

Лекція №1

Тема: «Поняття числових множин. Принцип математичної індукції»

План

1. Поняття числових множин.
2. Поняття функції.
3. Графіки елементарних функцій.
4. Метод математичної індукції.
5. Біном Ньютона

Предметом математичного аналізу є вивчення функції за допомогою процесів граничного переходу.

1. Поняття числових множин.

Під *множиною* розуміється будь-яка сукупність об'єктів, що називаються елементами множини, об'єднаних за якоюсь ознакою. Множини позначають великими латинськими літерами, а їх елементи – відповідно маленькими.

Запис $a \in A$ означає, що об'єкт a є елементом множини A (належить множині A). У протилежному випадку $a \notin A$. Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається $\emptyset$.

Окремо слід відзначити числові множини. Їх позначають теж великим латинськими літерами, але з рискою, щоб відокремити їх від будь-якої іншої множини і підкреслити, що це числова множина.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$$\mathbb{Z} = \{\dots, n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathbb{I}$ – множина ірраціональних чисел. Наприклад, $\sqrt{5}$ (нескінченні неперіодичні дробі).

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел. Це всі числа нескінченної прямої.

Математичний текст українською мовою зазвичай містить, крім букв української абетки та цифр, літери латинського та грецького алфавітів та спеціальні символи як-то похідна, інтеграл та інші. Для лаконічності формулювань, математики, незалежно від мови, застосовують також квантори та логічні символи, з якими ми зараз познайомимося.

- Квантор загальності $\forall$ – „для всіх”, „для довільного”.
- Квантор існування $\exists$ – „існує”, „існує хоча б один”.

- Імплікація $\Rightarrow$ – „впливає”.
- $\Leftrightarrow$ – „тоді й тільки тоді”, „необхідно й достатньо”.
- $:=$ або $\stackrel{\text{def}}{=}$ – „дорівнює за означенням”.
- Кон’юнкція $\wedge$ – „і”. Для тверджень P і Q запис $P \wedge Q$ означає, що справджується кожне з тверджень P , Q .
- Диз’юнкція $\vee$ – „або”. Для тверджень P і Q запис $P \vee Q$ означає, що справджується хоча б одне з тверджень P , Q .

Приклад 1.1.1. $\forall x: x^2 + 1 > 0$ – „для довільного x виконується нерівність $x^2 + 1 > 0$.”

Приклад 1.1.2. $\exists x: x^2 = 4$ – „існує x , такий, що $x^2 = 4$.”

Приклад 1.1.3. $\exists! x: x^3 = 8$ – „існує рівно один x , такий, що $x^3 = 8$.”

2. Поняття функції.

Нехай X , Y – дві множини. **Відображенням** f множини X у множину Y називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність рівно один елемент $y \in Y$.

Позначення: $f: X \rightarrow Y$; $X \xrightarrow{f} Y$; $y = f(x)$, $x \in X$.

Терміни відображення, функція, перетворення, відповідність – синоніми.

Нехай $f: X \rightarrow Y$ і $x \in X$. Елемент $y = f(x)$ називається **образом** елемента x при відображенні f . Множину X називають **множиною визначення** відображення f і позначають через $D(f)$. Множина

$$E(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$$

називається **множиною значень** відображення f .

Нехай $f: X \rightarrow Y$ і $X_0 \subset X$. Визначимо функцію $f_0: X_0 \rightarrow Y$ за таким правилом:

$$\forall x \in X_0 : f_0(x) := f(x).$$

Функція f_0 називається **звуженням** функції f на множину X_0 , а функція f – **продовженням** функції f_0 на множину X .

Нехай $f: X \rightarrow Y$ і $A \subset X$, $B \subset Y$. **Образом множини A** при відображенні f називається множина

$$f(A) := \{f(x) | x \in A\}.$$

Прообразом множини B при відображенні f називається множина

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Зауважимо, що $f(A) \subset Y$, $f^{-1}(B) \subset X$.

3. Графіки елементарних функцій.

Побудувати графіки наступних функцій і вказати їх область визначення та область значення (на наступну лекцію буде самотійна робота!).

- | | | |
|------------------------|------------------------------------|--|
| 1) $y = \frac{1}{x}$; | 8) $y = \sin x$; | 16) $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; |
| 2) $y = x^2$; | 9) $y = \cos x$; | 17) $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; |
| 3) $y = x^3$; | 10) $y = \operatorname{tg} x$; | |
| 4) $y = \sqrt{x}$; | 11) $y = \operatorname{ctg} x$; | |
| 5) $y = a^x$; | 12) $y = \arcsin x$; | |
| 6) $y = \log_a x$; | 13) $y = \arccos x$; | |
| 7) $y = x $; | 14) $y = \operatorname{arctg} x$; | |
| | 15) $y = \operatorname{arcctg} x$ | |

Приклади неелементарних функцій:

$$18) y = \operatorname{sign} x;$$

$$19) y = [x];$$

$$20) y = \{x\}.$$

4. Метод математичної індукції.

Метод математичної індукції застосовується для доведення тотожностей, нерівностей, біному Ньютона. Щоб довести, що деяке твердження вірно для $\forall n \in \mathbb{N}$, достатньо показати, що:

- 1) твердження $A(n)$ вірно при $n = 1$ або найменшого з області визначення;
- 2) припускається справедливність твердження при $n = k$, де $k \in \mathbb{N}$;
- 3) доводиться, що твердження вірно при $n = k + 1$.

Такий метод називають *методом математичної індукції*.

5. Біном Ньютона

Біном Ньютона має вигляд:

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + C_n^k x^{n-k} a^k + \dots + C_n^n a^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} a^k ,$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.