

Лекція №2

Тема: «Поняття множини та теоретико-множинні операції»

План

1. Деякі поняття з теорії множин.
2. Операції над множинами.

1. Деякі поняття з теорії множин.

Множина – одне з початкових понять і тому означення цього поняття, тобто зведення його до інших, більш простих понять, не дається. Видатний німецький математик, фундатор теорії множин Георг Кантор (1845 – 1918) так роз'яснював сутність поняття множини: множина чи сукупність – це збірка певних і різних об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, що розглядається як ціле.

Прикладами множин є множина N всіх натуральних чисел, множина Z всіх цілих чисел, множина Q всіх раціональних чисел, множина всіх точок на прямій і т.д.

Об'єкти, які складають множину, називаються **елементами** або **точками** множини. Множину вважають визначеною, якщо про кожний об'єкт, що розглядається, можна з'ясувати належить він цій множині чи ні. Запис $x \in A$ означає, що елемент x належить множині A . Той факт, що елемент x не належить множині A позначають $x \notin A$. Наприклад, $2 \in Z$; $0, (6) \notin Z$.

Якщо множина A складається із елементів $a, b, c, \dots, p$, то це записують так:

$$A = \{a, b, c, \dots, p\}.$$

Наприклад, $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множина всіх натуральних чисел, $Z = \{\dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots\}$ – множина всіх цілих чисел.

Більш загальний спосіб задання множини полягає у тому, щоб вказати властивість її елементів. Нехай X – універсальна множина (така множина вибирається в залежності від проблеми, що розглядається). Певна властивість

P стосується елементів універсальної множини X , тобто для кожного елемента $x \in X$ можна з'ясувати, має він властивість P чи ні. Запис $P(x)$ означає, що елемент x має властивість P . За допомогою властивості P виокремлюють множину всіх тих елементів, які мають властивість P . Цю множину позначають так:

$$\{x \in X \mid P(x)\} -$$

„множина всіх тих елементів $x \in X$, що мають властивість P .” Наприклад:

$$N = \{x \in Z \mid x > 0\},$$

$$Q = \left\{ x \in R \mid \exists p \in Z, \exists q \in N: x = \frac{p}{q} \right\} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in N \right\}.$$

Множину, що не містить жодного елемента, називають **порожньою** і позначають символом $\emptyset$. Наприклад, $\{x \in Z \mid x^2 < 0\} = \emptyset$.

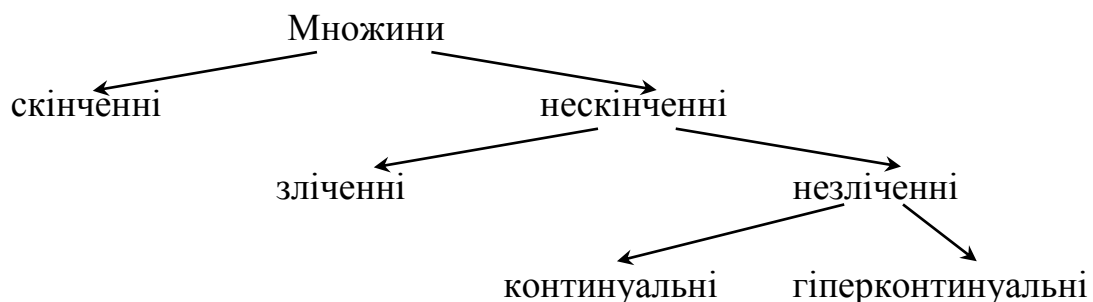
Множина A називається **підмножиною** множини B , якщо

$$\forall x \in A: x \in B.$$

Позначення: $A \subset B$. Наприклад, $N \subset Z \subset Q$. Порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини A : $\emptyset \subset A$.

Множини A і B називаються **рівними**, якщо вони складаються із одних і тих самих елементів:

$$(A = B) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$



Означення 1.22. Множини A і B називають еквівалентними, якщо за певним законом можна встановити взаємно-однозначну відповідність елементів. Еквівалентні множини позначають: $A \sim B$.

Множина X рівнопотужна множині Y , якщо існує бієктивне відображення X на Y . Відношення рівнопотужності є відношенням еквівалентності і розбиває сукупність всіх множин на класи еквівалентних між собою. Множини одного класу еквівалентності мають однакову кількість елементів, різних – різну.

Означення 1.23. Клас еквівалентних множин, якому належить множина X , називають потужністю множини X , або кардиналом чи кардинальним числом, позначається $cardX$ або $\overline{X}$. Якщо $X \sim Y$, то пишуть, що $cardX = cardY$.

Кажуть, що $cardX \leq cardY$, якщо X рівнопотужна деякій підмножині множини Y . Множина може бути рівнопотужна своїй підмножині. Можливість для множини бути рівнопотужною своїй частині є характерною ознакою нескінченних множин, яку Дедекінд (R. Dedekind) запропонував вважати означенням нескінченної множини. Множина називається скінченною (по Дедекінду), якщо вона не рівнопотужна ніякій своїй підмножині. В іншому випадку вона нескінченна.

Наведемо основні властивості потужностей:

$$1) (cardX \leq cardY) \wedge (cardY \leq cardZ) \Rightarrow (cardX \leq cardZ);$$

2) $(cardX \leq cardY) \wedge (cardY \leq cardX) \Rightarrow (cardX = cardY)$ – теорема Шредера-Бернштейна (F. Schröder);

$$3) \forall X, Y (cardX \leq cardY) \vee (cardY \leq cardX) \text{ – теорема Кантора.}$$

Розглянемо множину всіх підмножин множини X : $P(X)$. Тоді справедлива теорема Кантора: $cardX \leq cardP(X)$. Також можна стверджувати, що $cardP(X) = 2^{cardX}$.

Останнє твердження показує, що якщо нескінченні множини існують, то і „нескінченності” бувають різні.

Потужність скінченної множини дорівнює кількості її елементів. Нескінченні множини, еквівалентні множині N , називаються зчисленими множинами, а їх потужність називають зчисленною потужністю і позначають a .

Наведемо основні властивості зчислених множин.

1. Будь-яка нескінченна підмножина зчисленої множини є зчисленною множиною.
2. Якщо від зчисленої множини відкинути скінченну множину елементів, то потужність нескінченної множини, яка залишилась, буде a .
3. Зчисленна множина зчислених множин є зчисленною множиною.
4. Об'єднання скінченної кількості зчислених множин є зчисленною множиною.

Множина $Z \sim N$, тобто $\text{card}Z = \text{card}N = a$. Множина $Q \sim N$, тобто $\text{card}Q = \text{card}N = a$.

Означення 1.24. Множину R називають числовим континуумом, а його потужність – потужністю континуума. Потужність множини дійсних чисел позначають $\text{card}R = c$.

Відомо, що $\text{card}N < \text{card}R$ (теорема Кантора). Доведення випливає з доведення незчисленності множини точок відрізка $[0,1]$. З теореми випливає, що $Q \neq R$ і існують ірраціональні числа. Також відомо, що $2^a = c$.

Вже на початку розвитку теорії множин виникло питання, чи існують множини проміжної потужності між зчисленими множинами і множинами потужності континуума, і було зроблено припущення, яке називають гіпотезою континуума, що проміжні потужності відсутні. В 1963 році американець Коен (I. Cohen) довів, що ця і протилежна гіпотези окремо не є протиріччям прийнятій в теорії множин аксіоматиці, а тому гіпотеза континуума не може бути ні доведена, ні заперечена.

2. Операції над множинами.

На рисунку всі можливі логічні відношення для скінченного набору множин зображають у вигляді діаграм Венна.

Об'єднанням множин A і B називається множина всіх тих елементів, які належать хоча б одній з множин A , B .

Позначення: $A \cup B$. Таким чином,

$$A \cup B := \{x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Наприклад, $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Перетином множин A і B називається множина всіх тих елементів, які належать кожній з множин A , B .

Позначення: $A \cap B$. Отже,

$$A \cap B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Наприклад, $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$.

Різницею множин A і B називається множина всіх тих елементів множини A , які не належать множині B .

Позначення: $A \setminus B$. Таким чином,

$$A \setminus B := \{x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Наприклад, $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$.

Симетричною різницею множин A і B називається множина всіх тих елементів, які належать рівно одній з множин A , B .

Позначення: $A \Delta B$. Отже,

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Наприклад, $\{1, 2, 3, 4\} \Delta \{3, 4, 5\} = \{1, 2, 5\}$.

Доповненням множини A називається множина

$$\overline{A} := X \setminus A.$$

Наприклад, якщо $X = \mathbb{N}$ і $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ – множина всіх непарних натуральних чисел, то $\overline{A} = \{2, 4, 6, \dots\}$ – множина всіх парних натуральних чисел. Зауважимо, що $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{X} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = X$.

Властивості операцій над множинами

$$1^0. \left. \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} \text{комутативність операцій } \cup \text{ і } \cap.$$

$$\triangleright x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A.$$

Звідки, з одного боку, маємо

$$(x \in A \cup B \Rightarrow x \in B \cup A) \Leftrightarrow A \cup B \subset B \cup A,$$

а, з іншого, –

$$(x \in B \cup A \Rightarrow x \in A \cup B) \Leftrightarrow B \cup A \subset A \cup B,$$

Тому із означення рівності множин доходимо висновку: $A \cup B = B \cup A$

Комутативність перетину множин довести самостійно.

$$2^0. \left. \begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right\} \text{асоціативність.}$$

$$3^0. \left. \begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array} \right\} \text{дистрибутивність.}$$

$$4^0. \left. \begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \end{array} \right\} - \text{закони двоїстості.}$$

$$\begin{aligned} \triangleright x \in \overline{A \cap B} &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \overline{x \in A \cap B} \Leftrightarrow \\ \overline{x \in A \wedge x \in B} &\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B} \Leftrightarrow \\ x &\in \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

$$\hat{A} \hat{\cap} \hat{B} : \left. \begin{array}{l} \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \\ \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$5^0. \bar{\bar{A}} = A$$

$$6^0. A \subset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}.$$