

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Приклади для самостійного розв'язування.

Задача 1. Знайти ітеровані ядра вказаних нижче ядер при заданих a і b :

а) $K(x,t) = e^{|x+t|}$; $a = -1$, $b = 1$, $n = 2$; б) $K(x,t) = e^x \cos t$; $a = 0$, $b = \pi$.

Задача 2. Побудувати резольвенти для наступних ядер

а) $K(x,t) = \sin x \cos t$; $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$;

б) $K(x,t) = (1+x)(1-t)$; $a = -1$, $b = 0$;

в) $K(x,t) = \sin x \cos t + \cos 2x \sin 2t$; $a = 0$, $b = 2\pi$.

Задача 3. Знайти резольвенти для інтегральних рівнянь Вольтерра з наступними ядрами

а) $K(x,t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$; б) $K(x,t) = a^{x-t}$, $a > 0$;

в) $K(x,t) = 2 - (x-t)$, $\lambda = 1$; г) $K(x,t) = -2 + 3(x-t)$, $\lambda = 1$.

Задача 4. За допомогою резольвенти розв'язати інтегральні рівняння

а) $\varphi(x) = x3^x - \int_0^x 3^{x-t} \varphi(t) dt$; б) $\varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t) dt$.

Приклад 5. Довести, що інтегральне рівняння Вольтерра (3.9) має єдиний розв'язок у класі $C[0, a]$ при довільному λ .

Контрольні запитання

1. Яке ядро називається виродженим?
2. До системи яких рівнянь зводиться неоднорідне рівняння Фредгольма з виродженим ядром?
3. Як визначається резольвента виродженого ядра через матрицю A алгебраїчного рівняння?

Задачі для самостійного розв'язування

1. Чи являються наступні рівняння – рівняннями з виродженим ядром?

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^2 \sin(2t - 4x) \varphi(t) dt + 1e^x, \quad \varphi(x) = 5 \int_0^1 \sqrt{x^2 + t^2} \varphi(t) dt + x^2 .$$

2. Розв'язати наступні рівняння:

1) $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 2e^{x+t} \varphi(t) dt + e^x$;

$$2) \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 - xt)\varphi(t)dt + x^2 + x;$$

$$3) \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sin(3x + t)\varphi(t)dt + \cos x;$$

$$4) \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \cos^2(x - t)\varphi(t)dt + 1 + \cos 4x.$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення характеристичних чисел і власних функцій.
2. Наведіть схему розв'язування спектральної інтегральної задачі для рівнянь із виродженим ядром.
3. Які властивості мають характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння із симетричним ядром?

Приклади для самостійного розв'язування

Приклад 1. Знайти характеристичні числа і власні функції наступних інтегральних рівнянь:

$$1) \varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x + t)\varphi(t)dt; \quad 2) \varphi(t) = \lambda \int_0^1 (x^2 + t^2)\varphi(t)dt;$$

$$2) \varphi(t) = \lambda \int_{-1}^1 (x \operatorname{cht} - t \operatorname{chx})\varphi(t)dt; \quad 3) \varphi(t) = \lambda \int_0^1 \left(x^2 t^2 - \frac{2}{45} \right) \varphi(t)dt.$$

Приклад 2. Знайти характеристичні числа і власні функції однорідних інтегральних рівнянь із симетричними ядрами, якщо ці ядра мають наступний вигляд:

$$1) K(x, t) = \begin{cases} (x + 1)(t - 2), & 0 \leq x \leq t \\ (x + 1)(t - 2), & t \leq x \leq 1 \end{cases};$$

$$2) K(x, t) = \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right), & 0 \leq x \leq t \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), & t \leq x \leq 1 \end{cases};$$

$$3) K(x, t) = \begin{cases} (e^x - e^{-x})(e^t + e^{2-t}), & 0 \leq x \leq t \\ (e^x + e^{2-x})(e^t - e^{-t}), & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Контрольні запитання

1. Яке рівняння називається спряженим?
2. Сформулюйте теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з виродженим ядром.
3. Сформулюйте альтернативу Фредгольма.
4. Сформулюйте теорему Гільберта-Шмідта.

5. Коли симетричне ядро має зчисленну множину характеристичних чисел?
6. Наведіть алгоритми розв'язування неоднорідного інтегрального рівняння з симетричним ядром.
7. Яким чином розв'язується неоднорідне інтегральне рівняння, ядро якого є функцією Гріна деякого лінійного диференціального оператора.

Приклади для самостійного розв'язання

I. Розв'язати наступні інтегральні рівняння

$$1) \quad \varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}) \varphi(t) dt + 1 - 6x^2.$$

$$2) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 2e^{x+t} \varphi(t) dt + e^x.$$

$$3) \quad \varphi(x) - \int_0^{\pi} K(x,t) \varphi(t) dt = x, \quad K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), & 0 \leq x \leq t, \\ (t+1)(x-3), & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$4) \quad \varphi(x) - 2 \int_0^{\pi/2} K(x,t) \varphi(t) dt = \cos 2x, \quad K(x,t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t, \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$5) \quad \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x,t) \varphi(t) dt = \frac{x}{2}, \quad K(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

II. Знайти розв'язки наступних інтегральних рівнянь для всіх λ і всіх параметрів a, b, c

$$1) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \varphi(t) dt + a \sin x + b.$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{t}) \varphi(t) dt + ax^2 + bx + c.$$

3. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.

Основна

1. Морозова В.Д. Теория функций комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко / В.Д. Морозова – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520с.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов – М.: Наука, 1984. – 432с.
3. Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язання задач / О.Ю. Грищенко, М.Г. Нагнибіда, П.П. Настасієв – К.: 1994. – 376с.
4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, В.В. Шабат – М.: Наука, 1987. – 688с.
5. Волковыский Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного / Л.И. Волковыский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович – М.: Наука, 1975. – 319с.
6. Краснов М.Т. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.Т. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко – М.: Наука, 1981. – 304с.

Додаткова

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций / А.В. Бицадзе – М.: Наука, 1969. – 240с.
 2. Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної / О.Ю. Грищенко, С.І. Ляшко. – К.: Київський університет, – 2009. – 496с.
 3. Доронин В.Г. Методические указания к лабораторным работам по курсу теории функций комплексного переменного / В.Г. Доронин, В.А. Кофанов – Днепропетровск.: ДГУ, 1991. – 56с.
 4. Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов – М.: Наука, 1991. – 448с.
 5. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
 6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций / А.И. Маркушевич – М.: Наука, 1978. – 415с.
 7. Маркушевич А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич – М.: Просвещение, 1977. – 320с.
 8. Свешников А.Т. Теория функций комплексного переменного / А.Т. Свешников, А.Н. Тихонов – М.: Наука, 1974. – 320с.
- Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин – М.: Наука, 1989. – 480с.