ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Розв'язування показникових рівнянь з параметрами вимагає не лише знання стандартних алгоритмів, але й постійного контролю за областю значень показникової функції. Це найголовніший фактор, на якому будуються «пастки» в таких завданнях.

Базові принципи аналізу

Строга додатність: функція $y = a^x, a > 0, a \neq 1$ набуває лише додатних значень. Рівняння $a^{f(x)} = b$ має розв'язки тільки за умови $b > 0$.

Взаємно однозначна відповідність (*монотонність*): кожному додатному значенню функції відповідає лише одне значення аргументу. Тому рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

№1. Знайти найменше ціле значення a, за якого розв'язок $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \log_5 \dfrac{x}{y} = a - 18, \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12 \end{cases}$ задовольняє умову $\begin{cases} x_0 < \sqrt{5}, \\ y_0 > 5. \end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} > 0, \\ x > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

До лівої частини першого рівняння застосуємо властивість логарифма:

$$\begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = a - 18, \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12. \end{cases} \quad (1.1)$$

Знайдемо розв'язок даної системи методом додавання/віднімання. Спочатку від першого рівняння системи віднімемо друге:

$$-\begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = a - 18, \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12 \end{cases}$$

$$3\log_5 y = 2a + 30, \mid :3$$

$$\log_5 y = \frac{2a}{3} + 10,$$

$$y = 5^{\frac{2a}{3}+10} > 0.$$

Потім перше рівняння системи помножимо на два (1.1) та рівняння отриманої системи додамо:

$$+\begin{cases} 2\log_5 x - 2\log_5 y = 2a - 36, \\ \log_5 x + 2\log_5 y = 3a + 12 \end{cases}$$

$$3\log_5 x = 5a - 24, \mid :3$$

$$\log_5 x = \frac{5a}{3} - 8,$$

$$x = 5^{\frac{5a}{3}-8} > 0.$$

Згідно з умовою, знайдені розв'язки повинні задовольняти умові $\begin{cases} x_0 < \sqrt{5}, \\ y_0 > 5. \end{cases}$ Тобто

$$\begin{cases} 5^{\frac{5a}{3}-8} < \sqrt{5}, \\ 5^{\frac{2a}{3}+10} > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{\frac{5a}{3}-8} < 5^{\frac{1}{2}}, \\ 5^{\frac{2a}{3}+10} > 5^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5a}{3}-8 < \frac{1}{2}, \\ \frac{2a}{3}+10 > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5a}{3} < \frac{17}{2}, \Big| :\frac{5}{3} \\ \frac{2a}{3} > -9 \Big| :\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 5{,}1; \\ a > -13{,}5 \end{cases} \Rightarrow a \in (-13{,}5;\, 5{,}1).$$

Найменше ціле значення a, що належить цьому проміжку – це $a = -13$.

Відповідь. $a = -13$.

№2. За якого найбільшого цілого від'ємного значення a для розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + y = 3a, \\ 2\log_2 x - 3y = a + 25 \end{cases}$ справджується нерівність $(x_0 - 1) \cdot 2^{y_0} < 0$?

Розв'язання. ОДЗ: $x > 0$.

Проаналізуємо нерівність $(x_0 - 1) \cdot 2^{y_0} < 0$, яка повинна виконуватися для розв'язку $(x_0; y_0)$ заданої системи: оскільки $2^{y_0} > 0$ для будь-якого значення y, то задана умова еквівалентна нерівності $x_0 - 1 < 0$. Отже, нам потрібно знайти лише абсцису розв'язку.

Для її знаходження помножимо перше рівняння на 3, та отримані рівняння нової системи додамо:

$$+\begin{cases} 3\log_2 x + 3y = 9a, \\ 2\log_2 x - 3y = a + 25 \end{cases}$$

$$5\log_2 x = 10a + 25, \Big| :5$$

$$\log_2 x = 2a + 5,$$

$$x = 2^{2a+5} > 0.$$

Тоді умова $x_0 - 1 < 0$ приймає вигляд:

$$2^{2a+5} - 1 < 0,$$

$$2^{2a+5} < 1,$$

$$2^{2a+5} < 2^0,$$

$$2a + 5 < 0,$$

$$a < -\frac{5}{2} \Rightarrow a \in (-\infty; -2{,}5).$$

Найбільше ціле від'ємне значення a з цього проміжку – це $a = -3$.

Відповідь. $a = -3$.

№3. Знайти найменше ціле значення a, за якого добуток коренів рівняння $\log_5^2 x - (a+2)\log_5 x + 2a = 0$ належить проміжку $\left(\frac{1}{25}; 5\right)$.

Розв'язання. ОДЗ. $x > 0$.

Задане рівняння є квадратним відносно $\log_5 x$, його корені знайдемо за теоремою Вієта:

$$\begin{cases}\log_5 x_1 \cdot \log_5 x_2 = 2a,\\ \log_5 x_1 \cdot \log_5 x_2 = a+2.\end{cases}$$

Тоді

$$\log_5 x_1 = 2, \quad \text{або} \quad \log_5 x_2 = a$$
$$x_1 = 5^2, \qquad x_2 = 5^a.$$
$$x_1 = 25;$$

За умовою добуток коренів рівняння належить проміжку $\left(\frac{1}{25};5\right)$, тобто

$$\frac{1}{25} < x_1 x_2 < 25,$$
$$5^{-2} < 25 \cdot 5^a < 5,$$
$$5^{-2} < 5^{2+a} < 5^1,$$
$$-2 < 2+a < 1, \mid -2$$
$$-4 < 2+a < -1 \Rightarrow a \in (-4;-1).$$

Найменше ціле значення a, що належить цьому проміжку, – це $a = -3$.

Відповідь. $a = -3$.

№4. За якого найбільшого значення a рівняння $\dfrac{\left(2^x - \frac{1}{8}\right)\left(2^x - \sqrt[4]{2^{2a-5}}\right)}{x^2 - 6x + 9} = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. ОДЗ: $x^2 - 6x + 9 \neq 0 \Rightarrow (x-3)^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

Дріб дорівнює нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні (останнє враховано в ОДЗ). Тобто задане рівняння, з урахуванням ОДЗ, рівносильне рівнянню

$$\left(2^x - \frac{1}{8}\right)\left(2^x - \sqrt[4]{2^{2a-5}}\right) = 0.$$

Добуток дорівнює нулю, коли хоча б один із співмножників дорівнює нулю:

$$2^x - \frac{1}{8} = 0, \quad \text{або} \quad 2^x - \sqrt[4]{2^{2a-5}} = 0,$$
$$2^x = \frac{1}{8}, \qquad 2^x = \sqrt[4]{2^{2a-5}},$$
$$2^x = 2^{-3}, \qquad 2^x = 2^{\frac{2a-5}{4}},$$
$$x_1 = -3, \qquad x_2 = \frac{2a-5}{4}.$$

Задане рівняння буде мати єдиний корінь, якщо або $x_1 = x_2$, або $x_2 \notin$ ОДЗ, тобто

$$\left[\begin{array}{l}\frac{2a-5}{4} = -3,\\ \frac{2a-5}{4} = 3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2a-5 = -12,\\ 2a-5 = 12\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2a = -7, \mid :2\\ 2a = 17 \mid :2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a = -3{,}8;\\ a = 8{,}5.\end{array}\right.$$

З двох отриманих значень a обираємо найбільше – $a = 8{,}5$.

Відповідь. $a = 8{,}5$.

№5. Визначити суму всіх цілих значень a, що належать відрізку $[-4;8]$, за

кожного з яких рівняння $\dfrac{2^{|3x-a+8|}-32}{x+2}=0$ має два різні корені.

Розв'язання. ОДЗ: $x\neq -2$.

З урахуванням ОДЗ, задане рівняння еквівалентне тому, що чисельник дорівнює нулю:

$$2^{|3x-a+8|}-32=0,$$
$$2^{|3x-a+8|}=32,$$
$$2^{|3x-a+8|}=2^5,$$
$$|3x-a+8|=5.$$

Отримане рівняння розпадається на два:

$$3x-a+8=5, \quad \text{або} \quad 3x-a+8=-5,$$
$$3x=a-3,|:3 \qquad 3x=a-13,|:3$$
$$x_1=\frac{a}{3}-1. \qquad x_2=\frac{a}{3}-\frac{13}{3}.$$

Рівняння має різні корені, якщо $x_1\neq x_2$, та якщо обидва кореня належать ОДЗ:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{3}-1\neq\dfrac{a}{3}-\dfrac{13}{3},\\ \dfrac{a}{3}-1\neq -2,\\ \dfrac{a}{3}-\dfrac{13}{3}\neq -2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1\neq-\dfrac{13}{3},\\ \dfrac{a}{3}\neq -1,\\ \dfrac{a}{3}\neq\dfrac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq -3,\\ a\neq 7.\end{cases}$$

Параметр a повинен належати відрізку $[-4;8]$, тоді остаточно будемо мати $[-4;-3)\cup(-3;7)\cup(7;8]$. Сума всіх цілих значень a з отриманого проміжку дорівнює

$$-4+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+8=22.$$

Відповідь. 22.

№6. Визначити найменше значення a, за якого рівняння $\dfrac{7^{3x-2x^2}-\dfrac{1}{49}}{\sqrt{2x+5a}-4}=0$ має два різні корені.

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases}2x+5a\geq 0,\\ \sqrt{2x+5a}-4\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq-\dfrac{5a}{2},\\ \sqrt{2x+5a}\neq 4\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\geq-\dfrac{5a}{2},\\ 2x+5a\neq 16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq-\dfrac{5a}{2},\\ x\neq 8-\dfrac{5a}{2}.\end{cases}$$

Для розв'язування заданого рівняння застосуємо той факт, що дріб дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли чисельник дорівнює нуль, а знаменник ні (враховано в ОДЗ):

$$7^{3x-2x^2}-\frac{1}{49}=0,$$
$$7^{3x-2x^2}=7^{-2},$$
$$3x-2x^2=-2,$$

$$-2x^2+3x+2=0,\Big|:(-1)$$

$$2x^2-\overset{+3}{3}x-\overset{\times(-4)}{2}=0,$$

$$x_1=\frac{4}{2}=2 \text{ або } x_2=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Згідно з умовою рівняння повинно мати два різних корені. Це можливо, коли корені різні та належать ОДЗ:

$$\begin{cases} 2\ge -\dfrac{5a}{2}, \\ -\dfrac{1}{2}\ge -\dfrac{5a}{2}, \\ 2\ne 8-\dfrac{5a}{2}, \\ -\dfrac{1}{2}\ne 8-\dfrac{5a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a\ge -4, \\ 5a\ge 1, \\ 5a\ne 12, \\ 5a\ne 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ge -0{,}8; \\ a\ge 0{,}2; \\ a\ne 2{,}4; \\ a\ne 3{,}4 \end{cases} \Rightarrow a\in[0{,}2;\,2{,}4)\cup(2{,}4;\,3{,}4)\cup(3{,}4;\,+\infty).$$

Отже, найменше значення a, за якого рівняння має два різні корені, – $a=0{,}2$.

Відповідь. $a=0{,}2$.

№7. Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $9^x-(a+6)\cdot 3^x+12a-2a^2=0$ має два різні корені.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Перепишемо задане рівняння в вигляді:

$$\left(3^x\right)^2-\overset{+(a+6)}{(a+6)}\cdot 3^x+\overset{\times 2a(6-a)}{2a(6-a)}=0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно 3^x, корені якого знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$3^x=2a, \quad \text{або} \quad 3^x=6-a.$$

Дані значення є коренями, коли вони є додатними (це пов'язано з тим, що показникова функція приймає лише додатні значення), тобто повинні виконуватися умови:

$$\begin{cases} 2a>0, \\ 6-a>0. \end{cases}$$

За умовою рівняння має два різні корені, тобто $2a\ne 6-a$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} 2a>0, \\ 6-a>0 \\ 2a\ne 6-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0, \\ a<0 \\ a\ne 2 \end{cases} \Rightarrow a\in(0;\,2)\cup(2;\,6).$$

Сума всіх цілих значень a з отриманого проміжку

$$1+3+4+5=13.$$

Відповідь. 13.

№8. Знайти найменше значення a, за якого система рівнянь $\begin{cases} \sin x-4=3a-2^{1+y^2}, \\ 2^{2+y^2}-3=a+3\sin x \end{cases}$ має розв'язки.

Розв'язання. ОДЗ: $x,\,y\in R$.

Перепишемо задану систему у вигляді:

$$\begin{cases}\sin x+2\cdot 2^{y^2}=3a+4,\\ 3\sin x-4\cdot 2^{y^2}=-a-3.\end{cases}$$

Розв'язок отриманої системи знайдемо методом додавання/віднімання. Помножимо перше рівняння на 3 та віднімемо від першого рівняння друге:

$$-\begin{cases}3\sin x+6\cdot 2^{y^2}=9a+12,\\ 3\sin x-4\cdot 2^{y^2}=-a-3\end{cases}$$

$$10\cdot 2^{y^2}=10a+15,$$

$$2^{y^2}=a+1{,}5.$$

Оскільки $y^2\ge 0$, то $2^{y^2}\ge 2^0=1$, тобто щоб останнє рівняння мало розв'язок треба, щоб

$$a+1{,}5\ge 1\Rightarrow a\ge -0{,}5.$$

Домножимо тепер перше рівняння на 2 та рівняння отриманої системи додамо:

$$+\begin{cases}2\sin x+4\cdot 2^{y^2}=6a+8,\\ 3\sin x-4\cdot 2^{y^2}=-a-3\end{cases}$$

$$5\sin x=5a+5,$$

$$\sin x=a+1.$$

Останнє рівняння має сенс, коли

$$-1\le a+1\le 1 \text{ або } -2\le a\le 0.$$

Отже, система рівнянь має розв'язки, якщо

$$\begin{cases}a\ge -0{,}5;\\ -2\le a\le 0\end{cases}\Rightarrow a\in[-0{,}5;\,0].$$

Найменше значення a з цього відрізку – це $a=-0{,}5$.

Відповідь. $a=-0{,}5$.

№9. Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння $\dfrac{2^{4x+2a-15}-2\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}=0$ має додатний корінь.

Розв'язання. ОДЗ: $2-x>0\Rightarrow x<2$.

Дріб рівний нулю, коли чисельник рівний нулю, а знаменник ні, тобто

$$2^{4x+2a-15}-2\sqrt{2}=0,$$

$$2^{4x+2a-15}=2^{\frac{3}{2}},$$

$$4x+2a-15=\frac{3}{2},$$

$$4x=16{,}5-2a,$$

$$x=\frac{16{,}5-2a}{4}.$$

Згідно з умовою, корінь повинен бути додатним, тоді

$$\frac{16{,}5-2a}{4}>0,$$

а також корінь має існувати, він має належати ОДЗ, тобто

$$\frac{16{,}5-2a}{4}<2.$$

Отже, для знаходження параметра a маємо систему

$$\begin{cases}\dfrac{16{,}5-2a}{4}>0,\\ \dfrac{16{,}5-2a}{4}<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16{,}5-2a>0,\\ 16{,}5-2a<8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a<16{,}5;\\ 2a>8{,}5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<8{,}25;\\ a>4{,}25\end{cases}\Rightarrow a\in(4{,}25;8{,}25).$$

Таким чином, сума всіх цілих значень a, за кожного з яких рівняння має додатний корінь, дорівнює

$$5+6+7+8=26.$$

Відповідь. 26.

№10. Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких система рівнянь $\begin{cases}3^x+y^2=a+8,\\ 3^{x+1}+2y^2=5a+6\end{cases}$ має принаймні один розв'язок.

Розв'язання. $x, y\in R$.

До розв'язування системи застосовуємо метод додавання/віднімання. Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases}3^x+y^2=a+8,\\ 3\cdot3^x+2y^2=5a+6.\end{cases}\qquad(1.2)$$

Помножимо перше рівняння на 3 та від першого рівняння системи віднімемо друге:

$$-\underline{\begin{cases}3\cdot3^x+3y^2=3a+24,\\ 3\cdot3^x+2y^2=5a+6\end{cases}}$$

$$y^2=-2a+18.$$

Отримане рівняння має розв'язок, коли права частина є невід'ємною, тобто

$$-2a+18\ge0\Rightarrow a\le9.$$

Перше рівняння системи (1.2) помножимо на 2 та від другого рівняння отриманої системи віднімемо перше:

$$-\underline{\begin{cases}2\cdot3^x+2y^2=2a+16,\\ 3\cdot3^x+2y^2=5a+6\end{cases}}$$

$$3^x=3a-10.$$

Отримане рівняння має розв'язки, коли права частина додатна, тобто

$$3a-10>0,$$

$$a>\frac{10}{3}\Rightarrow a>3\frac{1}{3}.$$

Отже, задана система рівнянь має принаймні один розв'язок, якщо $a\le9$ та $a>3\frac{1}{3}$, тоді маємо

$$a\in\left(3\frac{1}{3};9\right].$$

Сума всіх цілих значень a з цього проміжку

$$4+5+6+7+8+9=39.$$

Відповідь. 39.

№11. Знайти найменше ціле значення a, за якого рівняння $\left(4^{x+1}+15\cdot 2^x-4\right)\left(3+\lg^2(3a-17x)\right)=0$ має корінь.

Розв'язання. ОДЗ: $3a-17x>0\Rightarrow x<\dfrac{3a}{17}$.

Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із співмножників дорівнює нулю, тобто задане рівняння розпадається на два рівняння:

$$4^{x+1}+15\cdot 2^x-4=0, \qquad \text{або} \qquad \underbrace{3+\lg^2(3a-17x)=0}_{\substack{\geq 3 \qquad \geq 0 \\ \geq 3>0\ \forall x}},$$

$$4\cdot\left(2^x\right)^2+\overset{+(-15)}{15}\cdot 2^x-\overset{\times 14}{4}=0 \qquad x\in\varnothing.$$

$$2^x=\frac{-16}{4}, \quad \text{або} \quad 2^x=\frac{1}{4},$$

$$x\in\varnothing, \qquad x=-2,$$

Задане рівняння буде мати корінь, якщо отримане значення $x=-2$ буде належати ОДЗ, тобто буде мати місце співвідношення:

$$-2<\frac{3a}{17},$$

$$3a>-34,$$

$$a>-\frac{34}{3}\Rightarrow a>-11\frac{1}{3}\Rightarrow a\in\left(-11\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Найменше ціле значення a, що належить отриманому проміжку, – це $a=-11$.

Відповідь. $a=-11$.

№12. Визначити значення a, за якого система рівнянь $\begin{cases}0{,}2^x+y^2=3a+12,\\ 0{,}2^{x-1}+3y^2=7a+42\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. $x, y\in R$.

Застосуємо властивості степенів та перепишемо задану систему у вигляді:

$$\begin{cases}0{,}2^x+y^2=3a+12,\\ 5\cdot 0{,}2^x+3y^2=7a+42.\end{cases}$$

Для розв'язування отриманої системи застосуємо метод додавання/віднімання. Помножимо перше рівняння на 5 та від першого рівняння нової системи віднімемо друге:

$$-\underline{\begin{cases}5\cdot 0{,}2^x+5y^2=15a+60,\\ 5\cdot 0{,}2^x+3y^2=7a+42\end{cases}}$$

$$2y^2=8a+18,$$

$$y^2=4a+9.$$

Отримане рівняння має єдиний розв'язок тоді й лише тоді, коли $y=0$ або $4a+9=0$ або $a=-\dfrac{9}{4}=-2{,}25$.

Далі помножимо перше рівняння на 3 та від другого рівняння отриманої системи віднімемо перше:

$$-\begin{cases}3\cdot 0{,}2^x+3y^2=9a+36,\\ 5\cdot 0{,}2^x+3y^2=7a+42\end{cases}$$

$$2\cdot 0{,}2^x=-2a+6,$$

$$0{,}2^x=-a+3.$$

Отримане рівняння має розв'язок, коли $-a+3>0\Rightarrow a<3$.

Отже,

$$\begin{cases}a=-2{,}25;\\ a<3\end{cases}\Rightarrow a=-2{,}25.$$

Відповідь. $a=-2{,}25$.

№13. Знайти суму всіх цілих значень параметра a, за кожного з яких рівняння $4^x-15\cdot 2^x-4a^2+30a=0$ має додатні корені.

Розв'язання. ОДЗ: $x\in R$.

Задане рівняння є квадратним відносно 2^x. Перепишемо його наступним чином:

$$\left(2^x\right)^2\overset{+15}{-}15\cdot 2^x\overset{\times 2a(15-2a)}{-}2a(2a-15)=0,$$

корені знайдемо за допомогою теореми Вієта:

$$2^x=2a,\quad \text{або}\quad 2^x=15-2a.$$

Отримані показникові рівняння мають розв'язки, якщо

$$\begin{cases}2a>0,\\ 15-2a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0,\\ a<7{,}5\end{cases}\Rightarrow a\in(0;7{,}5).$$

Відповідно для цих a

$$\begin{cases}x_1=\log_2(2a),\\ x_2=\log_2(15-2a).\end{cases}$$

Згідно з умовою, корні рівняння повинні бути додатними, тобто

$$\begin{cases}2a\neq 15-2a,\\ \log_2(2a)>0,\\ \log_2(15-2a)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a\neq 15,\\ 2a>1,\\ 15-2a>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\neq 3{,}75;\\ a>0{,}5;\\ a<7\end{cases}\Rightarrow a\in(0{,}5;3{,}75)\cup(3{,}75;7).$$

Перетинаючи з вище отриманим проміжком $a\in(0;7{,}5)$ для параметра, остаточно маємо, що $a\in(0{,}5;3{,}75)\cup(3{,}75;7)$. Тоді сума всіх цілих значень параметра a

$$1+2+3+4+5+6=21.$$

Відповідь. 21.

№14. Визначити суму всіх цілих значень a, за кожного з яких для розв'язку $(x_0;y_0)$ системи $\begin{cases}2\sqrt{x}+3^{y+1}=5a+15,\\ \sqrt{x}+3^y=a+9\end{cases}$ справджується нерівність $\begin{cases}x_0>0,\\ y_0>0.\end{cases}$

Розв'язання. ОДЗ: $x\geq 0$.

Застосуємо властивості степенів та перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases}2\sqrt{x}+3\cdot 3^y=5a+15,\\ \sqrt{x}+3^y=a+9.\end{cases}\tag{1.3}$$

Розв'яжемо систему методом додавання/віднімання. Для цього друге рівняння системи помножимо на 2, та від першого рівняння нової системи віднімемо її друге рівняння:

$$-\begin{cases}2\sqrt{x}+3\cdot 3^y=5a+15,\\ 2\sqrt{x}+2\cdot 3^y=2a+18\end{cases}$$

$$3^y=3a-3,$$

$$3^y=3(a-1).$$

Отримане показникове рівняння має розв'язок, якщо $3(a-1)>0$ або $a>1$. Його розв'язок

$$y=\log_3(3(a-1)),$$

$$y=\log_3 3+\log_3(a-1),$$

$$y=1+\log_3(a-1).$$

Згідно з умовою $y>0$, тоді

$$1+\log_3(a-1)>0\Rightarrow \log_3(a-1)>-1,$$

$$a-1>\frac{1}{3} \text{ або } a>1\frac{1}{3}.$$

Друге рівняння системи (1.3) множимо на 3 та від другого рівняння нової системи віднімемо її перше:

$$-\begin{cases}2\sqrt{x}+3\cdot 3^y=5a+15,\\ 3\sqrt{x}+3\cdot 3^y=3a+27\end{cases}$$

$$\sqrt{x}=12-2a,$$

$$\begin{cases}12-2a\ge 0,\\ x=(12-2a)^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le 6,\\ a\ne 6\end{cases}\Rightarrow a<6.$$

Отже,

$$\begin{cases}a>1,\\ a>1\frac{1}{3},\\ a<6\end{cases}\Rightarrow a\in\left(1\frac{1}{3};6\right).$$

Сума всіх цілих значень a з цього проміжку дорівнює

$$2+3+4+5=14.$$

Відповідь. 14.