Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

О.В. Маслова

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОЛОГІЇ

**Навчальний посібник
для студентів освітнього рівня «бакалавр»
напряму підготовки
«Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»**

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від

Запоріжжя
2015

УДК: 504.75:51(075.8)
ББК: Е081+В183.4 я73
М 316

Маслова О.В. Математичні методи в екології: навчальний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» напряму підготовки «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»/ О.В.Маслова. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015 – 74 с.

У навчальному посібнику подано в систематизованому вигляді програмний матеріал із дисципліни «Математичні методи в екології». Викладено основи математичних та статистичних методів розрахунку практичних екологічних задач.

У посібнику наведено короткі відомості про теорію імовірності, повторну та безповторну вибірку, зроблено акценти на статистичну імовірність, дисперсію дискретної випадкової величини, розглянуто приклади визначеного та невизначного інтеграла, диференціальні рівняння та матричний метод для розв'язування екологічних задач.

Для студентів освітнього рівня «бакалавр» напряму підготовки «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування».

Рецензент *О.О. Головань*, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Відповідальний за випуск *О.Ф. Рильський*, завідувач кафедри загальної та прикладної екології і зоології

Зміст

Вступ

Математичні методи в екології – це спеціальний курс, який викладається на другому курсі навчання для студентів спеціальності «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування». Предметом вивчення навчальної дисципліни є математичні способи і методи розрахунку чисельності популяції, динаміки зміни і аналізу функцій розподілу показників, характерних для загальних питань екології.

Курс «Математичні методи в екології» входить до циклу фахових дисциплін, що викладаються студентам-екологам, і тісно пов’язана з такими дисциплінами, як «Моделювання та прогнозування стану довкілля», «Моніторинг довкілля», «Нормування антропогенного навантаження середовища», «Екологічна експертиза та екологічні ризики». Він надає майбутнім екологам серйозну математичну базу для проведення екологічної експертизи, та дозволяє застосовувати теоретичні досягнення на практиці.

У посібнику особливу увагу приділено методам математичної статистики, диференціальним рівнянням та матричним методам розв’язування екологічних задач.

Мета видання посібника – прагнення пояснити основні поняття і терміни математичних методів. У цьому випадку передбачається, що видання посібника сприятиме поглибленню знань з використання різних методів математичної обробки для розв’язку різноманітних задач, пов’язаних із навколишнім середовищем, а також дозволить студентам ефективно опанувати існуючу термінологію та розширити науковий кругозір у природничих науках.

Посібник складається з п’ятьох розділів (теорії імовірності, математичної статистики, визначеного та невизначеного інтеграла, диференціального рівняння та матричного методу), які містять основні визначення та поняття теоретичних основ загальних математичних методів та двох розділів практичних завдань екологічної спрямованості. Кожна тема має визначення, властивості та особливості різних математичних способів розв’язання задач, а також конкретні приклади та прийоми їх розв’язку.

Посібник допомагає студентам спеціальності «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування» практично застосовувати знання з вищої математики для розв’язку задач та отримувати безперервне та системне навчання, яке сприяє професійному зростанню в природничій галузі.

Тема 1.Теорія імовірності

1.1. Загальні визначення імовірності

Події називають несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій при тому самому випробуванні.

Імовірність є одним з основних понять теорії імовірності. Існує декілька визначень цього поняття. Ми подаємо визначення, яке називають класичним. Далі зазначимо слабкі сторони цього визначення і наведемо інше (статистичне) визначення імовірності, що дозволить усунути недоліки класичного визначення.

Імовірністю події А називають відношення числа сприятливих подій до загального числа всіх єдино можливих і рівноможливих елементарних результатів випробування.

Таким чином, імовірність події А визначається формулою

$$P(A)=m/n,$$

де m – число елементарних виходів, що сприяють події А; n - число всіх можливих елементарних виходів випробування. Тут передбачається, що елементарні виходи єдино можливі і рівноможливі.

Із визначення імовірності випливають такі її властивості:

1. Імовірність достовірної події дорівнює одиниці.

Дійсно, якщо подія вірогідна, то кожний елементарний результат випробування сприяє події. У цьому випадку і, отже,

$$P(A)=m/n=n/n=1.$$

2. *Імовірність неможливої події дорівнює нулю*.

Дійсно, якщо подія неможлива, то жоден з елементарних результатів випробування не сприяє події. У цьому випадку $m=0$ і, отже,

$$P(A)=m/n=0/n=0.$$

3. Імовірність випадкової події є позитивним числом, укладеним між нулем і одиницею.

Дійсно, випадковій події сприяє лише частина із загального числа елементарних результатів випробування. У цьому випадку $0<m<n$, а, виходить, $0<m/n<1$ і, отже,

$$0<P(A)<1.$$

Отже, імовірність будь-якої події задовольняє нерівності

$$0\le P(A)\le 1.$$

«Класичне» визначення імовірності припускає, що число елементарних наслідків випробування – звичайне. На практиці ж дуже часто трапляються випробування, число можливих наслідків котрих нескінченне. У таких випадках класичне визначення не застосовується. Уже ця обставина вказує на обмеженість класичного визначення. Щоправда, зазначений недолік може бути усунутий шляхом відповідного узагальнення визначення імовірності. Найбільш слабка сторона класичного визначення полягає в тому, що дуже часто неможливо представити результат випробування у вигляді сукупності елементарних подій. Ще складніше зазначити підстави, що дозволяють вважати наслідки елементарні події рівно можливою. Звичайно висновок про рівноможливость елементарних випробувань складають із понять симетрії, наприклад, при киданні гральної кістки, коли припускають, що кістка має форму правильного багатогранника (куба). Однак задачі, у яких можна виходити з понять симетрії, на практиці зустрічаються дуже зрідка.

Із цієї причини поряд із класичним визначенням користуються також статистичним визначенням імовірності, приймаючи за імовірність події відносну частоту або число, близьке до неї. Наприклад, якщо в результаті досить великої кількості випробувань трапилося так, що відносна частота дуже близька до числа 0,4 , то це число можна прийняти за статистичну імовірність події.

1.2. Теорема додавання та множення імовірностей несумісних подій

Сумою A+B двох подій A і B називають подію, що перебуває в появі події A або події B, або обох цих подій.

Наприклад, якщо з гармати зроблені два постріли і A – улучення при першому пострілі, B – улучення при другому пострілі, то A +B – улучення при першому пострілі, або при другому, або в обох пострілах.

Зокрема, якщо дві події A і B - несумісні, то A+B - подія, що перебуває в появі однієї з цих подій, байдуже якої.

Сумою декількох подій називають подію, що перебуває в появі хоча б однієї з цих подій.

Наприклад, подія A+B+C перебуває в появі однієї з таких подій: A, B, C, A и B,A і C, B і C,A і B і C.

Нехай події A и B несумісні, причому імовірності цих подій дані. Як визначити те, що настане, - або подія A або подія B? Відповідь на це питання дає теорема додавання.

Теорема. *Імовірність появи однієї з двох несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі імовірностей цих подій:*

$P(A+B)=P(A)+P(B).$

Доведення. Уведемо позначення:

n – загальне число можливих елементарних наслідків випробування;

m_1 – число наслідків, що сприяють події A;

m_2 – число наслідків, що сприяють події B.

Число елементарних виходів, що сприяють або події A, або події B, дорівнює m_1+m_2 .

Отже,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$$

Взявши до уваги, що $\frac{m_1}{n}=P(A)$ і $\frac{m_2}{n}=P(B)$,

Остаточно одержимо

P(A+B)=P(A)+P(B).

Наслідок. *Імовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі імовірностей цих подій:*

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(An)\ldots$

Доведення. Розглянемо три події A,B і C. Через те що розглянуті події попарно несумісні, поява однієї з трьох подій A, B і C, рівнозначна появі одного з двох подій A+B і C, тому через зазначену теорему,

P(A+B+C)=P[(A+B)+C]=P(A+B)+P(C)=P(A)+P(B)+P(C) результат

Для довільного числа попарно несумісних подій доведення проводиться методом математичної індукції.

Повною групою подій називають сукупність єдино можливих подій випробування.

Дві події називають *незалежними*, якщо імовірність однієї з них не залежить від появи або відсутності іншої.

Теорема множення імовірностей незалежних подій.

Добутком двох подій A і B називають подію AB, що перебуває в спільній появі (об'єднанні) цих подій.

Наприклад, якщо в шухляді містяться деталі, виготовлені заводами №1 і №2 і A – поява стандартної деталі, B – деталь, виготовлена заводом №1, то AB – поява стандартної деталі заводу №1.

Добутком декількох подій називають подію, що перебуває в спільній появі цих подій. Наприклад, подія ABC перебуває в сполученні подій A, B і C.

Нехай події A и B незалежні, причому імовірності цих подій відомі. Як знайти імовірність сполучення подій A і B? Відповідь на це питання дає теорема множення.

Теорема. *Імовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:*

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

Доведення. Уведемо позначення:

n – число можливих елементарних результатів випробування, у яких подія А настає або не настає;

n_1 – число результатів, що сприяють події А($n_1 \leq n$)

m – число можливих елементарних результатів випробування, у яких подія В настає або не настає;

m_1 – число виходів, що сприяють події В($m_1 \leq m$).

Загальне число можливих елементарних результатів випробування (коли настає й А і В або $A \leq \overline{B}$, або $\overline{A} \geq B$, або $\overline{A} \neq \overline{B}$) дорівнює nm. Дійсно, кожний із n результатів, у яких подія А настає або не настає, може сполучитися з кожним із m виходів, у яких подія В з'являється або не з'являється.

Із цього числа n_1m_1 результатів сприяють сполученню подій А і В. Дійсно, кожний із n_1 результатів, що сприяють події А, може сполучитися з кожним із m_1 результатів, що сприяють події В.

Імовірність спільного настання подій А і В

$$P(AB)=\frac{n_1m_1}{nm}=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{n}$$

Взявши до уваги, що

P(AB)=P(A)P(B).

Для того щоб узагальнити теорему множення на декілька подій, уведемо поняття незалежності подій у сукупності.

Декілька подій називають *незалежними в сукупності*, якщо кожна з них у будь-якій комбінації з іншими подіями (містить або всі інші події, або частину з них), є подіями незалежними. Наприклад, якщо подія A_1, A_2 і A_3 незалежні в сукупності, то незалежними є події: A_1 і A_2, A_1 і A_3, A_2 і A_3, A_1 A_2 і A_3, A_1 A_3 і A_2, A_2 A_3 і A_1.

Підкреслимо, що якщо декілька подій незалежні попарно, то звідси ще не випливає незалежність їх у сукупності. У цьому сенсі вимога незалежності подій у сукупності сильніша за вимогу їхньої попарної незалежності.

Пояснимо сказане прикладом. Нехай в урні є 4 кулі, пофарбовані: 1 – у червоний колір (А), 1 у синій колір (В), 1 – у чорний колір (С), і 1 – в усі ці три кольори (АВС).

Чому дорівнює імовірність Р(А) того, що витягнута з урни куля має червоний колір? Тому, що з чотирьох куль дві мають червоний колір, то Р(А) = $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Міркуючи аналогічно, знайдемо: Р(В) = $\frac{1}{2}$, Р(С) = $\frac{1}{2}$.

Нехай тепер, узята куля має синій колір, тобто подія В уже відбулася. Чи існує імовірність того, що витягнута куля має червоний колір, тобто чи зміниться імовірність події А? Із двох куль, що мають синій колір, одна куля має і червоний колір, тому імовірність події А, як і раніше, дорівнює $\frac{1}{2}$. Таким чином, події А і В незалежні.

Міркуючи аналогічно, доходимо висновку, що події А і С, В і С незалежні. Отже, події А, В і С попарно незалежні.

Чи будуть ці події незалежні в сукупності? Виявляється, не будуть. Дійсно, нехай витягнута куля має два кольори, наприклад, синій і чорний. Чому дорівнює імовірність того, що куля має і червоний колір? Тому що лише одна куля пофарбована в усі три кольори, то узята куля має і червоний колір. Таким чином, припустивши, що події В і С відбулися, ми доходили висновку, що подія А обов'язково настане. Отже, ця подія вірогідна, й імовірність її дорівнює одиниці (а не $\frac{1}{2}$).

Отже, попарно незалежні події А, В і С не є незалежними в сукупності.

Наведемо тепер наслідок із теореми множення.

Наслідок. *Імовірність спільної появи декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку імовірності цих подій:*

$P(A_1 A_2 \ldots A_n)=P(A_1)P(A_n)$.

Доведення. Розглянемо три події А, В і С. Сполучення подій А, В і С рівносильне сполученню подій АВ і С, тому

$P(ABC)=P(AB(C))$.

Тому що події А, В і С незалежні в сукупності, то незалежні, зокрема події АВ і С, а також А і В. За теоремою множення для двох незалежних подій будемо мати:

$P(AB(C)) = P(AB)\ P(C)$

і

$P(AB) = P(A)(\ P(B))\ (\ P(C))$.

Отже, остаточно одержимо

$P(ABC) = P(A)\ P(B)\ P(C)$.

Для довільного *n* доведення проводиться методом математичної індукції.

Зауваження. Якщо події A_1, $A_2,\ldots,A_n$ у сукупності незалежні, то і протилежні їм події також незалежні в сукупності.

Нехай подія А може наступити за умови появи однієї з несумісних подій B_1, $B_2,\ldots,B_n$, що утворять повну групу. Нехай відомі імовірності цих подій і умовні імовірності $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A),\ldots,P_{Bn}(A)$ події А. Як визначити імовірність події А? Відповідь на це питання дає теорема.

Теорема. *Імовірність події а, що може наступити лише за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2,\ldots,B_n$, що утворять повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну імовірність події А.*

$P(A) = P(B_1)\ P_{B1}(A)+P(B_2)\ \ P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)\ \ P_{Bn}(A)$.

Цю формулу називають "формулою повної імовірності".

Доведення. За умовою подія А може настати, якщо настане одна з несумісних подій B_1, $B_2,\ldots,B_n$. Іншими словами, поява події А означає здійснення однієї, байдуже якої, із несумісних подій B_1A, $B_2A,\ldots,B_nA$. Користуючись для обчислення імовірності події А теоремою додавання, одержимо

$P(A) = P(B_1A)+P(B_2A)+\ldots+P(B_nA)$.(*)

Залишається обчислити кожен з доданків. За теоремою множення імовірностей залежних подій маємо

$P(B_1A) = P(B_1)\ P_{B1}(A)$; $P(B_2A) = P(B_2)\ P_{B1}(A)$; … ; $P(B_nA) = P(B_n)\ P_{Bn}(A)$.

Підставивши праві частини цих рівностей у співвідношення (*) , одержимо формулу повної імовірності

$P(A) = P(B_1)\ P_{B1}(A)+P(B_2)\ P_{B2}(A)+\ldots+P(B_n)\ P_{Bn}(A)$.

1.3. Математичне сподівання та дисперсія

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на їх імовірності.

Нехай випадкова величина X може набувати тільки значення $x_1, x_2,\ldots,x_n$, імовірності котрих відповідно дорівнюють $p_1, p_2,\ldots,p_n$. Тоді математичне очікування M(X) випадкова величина X визначається рівністю

$M(X) = x_1p_1+ x_2p_2+\ldots+x_np_n$.

Зауваження. *З визначення випливає, що математичне сподівання дискретної випадкової величини є невипадковою (постійною) величиною. Рекомендуємо запам'ятати це твердження, тому що далі воно використовується багаторазово.*

Дисперсія дискретної випадкової величини на практиці часто потрібно оцінити розсіювання можливих значень випадкової величини навколо її середнього значення. Наприклад, в артилерії важливо знати, наскільки купчасто ляжуть снаряди поблизу мети, яка повинна бути уражена. На перший погляд, може здатися, що для оцінки розсіювання найпростіше обчислити всі можливі значення відхилення випадкової величини й потім знайти їхнє середнє значення. Однак такий шлях нічого не дасть, тому що середнє значення відхилення, тобто M[M-M(X)], для будь-якої випадкової величини дорівнює нулю. Ця властивість уже була доведена й розуміється так, що одні можливі відхилення позитивні, а решта негативні; у результаті їхнього взаємного погашення середнє значення відхилення дорівнює нулю. Ці міркування говорять про доцільність заміни відхилення їхніми абсолютними значеннями або їхніми квадратами. Так треба робити насправді. Правда, у випадку, коли можливі відхилення заміняють їхніми абсолютними значеннями, доводиться оперувати абсолютними величинами, що призводить іноді до серйозних ускладнень. Тому найчастіше обираюсь інший шлях, тобто обчислюють середнє значення квадрата відхилення, яке й називають дисперсією.

Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання :

$\boldsymbol{D(X)=M[X-M(X)]^2}$.

Нехай випадкова величина задана законом розподілу

$X \quad = f\,(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$

Тоді квадрат відхилення має такий закон розподілу:

$[X\text{-}M(X)]^2 \quad [x_1\text{-}M(X)]^2 \qquad [x_2\text{-}M(X)]^2 \qquad \ldots \qquad [x_n\text{-}M(X)]^2$

За визначенням дисперсія дорівнює

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=[x_1-M(X)]^2\cdot p_1+[x_2-M(X)]^2\cdot p_2+\ldots+[x_n-M(X)]^2\cdot p_n$$

Таким чином, для того, щоб знайти дисперсію, досить обчислити суму добутків можливих значень квадрата відхилення на їхній імовірності.

Зауваження. Із визначення випливає, що дисперсія дискретної випадкової величини є невипадковою (постійною) величиною. Дисперсія безперервної випадкової величини теж є постійною величиною.

Обчислення дисперсії, засноване на визначенні відносно громіздкому, тому часто більш зручно обчислювати дисперсію, користуючись такою теоремою.

Теорема. *Дисперсія рівна різниці між математичним очікуванням квадрата випадкової величини X і квадрата її математичного очікування :*

$$D(X)=M(X2)-[M(X)]^2.$$

Доведення. Математичне сподівання *M(X)* є постійною величиною, отже, 2M(X) і $M^2(X)$ є також постійними величинами. Взявши це до уваги і користуючись властивостями математичного сподівання (постійний множник можна винести за знак математичного очікування), математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань доданків), спростивши формулу, що виражає визначення дисперсії

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=M[X_2-2XM(X)+M_2(X)]=M(X_2)-2M(X)\cdot M(X)+M_2(X)=$$
$$=M(X2)-2M_2(X)+M_2(X)=M(X_2)-M_2(X).$$

Отже,

$$D(X)=M(X_2)-[M(X)]^2.$$

Квадратна дужка введена в запис формули для зручності її запам'ятовування.

Точковою називають оцінку, яка визначається одним числом. Усі оцінки, розглянуті вище, – точкові. При вибірці малого обсягу точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, тобто призводити до грубих помилок. Із цієї причини при невеликому обсязі вибірки слід користуватися інтервальними оцінками. Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами - кінцями інтервалу. Інтервальні оцінки дозволяють установити точність і надійність оцінок (зміст цих понять з'ясовується нижче). Нехай, знайдена за даними вибірки, статистична характеристика Θ^* служить оцінкою невідомого параметра Θ. Будемо вважати Θ постійним числом (Θ може бути і випадковим розміром). Зрозуміло, що Θ^* тим точніше визначає параметр Θ, чим менший абсолютний розмір різниці $|\Theta - \Theta^*|$. Іншими словами, якщо $\delta>0$ і $|\Theta - \Theta^*|< \delta$, то чим менше δ, тим оцінка точніша. Таким чином, позитивне число δ характеризує *точність оцінки.*

Однак статистичні методи не дозволяють категорично стверджувати, що оцінка Θ^* задовольняє нерівності $|\Theta - \Theta^*|< \delta$; можна лише говорити про імовірність γ, із яким нерівність здійснюється.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки Θ по Θ * називають імовірність γ, з якої здійснюється нерівність $|\Theta - \Theta^*|< \delta$. Звичайно надійність оцінки задається наперед, причому як γ беруть число, близьке до одиниці. Найбільш часто задають надійність, що дорівнює 0,95; 0,99; 0,999.

Нехай імовірність того, що $|\Theta - \Theta^*|< \delta$ дорівнює γ :

$P[|\Theta - \Theta^*|< \delta]= \gamma$.

Замінивши нерівність $|\Theta - \Theta^*|< \delta$ рівносильною їй подвійною нерівністю –

$-\delta <\Theta - \Theta^*< \delta$, або $\Theta^*- \delta <\Theta < \Theta^*+\delta$,

маємо

$P[\Theta^*- \delta <\Theta < \Theta^*+\delta]= \gamma$.

Це співвідношення варто розуміти так: імовірність того, що інтервал $(\Theta^*-\delta, \Theta^*+\delta)$ укладає в собі (покриває) невідомий параметр Θ із заданою надійністю γ.

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, причому середнє квадратичне відхилення σ цього розподілу відоме. Потрібно оцінити невідоме математичне сподівання a по вибірковій середній $\overline{x}$. Поставимо завдання знайти довірчі інтервали, що покривають параметр a з надійністю γ. Будемо розглядати вибіркову середню $\overline{x}$ як випадкову величину $\overline{X}$ ($\overline{x}$ змінюється від вибірки до вибірки) і вибіркові значення ознаки $x_1, x_2, \ldots x_n$ *,як однаково розподілені незалежні випадкові величини* $X_1, X_2, \ldots X_n$ (ці числа також змінюються від вибірки до вибірки). Інакше кажучи, математичне сподівання кожної із цих величин дорівнює a, й середнє квадратичне відхилення – σ. Приймемо без доведення, що якщо випадкова величина X розподілена нормально, то вибіркова середня $\overline{X}$, знайдена за незалежними спостереженнями, також розподілена нормально. Параметри розподілу $\overline{X}$ такі:

$$M(\overline{X})=a, \quad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Зажадаємо, щоб виконувалося співвідношення

$P(|\overline{X} - a|<\delta)=\gamma$,

де γ – задана надійність.

Користуючись формулою $P(|X - a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, замінимо X через $\overline{X}$ і σ через $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, одержимо

$P(|\overline{X} - a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=2\Phi(t),$

де $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$.

Знайшовши з останньої нерівності $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, можемо записати

$P(|\overline{X} - a|< t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t).$

Взявши до уваги, що імовірність P задана і дорівнює γ, остаточно маємо (щоб одержати робочу формулу вибіркову середню знову позначимо через $\overline{x}$):

$$P\left(\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Зміст отриманого співвідношення такий: із впевненістю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $\left(\overline{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідомий параметр a; точність оцінки $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Зазначимо ще, що число t визначається з рівності $2\Phi(t)=\gamma$, або $\Phi(t)=\frac{1}{2}$; за таблицею Лапласа знаходять аргумент t, якому відповідає значення функції Лапласа, рівне $\frac{1}{2}$.

Зауваження. 1. Оцінку $|\overline{x} - a|< t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ називають класичною. Із формули $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ що визначає точність класичної оцінки, можна зробити такі висновки:

1) при зростанні об'єму вибірки n число δ убуває і, отже, точність оцінки збільшується;

2) збільшення надійності оцінки $\gamma=2\Phi(t)$ приводить до збільшення t ($\Phi(t)$ – зростаюча функція), а отже, і до зростання δ; іншими словами, збільшення надійності класичної оцінки спричиняє зменшення її точності.

Зауваження 2. Якщо потрібно оцінити математичне сподівання із наперед заданою точністю δ і надійністю γ, то мінімальний об'єм вибірки, що забезпечує цю точність, знаходять за формулою

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$$

2. Математична статистика

Вивчення тих або інших явищ методами математичної статистики служить засобом вирішення багатьох питань, висунутих наукою й практикою.

2.1. Основні завдання та методи математичної статистики

Завдання математичної статистики полягає у створенні методів збирання й обробки статистичних даних для одержання наукових і практичних висновків.

Завдання математичної статистики

Математична статистика - це сучасна галузь математичної науки, яка займається статистичним описом результатів експериментів і спостережень, а також *побудовою* математичних моделей, що містять поняття *ймовірності.* Теоретичною базою математичної статистики слугує *теорія ймовірностей.* У структурі математичної статистики традиційно виділяють два основні розділи: *описова статистика* і *статистичні висновки* (рис. 1.1).

Таблиця 1. Основні розділи математичної статистики

Описова статистика використовується для:

- узагальнення показників однієї змінної (статистика випадкової вибірки);
- виявлення взаємозв'язків між двома і більше змінними (кореляційно-регресійний аналіз).

Описова статистика дає можливість отримати нову інформацію, швидше зрозуміти і всебічно оцінити її, тобто виконує наукову функцію опису об'єктів дослідження, чим і виправдовує свою назву.

Статистичні висновки надають можливість:

- оцінити точність, надійність і ефективність вибіркових статистик, виявити похибки, які виникають у процесі статистичних досліджень (статистичне оцінювання);
- узагальнити параметри генеральної сукупності, отримані на підставі вибіркових статистик (перевірка статистичних гіпотез).

Застосування статистичних методів складається з трьох основних блоків:

- перехід від об’єкта реальності до абстрактної математико-статистичної схеми, тобто побудова імовірнісної моделі явища, процесу, властивості;
- проведення розрахункових дій власне математичними способами в рамках імовірнісної моделі за результатами вимірювань, спостережень, експерименту і формулювання статистичних висновків;
- інтерпретація статистичних висновків щодо реальної ситуації й ухвалення відповідного рішення.

Статистичні методи обробки й інтерпретації даних спираються на теорію ймовірностей. Теорія ймовірностей є основою методів математичної статистики. Без використання фундаментальних понять і законів теорії ймовірностей неможливе узагальнення висновків математичної статистики, а, отже, і обґрунтованого їх використання для наукових і практичних цілей.

Таким чином, у математичній статистиці використовуються два паралельні ряди показників: перший ряд, що має відношення до практики (це вибіркові показники), і другий, що базується на теорії (це показники імовірнісної моделі).

2.2. Генеральна й вибіркова сукупності. Повторна і безповторна вибірка.

Вибірковою сукупністю, або просто вибіркою, називають сукупність випадково відібраних обєктів.

Генеральною сукупністю називають сукупність об’єктів з яких робиться вибірка .

Обсягом сукупності (вибіркової або генеральної) називають число об’єктів цієї сукупності.

До складання вибірки можна піддходити двояко: після того, як об’єкт відібраний і над ним зроблене спостереження, він може бути повернутий, або не повернутий у генеральну сукупність. У відповідності з викладеним, вибірки підрозділяють на повторні й безповторні.

Повторною називають вибірку, при якій відібраний об’єкт (перед відбором наступного) повертається в генеральну сукупність.

Безповторною називають вибірку, при якій відібраний об’єкт у генеральну сукупність не повертається.

На практиці звичайно користуються безповторним випадковим відбором. Для того щоб за даними вибірки можна було досить впевнено міркувати про ознаку, генеральної сукупності, що цікавить нас, необхідно, щоб об’єкти вибірки правильно його подавали. Цю вимогу коротко формулюють так: вибірка повинна бути *репрезентативною* (представницькою). З огляду на закон великих чисел можна сверджувати, що вибірка буде репрезентативною, якщо її здійснювати випадково: кожний об’єкт вибірки відібраний випадково із генеральної сукупності, якщо всі об’єкти мають однакову ймовірність потрапити у вибірку

Таблиця 2. Аналіз параметрів статистики

<table>
<tr><th colspan="3">ПРИКЛАД</th></tr>
<tr><td colspan="3">Закон розподілу розглянутої випадкової величини задається таблицею:</td></tr>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>P</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДІВ ДАНИХ</th></tr>
<tr><th>ПОНЯТТЯ</th><th>ПРИКЛАДИ</th></tr>
<tr><th colspan="2">РАНЖИРУВАННЯ РЯДУ ДАНИХ</th></tr>
<tr><td>Під ранжируванням ряду даних розуміють розташування елементів цього ряду в порядку зростання (мається на увазі, що кожне наступне число або більше, або менше від попереднього)</td><td>Якщо ряд даних вибірки має вигляд
5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4,
то після ранжирування він перетворюється на ряд
3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. (1)</td></tr>
<tr><th colspan="2">МЕДІАНА (Ме)</th></tr>
<tr><td>Медіана – це так зване середнє значення впорядкованого ряду значень випадкової величини
- якщо кількість чисел у рядку непарна, то медіана – це число яке записане посередині
- якщо кількість чисел у рядку парна, то медіана – це число середнє арифметичне двох чисел посередині</td><td>Для ряду (1), у якому 9 членів медіани це середнє, тобто 5 число
Me=5
Якщо розглянути ряд
3,3,4,4,4,5,6,6,7,9,
у якому 10 членів, то медіана – це середнє арифметичне п`ятого і шостого членів
Me= (4+5)/2=4,5</td></tr>
<tr><th colspan="2">СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ (X)</th></tr>
<tr><td>Середнім значенням випадкової величини називають середнє арифметичне всіх її значень
Якщо випадкова величина X набуває n значень $x_1, x_2, \ldots X_n$</td><td>Нехай величина розподілу за частотою задана таблицею
<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>Тоді
X=(2*3+4*1+5*2+7*2)/8=4,25</td></tr>
</table>

$X=(x_1+x_2+..+X_n)/n$ Якщо випадкова величина набуває значень x_1, x_2, $\ldots x_n$ за частотами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ відповідно, середнє арифметичне обчислюють $X=(x_1m_1+x_2m_2+..+x_nm_n)/n$	
РОЗМАХ ВИБІРКИ (r)	
Розмах вибірки – це різниця між найбільшим і найменшим значенням випадкової величини у вибірці.	Для ряду (1) розмах вибірки: R = 9 – 3 = 6
МОДА(МО)	
Мода – це те значення випадкової величини, яка трапляється найчастіше.	У ряду (1) значення 4 трапляється найчастіше, отже, Мо = 4.

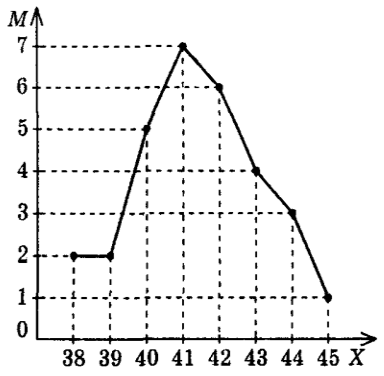
ПОНЯТТЯ ПОЛІГОНА ЧАСТОТ

Розподіл випадкових величин можна задавати й ілюструвати графічно.

Нехай випадкова величина X — розмір взуття 30 хлопців 11 класу — має розподіл за частотами, який наведено в таблиці:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

Позначимо на координатній площині точки з координатами $(x_1;\ m_1)$, $(x_2;\ m_2)$, ..., $(x_8;\ m_8)$ і з'єднаємо їх послідовно відрізками. Одержану ламану лінію називають полігоном частот.



Означення. ***Полігоном частот*** *називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки з координатами* $(x_1;\ m_1)$, $(x_2;\ m_2)$, ..., $(x_8;\ m_8)$, де x_i — значення випадкової величини, а m_i — відповідні їм частоти ($i = 1; 2; \ldots; k$).

3. Визначення інтеграла

3.1. Загальні визначення інтеграла

Нехай на відрізку *[a; b]* задано функцію *f(x)* (необов'язково неперервну). Розіб'ємо (поділимо) відрізок *[a; b]* на *n* довільних частин за допомогою точок:

$a = x_0 < x_1 <\ldots < x_к < x_{к+1} <\ldots < x_{n-1} <x_n=b.$

Сукупність точок $x_0, x_1,\ldots, x_n$ позначатимемо буквою Т і називатимемо *Т-розбиттям* відрізка *[a;b]*. На кожному окремому відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $к = 0, 1,\ldots, n$ виберемо довільно по одній точці $c_к \in [x_k, x_{k+1}]$ (точки $c_к$ називають проміжними точками). Нехай λ — найбільша довжина серед довжин окремих відрізків, тобто

$$\lambda = \max_{0\le k\le n-1} \Delta x_k;\ \ \Delta x_k = x_{k+1} - x_k;$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Зрозуміло, що для різних розбиттів відрізка *[a; b]* на частини число λ буде різним. Отже, λ залежить від Т - розбиття

$\lambda = \lambda\ (T).$

Надалі розглядатимемо тільки такі Т-розбиття, для яких $\lambda\ (T) \to 0$. Побудуємо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k. \qquad (1)$$

Цю суму називають *інтегральною сумою* для функції *f(x),* складеної для Т-розбиття відрізка *[a; b]* на частини при такому виборі точок $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,\ldots,n-1)$.

Означення 1. Число *I* називають *границею інтегральної суми*

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k.$$

при $\lambda\ (T) \to 0$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta>0$, що як тільки $\lambda\ (T)< \delta$, то за будь-якогоТ-розбиття відрізка *[a;b]* на частини і будь-якого вибору точок $c_к$ справджується нерівність

$|\sigma-I|< \varepsilon$

і символічно записують так:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = I. \qquad (2)$$

Границю інтегральної суми (число *I*) називають *визначеним інтегралом функції f(x)* на відрізку *[a;b]* і позначають

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Число *a* називають *нижньою межею інтегрування, b — верхньою межею, f(x) — підінтегральною функцією, f(x)dx — підінтегральним виразом,* відрізок *[a; b] — проміжком інтегрування.* Проте не всяка функція, задана на відрізку *[a;b],* є інтегрованою на ньому. Так, якщо *f(x)* не є обмеженою на відрізку *[a;*

b], то вона не є інтегрованою на цьому відрізку. Інакше кажучи, *обмеженість функції на відрізку є необхідною умовою її інтегрованості*.

Критерій інтегрованості функцій

Теорема

Для того щоб функція *f(x)* була інтегрованою на відрізку *[a; b]*, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\lim_{\lambda\to 0}\left(\overline{S}-\underline{S}\right)=0. \qquad (4)$$

Зазначимо, що в умові (4) границя «на мові ε-δ» розуміється так: для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що як тільки $\lambda < \delta$, то

$$\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon.$$

Властивості визначеного інтеграла

Визначений інтеграл має низку властивостей.

- ***Властивість 1°.*** Якщо існує визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

то існує також визначений інтеграл

$$\int_b^a f(x)dx,$$

і при цьому виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Властивість 1° коротко читають так: якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі, то знак інтеграла змінюється на протилежний.

- ***Властивість 2°.*** Визначений інтеграл з однаковими межами дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

Цю властивість можна також розглядати як додаткове визначення.

- ***Властивість 3°.*** Якщо існує інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

то існує також інтеграл

$$\int_a^b Cf(x)dx,$$

де С — довільне число, і виконується рівність

$$\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx.$$

Або: сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

- ***Властивість 4°***. Якщо існують інтеграли

$$\int_a^b f(x)dx \text{ і } \int_a^b \varphi(x)dx,$$

то існує інтеграл

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx,$$

причому

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Або: визначений інтеграл від суми (різниці) функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій.

Цю властивість можна узагальнити і на той випадок, коли маємо *n* інтегровних на відрізку *[a; b]* функцій. Тоді

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

- ***Властивість 5°.*** Якщо для функції f*(x)* існують інтеграли

$$\int_a^b f(x)dx, \int_a^c f(x)dx, \int_c^b f(x)dx,$$

то виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (5)$$

Цю властивість можна узагальнити і на той випадок, коли основний відрізок *[a;b]* розбито точками $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ на m частин. Тоді, якщо функція *f(x)* інтегровна на відрізку *[a; b]*, то справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_{m-1}}^{c_m} f(x)dx + \int_{c_m}^b f(x)dx.$$

- ***Властивість 6°.*** Якщо функції *f(x)* і φ(x) інтегровні на відрізку *[a; b]* і для кожного *xє [a; b]*

f(x)≤φ(x),

то виконується нерівність

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (6)$$

Із *властивості 6*° випливає, що коли в обох частинах нерівності є інтегровні функції, то таку нерівність можна почленно інтегрувати. Зокрема, якщо *f(x)* інтегровна на відрізку *[a; b]* і на цьому відрізку

f(x)≥0, то й

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0.$$

Якщо f*(x)≤0,* то й

$$\int_a^b f(x)dx \le 0.$$

- ***Властивість 7°.*** Якщо функція *f(x)* є інтегровною на відрізку *[a; b]*, то на ньому є інтегровною також функція *|f(x)|*, і справджується нерівність

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

3.2. Методи обчислення визначених інтегралів

Основна теорема інтегрального числення

Якщо функція *f(x)* є неперервною на відрізку *[a; b]*,

то функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

є диференційованою в кожній точці цього відрізка і похідна *Ф'(x)* дорівнює

Ф'(x) = f(x).

Наслідок. Для всякої неперервної на відрізку *[a;b]* функції *f(x)* існує первісна функція, й однією з первісних функцій є визначений інтеграл (6) із змінною верхньою межею.

Теорема

Для всякої неперервної на відрізку *[a; b]* функції *f(x)* правильною є так звана формула **Ньютона-Лейбніца**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (7)$$

де *F(x)* — одна з первісних функцій для функції *f(x).*

Формула (7) виражає зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами, вона дає також змогу у випадку неперервної функції *f(x)* досить просто обчислювати визначений інтеграл.

Різницю з правої частини формули Ньютона-Лейбніца записують ще так:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

і тоді формула набуває вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \qquad (8)$$

Обчислити визначений інтеграл:

Приклад 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$$

Первісною функцією для функції *cos x* є функція *F(x)=sin x,* тому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Приклад 2

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2};$$

Однією з первісних функцій для функції $\frac{1}{1+x^2}$ є *arctg x,* тому

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3

$$\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$$

Знайдемо будь-яку первісну *F(x)* для підінтегральної функції

$$f(x) = \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1};$$

$$F(x) = \int \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \int \left(2x^2 - 3\right) dx = \frac{2x^3}{3} - 3x.$$

Отже,

$$\int_2^3 \frac{2x^4 - 5x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 3x\right)\Big|_2^3 = \frac{2}{3}3^3 - 3\cdot 3 - \frac{2}{3}2^3 + 3\cdot 2 = \frac{29}{3}.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі.

При вивченні невизначеного інтеграла було розглянуто один з найефективніших методів інтегрування функцій — метод підстановки. Цим методом користуються також при обчисленні визначених інтегралів. Проте для визначеного інтеграла цей метод потрібно обґрунтувати. Доведемо таку теорему.

Теорема

Нехай виконуються умови:

1) *f(x)* є неперервною функцією на відрізку *[a;b];*

2) функція x = φ(t) та її похідна *x' = φ'(t)* є неперервними на відрізку *[α; β];*

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і значення функції $x = \varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a;b]$ при t є $[\alpha; \beta]$.

Тоді справджується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (9)$$

Розглянемо окремий випадок формули (9), а саме інтеграл

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

Тоді цей інтеграл можна записати так:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

У першому інтегралі застосуємо підстановку $x = -t$.

Очевидно, функція $\varphi(t) = -t$ на відрізку $[0;a]$ задовольняє умові попередньої теореми. Отже,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx.$$

Визначений інтеграл не залежить від того, якою буквою позначити змінну інтегрування. Тому в першому інтегралі замість t візьмемо x. Матимемо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (f(-x)dx + f(x))dx.$$

Припустимо, що функція $f(x)$ на відрізку $[-a; a]$ є парною, тобто $f(-x) = f(x)$. Тоді з попередньої рівності отримаємо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx. \qquad (10)$$

Якщо $f(x)$ на відрізку $[-a;a]$ є непарною, $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (11)$$

Формулами (10) і (11) дуже часто користуються для знаходження визначених інтегралів.

Обчислити значення інтегралів:

Приклад 1

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|dx;$$

Оскільки функція $y = |sin\ x|$ парна, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Приклад 2

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x^3 dx.$$

Оскільки функція $y = \sin x^3$ непарна, то

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x^3 dx = 0.$$

Приклад 3

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx;$$

У заданому інтегралі застосовуємо підстановку $t = \cos x$, де $0 \le x \le \pi/2$. Тоді на цьому відрізку $\cos x$ змінюється монотонно (спадає), а отже, можна визначити межі за t. Для цього в попередній рівності покладемо $x = 0$. Матимемо нижню межу $t=1$. Якщо $x = \pi/2$, то матимемо верхню межу $t=0$. Складемо таку таблицю:

x	$\pi/2$	0
t	0	1

Знаходимо $dt = -\sin x\, dx$. Тоді

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx = -\int_{1}^{0} t^2 dt = -\frac{t^3}{3}\Bigg|_{1}^{0} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 4

$$\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2 + 9}dx;$$

Застосовуємо підстановку $t = x^2+9$. Знайдемо межі за t:

x	0	4
t	9	25

Знаходимо $dt = 2xdx$. Отже,

$$\int_{0}^{4} x\sqrt{x^2 + 9}dx = \frac{1}{2}\int_{9}^{25} \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Bigg|_{9}^{25} = \frac{98}{3}.$$

3.3. **Формула інтегрування частинами**

При обчисленні визначених інтегралів часто користуються формулою інтегрування частинами, яка має вигляд

$$\int_a^b u(x)dv(x) = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x). \qquad (12)$$

Приклад 1

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx;$$

Позначимо $u = arctg\ x$, $dv = xdx$. Тоді $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Отже,

$$\int_0^1 x\operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Приклад 2

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx;$$

Нехай $u = x^2$, а $dv = cos\ x\ dx$, тоді $du = 2xdx$, $v = sin\ x$. Отже

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = x^2 \sin x\Big|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \sin x dx = -2\int_0^\pi x \sin x dx.$$

До цього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Нехай $u = x$, $dv = sin\ x\ dx$. Тоді $du = dx$, $v = -cos\ x$.

$$\int_0^\pi x \sin x dx = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Отже,

$$\int_0^\pi x^2 \cos x dx = -2\pi.$$

Приклад 3

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x} dx.$$

У цьому інтегралі застосуємо спочатку підстановку $t=\sqrt{x}$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2tdt$. Отримаємо

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin tdt.$$

До останнього інтеграла застосуємо формулу інтегрування частинами. Нехай $u = t$, $dv = \sin t\, dt$. Тоді $du = tdt$, $v = -\cos t$. Отже, маємо

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin tdt = 2\left(-t\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos tdt\right) = 2\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$заданої функції $f(x)$. Одне з фізичних трактувань цієї задачі – визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху.

Із практичної точки зору природною є обернена задача, а саме визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за відомою похідною $f'(x)$.

Розв'язується ця задача за допомогою невизначеного інтеграла.

Функцію $F(x)$ називають первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку $(a;b)$, якщо

$F'(x)=f(x),\ x \in (a;b)$.(*)

Очевидно, що визначення (*) має сенс лише коли функція $F(x)$ диференційована на проміжку $(a;b)$.

Приклади.

1) $f(x)=2x$.

Первісною для неї буде $F(x)=x^2$, так як $F'(x)=(x^2)'=2x =f(x),\ x \in (-\infty;\infty)$

2) $f(x)=\sin 3.\ x$

$F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$, так як $F'(x)=(-\frac{1}{3}\cos 3x)'=\sin 3x =f(x),\ x \in (-\infty;\infty)$.

Оскільки похідна сталої $C'=0$, то додавання до функції $F(x)$ будь-якого сталого доданка не порушує рівності (1):

$[F(x)+c]'= F'(x)= f(x)$.

Тобто з прикладу 1) разом з $F(x)= x^2$ для функції $f(x)=2x$ первісними будуть $F_1(x)= x^2+1, F_2(x)= x^2+2$ та нескінченна множина інших функцій вигляду $F(x)+C$.

Якщо функція $f(x)$ має на проміжку $(a;b)$ первісну $F(x)$, то вона має там і нескінченну множину інших первісних вигляду $F(x)+C$. Первісних іншого вигляду немає.

3.4. **Невизначений інтеграл**.

Якщо $F(x)$ *- первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $[a;b]$ *і* C*- довільна стала, то вираз* $F(x)+C$ *називається невизначеним інтегралом функції* $f(x)$ *на цьому проміжку і позначається символом* $\int f(x)dx$.

Отже,

$\int f(x)dx = F(x)+C$, *якщо* $F'(x)=f(x)$.

Із погляду геометрії невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається інтегральною кривою і утворюється зсувом однієї з них паралельно самій собі уздовж осі OY. Щоб із цієї множини виділити певну інтегральну криву $F(x)$, достатньо задати її значення $F(x_0)$ у якій-небудь точці $x_0 \in [a;b]$.

Таблиця основних інтегралів.

Частина формул таблиці інтегралів безпосередньо випливає з означення інтегрування як операції, оберненої до операції диференціювання, таблиці похідних і властивостей інтегралів.

Нехай $u = u(x)$- довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$; тоді на цьому проміжку справедливі такі формули.

1.	$\int du = u + c$	8.	$\int ctgu du = \ln\lvert\sin u\rvert + c$
2.	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$	9.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = tgu + c$
2а	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$	10.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int cosec^2 u du = -ctgu + c$
2б	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + c$	11.	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert tg\frac{u}{2}\right\rvert + c$

3.	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + c$	12.	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right\rvert + c$
4.	$\int a^u du = \frac{d^u}{\ln a} + c$	13.	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + c$
4a	$\int e^u du = e^u + c$	14.	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + c$
5.	$\int \sin u du = -\cos u + c$	15.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$
6.	$\int \cos u du = \sin u + c$	16.	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + c$
7.	$\int tgu du = -\ln\lvert\cos u\rvert + c$	17.	$\int u du = uv - \int v du$

Властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:
$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої
$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$

3. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.
$\int \lambda(f(x)dx) = \lambda \int f(x)dx.$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій.
$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

5. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$
і $u = u(x)$ - довільна функція, що має неперервну похідну, то
$\int f(u(x))du(x) = F[u(x)] + C$

Приклад:

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \sin(3x+1)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C.$$

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1. Загальні визначення диференціальних рівняннь

Означення 1.

Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається диференціальним.

Означення 2.

Порядок найвищої похідної, яка входить до диференціального рівняння, називається його порядком.

Наприклад, рівняння $y''+ 4y = 0$ є диференціальним рівнянням другого порядку.

Будь-яку функцію, що задовольняє диференціальному рівнянню, називають розв'язком, або інтегралом цього рівняння, а розв'язування диференціального рівняння - інтегруванням.

Будь-яку функцію, що задовольняє диференціальному рівнянню, називають розв'язком, або інтегралом цього рівняння, а розв'язування диференціального рівняння - інтегруванням.

Наприклад:

1. Функція $y = e^x$ є розв'язком диференціального рівняння $y - y' = 0$, бо
$(e^x)' = e^x$.
2. Функція $y = \cos x$ є розв'язком диференціального рівняння $y'' + y = 0$, оскільки для функції $y = \cos x$, маємо: $y'' = -\cos x$. Підставляючи значення y'' в рівняння $y'' + y = 0$, отримаємо $-\cos x + \cos x = 0$.

Аналогічно можна переконатися, що функція $y = A \sin x + B \cos x$, де A і B - довільні сталі, також є розв'язком цього рівняння.

Розв'язок:

1. $y' = (A \sin x + B \cos x)'=a \cos(x) - b \sin(x)$;
2. $y'' = (A \sin x + B \cos x)''= (a \cos(x) - b \sin(x))'= - a \sin (x) - b \cos (x)$;
3. $-a \sin (x) - b \cos (x)+ a \sin (x) + b \cos (x) = 0$

Розв'язок диференціального рівняння при певних значеннях довільних сталих називається окремим розв'язком цього диференціального рівняння.

Так, у розглянутому прикладі $y'' + y = 0$ розв'язок $y = A \sin x + B \cos x$ є загальним, а розв'язок $y = \cos x$ - окремим.

Приклад 1. Визначити порядок диференціального рівняння.

$y'' + (y')^3 + x = 0$ - диференціальне рівняння 2-го порядку.

Приклад 2. Для цього рівняння 1-го порядку підібрати розв'язок.

Диференціальне рівняння: $y' = x^2$.

Розв'язування:

Знаходимо інтеграл від x^2, ми отримуємо $y = \frac{x^3}{3} + C$, де C - довільна стала.

Перевіряємо підстановкою отриманого результату:

$('=\frac{1}{3} * 3 * x^2 + 0 = x^2$

Означення 3

Рівняння вигляду

y''+ py' + qy =0 ,

де p і q - сталі, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$y(x) = e^{sx}$,

де s визначаємо так, щоб наведена функція задовольняла рівняння. Обчислюючи похідні та підставляючи їх у рівняння, отримаємо:

$y'(x) = s e^{sx}, \quad y''(x) = s^2 e^{sx}$,

$s^2 + ps + q = 0.$

Звідси одержимо, що число s повинне бути коренем наведеного вище квадратного рівняння.

Корені характеристичного рівняння визначаються залежно від знака дискримінанта Δ = p2 - 4q.

Випадок I (Δ > 0)

Рівняння має два дійсні різні корені s_1 і s_2. Кожна з функцій

$y_1(x) = e^{s_1 x}, \quad y_2(x) = e^{s_2 x}$

де C_1 та C_2 - довільні сталі.

Випадок II (Δ = 0)

Характеристичне рівняння має два однакові корені s0 (або подвійний корінь). Можна показати, що, крім функції

$y_1(x) = e^{s_0 x}$,

також і функція

$y_2(x) = x e^{s_0 x}$

є розв’язком рівняння. Більше того, обидві ці функції складають фундаментальну систему розв'язків і тому загальний розв’язок має вигляд

$y(x) = C_1 e^{s_0 x} + C_2 x e^{s_0 x}$,

де C_1 та C_2 - довільні сталі.

Випадок III (Δ < 0)

Рівняння має два різні комплексні корені $s_1 = \alpha + i\beta$ та $s_2 = \alpha - i\beta$. Можна показати, що в цьому випадку загальний розв’язок має вигляд

$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$,

де C_1 та C_2 - довільні сталі.

Приклади 1

$y''-y=0$

Характеристичне рівняння $s^2-1=0$

має два дійсні різні корені $s_1 = 1$ та $s_2 = -1$, тому загальний розв’язок $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$.

Приклади 2

$y''+2y'+y=0$

Характеристичне рівняння $s^2+2s+1=0$

має два однакові корені $s_0 = -1$, тому загальний розв'язок $y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$,

Приклади 3

$y''+y=0$

Характеристичне рівняння $s^2+1=0$ має два різні комплексні корені $s_1 = i$ і $s_2 = -i$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$), тому загальний розв'язок $y(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$.

Поняття диференціального рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної, його порядок

- ***Означення*** Рівняння вигляду

$$f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\dots,\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0 \qquad (1)$$

називається диференціальним рівнянням (наявність похідних тут обов’язкова).

- ***Означення.*** Найбільший порядок похідної, яка входить до диференціального рівняння (1), називається порядком диференціального рівняння.
- ***Означення.*** Функція $y(x)$ називається розв’язком (або інтегралом) диференціального рівняння (1), якщо вона n-раз неперервно диференційована на деякому інтервалі $(a,b)=I$ і задовольняє диференціальному рівнянню (1) $\forall\ x\in I$

Приклад . $y''+3xy'+2y=x^2$ – диференціальне рівняння другого порядку.

При $n=1$ диференціальне рівняння (1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується так:

$$F(x,y,y')=0\ . \qquad (2)$$

Диференціальне рівняння (2) називається розв’язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\ . \qquad (3)$$

Припускаємо, що $f(x,y)$ однозначна і неперервна в деякій області *D* змінних *x,y*. Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (3).

Якщо в деякій області функція $f(x,y)$ перетворюється в ∞, то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \quad .$$

Множину таких точок, а також тих, у яких $f(x,y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (3).

Поряд з (3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy - f(x,y)dx = 0, \qquad (4)$$

або в більш загальному вигляді

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ . \qquad (5)$$

Інколи розглядатимемо диференціальне рівняння в симетричній формі

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)} \quad . \qquad (6)$$

Функції $M(x,y)$, $\mathrm{N(x,y)}$, $\mathrm{X(x,y)}$, $\mathrm{Y(x,y)}$ будемо вважати неперервними в деякій області.

- ***<u>Означення.</u>*** Розв᾽язком диференціального рівняння (3) на інтервалі *I* назвемо функцію $y=\varphi(x)$, визначену і неперервно диференційовану на *I*, яка не виходить з області означення функції $f(x,y)$ і яка перетворює диференціальне рівняння (3) в тотожність $\forall\ x \in I$, тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x, y(x)), \quad \mathrm{x} \in \mathrm{I} \, .$$

У цьому випадку $y=\varphi(x)$ називається розв'язком, записаним у явній формі (вигляді).

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням.

Не завжди можна отримати розв'язок у явному вигляді.

- ***<u>Означення.</u>*** Будемо говорити, що рівняння

$$\Phi(x,y) = 0 \qquad (7)$$

визначає в неявній формі розв'язок диференціального рівняння (3), якщо воно визначає $y=y(x)$, яка є розв'язком диференціального рівняння (3).

При цьому на розв'язках диференціального рівняння (2.3) виконується

$$\Phi'_x(x,y) + \Phi'_y(x,y)\frac{dy}{dx} = \Phi'_x(x,y) + \Phi'_y(x,y) f(x,y) \equiv 0\,, \ \mathrm{x} \in \mathrm{I} \ . \qquad (8)$$

- ***<u>Озачення .</u>*** Будемо говорити, що співвідношення

$x = \varphi(t),\ \mathrm{y} = \psi(\mathrm{t})$ (9)

визначають розв'язок диференціального рівняння (3) в параметричній формі на інтервалі (t_0, t_1), якщо

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f(\varphi(t), \psi(t)), \quad \mathrm{t} \in (\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1) \quad . \qquad (10)$$

4.2. Задача Коші

Розглянемо диференціальне рівняння (3). Задача Коші полягає в тому, щоб серед усіх розв'язків диференціального рівняння (3) знайти такий $y = y(x)$, який проходить через задану точку

$$y(x_0) = y_0 \quad . \qquad (11)$$

Тут x_0 - початкове значення незалежної змінної, y_0 - функції.

Розв'язати задачу Коші з геометричної точки зору означає (рис. 1): знайти серед усіх інтегральних кривих диференціального рівняння (3) ту, яка проходить через задану точку $M(x_0, y_0)$.

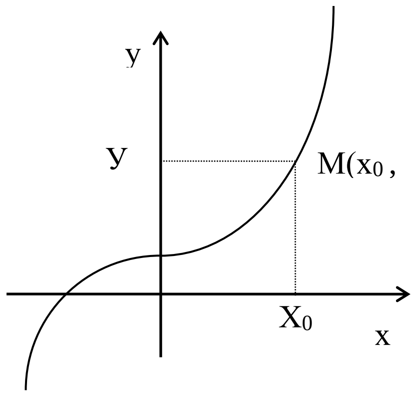


Рис. 1. Задача Коші

<u>Означення.</u> Будемо говорити, що задача Коші (3), (11) має єдиний розв'язок., якщо $\exists$ число *h>0*, що на відрізку $|x - x_0| \le h$ має визначений розв'язок $y = y(x)$ такий, що $y(x_0) = y_0$ і не існує іншого розв'язку, визначеного в цьому ж інтервалі $|x - x_0| \le h$ такого, що не збігається з розв'язком $y = y(x)$ хоча б в одній точці інтервалу $|x - x_0| \le h$, відмінній від точки $x = x_0$.

Якщо задача Коші (3), (11) має не один розв'язок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці (x_0, y_0) порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

При постановці задачі Коші ми припускаємо, що x_0, y_0 - обмежені числа, а диференціальне рівняння (3) в точці (x_0, y_0) задає деякий напрямок поля, який не паралельний осі ОУ.

Якщо права частина диференціального рівняння (3) в точці М набуває нескінченного значення, необхідно розглянути диференціальне рівняння (3) і знайти розв'язок $x = x(y)$ (рис. 2).

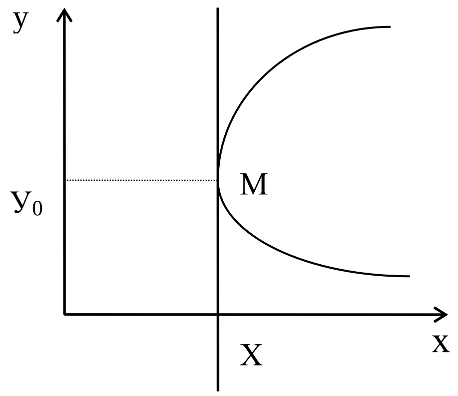


Рис. 2 Розв'язок задачі Коші

Якщо ж в точці М права частина диференціального рівняння (3) має невизначеність, наприклад, типу $\frac{0}{0}$, тоді звичайна постановка задачі Коші не має сенсу, оскільки через точку М не проходить жодна інтегральна крива. У цьому випадку задача Коші ставиться так: знайти розв'язок $y = y(x)$ (або $x = x(y)$), який примикає до точки М.

У деяких випадках треба шукати розв'язок $y = y(x)$, який задовольняє умовам $y \to y_0 \neq \infty$ при $x \to \infty$; $y \to \infty$ при $x \to x_0 \neq \infty$ і т.д.

Теорема Пікара (без доведення). Припустимо, що функція $f(x, y)$ в диференціальному рівнянні (3) визначена і неперервна в обмеженій області

$$D = \{x, y : |x - x_0| \le a; |\mathrm{y} - \mathrm{y}_0| \le b\} \quad (\mathrm{a} > 0, \mathrm{b} > 0)$$

і, отже, вона є обмеженою

$$|f(x, y)| \le M, \quad \forall(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{D} \quad (\mathrm{M} > 0); \tag{12}$$

функція $f(x, y)$ має обмежену частинну похідну по *y* на *D*

$$\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \le K, \quad (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{D} \quad (\mathrm{K} > 0) \quad . \tag{13}$$

При цих умовах задача Коші (3), (11) має єдиний неперервно-диференційований розв'язок в інтервалі

$$|x - x_0| \le h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}. \tag{14}$$

Зауваження. У сформульованій теоремі умову (2.13) можна послабити (замінити) на те, щоб функція $f(x, y)$ по змінній *y* задовольняла умові Ліпшица, тобто

$$\left|f(x, y^{(1)}) - f(x, y^{(2)})\right| \le L\left|y^{(1)} - y^{(2)}\right| \qquad \forall (\mathrm{x}, \mathrm{y}^{(1)}) \text{ і } (\mathrm{x}, \mathrm{y}^{(2)}) \in \mathrm{D}\ . \quad (15)$$

Тут $L>0$ - найменша константа, яка задовольняє (15) і називається константою Ліпшица .

Поняття загального розв'язку, форми його запису

На прикладах можна переконатися, що диференціальне рівняння (3) має нескінченну множину розв'язків, яка залежить від деякого параметра c

$$y = u(x, c). \qquad (16)$$

Ця сім'я і називається загальним розв'язком диференціального рівняння (3). При кожному c (16) дає інтегральну криву.

Для розв'язування задачі Коші (3), (11) параметр c можна знайти з рівняння $y_0 = u(x_0, c)$.

Дамо точне визначення загального розв'язку. Припустимо, що на *D* виконуються умови теореми Пікара.

<u>Означення.</u> Функцію

$$y = \varphi(x, c), \qquad (17)$$

визначену в деякій області змінних *x* і *c,* і яка має неперервну частинну похідну за *x,* будемо називати загальним розв'язком диференціального рівняння (3) в області *D,* якщо рівняння (17) можна розв'язати відносно c в області *D*

$$c = \psi(x, y) \qquad (18)$$

і функція (17) є розв'язком диференціального рівняння (3) при всіх значеннях довільної сталої *c*, які визначаються формулою (18), коли $(x, y) \in D$.

Суть означення полягає в такому. Припустимо, що задано сім'ю кривих *F* на області *D*, яка залежить від одного параметра c. Якщо будь-яка крива із *F* є інтегральною кривою диференціального рівняння (3), і всі криві із *F* в сукупності покривають *D*, то *F* є розв'язком диференціального рівняння (3) в області *D* (рис.3).

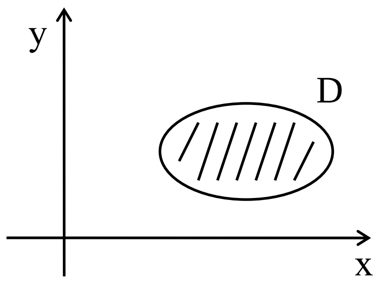


Рис. 3 Геометрична область диференціального рівняння

Для розв'язування задачі Коші константу c можна знайти згідно з (18)

$$c_0 = \psi(x_0, y_0)\ .$$

Інколи у формулі (17) роль c віграє y_0, тоді говорять, що розв'язок представлений у формі Коші

$$y = y(x, x_0, y_0) \quad . \qquad (19)$$

Приклад.

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, $y(x_0) = y_0$ у формі Коші.

Розв'язання. Загальний розв'язок $y = c\,x$, $0 < x < \infty$, $-\infty < y < +\infty$. В указаній області виконуються умови теореми Пікара. Звідси $c = \frac{y}{x}$, $c_0 = \frac{y_0}{x_0}$, $y = \frac{y_0}{x_0}x$ – розв'язок у формі Коші.

У більшості випадків при інтегруванні диференціального рівняння (3) ми отримуємо загальний розв'язок у неявній формі

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (\text{або } \psi(x, y) = c) \; , \qquad (20)$$

який називається загальним інтегралом диференціального рівняння (3).

4.3. Інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної

Неповні рівняння.

а) Диференціальне рівняння, яке не містить шуканої функції, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \; , \quad x \in (a, b). \qquad (33)$$

Припустимо, що f(x) є неперервною функцією на (a, b). Тоді функція

$$y = \int f(x)dx + c \qquad (34)$$

є загальним розв'язком диференціального рівняння (33) в області

$$a < x < b, \; -\infty < y < +\infty. \qquad (35)$$

Особливих розв'язків диференціальне рівняння (33) не має.

Разом з диференціальним рівнянням (33) розглянемо початкові умови

$$y(x_0) = y_0 \, . \qquad (36)$$

Проінтегруємо диференціальне рівняння (34) від $x_0 \in (a, b)$ до x

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + c \, .$$

Знаходимо c з умови (36)

$$y = \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau + y_0 \qquad (37)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (33) у формі Коші.

Якщо *f(x)* – неперервна на (a,b) за винятком точки $\xi \in (a,b)$, у якій $f(\xi)$ набуває нескінченного значення, то замість диференціального рівняння (33) будемо розглядати рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}. \qquad (33')$$

Пряма $x = \xi$ є розв'язком диференціального рівняння (33′) і ми цей розв'язок повинні приєднати до розв'язку диференціального рівняння (33). Цей розв'язок може бути частинним або особливим залежно від того, зберігається чи порушується в будь-якій його точці єдиність. Якщо $x = \xi$ – частинний розв'язок, то його часто можна отримати із загального при нескінченних значеннях *c*, якщо ж він є особливим, то його отримують із загального при $c = c(y)$.

Рівняння, яке не містить незалежної змінної, має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \qquad (38)$$

Припускаємо, що функція $f(y)$ визначена і неперервна на інтервалі (c,d) Замість (38) розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}. \qquad (39)$$

Диференціальне рівняння (39) не містить шуканої функції і воно розв'язується аналогічно до диференціального рівняння (33).

Якщо $f(y) \neq 0$, *y є (c,d)*, то

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + c \qquad (40)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (39) в області $c < y < d, \quad -\infty < x < +\infty$.

Аналогічно

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(\tau)} d\tau + x_0 \qquad (41)$$

– загальний інтеграл у формі Коші.

Якщо $f(y)$ неперервна на *(c,d)* і набуває нульового значення при $y = \eta \in (c,d)$, то ми повинні розглядати диференціальне рівняння (38). Розв'язок $y = \eta$ буде частинним, якщо в кожній його точці зберігається єдиність і особливим, якщо в кожній його точці порушується єдиність. Якщо $y = \eta$ частинний розв'язок, то ми його отримуємо при нескінченних значеннях $c\ (\pm\infty)$, якщо особливий, то при $c = c(x)$.

Якщо $f(y)$ у точці $y=\overline{\eta}$ перетворюється в нескінченність $(\overline{\eta}\in(c,d))$, то розглядаємо диференціальне рівняння (39), яке має неперервну праву частину на *(c,d).* При цьому диференціальне рівняння на (c,d) має єдиний розв′язок (рис.4).

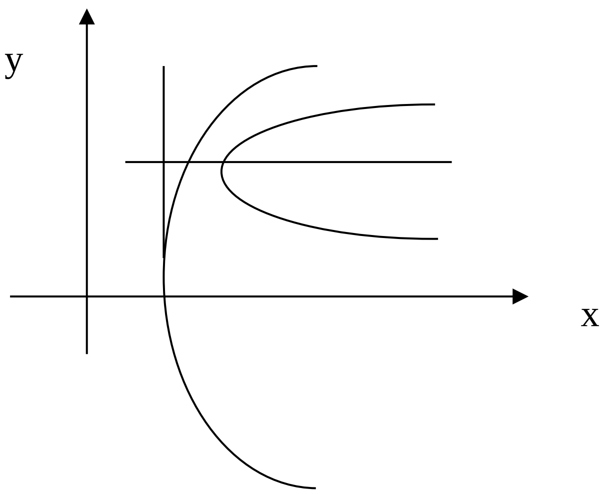


Рис. 4

Приклад. Розв′язати диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}.$$

Розв’язок. Область визначення $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(-\infty,+\infty)$, $y\neq 0$. Оскільки в точці $y=0$ дотичні паралельні осі *OY*, то розв’язок у площині (x,y) єдиний

$$2ydy=dx,\ y^2=x+c.$$

б) Рівняння з відокремлюваними змінними.

Розглянемо рівняння в диференціалах вигляду

$$X(x)dx+Y(y)dy=0, \qquad (42)$$

де $X(x),Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Диференціальне рівняння (42) називається рівнянням з відокремленими змінними. Його можна переписати так:

$$d(\int X(x)dx+\int Y(y)dy)=0.$$

Звідси маємо загальний розв’язок у квадратурах

$$\int X(x)dx+\int Y(y)dy=c. \qquad (43)$$

Якщо треба записати розв’язок задачі Коші, то записують так

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau+\int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau=c.$$

З умови (36) визначають $c=0$. Отже,

$$\int_{x_0}^{x} X(\tau)d\tau+\int_{y_0}^{y} Y(\tau)d\tau=0 \qquad (44)$$

– розв'язок задачі Коші (36), (42). При таких припущеннях особливих розв'язків диференціальне рівняння (42) не має.

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \qquad (45)$$

називають рівнянням з відокремлюваними змінними.

Припустимо, що $m_1(x)n(y) \neq 0$, тоді розділимо обидві частини рівняння (45) на $m_1(x)n(y)$, отримаємо

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \qquad (46)$$

Аналогічно записуємо

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = c \qquad (47)$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (45) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)}d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)}d\tau = 0 \qquad (48)$$

–розв'язок задачі Коші (36), (45). При діленні на $n(y)m_1(x)$ ми можемо втратити розв'язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$, $m_1(x) = 0$. Дійсно, нехай $n(b) = 0$, то

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)dy = 0,$$

отже $y = b$ – розв'язок диференціального рівняння (45). Аналогічно $x = a \quad (m_1(a) = 0)$. Якщо ці розв'язки не входять до (47) при деяких c, то вони являють собою особливі розв'язки диференціального рівняння (45).

Із розв'язку $y = b$ ми повинні виключити точку $x = a$, оскільки в точці (a,b) диференціальне рівняння (45) не визначає нахил поля y'. Із тієї самої причини з розв'язку $x = a$ виключається точка $y = b$.

Таким чином, розв'язки $x = a(y \neq b)$ і $y = b\ (x \neq a)$ примикають до точки (a,b) і можуть бути особливими. Інших особливих розв'язків не має.

Приклад . Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0.$$

Розв'язок. Розділяючи змінні, отримаємо

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0.$$

Оскільки $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо в такому вигляді

$$\frac{y}{1+y^2}dy - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = 0.$$

Отже, $\int \frac{y}{1+y^2} dy - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{1+x^2} = c$, $\frac{1}{2} \ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right] - \ln x = c$,

$(1+x^2)(1+y^2) = c_1 x^2$.

Очевидно, що $x = 0$ є частинним розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

в) Однорідні і узагальнено-однорідні диференціальні рівняння.

Розглянемо рівняння в диференціалах (5), у якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями одного і того ж ступеня однорідності m.

5. Матриці

5.1. Основні визначення та поняття.

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця, яка містить $m \cdot n$ чисел і складається з m рядків і n стовпців.

Таблиця береться або в круглі дужки, або оточується двома паралельними вертикальними прямими.

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{Vmatrix}$$

Якщо матриця містить m рядків і n стовпців , то матриця називається **матрицею розміру** $m \times n$ або $m \times n$- матрицею. Розмір матриці вказується справа внизу біля її імені , або таблиці з позначенням елементів .

Приклад.

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}_{2\times3} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{Vmatrix}_{2\times3}$$

Елементи матриці

Елементи матриці A позначаються a_{ij} , де i - номер рядка , у якому знаходиться елемент , а j - номер стовпця.

Визначення

Рядок матриці називається **нульовим** , якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Якщо хоча б один з елементів рядка не дорівнює нулю, то рядок називається **ненульовим** .

Зауваження . Аналогічне визначення і для нульового та ненульового стовпців матриці **.**

Приклад

У матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ перший рядок є нульовим (будь-який елемент цього рядка дорівнює нулю) ; другий рядок ненульовий , оскільки елемент $a_{21} = -1 \neq 0$.

Діагоналі

Головною діагоналлю матриці називається діагональ, проведена з лівого верхнього кута матриці в правий нижній.

Побічної діагоналлю матриці називається діагональ, проведена з лівого нижнього кута матриці в правий верхній.

Приклад

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$: 1 і 6 - елементи головної діагоналі.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$: 3 і 4 - елементи побічної діагоналі.

Для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ елементи 1 , 2 , -1 утворюють головну діагональ; а елементи 3 , 2 , 2 - побічну.

5.2. Види матриць

Матриця розміру $n \times n$ називається **квадратною,** число n називається **порядком** матриці

Приклад

$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ - Квадратна матриця порядку 2 або матриця другого порядку.

Матриця Θ називається **нульовою,** якщо всі її елементи дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0, \forall i, j$.

Приклад

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця, що складається з одного рядка, називається **вектор-рядком,** а матриця, що складається з одного стовпця, - **вектор-стовпцем.**

Приклад

$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ - Вектор-рядок; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ - Вектор-стовпець.

Діагональні матриці

Квадратна матриця D називається **діагональною,** якщо всі її елементи, які стоять поза головною діагоналі, дорівнюють нулю.

Зауваження. Діагональні елементи матриці (тобто елементи, які стоять на головній діагоналі) можуть також дорівнювати нулю.

Приклад

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(1; 0; 3)$$

Скалярною називається діагональна матриця S , у якої всі діагональні елементи рівні між собою.

*Зауваження***.** Якщо нульова матриця є квадратною, то вона також є і скалярною.

Приклад

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Одиничною матрицею E_n називається скалярна матриця порядку n , діагональні елементи якої дорівнюють 1.

Зауваження. Для скорочення запису порядок одиничної матриці можна не писати, тоді одинична матриця позначається просто E .

Приклад. Одинична матриця другого порядку.

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Трикутні матриці

Матриця називається **верхньою трикутною матрицею,** якщо всі елементи нижче головної діагоналі дорівнюють нулю.

Матриця називається **нижньою трикутною матрицею,** якщо всі елементи вище головної діагоналі дорівнюють нулю.

Зауваження. Діагональна матриця - це приклад матриці, яка є одночасно верхньо- і нижньотрикутною.

Приклад. Верхньотрикутна матриця.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ступінчаста матриця

Ступінчастою називається матриця, яка задовольняє таким умовам:

1. Якщо ця матриця містить нульовий рядок (тобто рядок, всі елементи якого рівні нулю), то всі рядки, розташовані під нею, також нульові.
2. Якщо перший ненульовий елемент деякого рядка розташований в стовпці з номером i , то перший ненульовий елемент наступного рядка повинен знаходитися в стовпці з номером більшим, ніж i .

Інше визначення ступінчастої матриці.

Ступінчастою називається матриця, яка містить m рядків і в якої перший $r \leq m$ діагональних елементів ненульовий, а елементи, що лежать нижче головної діагоналі і елементи останніх $m - r$ рядків дорівнюють нулю, тобто це матриця вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Головним елементом деякого рядка матриці A називається її перший ненульовий елемент.

Приклад

Знайти головні елементи кожного рядка матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Розв'язок. Головний елемент першого рядка - це перший ненульовий елемент цього рядка, а тому $a_{11} = 1$ - Головний елемент рядка під номером 1; аналогічно $a_{23} = 1$ - головний елемент другого рядка.

Інше визначення ступінчастої матриці.

Матриця A називається **ступінчастою,** якщо:

1. всі її нульові рядки стоять після ненульових;
2. в кожній ненульовий рядку, починаючи з другого, її головний елемент коштує правіше (в стовпці з великим номером) головного елемента попереднього рядка.

За визначенням до ступінчастих матриць будемо відносити нульову матрицю Θ , а також матрицю, яка містить один рядок.

Приклад

Приклади **ступінчастих** матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

Приклади матриць, які не є ступінчастими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Приклад

З'ясувати, чи є матриця $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ступінчастою.

Розв'язок. Перевіряємо виконання умов з визначення:

1. Усі рядки під першою нульовою рядком матриці (четверта рядок) є нульовими.

2. Перший ненульовий елемент рядка № 1 знаходиться в другому стовпці, значить, перший ненульовий елемент другого рядка повинен знаходитися, принаймні, в третьому стовпці – умова виконується, тому що перший ненульовий елемент другого рядка $a_{23} = 3 \neq 0$ знаходиться в третьому стовпці; аналогічно, перший ненульовий елемент третього рядка знаходиться в шостому стовпці, а перший ненульовий елемент попереднього, другого, рядка знаходиться в стовпці з номером 3 і 3 <6.

Отже, задана матриця A є ступінчастою.

Рівні матриці

Дві матриці називаються **рівними,** якщо вони мають однакові розміри і їх відповідні елементи рівні:

$A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$

Приклад

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4-2 & 2+1 \end{pmatrix}$. Ці матриці рівні, тому що рівні їхні розміри: $A_{1\times 2}$ і $B_{1\times 2}$, а також відповідні елементи: $a_{11} = 2 = b_{11} = 4 - 2 = 2$; $a_{12} = 3 = b_{12} = 2 + 1 = 3$

Приклад

Нехай задана матриця $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Знайти всі елементи матриці A, якщо відомо, що вона дорівнює матриці $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язок. Оскільки матриці A і B рівні, то рівні і їхні відповідні елементи, тобто $a = -1, b = 0, c = 3, d = 0$

Відповідь. $a = -1, b = 0, c = 3, d = 0$

5.3. Дійства з матрицями.

Добуток матриці на число.

Добутком матриці на число називається матриця, отримана з вихідної множенням кожного її елемента на задане число.

Приклад

Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Знайти матрицю $2A$.

Розв'язок. $2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Відповідь. $2A = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Теорія про множення. Сума матриць

Сумою матриць A і B одного розміру називається матриця $C = A + B$ такого ж розміру, одержувана з вихідних шляхом складання відповідних елементів.

Приклад

Знайти $A + B$, Якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Розв'язок. $C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1+5 & -2+2 & 4+3 \\ 2+4 & 0+6 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Відповідь. $C = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Операції множення матриці на число і сума матриць називаються **лінійними.**

Властивості лінійних операцій:

Скрізь далі матриці A, B і C - матриці одного розміру.

1. Асоціативність $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + \Theta = \Theta + A$, Де Θ - <u>нульова матриця</u> відповідного розміру.
3. $A - A = \Theta$
4. Комутативність $A + B = B + A$
5. Дистрибутивність $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

Добуток двох матриць

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times k}$ називається матриця $C_{m\times k}$, така що містить елемент матриці C, що стоїть в i -му рядкові і j -ому стовпці, тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B.

Приклад

Знайти AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Розв'язок. Оскільки $A = A_{2\times 3}$, А $B = B_{3\times 1}$, то в результаті отримаємо матрицю розміру $C = C_{2\times 1}$, тобто матрицю вигляду $C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Знайдемо елементи цієї матриці:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 5$$

$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 2$

Таким чином, отримуємо, що:
$C = AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Усі обчислення можна було зробити в більш компактному вигляді:
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Відповідь. $C = AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Властивості добуткової матриці:

1. Асоціативність $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Асоціативність по множенню $(\mu \cdot A) \cdot B = \mu \cdot (A \cdot B)$
3. Дистрибутивність $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. Множення на одиничну матрицю $E_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot E_n = A_{m\times n}$
5. У загальному випадку множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$
6. $EA = A$

Транспонування матриць

Транспонування матриці - це операція над матрицею, коли її рядки стають стовпцями з тими ж номерами.

Приклад

Знайти транспоновану матрицю A^T , якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Розв'язок. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$

Властивості транспонування матриць:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$

4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Множення матриці на число

Добутком матриці A на ненульове число λ називається матриця $B = \lambda A$ того ж порядку, отримана з вихідної множенням на задане число всіх її елементів:

$B = \lambda A \implies b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Отже, в результаті множення матриці на число виходить матриця такої ж розмірності, що і початкова, кожен елемент якої є результатом добутку відповідного елемента вихідної матриці на задане число.

Ми отримаємо однаковий результат, множачи число на матрицю, або матрицю на число, тобто $\lambda A = A\lambda$.

Із визначення випливає, що загальний множник всіх елементів матриці можна виносити за знак матриці.

Ця операція, разом з операцією складання матриць , відноситься до лінійних операцій над матрицями .

Приклад

Чому дорівнює матриця $-3A$, якщо матриця $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Розв'язок $-3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot (-1) & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Відповідь. $-3A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

Властивості множення матриці на число:

1. $1 \cdot A = A$
2. $0 \cdot A = \Theta$
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

Додавання і віднімання матриць

Додавання і віднімання матриць допускаються тільки для матриць однакового розміру.

Сума матриць

Сумою матриць A і B одного розміру називається матриця $C = A + B$ такого ж розміру, одержувана з вихідних шляхом складання відповідних елементів:

$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1;m}, j = \overline{1;n}$

Зауваження

Складати можна тільки матриці однакового розміру.

Приклад

Знайти $A+B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Розв'язок. $C=A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2}+\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}=$

$=\begin{pmatrix} 1+4 & 4+4 \\ 2+5 & 3+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Відповідь $A+B=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Властивості додавання і віднімання матриць:

1. Асоціативність $(A+B)+C=A+(B+C)$
2. $A+\Theta=\Theta+A$, Де Θ - нульова матриця відповідного розміру.
3. $A-A=\Theta$
4. Комутативність $A+B=B+A$

Різниця матриць

Різницю двох матриць однакового розміру можна визначити через операцію складання матриць і через множення матриці на число .

Віднімання матриць здійснюється таким чином: $A-B=A+(-1)\cdot B$

Тобто до матриці A додається матриця B, помножена на (-1).

Різницею матриць A і B одного і того ж розміру називається матриця $C=A-B$ такого ж розміру, одержувана з вихідних шляхом додавання до матриці A матриці B, помноженої на (-1).

На практиці ж від елементів матриці A просто віднімають відповідні елементи матриці B за умови, що задані матриці одного розміру.

Зауваження

Віднімати можна тільки матриці однакового розміру.

Приклад

Знайти матрицю $C=A-3B$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язок. $C=A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-(-3) & 2-3 \\ 2-3 & -1-6 \\ 3-0 & 0-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Відповідь $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -7 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Множення матриць

Добутком матриці $A_{m\times n}$ на матрицю $B_{n\times k}$ називається матриця $C_{m\times k}$ така, що елемент матриці C, що стоїть в i-му рядку і j-му стовпці, тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

Зауваження : Множити матриці можна тоді і тільки тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці.

Приклад

Обчислити AB і BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Розв'язок. Оскільки $A = A_{3\times 2}$, А $B = B_{2\times 2}$, то добуток можливий, і результатом операції множення буде матриця $C = C_{3\times 2}$, а це матриця вигляду $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$.

Обчислимо <u>елементи матриці</u> C:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -1$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 2$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$$
$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 3$$
$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3$$

Отже, $C = AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Здійснимо добуток в більш компактному вигляді:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайдемо тепер добуток $D = BA = B_{2\times 2} \cdot A_{3\times 2}$. Оскільки кількість стовпців матриці B (перший співмножник) не збігається з кількістю рядків матриці A (другий співмножник), то це утворення не визначене. Помножити матриці в цьому порядку неможливо.

Відповідь $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$**.**

У зворотному порядку помножити ці матриці неможливо, оскільки кількість стовпців матриці B не збігається з кількістю рядків матриці A.

Властивості твори матриць:

1. Асоціативність $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2. Асоціативність по множенню $(\mu \cdot A) \cdot B = \mu \cdot (A \cdot B)$
3. Дистрибутивність $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. Множення на <u>одиничну матрицю</u> $E_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n} \cdot E_n = A_{m \times n}$
5. У загальному випадку множення матриць не комутативне, тобто $AB \neq BA$
6. $EA = A$

Транспонування матриці

Транспонування матриці – це операція над матрицею, коли її рядки стають стовпцями з тими ж номерами.

Приклад

Знайти матрицю A^T, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Розв’язок $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Відповідь. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Якщо матриця A - це матриця розміру $m \times n$, то матриця A^T має розмір $n \times m$.

Властивості операції транспонування матриць:

1. $\left(A^T\right)^T = A$
2. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Еквівалентні матриці та елементарні перетворення над рядками матриці.

Елементарними перетвореннями над рядками матриць називаються такі перетворення рядків:

1. Множення рядка на ненульове число.
2. Перестановка двох рядків.
3. Поповнення лише до рядка матриці іншого її рядка, помноженого на деяке ненульове число.

Якщо від матриці A до матриці B перейшли за допомогою еквівалентних перетворень над рядками, то такі матриці називаються **еквівалентними** і позначають $A \sim B$.

Приклади елементарних перетворень

Продемонструємо всі елементарні перетворення на прикладі матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Помножимо перший рядок матриці на два, тобто кожен елемент першого рядка множимо на двійку, в результаті отримаємо матрицю B , Еквівалентну заданій матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Поміняємо першу і другу рядка матриці B місцями, отримуємо еквівалентну їй матрицю C :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Від першого рядка матриці C віднімемо другий рядок, отримуємо еквівалентну матрицю D :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim D = \begin{pmatrix} 3-2 & 2-6 & 2-6 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

У підсумку робимо висновок, що матриці A і D еквівалентні, так як від однієї з них перейшли до іншої за допомогою еквівалентних перетворень над рядками.

5.4. Поняття та властивості визначника матриці

Визначення

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратній матриці n - порядку ставитися у відповідність число N, яке називається визначником матриці або детермінантом.

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Властивості визначників:

Зауваження

Усе, що буде сказано щодо рядків, стосуватиметься і стовпців.

1. При транспонауванні квадратної матриці її визначник не змінюється: $|A| = |A^t|$

Приклад

Відомо, що визначник матриці $A = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$ дорівнює 3. Тоді визначник матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$, яка дорівнює A^T , також дорівнює 3.

2. Загальний множник у рядку можна виносити за знак визначника.

Приклад

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

3. Якщо квадратна матриця N-порядку множиться на деяке ненульове число $|\lambda \cdot A| = \lambda^n \cdot |A|$,

то визначник отриманої матриці дорівнює добутку визначника вихідної матриці A на число λ в ступені, що дорівнює порядку матриць.

Приклад

Нехай визначник матриці A третього порядку дорівнює 3, обчислити визначник матриці $B = 2A$.

Розв’язок. По властивості $|B_{3\times3}| = |2A_{3\times3}| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot |A| = 8 \cdot 3 = 24$

Відповідь. $|B| = 24$

4. Якщо кожен елемент у якомусь рядку визначника дорівнює сумі двох доданків, то вихідний визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких замість цього рядка стоять перші і другі доданки відповідно, а інші рядки збігаються з вихідним визначником.

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Якщо два рядки визначника поміняти місцями, то визначник змінить знак.

Приклад

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6. Визначник з двома рівними рядками дорівнює нулю.

Приклад

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

7. Визначник з двома пропорційними рядками дорівнює нулю.

Приклад

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \end{vmatrix} = 0$$

8. Визначник, що містить нульовий рядок , дорівнює нулю.

Приклад

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9. Визначник не зміниться, якщо до якогось його рядка додати інший рядок, помножений на деяке число.

Приклад

Нехай заданий визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. Додамо до другого рядка визначника третій його рядок, при цьому значення визначника не змінитися:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1+2 & 0+3 & -1+1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

10. Визначник верхньої (нижньої) трикутної матриці дорівнює добутку його діагональних елементів .

Приклад

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 5\cdot(-1) = -10$$

11. Визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

5.5. Мінор і алгебраїчне доповнення

Мінором M_{ij} до елемента a_{ij} визначника n N-порядку називається <u>визначник</u> $(n-1)$ N-порядку, отриманий з вихідного викреслюванням i I-го рядка і j J-го стовпця.

Приклад

Знайти мінор M_{23} до елемента a_{23} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. Викреслюємо в заданому визначнику другий рядок і третій стовпець:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cancel{-1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} \\ 7 & 8 & \cancel{4} \end{vmatrix}$$

тоді $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Відповідь. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Алгебраїчне доповнення

Алгебраїчним доповненням A_{ij} до елемента a_{ij} визначника n N-порядку називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Приклад

Знайти алгебраїчне доповнення A_{23} до елемента a_{23} визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язок. $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Відповідь. $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

Сума добутків елементів у «довільному» рядку на алгебраїчні доповнення до елементів i-го рядка визначника дорівнює визначнику, в якому замість i-го рядка записаний «довільний» рядок.

$$b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{12} + b_3 \cdot A_{13} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Сума добутків елементів рядка визначника на алгебраїчні доповнення до елементів іншого рядка дорівнює нулю.

$$a_{31} \cdot A_{11} + a_{32} \cdot A_{12} + a_{33} \cdot A_{13} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Методи обчислення визначників

У загальному випадку правило обчислення <u>визначників</u> n-го порядку є досить громіздким. Для визначників другого і третього порядку існують раціональні способи їх обчислень.

Обчислення визначників другого порядку

Щоб обчислити визначник матриці A другого порядку, треба від добутку <u>елементів головної діагоналі </u>відняти добудок <u>елементів побічної діагоналі</u>:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Приклад

Обчислити визначник другого порядку $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

Розв'язок $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 11 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 55 + 14 = 69$

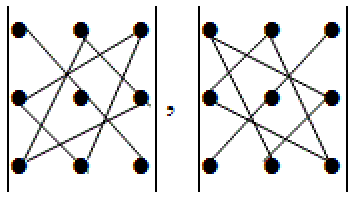
Відповідь $\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 69$

Методи обчислення визначників третього порядку

Для обчислення визначників третього порядку існують такі правила.

Правило трикутника

Схематично це правило можна зобразити таким чином:



«+» «–»

Утворення елементів у першому визначнику, які з'єднані прямими, береться зі знаком «плюс»; аналогічно, для другого визначника - відповідні твори беруться зі знаком «мінус», тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Приклад

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ методом трикутників.

Розв’язок $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) +$

$+3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 54$

Відповідь $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Правило Саррюса

Праворуч від визначника дописують перші два стовпці і добуток елементів на головній діагоналі і на діагоналях, паралельних до неї, беруть зі знаком «плюс»; а твори елементів побічної діагоналі і діагоналей, паралельних до неї, зі знаком «мінус»:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Приклад

Обчислити визначник за допомогою правила Саррюса $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

Розв’язок $\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right. = 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 +$

$+(-1) \cdot 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 \cdot (-2) = 54$

Відповідь $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 54$

Розкладання визначника по рядку або стовпцю

Визначник дорівнює сумі добутків елементів рядка визначника на їхні алгебраїчні доповнення. Зазвичай вибирають той рядок або стовпчик, у якому є нулі. Рядок або стовпець, по якому ведеться розкладання, позначатимемо стрілкою.

Приклад

Розклавши по першому рядку, обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Розв’язок $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \leftarrow = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3+12-9 = 0$$

Відповідь $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Цей метод дозволяє обчислення визначника звести до обчислення визначника нижчого порядку.

Приклад

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Розв’язок. Виконаємо такі перетворення над рядками визначника: від другого рядка віднімемо чотири перші, а з третього перший рядок, помножений на сім, в результаті, згідно з властивостями визначника, отримаємо визначник, рівний даному.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4\cdot 1 & 5-4\cdot 2 & 6-4\cdot 3 \\ 7-7\cdot 1 & 8-7\cdot 2 & 9-7\cdot 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2\cdot(-3) & 2\cdot(-6) \end{vmatrix} = 0$$

Визначник дорівнює нулю, оскільки другий і третій рядки є пропорційними.

Відповідь $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

Для обчислення визначників четвертого порядку і вище застосовується або розкладання по рядку або стовпцю, або зведення до трикутного вигляду, або за допомогою теореми Лапласа.

Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця

Приклад

Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, розклавши його за елементами якогось рядка або якогось стовпця.

Розв’язок. Попередньо виконаємо елементарні перетворення над рядками визначника, зробивши якомога більше нулів або в рядку, або в стовпці. Для цього спочатку від першого рядка віднімемо дев’ять третіх, від другого - п’ять третіх і від четвертого - три треті рядки, отримуємо:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-1 & 8-0 & 7-9 & 6-18 \\ 5-5 & 4-0 & 3-5 & 2-10 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3-3 & 4-0 & 5-3 & 6-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Отриманий визначник розкладемо за елементами першого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

Отриманий визначник третього порядку також розкладемо за елементами рядка і стовпчика, попередньо отримавши нулі, наприклад, у першому стовпці. Для цього від першого рядка віднімаємо дві другі рядки, а від третього - другий:

$$\begin{vmatrix} 8 & -2 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (2 \cdot 8 - 4 \cdot 4) = 0$$

Відповідь $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

Зауваження

Останній і передостанній визначники можна було б і не обчислювати, а відразу зробити висновок про те, що вони рівні нулю, оскільки містять пропорційні рядки.

Приведення визначника до трикутного вигляду

За допомогою елементарних перетворень над рядками або стовпцями визначник зводиться до трикутного вигляду і тоді його значення, згідно звластивостям визначника, дорівнює добутку елементів, що стоять на головній діагоналі.

Приклад

Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ приведенням його до трикутного вигляду.

Розв’язок. Спочатку робимо нулі в першому стовпці під головною діагоналлю. Усі перетворення виконуватимуться простіше, якщо елемент a_{11} буде дорівнюватиме 1. Для цього ми поміняємо місцями перший і другий стовпці визначника, що, згідно з властивостям визначника, призведе до того, що він змінить знак на протилежний:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

Далі отримаємо нулі в першому стовпці, крім елемента a_{11}. Для цього від третього рядка віднімемо дві перші, а до четвертої рядка додамо перший, маємо:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далі отримуємо нулі в другому стовпці на місці елементів, що стоять під головною діагоналлю. І знову, якщо діагональний елемент буде дорівнювати ± 1 , то обчислення будуть більш простими. Для цього міняємо місцями другий і третій рядки (і при цьому змінюється на протилежний знак визначника):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Далі робимо нулі в другому стовпці під головною діагоналлю, для цього до третьої рядку додаємо три другі, а до четвертого - два другі рядки, отримуємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

Далі з третього рядка виносимо (-10) за визначник і робимо нулі в третьому стовпці під головною діагоналлю, а для цього до останнього рядка додаємо третій:

$$\Delta = -10 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-10) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-8) = -80$$

Відповідь $\Delta = -80$

Теорема Лапласа

Нехай Δ - Визначникn-го порядку. Виберемо в ньому довільні k рядків (або стовпців), причому $k \leq n-1$. Тоді сума творів усіх мінорів k-го порядку, які містяться в обраних k рядках (стовпчиках), на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику.

Приклад Використовуючи теорему Лапласа, обчислити визначник
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв'язок. Виберемо в даному визначнику п'ятого порядку два рядки - другий і третій, тоді отримуємо (доданки, які дорівнюють нулю, опускаємо):
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+2+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+4+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -23 + 128 + 90 = 195$$

Відповідь $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 195$

Зворотня матриця

На безлічі матриць не визначена операція ділення, вона замінена множенням на зворотну матрицю.

Невиродженою називається квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю. Квадратна матриця називається **виродженою,** якщо її визначник дорівнює нулю.

Квадратна матриця A^{-1} називається **зворотною** або невиродженою матриці A, якщо $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E- це одинична матриця відповідного порядку.

Зауваження

Зворотня матриця існує тільки для квадратних матриць з не рівними нулю визначниками.

Властивості зворотної матриці:

1 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2 $(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot A^{-1}$

3 $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

4 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Знаходження оберненої матриці

Зворотну матрицю можна знайти за допомогою двох нижче описаних методів.

Знаходження зворотної матриці за допомогою приєднаної матриці

Теорема

Якщо до квадратної матриці дописати праворуч одиничну матрицю того ж порядку і за допомогою елементарних перетворень над рядками домогтися того, щоб початкова матриця, що стоїть в лівій частині, стала одиничною, то отримана праворуч буде зворотною до вихідної.

Приклад

Для матриці $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ знайти зворотну методом приєднаної матриці.

Розв'язок. Приписуються до заданої матриці A праворуч одиничну матрицю другого порядку:

$$A|E = \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Від першого рядка віднімаємо другий (для цього від елемента першого рядка віднімаємо відповідний елемент другого рядка):

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Від другого рядка віднімаємо два перші:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Перший і другий рядки міняємо місцями:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Від другого рядка віднімаємо два перші:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right)$$

Другий рядок множимо на (-1), а до першого рядка додаємо другий:

$$A|E \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 7 \end{array}\right)$$

Отже, зліва отримали одиничну матрицю, а значить матриця, що стоїть в правій частині (праворуч від вертикальної риси), є зворотною до вихідної.

Таким чином, отримуємо, що $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

Відповідь $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

Зауваження

Якщо на деякому етапі в «лівої» матриці виходить нульовий рядок, то це означає, що вихідна матриця зворотної не має.

Полегшений спосіб для матриці другого порядку

Для матриці другого порядку можна трохи полегшити знаходження зворотної, використовуючи такий алгоритм:

Крок 1. Знаходимо визначник Δ заданої матриці, якщо він дорівнює нулю, то робимо висновок, що зворотної матриці не існує, інакше переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Елементи, що стоять на головній діагоналі, міняємо місцями, а в елементів побічної діагоналі міняємо знак на протилежний.

Крок 3. Ділимо всі елементи на Δ і отримуємо зворотну матрицю.

Приклад

Знайти зворотну матрицю для $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Розв'язок.

Крок 1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$,

Тоді зворотної матриці не існує.

Відповідь. Оскільки визначник матриці A дорівнює нулю, то вона не має зворотної.

Приклад

Знайти зворотну матрицю для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Розв'язок. Крок 1. Знаходимо визначник: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

Крок 2. $A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Крок 3. $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Відповідь $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Знаходження зворотної матриці за допомогою союзної матриці

Матриця $\widetilde{A}$ називається **союзною** до квадратної матриці A, якщо елементи матриці $\widetilde{A}$ дорівнюють алгебраїчним доповненням відповідних елементів матриці A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Має місце така властивість: $A \cdot \widetilde{A}^T = |A| \cdot E$

Тоді, якщо $|A| \neq 0$, то $A \cdot \widetilde{A}^T \cdot \frac{1}{|A|} = E$, а тоді $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}^T$

Таким чином, матриця має союзну тоді і тільки тоді, коли вона невироджена.

Приклад

Знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Розв’язок. Обчислюємо визначник матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot(-1)+2\cdot 3\cdot 2+0\cdot 1\cdot 1-$$

$$-1\cdot(-1)\cdot 2-3\cdot 1\cdot 1-2\cdot 0\cdot(-1)=1+12+0+2-3+0=12\neq 0$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то матриця має зворотну. Зворотня матриця A^{-1} до матриці A знаходиться за формулою:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\widetilde{A}^T$$

Знайдемо союзну матрицю $\widetilde{A}$, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-3\cdot 1=1-3=-2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-[2\cdot(-1)-1\cdot 1]=-(-2-1)=3$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot(-1)=6+1=7$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-[0\cdot(-1)-3\cdot 2]=-(0-6)=6$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 2=-1-2=-3$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-[1\cdot 3-1\cdot 0]=-(3-0)=-3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0\cdot 1-(-1)\cdot 2=0+2=2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-[1\cdot 1-2\cdot 2]=-(1-4)=3$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 0=-1-0=-1$$

Таким чином, $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 7\\ 6 & -3 & -3\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

транспонуємо цю матрицю (тобто рядки матриці робимо стовпцями з тим же номером):

$$\widetilde{A}^T=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

Отже, $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$

Відповідь $A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}-2 & 6 & 2\\ 3 & -3 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}$

Лінійно залежні і лінійно незалежні рядки

Поняття лінійно залежних і лінійно незалежних рядків, необхідне для визначення рангу матриці, будемо розглядати в наступній темі.

Лінійна комбінація рядків

Лінійною комбінацією (ЛК) рядків $s_1, s_2, \ldots, s_m$ матриці A називається вираз $\lambda_1\cdot s_1+\lambda_2\cdot s_2+\ldots+\lambda_m\cdot s_m$

ЛК називається **тривіальною,** якщо всі коефіцієнти λ_i дорівнюють нулю одночасно.

Приклад

$0\cdot s_1+0\cdot s_2+0\cdot s_m$

Зауваження. Тривіальна ЛК дорівнює нульовому рядку.

ЛК називається **нетривіальною,** якщо хоча б один з коефіцієнтів λ_i відмінний від нуля.

Приклад

$0\cdot s_1+0\cdot s_2+1\cdot s_m$

Зауваження

Нетривіальна ЛК теж може бути рівною нульовому рядку.

Приклад

$1\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$

Лінійно залежні і незалежні рядки

Система рядків називається **лінійно залежною (ЛЗ),** якщо існує їх нетривіальна ЛК, рівна нульовий рядку.

Приклад

Система рядків $\{s_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\}$, лінійно залежна, оскільки ЛК цих рядків $1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2$ дорівнює нульовому рядку.

Система рядків називається **лінійно незалежною (ЛНЗ),** якщо тільки тривіальна ЛК дорівнює нульовий рядку.

Приклад

Показати, що система рядків $\{s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ є ЛНЗ.

Розв'язок. Складемо ЛК заданих рядків:

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \right.$$

Тобто ЛК цих рядків дорівнює нульовому рядку, тільки якщо коефіцієнти рівні нулю одночасно.

5.6. Ранг матриці. Ранг системи рядків і стовпців матриці

Рангом системи рядків називається максимальна кількість лінійно незалежних рядків цієї системи.

У кожній матриці можна зв'язати два ранги: рядковий ранг (ранг системи рядків) і стовпцевий ранг (ранг системи стовпців).

Теорема

Рядковий ранг матриці дорівнює її стовпцевому рангу.

Ранг матриці

Рангом матриці A називається ранг її системи рядків або стовпців.

Позначається $rangA$

На практиці для знаходження рангу матриці використовують таке твердження: ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків після приведення матриці до ступінчастого вигляду.

Елементарні перетворення над рядками (стовпцями) матриці не змінюють її рангу.

Ранг ступінчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Приклад

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Знайти ранг матриці

Розв'язок. За допомогою елементарних перетворень над її рядками зведемо матрицю A до вигляду «сходів». Для цього спочатку від третього рядка віднімемо дві другі:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Від другого рядка віднімаємо четвертий рядок, помножений на 4; від третього - два четверті:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

До другого рядка додамо п'ять перших, до третього - три треті:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Міняємо місцями перший і другий рядки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Далі четвертий і перший рядки:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow rangA = 2$$

Відповідь $rangA = 2$

Метод мінорів

Теорема

Ранг матриці дорівнює найбільшому порядку відмінного від нуля мінору .

На цій теоремі базується ще один метод знаходження рангу матриці - **метод мінорів.** Суть цього методу полягає в знаходженні мінорів, починаючи з нижчих порядків і рухаючись до більш високих. Якщо мінор n -го порядку не дорівнює нулю, а всі мінори $(n+1)$ -го дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнюватиме n .

Приклад

Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$, використовуючи метод мінорів.

Розв'язок. Мінором мінімального порядку є мінори першого порядку, які дорівнюють елементам матриці A. Розглянемо, наприклад, мінор $M_1 = 1 \neq 0$,розташований в першому рядку і першому стовпці. Облямовують його за допомогою другого рядка та другого стовпця, отримуємо мінор $M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Розглянемо ще один мінор другого порядку, для цього мінор M_1 облямовують за допомогою другого рядка і третього стовпця, тоді маємо мінор $M_2^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, тобто ранг матриці не менший двох. Далі розглядаємо мінори третього порядку, які облямовують мінор M_2^2. Таких мінорів два: комбінація третього рядка з другим стовпцем або з четвертим стовпцем. Обчислюємо ці мінори:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

які містить два пропорційні шпальти (перший і другий); другий мінор

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

перетворимо таким чином: до першого рядка додамо третій, а до другого - два треті:

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 0 & 15 & 12 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

І оскільки перший і другий рядки пропорційні, то мінор дорівнює нулю.

Таким чином, всі мінори третього порядку дорівнюють нулю. А, значить, ранг матриці A дорівнює двом: $rang A = 2$

Відповідь $rang A = 2$

6. Приклади розв'язування задач

1. Баскетболіст А з деякого положення потрапив у кільце 4 рази при 11 кидках. Баскетболіст В із цього ж положення – 6 разів при 18 кидках. Якому із гравців довірити виконання штрафного удару із цього положення ?

Розв'язок. Знайдемо відносні частоти влучення в кільце цими гравцями

$$\mu(A) = \frac{4}{11}$$

$$\mu(B) = \frac{6}{18}$$

Оскільки

$\frac{6}{18} = \frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{4}{11}$, то виконання штрафного краще довірити гравцеві А. Якщо відносна частота більша, то більша й упевненість в успіху .

2. Містер Сміт повідомляє, що в нього двоє дітей і принаймні одна дитина хлопчик. Яка ймовірність того, що друга дитина - теж хлопчик ?

Розв'язок. 1/3 = 33,(3) %.

Якщо сказано, що одна дитина хлопчик, то вариантів 3 : (дівчинка, хлопчик), (хлопчик, дівчинка) і (хлопчик, хлопчик), а ймовірність 33,(3)%.

3. У грошовій лотереї випущено 100 квитків. Розігрується один виграш в 50 грн. і 10 виграшів по 1 грн. Знайти закон розподілу випадкової величини X – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного квитка.

Розв'язок. Напишемо можливі значення X: x_1=50, x_2=1, x_3=0.

Імовірності цих можливих подій такі:

p_1=0,01, p_2=0,1 , p_3=1-(p_1+ p_2)=0,89.

Тоді закон розподілу має вигляд:

X	50	10	0
P	0,01	0,1	0,89

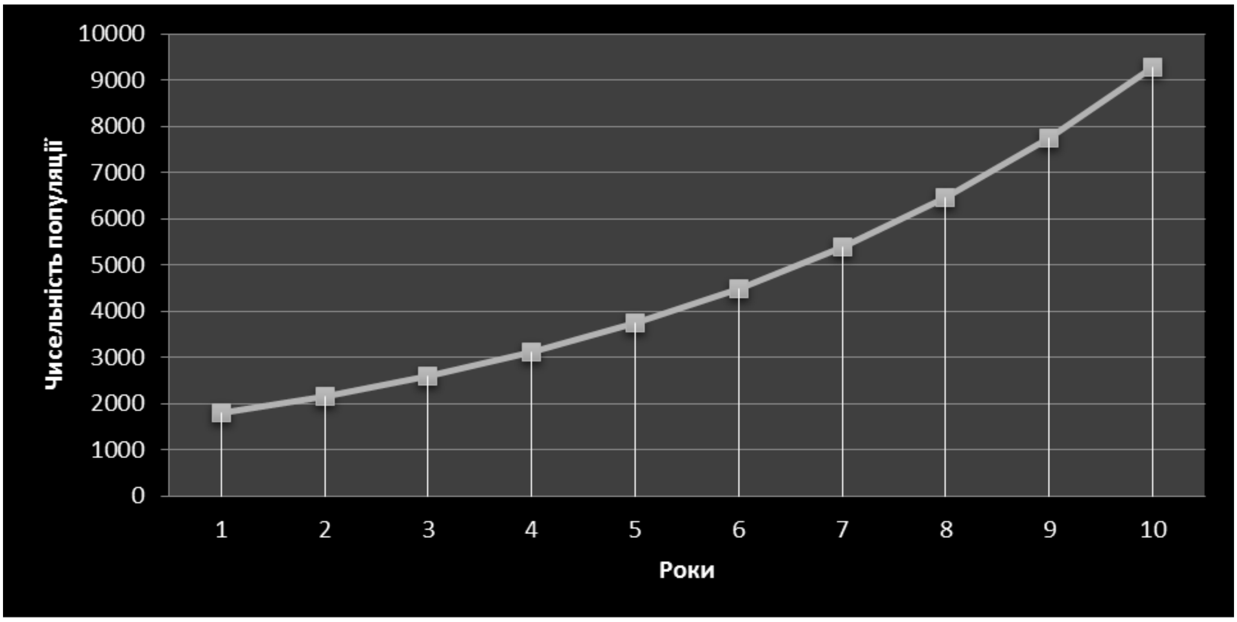
4. У замкнутому районі живуть хижаки і їхні жертви - Рись євразійська та Кабарга сибірська. Рисі полюбляють харчуватись тільки кабаргами, кабарги харчуються рослинною їжею – наземні лишайники, які наявні завжди в надлишку. Цикли чисельності популяції кабарги викликані періодичним зниженням якості і кількості рослин, якими харчується кабарга, що своєю чергою викликає скорочення популяції цих тварин, створюючи можливість для відновлення рослинності після її надмірного виїдання. Коливання чисельності рисі пасивно слідують за циклічними змінами

популяції їх жертви. Початкова чисельність популяції кабарги (жертви) – 1500 особин. Nк=1500

Початкова чисельність популяції рисі (хижак) - 15 особин. Np=15. Частина популяції кабарги, що виживає до закінчення кожного року, збільшує свою чисельність на 20%. Рк=0,2. Річний приріст популяції рисі – 15%. Pp=0,15. Одна рись споживає по 29 кабаргів щорічно. Rp=29. Смертність кабарги з інших причин дорівнює нулю. Смертність рисі дорівнює нулю. Розрахувати, якою буде чисельність популяції кабарги через 1 - 10 років при повній відсутності рисі.

Розв'язок

1) При t=1, Nк=1500+1500*0,2=1800
2) При t=2 Nк=1800+1800*0,2=2160
3) При t=3 Nк=2160+2160*0,2=2592
4) При t=4 Nк=2592+2592*0,2=3110
5) При t=5 Nк=3110+3110*0,2=3732
6) При t=6 Nк=3732+3732*0,2=4478
7) При t=7 Nк=4478+4478*0,2=5374
8) При t=8 Nк=5374+5374*0,2=6449
9) При t=9 Nк=6449+6449*0,2=7739
10) При t=10 Nк=7739+7739*0,2=9287



Відповідь: На графіку ми бачимо стійкий приріст популяції з кожним роком. При відсутності хижаків кількість особин в популяції стрімко зростає, оскільки зростання чисельності кабарги нічим не стримується.

7. Задачи для самостійної роботи

1. При температурі в березні –25^{0}С імовірність того, що генеративні бруньки на деревах вимерзнуть 0,8. Скільки абрикосових дерев дадуть врожай у цьому випадку, якщо в саду 40 дерев?

2. На ділянці поля А зростає ячмінь, врожайність 3 ц/га, на ділянці Б – пшениця, врожайність 5 ц/га, на ділянці В – овес, врожайність 6 ц/га. Весь отриманий врожай зібрали і змішали. Яка імовірність, що з купи ми навмання дістанемо пшеничне зерно, якщо поле А 2 га, Б – 1 га, В – 3 га.

3. У лісопарку 800 дерев. З 70 розглянутих дерев листоверкою ушкоджено 30 дубів, 11 лип, 2 вільхи. Скільки дерев у лісі ушкоджено листоверткою, якщо у вибірці 50 дубів, 15 лип, 5 вільхи: а)усього; б) кожної пароди.

4. Із 800 дерев дубового гаю розглянули 100. 10 із них повністю ушкоджені листоверткою, 60 – наполовину. Яка вірогідність ушкодження кожного дерева.

5. У біоцентрі 25 видів злакових рослин, 7 видів із них записані в Червону книгу. На галявину забігла зграя зайців. Відомо, що вони вигризли 1 вид злакових рослин повністю. Яка імовірність того, що це був вид, занесений у Червоної книги?

6. У парку з’явилося 240 амурських тигрят. Із них 64 білого кольору. Яка імовірність їх зустріти в парку?

7. У Зоопарку з’явилося 100 мавп. При вибірці взяли 10 мавп; яка імовірність того, що в мавп однакова загальна вага?

8. У біоцентрі 153 куріпки, 51 із них пташенята. Чому дорівнює відносна частота зустрічі пташеняти?

9. У штучній водоймі розводять риб. Запустили 158 самок виду А, 150 із яких сріблистого кольору і 8 чорного. Рибалка впіймав 1 рибину. Яка імовірність того, що вона була чорною.

10. Було відібрано 120 проб ґрунтів. Імовірність знаходження в пробах свинцю (Pb)=0,48, а знаходження H_2S =0,64 (у пробах H_2S і Pb не можуть знаходиться одночасно в одній пробірці). Скільки проб із H_2S і Pb ?

11. Над містом зависла хмара SO_2. Сильний вітер (здатний здути цю хмару за межі міста) буває в цьому районі 120 днів у році. Слабкий вітер (нездатний здути цю хмару за межі міста) дує 174 дні на рік. Яка імовірність того, що хмару здує? Яка імовірність того, що хмара залишиться в місті?

12. Рослини видів А і В є видами-індикаторами забруднення ґрунтів нітратами. Вид А проростає в кожній 5-й лунці з 50-ти, а вид В – у кожній другій із 50-ти. Рослини посадили в 100 лунок (у кожну лунку обидва види). Яка імовірність того, що в одній лунці проростуть обидва види – індикатори)?

13. Молодіжна організація клуб «Білі ворони» провела акцію екологічного руху «Допоможемо пірнатому другові» із поширенням листівок із закликом у зимовий час підгодовувати птахів і робити годівниці. Було розповсюджено 500 листівок. Кожний п’ятий містянин, що одержав листівку,

ігнорував її. Інші відгукнулися на заклик – підгодовували птахів. Половина з них зробила годівниці. Яка частота зустрічей містян, що зробили годівниці?

14. У генеральній вибірці 1000 студентів ЗНУ. З них вибрали 60 студентів. Кожний другий мав ріст вище 170 см. Половина від решти - від 160 до 170. Інші нижчі від160 см. Скільки студентів із генеральної вибірки мають ріст, нижчий за 160 см?

15. Відносна частота потрапляння смогу на територію міста в минулі роки дорівнює 0,74. Знайти число днів потрапляння (знаходження) смогу в місті.

16. Відносна частота зараження вітрянкою у дитячому садку 0,67. Знайти число заражених дітей, якщо усього в групі 40 осіб.

17. У лабораторії знаходиться 30 проб води. Лаборант забув наклеїти на них етикетки. Відомо, що проби з двома видами мікробів: А і В, а проб із мікробом А –20. Також відомо, що в 1 пробі не може одночасно бути мікроби А і В. Навмання беруть пробу. Яка імовірність узяти пробу з мікробом В?

18. У лабораторії 100 пробірок із пробою води, у кожній другій реакція позитивна на утримування підвищене (NO_3) і в кожній п'ятій (SO_4) – вимиті дощем із ґрунтів.

19. У лабораторному ящику 50 кроликів. Кожний п'ятий із них чорного кольору. Кролики були заражені генетичним вірусом. Потім було з'ясовано, що вірус пов'язаний за фенотипом з чорним забарвленням. Яка імовірність того, що вийнятий кролик буде заражений?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрии. / С.А.Айвазян – М: ЮНИТИ, 2000. – 1022 с.
2. Боровиков В. STATISTICA: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. / В.Боровиков – СПб: Питер, 2001.-656 с.
3. Брандт Э. Статистические методы анализа наблюдений. / Э.Брандт -М.: Мир, 1975. -312 с.
4. Баврин, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Иван Иванович Баврин. – М. : Высшая школа, 2005. – 161 с. : ил. – Режим доступа: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Tamurov/0005009%20.djvu.
5. Бочаров, П. П. Теория вероятностей. Математическая статистика / Павел Петрович Бочаров, Александр Владимирович Печинкин. – 2-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 296 с. – Режим доступа: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi18/0012032.djvu.
6. Выск, Н. Д. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пос. / Н. Д. Выск. – М. : МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского, 2011. – 170 с. – Режим доступа: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi32/0028559.pdf.
7. Гмурман В.Е. Теории вероятностей и математическая статистика./ В.Е.Гмурман -М,: Высш.шк., 1972. - 368 с.
8. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: Методы планирования эксперимента. / Н.Джонсон, Ф.Лион. –М.: Мир, 1981. –520 с.
9. Ибрагимов, Н. Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели. Симметрия и принципы инвариантности / Наиль Хайруллович Ибрагимов ; пер. с англ. И.С. Емельяновой. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госун-та им. Н.И. Лобачевского, 2007. – 421 с. – Режим доступа: http://ebooks.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi6/0026573.djvu.
10. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. / Н.В.Смирнов, И.В.Дунин-Барковский - К.: Физматгиз, 1969.-512 с.
11. Статистические методы для ЭВМ / Под ред.К.Энслейна, Э.Рэлстона, Г.С.Уилфа. – М.:Наука, 1986. – 464 с.
12. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами. / Д.Химмельблау -М.:, 1973.
13. Додж М., Кината К., Стинсон К. Эффективная работа с Excel 2000. / М.Додж, К Кината., К. Стинсон Пер.с англ.- СПб: Питер,2000.

Навчальне видання
(українською мовою)

Маслова Оксана Володимирівна

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ В ЕКОЛОГІЇ

Навчальний посібник для студентів освітнього рівня «бакалавр» напряму підготовки «Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування»

Рецензент к. ф.-м. н., доцент О.О. Головань
Відповідальний за випуск О.Ф.Рильський
Коректори А.О.Надь