ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Логарифмічним рівнянням з параметром називають рівняння, у якому невідома величина міститься під знаком логарифма або входить до його основи, а один чи декілька коефіцієнтів залежать від параметра.

Загальний вигляд такого рівняння може бути поданий як

$$\log_a f(x;m) = g(x;m),$$

де x – невідома величина, m – параметр, $f(x;m)$, $g(x;m)$ – задані функції.

Основною особливістю рівнянь з параметром є те, що потрібно знайти не лише значення невідомої, а й установити, як змінюється множина розв'язків залежно від значення параметра. Кожному допустимому значенню параметра відповідає певне рівняння. Воно може мати один розв'язок, декілька розв'язків або не мати розв'язків узагалі. В окремих випадках рівняння може виконуватися для всіх значень невідомої з певної області допустимих значень.

У багатьох задачах потрібно не просто розв'язати рівняння, а визначити всі значення параметра, за яких рівняння має задану кількість розв'язків. Для цього доцільно:

- визначити область допустимих значень (ОДЗ);
- виконати рівносильні перетворення;
- звести рівняння до простішого виду, наприклад квадратного;
- дослідити умови існування та кількість коренів;
- перевірити, чи задовольняють отримані корені ОДЗ;
- розглянути граничні значення параметра, за яких змінюється кількість розв'язків.

Типові помилки під час розв'язування

Найчастіше трапляються такі помилки:

- ігнорування ОДЗ;
- неправильне визначення проміжків значень параметра;
- втрата або поява сторонніх коренів під час перетворень;
- неповне дослідження граничних значень параметра;
- ототожнення кількості коренів допоміжного рівняння з кількістю розв'язків початкового рівняння без перевірки ОДЗ.

Вивчення логарифмічних рівнянь з параметром доцільно будувати послідовно: від повторення властивостей логарифмів і побудови ОДЗ до використання заміни змінної.

Для формування навичок дослідження варто використовувати завдання різних рівнів складності: від рівнянь, що зводяться до лінійних або квадратних, до задач на визначення кількості коренів, побудову множини розв'язків на координатній площині та аналіз взаємного розташування графіків.

Отже, логарифмічні рівняння з параметром є важливим класом задач, що поєднують властивості логарифмічної функції, алгебраїчні методи та дослідження залежності розв'язків від параметра. Їх розв'язування потребує системного аналізу ОДЗ, урахування монотонності логарифмічної функції та перевірки всіх отриманих результатів.

№ 1. За якого найбільшого значення a рівняння $\dfrac{\log_3^2 x + \log_3 \dfrac{x}{81} - 2}{54x + 5a} = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Спочатку знайдемо ОДЗ рівняння:

$$\begin{cases} x>0, \\ \dfrac{x}{81}>0, \\ 54x+5a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ 54x+5a\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq -\dfrac{5a}{54}. \end{cases}$$

Переходимо до розв'язування заданого рівняння: дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (враховано в ОДЗ), тому маємо:

$$\log_3^2 x+\log_3 \frac{x}{81}-2=0.$$

До другого доданку в лівій частині застосуємо властивість логарифма, а саме «логарифм частки»:

$$\log_3^2 x+\log_3 x-\log_3 81-2=0,$$
$$\log_3^2 x+\log_3 x-4-2=0,$$
$$\log_3^2 x+\log_3 x-6=0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно $\log_3 x$, його корені знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$\log_3 x_1=-3 \quad \text{або} \quad \log_3 x_2=2,$$
$$x_1=3^{-3}, \qquad x_2=3^2,$$
$$x_1=\frac{1}{27}. \qquad x_2=9.$$

Згідно з умовою, потрібно знайти найбільше значення параметра a, щоб рівняння мало єдиний корінь. А це можливо лише у видку, коли або перший корінь, або другий корінь не належить ОДЗ. Оскільки вони обидва додатні, то не належати ОДЗ вони будуть лише у тому випадку, коли будуть рівними $-\dfrac{5a}{54}$. Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{27}=-\dfrac{5a}{54}, \Big| :\left(-\dfrac{5}{54}\right) \\ 9=-\dfrac{5a}{54} \Big| :\left(-\dfrac{5}{54}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{2}{5}=-0{,}4; \\ a=-\dfrac{486}{5}=-97{,}2. \end{array}\right.$$

З двох отриманих значень a обираємо найбільше – $(-0{,}4)$.

Відповідь. $a=-0{,}4$.

№ 2. За якого найменшого значення a рівняння $\dfrac{\sqrt{3x+4}-x+12}{\log_5(x-2a)}=0$ не має коренів?

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 3x+4\geq 0, \\ x-2a>0, \\ \log_5(x-2a)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{4}{3}, \\ x>2a, \\ x-2a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -\dfrac{4}{3}, \\ x>2a, \\ x\neq 1+2a. \end{cases}$$

Дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні, тому прирівнюємо чисельник заданого рівняння до нуля:

$$\sqrt{3x+4}-x+12=0,$$
$$\sqrt{3x+4}=x-12.$$

Отримали ірраціональне рівняння, яке еквівалентне наступній системі:

$$\begin{cases} x-12\ge 0, \\ 3x+4=(x-12)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 12, \\ 3x+4=x^2-24x+144 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 12, \\ x^2-\overset{+27}{27}\,x+\overset{\times 140}{140}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 12, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=20, \\ x_2=7 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=20.$$

За умовою потрібно визначити найменше значення параметра a, за якого задане рівняння не має коренів. Отже, знайдений корінь $x=20$ не повинен належати ОДЗ, а це можливо, якщо

$$\left[\begin{array}{l} 20\le 2a, \\ 20=1+2a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\ge 10, \\ a=\dfrac{19}{5}=9{,}5. \end{array}\right.$$

З отриманих значень обираємо найменше: $a=9{,}5$.

Відповідь. $a=9{,}5$.

№ 3. Знайти суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\dfrac{\log_3\left(x^2+3x-1\right)-2}{\sqrt{x+a}+\sqrt{10-a}}=0$ має два різні корені.

Розв'язання. Спочатку знаходимо ОДЗ: підлогарифмічний вираз додатній, підкореневі вирази невід'ємні та одночасно нерівні нулю:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+3x-1>0, \\ x+a\ge 0, \\ 10-a\ge 0, \\ (x+a)^2+(10-a)^2\ne 0 \end{array}\right. \left\|\begin{array}{l} x^2+3x-1=0, \\ D=9-4\cdot 1\cdot(-1)=13, \\ x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right\| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in\left(-\infty;\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2};+\infty\right), \\ x\ge -a, \\ a\le 10, \\ (x+a)^2+(10-a)^2\ne 0. \end{array}\right.$$

Після того, як ОДЗ знайдено, переходимо до розв'язування заданого дробово-раціонального рівняння: дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (враховано в ОДЗ):

$$\log_3\left(x^2+3x-1\right)-2=0,$$
$$\log_3\left(x^2+3x-1\right)=2,$$
$$x^2+3x-1=3^2,$$
$$x^2+\overset{+(-3)}{3x}-\overset{\times(-10)}{10}=0,$$
$$x_1=-5 \text{ або } x_2=2.$$

Знайдені корені повинні задовольняти ОДЗ:

$$\begin{cases} -5\ge -a, \\ 2\ge -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge 5, \\ a\ge -2 \end{cases} \Rightarrow a\ge 5 \Rightarrow \bigcap \text{ОДЗ: } a\in[5;10].$$

Сума цілих значень з цього проміжку

$$5+6+7+8+9+10=45.$$

Відповідь. 45.

№ 4. Знайти суму всіх цілих значень a, за кожного з яких корінь рівняння $\dfrac{\log_5(4x-2a+1)-2}{\sqrt{x^2-a^2}}=0$ є цілим числом.

Розв'язання. ОДЗ даного рівняння:

$$\begin{cases} x^2-a^2>0, \\ 4x-2a+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-a^2>0, \\ x>\dfrac{2a-1}{4}. \end{cases}$$

Для розв'язування заданого рівняння прирівняємо чисельник до нуля (знаменник при цьому нерівний нулю):

$$\log_5(4x-2a+1)-2=0,$$
$$\log_5(4x-2a+1)=2,$$
$$4x-2a+1=5^2 \text{ або } 4x=24+2a.$$

Звідси маємо, що

$$x=6+\frac{a}{2}.$$

Отримане значення x буде цілим, коли a буде цілим парним.

Знайдемо такі значення параметра a, при яких $x\in$ ОДЗ:

$$\begin{cases} \left(6+\dfrac{a}{2}\right)^2-a^2>0, \\ 6+\dfrac{a}{2}>\left|\dfrac{2a-1}{4}\right| \times 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36+6a+\dfrac{a^2}{4}-a^2>0, \\ 24+2a>2a-1 \end{cases} \Big| \times 4 \Rightarrow \begin{cases} 144+24a-3a^2>0, \\ 24>-1 \end{cases} \Big| :(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-8a-48<0, \\ a\in(-\infty;+\infty) \end{cases} \overset{+8 \quad \times(-48)}{\Rightarrow} (a-12)(a+4)<0 \Rightarrow a\in(-4;12).$$

Оскільки a повинно бути цілим парним числом з проміжку $(-4;12)$, то шукана сума

$$-2+0+2+4+6+8+10=28.$$

Відповідь. 28.

№ 5. Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких добуток різних коренів рівняння $\log_3(|x-2|+2a-11)-2=0$ є більшим за -40.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ: Підлогарифмічний вираз додатній:

$$|x-2|+2a-11>0 \text{ або } |x-2|>11-2a.$$

Зведемо задане рівняння до найпростішого та розв'яжемо його:

$$\log_3(|x-2|+2a-11)=2,$$
$$|x-2|+2a-11=3^2,$$
$$|x-2|=20-2a;$$
$$\bigcap \text{ОДЗ: } 20-2a>11-2a,$$
$$20>11.$$

Остання нерівність виконується для будь-якого дійсного значення a.

У результаті прийшли до рівняння з модулем, кількість коренів якого залежить від знаку правої частини:

$20-2a>0$	або	$20-2a=0$	або	$20-2a<0$
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Downarrow$
$a<10$		$\begin{cases} a=10, \\ x-2=0 \end{cases}$		коренів немає
$x-2=20-2a$ або $x-2=2a-20$		$\Downarrow$		$\Downarrow$

$x_1 = 22 - 2a$ $x_2 = 2a - 18$ $\begin{cases} a = 10, \\ x = 2. \end{cases}$ не задовольняє умову

два корені, задовольняють умову $\Downarrow$ один корінь, не задовольняє умову

Добуток знайдених коренів повинен бути більшим за – 40, тобто маємо нерівність

$$(22-2a)(2a-18) > -40 \text{ при умові, що } a < 10;$$

$$44a - 396 - 4a^2 + 36a + 40 > 0,$$

$$-4a^2 + 80a - 356 > 0, \Big| : (-4)$$

$$a^2 - 20a + 89 < 0,$$

$$D = 20^2 - 4 \cdot 89 = 400 - 356 = 44,$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{11},$$

$$\begin{cases} a \in \left(10 - \sqrt{11}; 10 + \sqrt{11}\right), \\ a < 10 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(10 - \sqrt{11}; 10\right).$$

Сума всіх цілих значень a з отриманого проміжку

$$7 + 8 + 9 = 24.$$

Відповідь. 24.

№ 6. Визначити кількість усіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\sqrt{2x-a}[\log_3(x-4)-2]=0$ має два різні корені.

Розв'язання. ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x - a \geq 0, \\ x - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{a}{2}, \\ x > 4. \end{cases}$$

Переходимо до розв'язання заданого рівняння: добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю. Отже, рівняння розпадається на два:

$$\sqrt{2x-a} = 0, \quad \text{або} \quad \log_3(x-4) - 2 = 0,$$

$$2x - a = 0, \qquad \log_3(x-4) = 2,$$

$$x_1 = \frac{a}{2}. \qquad x - 4 = 9 \text{ або } x_{12} = 13.$$

Рівняння буде мати два різні корені, якщо вони обидва будуть належать ОДЗ і не будуть рівні один одному, тобто якщо буде мати місце система:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} \geq \dfrac{a}{2}, \\ \dfrac{a}{2} > 4, \\ \dfrac{a}{2} \neq 13, \\ 13 \geq \dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 8, \\ a \neq 26, \\ a \leq 26 \end{cases} \Rightarrow a \in (8; 26).$$

Тобто нам потрібно знайти кількість цілих чисел з проміжку $(8; 25)$. Всі вони утворюють

арифметичну прогресію, для якої $a_1 = 9, a_n = 25, d = 1$. Тоді шукана кількість

$$k = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{25-9}{1} + 1 = 17.$$

Відповідь. 17 штук.

№ 7. Визначити найменше ціле значення a, для якого рівняння $\frac{x + a + \sqrt{x+a} - 12}{2 + \lg^2\left(2x - a^2\right)} = 0$ має корені.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} x + a \ge 0, \\ 2x - a^2 > 0, \\ \underbrace{\underset{\ge 2}{2} + \underset{\ge 0}{\lg^2\left(2x - a^2\right)}}_{\ge 2 > 0} \ne 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -a, \\ x > \dfrac{a^2}{2}. \end{cases}$$

Для розв'язування заданого рівняння використаємо правило, що дріб дорівнює нулю тоді і лише тоді, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (останнє враховано в ОДЗ):

$$x + a + \sqrt{x+a} - 12 = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно $\sqrt{x+a}$, корені якого знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$\sqrt{x+a}^2 + \overset{+(-1)}{\sqrt{x+a}} - \overset{\times(-12)}{12} = 0,$$

$$\sqrt{x+a} = 3 \quad \text{або} \quad \sqrt{x+a} = -4$$

$$x + a = 9, \qquad \varnothing$$

$$x = 9 - a.$$

Дане значення x буде коренем, якщо воно буде належати ОДЗ:

$$\begin{cases} 9 - a \ge -a, \\ 9 - a > \dfrac{a^2}{2} \Big| \times 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 \ge 0, \\ 18 - 2a > a^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2a - 18 < 0,$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 4 \cdot 19,$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{19},$$

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{19}}{2 \cdot 1} = -1 \pm \sqrt{19}.$$

Отже, $a \in \left(-1 - \sqrt{19}; -1 + \sqrt{19}\right)$. Найменше ціле значення a, що належить цьому проміжку – $a = -5$.

Відповідь. $a = -5$.

№ 8. Визначити кількість усіх від'ємних цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\left(\sqrt{4x - 2a - 4} - 3\right)\left(\lg^2 x + 1\right) = 0$ має корінь.

Розв'язання. Знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases} 4x - 2a - 4 \ge 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{a}{2} + 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

При розв'язуванні рівняння враховуємо той факт, що добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю. Тобто задане рівняння розпадається на два:

$$\sqrt{4x-2a-4}-3=0, \quad \text{або} \quad \underbrace{\lg^2 x}_{\geq 0}+\underbrace{1}_{\geq 1}=0,$$

$$\underbrace{\geq 1>0}$$

$$\sqrt{4x-2a-4}=3, \qquad x\in\varnothing.$$

$$4x-2a-4=9,$$

$$4x=2a+13,$$

$$x=\frac{a}{2}+\frac{13}{4}.$$

Рівняння має корінь $x=\frac{a}{2}+\frac{13}{4}$, якщо він належить ОДЗ, тобто виконуються умови

$$\begin{cases}\frac{a}{2}+\frac{13}{4}\geq\frac{a}{2}+1,\\ \frac{a}{2}+\frac{13}{4}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{13}{4}\geq 1,\\ \frac{a}{2}>-\frac{13}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in R,\\ a>-\frac{13}{2}\end{cases}\Rightarrow a\in(-6{,}5;+\infty).$$

Кількість цілих від'ємних значень a з цього проміжку дорівнює

$$k=\frac{-1-(-6)}{1}+1=6.$$

Відповідь. 6 штук.

№ 9. Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\lg(2ax+5-a)=\lg(4x)$ не має коренів.

Розв'язання. Спочатку знаходимо ОДЗ:

$$\begin{cases}2ax+5-a>0,\\ 4x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2ax>a-5,\\ x>0.\end{cases}$$

Переходимо до розв'язування заданого логарифмічного рівняння: рівні логарифми, тоді рівні й під логарифмічні функції. Тобто приходимо до рівняння

$$2ax+5-a=4x,$$

$$2ax-4x=a-5,$$

$$2(a-2)x=a-5,$$

$$(a-2)x=\frac{a-5}{2}.$$

Розглянемо два випадки щодо старшого коефіцієнта останнього рівняння:

$$a-2\neq 0\Rightarrow a\neq 2 \quad \text{або} \quad a-2=0\Rightarrow a=2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x_1=\frac{a-5}{2(a-2)} \qquad 0\cdot x=-\frac{3}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$x\in\varnothing,$$

$$a \text{ задовольняє умову}$$

Вихідне рівняння не буде мати коренів, якщо значення x_1 не буде належати ОДЗ, тобто якщо

$$\begin{cases} 2a\cdot\dfrac{a-5}{2(a-2)}\le a-5, \\ \dfrac{a-5}{2(a-2)}\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a(a-5)}{a-2}-(a-5)\le 0, \\ \dfrac{a-5}{a-2}\le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-5)(a-a+2)}{2(a-2)}\le 0, \\ a\in(2;5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2(a-5)}{2(a-2)}\le 0, \\ a\in(2;5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\in(2;5], \\ a\in(2;5] \end{cases} \Rightarrow a\in(2;5].$$

Тоді сума всіх цілих значень a, при яких задане рівняння не має коренів, дорівнює

$$2+3+4+5=14.$$

Відповідь. 14.

№ 10. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $\lg^2\left(1+x^2\right)+(3a-2)\lg\left(1+x^2\right)+a^2=0$ не має коренів.

Розв'язання. ОДЗ: $1+x^2>0\Rightarrow x\in R$.

Задане рівняння є квадратним відносно $\lg\left(1+x^2\right)$. Воно не буде мати розв'язки, якщо його дискримінант буде від'ємним:

$$D=(3a-2)^2-4\cdot 1\cdot a^2=(3a-2)^2-4a^2=$$

$$=(3a-2-2a)(3a-2+2a)=(a-2)(5a-2)=5(a-2)\left(a-\frac{2}{5}\right)<0.$$

Отже, $a\in\left(\dfrac{2}{5};2\right)$ або $a\in(0{,}4;2)$.

Відповідь. $a\in(0{,}4;2)$.