{z_1+z_1z_2-z_3^{\ 2}}{z_1-z_2}$, якщо

$z_1=5+9i$, $z_2=11-3i$,

$z_3=7+10i$.

2. $z=-3^{\sqrt{3}}$

3. $\left(\dfrac{1+2i}{\sqrt{2}}\right)^{20}$, $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

4. $\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}i}$

5. $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}<\operatorname{Re}z<\dfrac{\pi}{4},\\ -\infty<\operatorname{Im}z<\infty\end{cases}$

Варіант – 12

1. $z=\dfrac{z_1^{\ 2}+z_2+z_3}{z_2-z_3}$, якщо

$z_1=2+3i$, $z_2=3-4i$,

$z_3=1+i$.

2. $z=-2\sqrt{3}-2i$

3. $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{46}$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

4. $\sqrt[3]{-1+i}$

5. $\begin{cases} |z| = 4, \\ \pi < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Варіант – 13

1. $z = \dfrac{z_1 - z_3 z_2 + z_3^{\,2}}{2z_3}$, якщо

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 + 3i$,

$z_3 = 5 - 2i$.

2. $z = -4\sqrt{3}$

3. $(-5 - 5i)^{13}$, $(3 - 4i)^{1+i}$

4. $\sqrt[5]{-2\sqrt{3} + 2i}$

5. $\begin{cases} -\pi < \operatorname{Re} z < \pi, \\ -\infty < \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

Варіант – 14

1. $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 + z_3^{\,2}}{z_1 + z_2}$, якщо

$z_1 = 6 - 9i$, $z_2 = 3 - 4i$,

$z_3 = 11 + i$.

2. $z = \sqrt[5]{6} - i\sqrt[5]{6}$

3. $\left(\sqrt{3} + i\right)^{126}$, $(2 - i)^{1+i}$

4. $\sqrt[5]{\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})}$

5. $\begin{cases} \operatorname{Re} z > 0, \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{cases}$

Варіант – 15

1. $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 + z_3}{z_1 \cdot z_2}$, якщо

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 3 - 4i$,

$z_3 = 1 + 2i$.

2. $z = -\sqrt{13}i$

3. $\left(3 + 3\sqrt{3}i\right)^7$, $(4 - 3i)^{2i}$

4. $z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$

5. $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \infty \end{cases}$

Варіант – 16

1. $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 - z_3^{\,2}}{z_1 + z_3}$, якщо

$z_1 = 6 - 9i$, $z_2 = 5 + 3i$,

$z_3 = 11 + i$.

2. $z = 2 + 2i$

3. $\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{12}$, $(-1 + i)^{2i+1}$

4. $\sqrt[4]{1 - i}$

5. $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 < \operatorname{Im} z < \infty \end{cases}$

Варіант – 17

1. $z = \dfrac{z_1 - z_1 z_2 - z_3{}^2}{z_1 + z_3}$, якщо
$z_1 = 6 - 9i$, $z_2 = 7 + 2i$,
$z_3 = 5 - 2i$.
2. $z = -4i$
3. $(2 + 2i)^6$, $(1 - 3i)^i$
4. $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$
5. $\begin{cases} |z| < \infty, \\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

Варіант – 18

1. $z = \dfrac{z_1 + 2z_2 + z_3}{z_1 z_2}$, якщо
$z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = 7 + 2i$,
$z_3 = 1 + 2i$.
2. $z = \sqrt{3} + i$
3. $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{52}$, $\left(\dfrac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$
4. $z^6 + i = 0$
5. $\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < \infty, \\ -\pi < \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

Варіант – 19

1. $z = \dfrac{z_1{}^2 + z_2 + z_3}{z_2 - z_3}$, якщо
$z_1 = 1 + 5i$, $z_2 = 1 - 2i$,
$z_3 = 2 - 5i$.
2. $z = \sqrt{3} - 3i$
3. $\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)^7$, $\left(-\sqrt{3} + i\right)^i$
4. $z^6 + 1 = 0$
5. $\operatorname{Im}(\bar{z})^2 < 1$

Варіант – 20

1. $z = \dfrac{z_1 + z_3 z_2 + z_3{}^2}{2z_3}$, якщо
$z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 4 + 3i$,
$z_3 = 1 - i$.
2. $z = -\sqrt{3} + i$
3. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{40}$, $(-\sqrt{3} + i)^{-2i}$
4. $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$
5. $\begin{cases} |z| < \infty, \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi \end{cases}$

Варіант – 21

1. $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 - {z_3}^2}{z_1 + z_3}$, якщо

$z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 + 4i$,

$z_3 = i$.

2. $z = 3 - i\sqrt{3}$

3. $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)^5$, $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{i+1}$

4. $\sqrt[3]{2 - 2i}$

5. $\begin{cases} |\bar{z}| = 3, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Варіант – 22

1. $z = \dfrac{{z_2}^2 - z_1 + {z_3}^2}{z_2}$, якщо

$z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 11 - 3i$,

$z_3 = 7 + 10i$.

2. $z = 1 + i\sqrt{3}$

3. $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^5$, $\left(-2 + 2\sqrt{3}i\right)^{2i}$

4. $\sqrt[6]{\sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})}$

5. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} < -\dfrac{1}{2}$

Варіант – 23

1. $z = \dfrac{z_1 - z_1 z_2 - {z_3}^2}{z_3 - z_1^2}$, якщо

$z_1 = 12 - 5i$, $z_2 = 3 + 12i$,

$z_3 = 1 + i$.

2. $z = \sqrt[3]{5} - i\sqrt[3]{5}$

3. $\left(2 + 2i\right)^{28}$, $(2i)^{1-i}$

4. $\sqrt[5]{-2\sqrt{3} - 2i}$

5. $\begin{cases} |z| < 2, \\ \dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Варіант – 24

1. $z = \dfrac{{z_1}^2 + z_2 + z_3}{z_2 - z_3}$, якщо

$z_1 = 2 - i$, $z_2 = 3 - 11i$,

$z_3 = 10 - 7i$.

2. $z = -3^{15} + i3^{15}$

3. $\left(5 - 5\sqrt{3}i\right)^7$, $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{-i}$

4. $z^6 + 2 - 2i = 0$

5. $\begin{cases} |z| < 1, \\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Варіант – 25

1. $z = \dfrac{z_2{}^2 - z_1 + z_3{}^2}{3z_2}$,

якщо $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 4 - 3i$, $z_3 = 2 - i$.

2. $z = 1 - i$

3. $\left(1 + \sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 1)\right)^{12}$, $(-3 + 4i)^{1+i}$

4. $\sqrt[5]{-1 - i}$

5. $\begin{cases} -\pi < \operatorname{Re} z < 0, \\ -\infty < \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

Зразки розв'язання типового завдання № 3

1. Обчислити $z = \dfrac{z_1 + z_1 z_2 + z_2{}^2}{z_1 + z_3}$, якщо $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 + i$.

$$z = \frac{z_1 + z_1 z_2 + z_2{}^2}{z_1 + z_3} = \frac{(2+3i) + (2+3i)(3-4i) + (3-4i)^2}{(2+3i) + (1+i)} =$$

$$= \frac{(2+3i) + (6 - 8i + 9i + 12) + (9 - 24i - 16)}{3 + 4i} = \frac{13 - 20i}{3 + 4i} =$$

$$= \frac{(13 - 20i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{41 - 112i}{25} = \frac{41}{25} - i\,\frac{112}{25}.$$

2. Комплексному числу $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ надати тригонометричної та показникової форми.

Знаходимо модуль та аргумент комплексного числа:

$$x = -\sqrt{2},\ y = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\arg z = \pi - arctg\,\frac{\sqrt{2}}{\left|-\sqrt{2}\right|} = \pi - arctg 1 = \frac{3\pi}{4}.$$

Отже, $z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

3. Обчислити $(1 + i)^6$.

Знаходимо модуль та аргумент комплексного числа:

$$x=1,\ y=1 \Rightarrow |z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \arg z=\frac{\pi}{4}.$$

Тоді, за формулою Муавра

$$z^6=(\sqrt{2})^6(\cos\frac{12\pi}{4}+i\sin\frac{12\pi}{4})=8(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=-8.$$

4. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1-i}$.

Знаходимо модуль та аргумент комплексного числа:

$$x=1,\ y=-1 \Rightarrow |z|=\sqrt{2},\ \arg z=-\frac{\pi}{4},$$

$$1-i=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})),$$

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{-\pi}{4}+2\pi k}{4}),\ k=\overline{0,3}.$$

$$k=0 \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}),$$

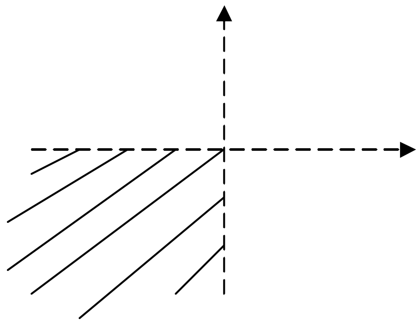
$$k=1 \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}),$$

$$k=2 \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}),$$

$$k=3 \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}).$$

5. Знайти множину точок на площині комплексної змінної z, що визначається наступними умовами $\begin{cases}\operatorname{Re} z<0,\\ \operatorname{Im} z<0\end{cases}$.

Нехай $z=x+iy$, тоді система набуває вигляду: $\begin{cases}x<0,\\ y<0\end{cases}$. На комплексній площині отримаємо:



Типове завдання № 4

Диференціальні рівняння

Завдання:

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння першого порядку.
2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння другого порядку.
3. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє початковим умовам.
4. Знайти загальний розв’язок системи диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння.

Варіант – 1

1. $y' + y = e^x$

2. $y'' + 2y' = e^x (y')^2$

3.
$y'' - y = e^z;$

$y\,|_{x=0} = 0;\ \ y'\,|_{x=0} = \dfrac{3}{2}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y \end{cases}$

Варіант – 2

1. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$

2. $y'' - \sqrt{1 + y'} = 0$

3.
$y'' + 2y' + 2 = xe^{2z};$

$y\,|_{x=0} = 5;\ \ y'\,|_{x=0} = 1$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$

Варіант – 3

1. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$

2. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$

3.
$y'' + y = \cos x;$

$y\,|_{x=0} = 0;\ \ y'\,|_{x=0} = 1$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$

Варіант – 4

1. $(x^2 - y^2) y' = 2xy$

2. $y'' - (y')^2 = 0$

3.
$$y'' + y' - 6y = xe^{2z};$$
$$y|_{x=0} = 0;\ y'|_{x=0} = 0{,}96$$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x \end{cases}$

Варіант – 5

1. $y' + y = e^x \sin x$
2. $-xy'' + y' + x^2 = 0$
3.
$$y'' + 4y' - 2y = 1 + x;$$
$$y|_{x=0} = 1;\ y'|_{x=0} = 0{,}5$$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

Варіант – 6

1. $xy' = y(\ln y - \ln x)$
2. $y'' = 2e^{-y} - (y')^2$
3.
$$y'' - y' = e^x \sin x;$$
$$y|_{x=0} = 0;\ y'|_{x=0} = 0$$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y \end{cases}$

Варіант – 7

1. $xy' + y - 3 = 0$
2. $xy'' = y'$
3.
$$y'' - 3y' + 2y = xe^x;$$
$$y|_{x=0} = 1;\ y'|_{x=0} = 2$$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$

Варіант – 8

1. $y' - \dfrac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$
2. $y'' = \dfrac{1}{2y'}$
3.
$$y'' - 2y' + y = x^3;$$
$$y|_{x=0} = 64;\ y'|_{x=0} = 19$$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$

Варіант – 9

1. $xy' + xe^{\frac{y}{x}} - y = 0$
2. $3yy'' + (y')^2 = 0$

3.
$$7y'' - y' = 14x;$$
$$y|_{x=0} = 15;\ y'|_{x=0} = -100$$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 3y \end{cases}$

Варіант – 10

1.
$$(y^2 - xy)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$$
2. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$
3.
$$y'' + 4y' - 2y = 8\sin 2x;$$
$$y|_{x=0} = -0{,}64;\ y'|_{x=0} = -0{,}96$$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$

Варіант – 11

1. $x^2 y' = 2xy + 3$
2. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$
3.
$$y'' + 8y' - 18x = 0;$$
$$y|_{x=0} = 1;\ y'|_{x=0} = 7/8$$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$

Варіант – 12

1. $x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$
2. $xy'' - y' = x^2 e^x$
3.
$$y'' - y' - 2y = 4x - 2e^x;$$
$$y|_{x=0} = 3;\ y'|_{x=0} = -5$$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y \end{cases}$

Варіант – 13

1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
2. $y'' - 2y'tgx - \sin x = 0$
3.
$$y'' - 7y' + 10y = 16e^{2x};$$
$$y|_{x=0} = 0;\ y'|_{x=0} = 1$$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 15y \end{cases}$

Варіант – 14

1. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$

2. $y'' = 2 - y$

3.

$9y'' - 6y' + y = 3x^2 - 27x + 8;$

$y|_{x=0} = 11;\ y'|_{x=0} = 10$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -7x - 3y \end{cases}$

Варіант – 15

1. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

2. $(1-x^2)y'' - xy' = 0$

3.
$y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x;$

$y|_{x=0} = -9/39;\ y'|_{x=0} = 2\dfrac{1}{13}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 8y \end{cases}$

Варіант – 16

1. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. $y''tgy = 2(y')^2$

3.
$y'' + y = x^2 \sin x;$

$y|_{x=0} = 1;\ y'|_{x=0} = 1/4$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

Варіант – 17

1. $xy' + y = \sin x$

2. $xy'' - x^3 + 2y' = 0$

3.
$y'' + y' = \cos^2 x;$

$y|_{x=0} = 0;\ y'|_{x=0} = 0$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 9x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y \end{cases}$

Варіант – 18

1. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}$

2. $y''(1+y) - 5(y') = 0$

3.

$4y'' + 4y' + y = 24e^{-x/2};$

$y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = 1$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

Варіант – 19

1. $y'\cos = (y+1)\sin x$
2. $1+(y')^2 + yy'' = 0$
3. $y'' - y' = 4e^x;$
$y|_{x=0} = 0;\; y'|_{x=0} = 1$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y \end{cases}$

Варіант – 20

1. $(y^3 - x)y' = y$
2. $y''x\ln x = y'$
3. $y'' - 6y' + 9y = 2x^3 + 12x + 2;$
$y|_{x=0} = 1;\; y'|_{x=0} = 3$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y \end{cases}$

Варіант – 21

1. $xy^2dy = (x^3 + y^3)dx$
2. $(y')^2 + yy'' = 0$
3. $y'' - 4y' - 4y = x^2 + 1;$
$y|_{x=0} = 0;\; y'|_{x=0} = 0$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 3y \end{cases}$

Варіант – 22

1. $y' + y = e^{-x}$
2. $y'' = -\dfrac{y'}{x}$
3. $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x;$
$y|_{x=0} = 1\dfrac{1}{4};\; y'|_{x=0} = 10$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$

Варіант – 23

1. $xy' + y - x = 1$
2. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$
3. $y'' + y' = 4x^2e^x;$
$y|_{x=0} = 1;\; y'|_{x=0} = 1$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$

Варіант – 24

1. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$
2. $yy'' - (y')^2 = 0$
3. $y'' + y = 2(x+1);$ $y|_{x=0} = 2;\ y'|_{x=0} = -2$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$

Варіант – 25

1. $(y\ln x - 2)ydx = xdy$
2. $xy'' + xy' = 1$
3. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x;$ $y|_{x=0} = 0;\ y'|_{x=0} = 0$
4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$

Зразки розв'язання типового завдання № 4

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'\cos x - y\sin x = \cos^2 x$.

Задане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Для розв'язання використовуємо підстановку: $y = uv$, де u, v - допоміжні функції, одна з яких обирається довільно, а друга – з рівняння. Якщо $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Підставляємо у рівняння

$$(u'v + uv')\cos x - uv\sin x = \cos^2 x.$$

$$u'v\cos x + uv'\cos x - uv\sin x = \cos^2 x.$$

$$u'v\cos x + u(v'\cos x - v\sin x) = \cos^2 x.$$

Оскільки одна з функцій обирається довільним чином, то підберемо її так щоб вираз в душках перетворювався на нуль. Тоді розв'язок даного рівняння зводиться до розв'язання системи двох рівнянь з подільними змінними.

$$\begin{cases} v'\cos x - v\sin x = 0 \\ u'v\cos x = \cos^2 x \end{cases} \text{ або } \begin{cases} v'\cos x - v\sin x = 0 \\ u'v = \cos x \end{cases}.$$

Розв'язуємо відносно функції v перше рівняння. Оскільки $v' = \dfrac{dv}{dx}$, тоді $\dfrac{dv}{dx}\cos x - v\sin x = 0$.

Розділяємо змінні: $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{\sin x}{\cos x}dx$. Інтегруємо рівняння та знаходимо частинний розв'язок.

$$\int\frac{dV}{V} = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx;\ \ \ln V = -\ln\left|\cos x\right|;\ V = \frac{1}{\cos x}.$$

Підставляючи значення V в друге рівняння системи:

$$U'\frac{1}{\cos x} = \cos x;\ U' = \frac{dU}{dx};\ \ \frac{dU}{dx}\frac{1}{\cos x} = \cos x.$$

Розділяємо змінні: $dU = \cos^2 xdx$.

Звідси: $U = \int\cos^2 xdx = \dfrac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx;\ U = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{1}{2}\sin 2x) + C$.

Тоді

$$y = UV = \left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C\right)\frac{1}{\cos x} = \frac{x}{2\cos x} + \sin x + \frac{C}{\cos x}.$$

$$y = \frac{x}{2\cos x} + \sin x + \frac{C}{\cos x}$$ - загальний розв'язок.

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння другого порядку $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

Дане рівняння не містить y, тобто це рівняння виду: $F(x, y', y'') = 0$. За допомогою підстановки $y' = p(x)$; $y'' = \frac{dp}{dx}$ рівняння набуває виду:

$$x\frac{dp}{dx} = p \ln \frac{p}{x} \text{ або } \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}.$$

Для розв’язання якого використовуємо підстановку $p = t \cdot x$, тоді

$$\frac{dp}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t.$$

Отримаємо:

$$x\frac{dt}{dx} + t = t \ln t; \;\; xdt = t(\ln t - 1)dx;$$

Розділяємо змінні: $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t(\ln t - 1)}$.

Інтегруємо рівняння:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{t(\ln t - 1)}; \quad \ln|x| + \ln c_1 = \ln|\ln t - 1|,$$

Звідки $c_1 x = \ln t - 1$; $\ln t = c_1 x + 1$, тобто $t = e^{c_1 x + 1}$.

Оскільки, $t = \frac{p}{x}$, тоді $\frac{p}{x} = e^{c_1 x + 1}$; $p = xe^{c_1 x + 1}$;

$p = y' = \frac{dy}{dx}$; $dy = xe^{c_1 x + 1} dx$.

Інтегруємо рівняння: $y = \int x e^{c_1 x+1} dx$.

Таким чином,

$$y = \frac{1}{c_1} x e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_1} \int e^{c_1 x+1} dx = \frac{1}{c_1} x e^{c_1 x+1} - \frac{1}{c_1^2} e^{c_1 x+1} + c_2 .$$

Загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = \frac{1}{c_1} e^{c_1 x+1} \left(x - \frac{1}{c_1} \right) + c_2 .$$

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 8y' + 16y = -10e^{-4x}$, що задовольняє початковим умовам $y|_{x=0} = 0; y'|_{x=0} = 5$.

Загальний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді: $y = \overline{y} + y^*$, де $\overline{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; y^* – частинний розв'язок даного рівняння.

Однорідне рівняння має вигляд:

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

Характеристичне рівняння:

$k^2 + 8k + 16 = 0;\ k_1 = k_2 = -4$ - корні рівняння.

Фундаментальна система розв'язків: $y_1 = e^{-4x};\ y_2 = xe^{-4x}$.

Тоді $\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$, т.е. $\overline{y} = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$, або $\overline{y} = e^{-4x}(c_1 + c_2 x)$.

Права частина рівняння $f(x) = -10e^{-4x}$.

Ця функція відповідає виду:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

Тому для знаходження y^* використовуємо метод невизначених коефіцієнтів.

У даному рівнянні $\alpha = -4; \beta = 0$ $\alpha + \beta i = -4$, тому y^* шукаємо у вигляді: $y^* = Ax^2e^{-4x}$, где А – коефіцієнт, який необхідно визначити.

Знаходимо $(y^*)' = A(2xe^{-4x} - 4x^2e^{-4x}) = e^{-4x}(2Ax - 4Ax^2)$,

$$(y^*)'' = -4e^{-4x}(2Ax - 4Ax^2) + e^{-4x}(2A - 8Ax) =$$
$$= e^{-4x}(16Ax^2 - 16Ax + 2A)$$

Підставляємо значення y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в початкове рівняння:

$$e^{-4x}(16Ax^2 - 16Ax + 2A) + 8e^{-4x}(2Ax - 4Ax^2) + 16Ax^2e^{-4x} = -10e^{-4x}$$

Отримаємо, що $A = -5$.

Тобто, частинний розв’язок має вигляд: $y^* = -5x^2e^{-4x}$.

Загальний розв’язок даного рівняння: $y = \bar{y} + y^*$;

$y = (c_1 + c_2x)e^{-4x} - 5x^2e^{-4x}$; або $y = e^{-4x}(c_1 + c_2x - 5x^2)$.

Для знаходження частинного розв’язку використовуємо початкові умови:

$$y|_{x=0} = 0; y'|_{x=0} = 5$$

Знаходимо похідну:

$y' = -4e^{-4x}(c_1 + c_2 x - 5x^2) + e^{-4x}(c_2 - 10x) = e^{-4x}(20x^2 - x(4c_2 + 10) + $
$+ c_2 - 4c_1)$

Підставляючи y та y' в початкові умови, отримаємо систему рівнянь для обчислення c_1 та c_2:

$$\begin{cases} 0 = c_1 \\ 5 = c_2 - 4c_1 \end{cases}$$

Звідси $c_1 = 0; c_2 = 5$.

Загальний розв'язок:

$y = e^{-4x}(5x - 5x^2)$ або $y = 5xe^{-4x}(1 - x)$ – частинний розв'язок.

4. Знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь за допомогою характеристичного рівняння $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$.

Частинний розв'язок системи шукаємо у вигляді:

$$x = \alpha e^{\lambda t}; y = \beta e^{\lambda t}; \frac{dx}{dt} = \alpha\lambda e^{\lambda t}; \frac{dy}{dt} = \beta\lambda e^{\lambda t}.$$

Підставляємо у систему та отримаємо лінійну однорідну систему рівнянь для знаходження α, β.

$$\begin{cases} \alpha\lambda e^{\lambda t} = 5\alpha e^{\lambda t} + 2\beta e^{\lambda t}; \\ \beta\lambda e^{\lambda t} = -4\alpha e^{\lambda t} - \beta e^{\lambda t}; \end{cases} \qquad \begin{cases} (5 - \lambda)\alpha + 2\beta = 0; \\ -4\alpha + (-1 - \lambda)\beta = 0. \end{cases}$$

Запишемо та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0;$$
$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 3$$

При $\lambda_1 = 1$ отримаємо систему:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 0; \\ -4\alpha - 2\beta = 0. \end{cases}$$

Система еквівалентна рівнянню $2\alpha + \beta = 0$, звідки $\alpha = 1, \beta = -2$.

Отже, $x_1 = e^t; y_1 = -2e^t$ – один з розв'язків початкової системи.

При $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0; \\ -4\alpha - 4\beta = 0 \end{cases}$$

Система еквівалентна рівнянню $\alpha + \beta = 0$, один з розв'язків $\alpha = 1, \beta = -1$.

Отже, $x_2 = e^{3t}; y_2 = -e^{3t}$ – ще один з розв'язків системи.
Загальний розв'язок:

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{3t};$$
$$y = -2c_1 e^t - c_2 e^{3t}$$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна:

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1983. – 440с.
2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т.Т. 1,2. – М.: Наука, 1981. – 687с.
3. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. – М.: URSS, 2001. – 696с.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. . – М.: Наука, 1967. – 360с.
5. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 222с.
6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч./ Под ред. А.П. Рябушко. – М.: Высшая школа, 1991. – 270с.

Додаткова:

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 345с.
2. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1985. – 192с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. ТТ. 1,2. – М.: Наука, 1985. – 480с.

НАВЧАЛЬНО–МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Штейнле Ольга Миколаївна
Стреляєв Юрій Михайлович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для студентів біологічного факультету

Частина 2

Відповідальний
за випуск С.М. Гребенюк, к.т.н., доцент

Рецензент С.М. Гребенюк, к.т.н., доцент

Коректор О.М.Штейнле, асистент