

Лекція №3

Тема: «Верхня і нижня межі числових множин та функцій»

План

1. Обмежені числові множини.
2. Деякі числові множини. Їх позначення.
3. Відкриті і замкнуті множини.
4. Відображення функцій (ін'єктивне, с'юрєктивне, бієктивне).

1. Обмежені числові множини.

Нехай $\{x\} = A$ – множина нескінченних десяткових дробів.

Оскільки надалі ми назвемо множиною дійсних чисел сукупність усіх н.д.д., що задовольняють певним вимогам, то надалі замість «н.д.д.» будемо казати «число». Множина дійсних чисел буде позначеною через $\mathbb{R}$.

Означення 1.29

$\{x\}$ обмежена зверху множина $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \{x\} \ x \leq M$.

Число s називають *верхньою межею* множини $\{x\}$.

Верхніх меж у множини може бути нескінченна кількість. Наприклад, якщо $\{x\}$ – множина усіх недодатних чисел, тоді за верхню межу можна взяти будь-яке невід'ємне число.

 **Означення 1.30** Найменшу серед усіх верхніх меж обмеженої зверху множини називають *точною верхньою межею*. Позначення: $\sup\{x\} = \bar{x}$ ¹. Іншими словами:

$$\sup\{x\} = \bar{x} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{aligned} &1) \forall x \in \{x\} \ x \leq \bar{x}, \\ &2) \forall x \in \mathbb{R} : x < \bar{x} \ \exists x' \in \{x\} : x' > x. \end{aligned}$$

Умова 1) означає, що $\bar{x}$ – верхня межа, а умова 2) означає, що $\bar{x}$ – найменша із усіх верхніх меж.

Або на мові епсилон (ε):

$$\bar{x} = \sup\{x\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{aligned} &1) \forall x \in \{x\} \ x \leq \bar{x} ; \quad 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in \{x\} : x' \geq \bar{x} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Розглядаючи множину, що утворюється із членів послідовності, тобто $\{x_n\}$ або множину значень функції $f(x)$, заданих на множині E . Тоді для цих множин можна дати означення точних верхніх меж:

Означення 1.31

$$\bar{x} = \sup\{x_n\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{aligned} &1) \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq \bar{x} ; \quad 2) \forall x \in \mathbb{R} : x < \bar{x} \ \exists n \in \mathbb{N} : x_n > x, \\ &\Leftrightarrow 1) \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq \bar{x} ; \quad 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : x_n > \bar{x} - \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\bar{y} = \sup_E f(x), E \subset D(f) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{aligned} &1) \forall x \in E \ f(x) \leq \bar{y} ; \quad 2) \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E : f(x) > \bar{y} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Означення 1.32

$\{x\}$ – *необмежена зверху множина* $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M \in \mathbb{R} \ \exists x \in \{x\} : x > M$.

¹ $\sup$ – перші три літери латинського слова *supremum* («супремум»), яке перекладається як «найвище»

Домовленість: якщо множина необмежена зверху, то $\sup\{x\} = +\infty$.

Означення 1.33

$\{x\}$ – обмежена знизу множина $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \{x\} \quad x \geq m$,

Число m називають *нижньою межею* множини $\{x\}$.

Означення 1.34 Найбільшу серед усіх нижніх меж обмеженої знизу множини називають точною нижньою межею. Позначення: $\underline{x} = \inf\{x\}$ ². Тобто

$$\underline{x} = \inf\{x\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} 1) \forall x \in \{x\} \quad x \geq \underline{x}; 2) \forall x \in \mathbb{R} : x > \underline{x} \exists x' \in \{x\} : x' < x.$$

Якщо точна верхня межа (супремум) множини належить цій множині, тобто $\bar{x} = \sup\{x\} \in \{x\}$, то кажуть, що супремум досягається і пишуть $\bar{x} = \max\{x\}$. Аналогічно, якщо $\underline{x} = \inf\{x\} \in \{x\}$, то інфімум досягається і $\underline{x} = \min\{x\}$.

Наприклад, Розглянемо множину $\{x \geq 0\}$. Для неї
 $\inf\{x \geq 0\} = 0 = \min\{x \geq 0\}, \quad \sup\{x \geq 0\} = \infty$ (довести!).

Випишемо зведення означень в інших позначеннях:

A – обмежена зверху множина

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x \leq M;$$

A – необмежена зверху множина

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in A : x > M;$$

A – обмежена знизу множина

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A \quad x \geq m;$$

A – необмежена знизу множина

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists x \in A : x < m;$$

$f(x)$ – обмежена зверху

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad f(x) \leq M;$$

функція на $E \subset D(f)$

$f(x)$ – необмежена зверху

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in E : f(x) > M;$$

функція на $E \subset D(f)$

$f(x)$ – обмежена знизу

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in E \quad f(x) \geq m;$$

функція на $E \subset D(f)$

$$f(x) \text{ – необмежена знизу} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists x \in E : f(x) < m;$$

² inf – перші три літери латинського слова infimum («інфімум»), яке перекладається як «найнижче»

функція на $E \subset D(f)$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – обмежена зверху

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M ;$$

послідовність

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – необмежена зверху

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : x_n > M ;$$

послідовність

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – обмежена знизу

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m ;$$

послідовність

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – необмежена знизу

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall m \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : x_n < m ;$$

послідовність

Точні верхня та нижня межі множини

$$M = \sup A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} 1) & x \leq M \quad \forall x \in A; \end{array}$$

$$2) \forall x < M \quad \exists x' \in A : x' > x ;$$

$$\text{або} \quad 1) x \leq M \quad \forall x \in A; \quad 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x > M - \varepsilon ;$$

$$m = \inf A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} 1) & x \geq m \quad \forall x \in A; \quad 2) \end{array}$$

$$\forall x > m \quad \exists x' \in A : x' < x ;$$

$$\text{або} \quad 1) x \geq m \quad \forall x \in A; \quad 2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : x < m + \varepsilon ;$$

Точні верхня та нижня межі функції

$$M = \sup_{x \in E} f(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} 1) & f(x) \leq M \quad \forall x \in E; \end{array}$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : f(x) > M - \varepsilon ;$$

$$m = \inf_{x \in E} f(x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} 1) & f(x) \geq m \quad \forall x \in E; \end{array}$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E : f(x) < m + \varepsilon ;$$

Точні верхня та нижня межі послідовності

$$M = \sup x_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} 1) & x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} ; \end{array}$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : x_n > M - \varepsilon ;$$

$$m = \inf x_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{array}{ll} 1) & x_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N} ; \end{array}$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : x_n < m + \varepsilon.$$

Теорема 1.23 (основна теорема теорії дійсних чисел): Для будь-якої обмеженої зверху (знизу) множини існує точна верхня (нижня) межа.

Доведення проведемо для точної верхньої межі (супремума). Доведемо, що якщо множина н.д.д. $\{x\}$ – обмежена зверху, то $\exists \bar{x} = \sup\{x\}$.

Розглянемо два випадки:

I. $\{x\}$ містить додатні нескінченні десяткові дробі (н.д.д.);

II. $\{x\}$ складається лише з недодатних н.д.д..

I. В множині $\{x\}$ розглянемо підмножину н.д.д. додатних н.д.д. $A = \{x > 0\}$. За припущенням, ця множина не порожня, тому $\{x > 0\}$ – обмежена зверху.

Тоді множина цілих частин елементів $x \in \{x\}$ обмежена зверху, тобто

$A_0 = \{x_0 \in \mathbb{N} : x = x_0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \dots \in A\}$ – обмежена зверху.

Оскільки $\{x_0\}$ – це обмежена зверху підмножина в $\mathbb{N}$, то вона має найбільший елемент, тобто

$$\exists \bar{x}_0 = \max\{x_0 \in \mathbb{N} : x = x_0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \dots \in A\}$$

Розглянемо $A_1 = \{\bar{x}_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots \in A\}$ – підмножину множини тих н.д.д. із $\{x\}$, які мають цілу частину $\bar{x}_0$. Оскільки цифра першого десяткового знаку набуває значення із скінченної множини $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то існує $\bar{x}_1$ – найбільша цифра першого десяткового знаку н.д.д. множини A_1 , тобто

$$\exists \bar{x}_1 = \max\{x_1 \in \{0, 1, \dots, 9\} : \bar{x}_0, x_1 x_2 \dots x_n \dots \in A\}.$$

Розглянемо $A_2 = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1 x_2 \dots x_n \dots \in A\}$ – підмножину множини тих н.д.д., у яких ціла частина дорівнює $\bar{x}_0$, перший знак після коми – це $\bar{x}_1$, тоді $\exists \bar{x}_2$ – найбільша цифра другого десяткового знаку н.д.д. цієї множини A_2 , тобто

$$\exists \bar{x}_2 = \max\{x_2 \in \{0, 1, \dots, 9\} : \bar{x}_0, \bar{x}_1 x_2 \dots x_n \dots \in A\}.$$

Продовжимо процес індукції. Припустимо, що числа $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ вже знайдено, тоді розглянемо $A_{n+1} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \in A\}$ – підмножину множини тих н.д.д., у яких ціла частина дорівнює $\bar{x}_0$, перший знак після коми – це $\bar{x}_1$, другий – це $\bar{x}_2$, n-ий – це $\bar{x}_n$. Існує $\bar{x}_{n+1}$ – найбільша цифра першого десяткового знаку н.д.д. множини A_{n+1} , тобто

$$\exists \bar{x}_{n+1} = \max\{x_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\} : \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \in A\}.$$

Отже, для будь-якого натурального n можна знайти десятковий знак н.д.д.

$$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots$$

Доведемо, що $\bar{x} = \sup\{x\}$.

1. Перевіримо спочатку, що $\bar{x}$ – це верхня межа даної множини. Для цього покажемо, що $\forall x \in \{x\} \quad x \leq \bar{x}$. Якщо x – недодатне, то нерівність $x \leq \bar{x}$ є вірною. Доведемо, що $\forall x \in A \quad x \leq \bar{x}$.

Припустимо супротивне: $\exists x \in A : x > \bar{x}$. Оскільки $x > \bar{x}$, то для н.д.д. $x = x_0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \dots$ і $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots$ виконується

$$\exists k \in \mathbb{N} : x_0 = \bar{x}_0 \wedge x_1 = \bar{x}_1 \wedge \dots \wedge x_{k-1} = \bar{x}_{k-1} \wedge x_k > \bar{x}_k.$$

Отримане суперечить побудові $\bar{x}_k$, як найбільшої із цифр k -го десяткового знаку тих нескінченних десяткових дробів, у яких ціла частина дорівнює $\bar{x}_0$, перший знак після коми – це $\bar{x}_1$, другий – це $\bar{x}_2$, $(k-1)$ -ий – це $\bar{x}_{k-1}$. Тоді $\bar{x}_k \geq x_k$. Отже, нерівність $x_k > \bar{x}_k$ неможлива ($\nrightarrow$). Що й доводить потрібне.

2. Доведемо, що $\bar{x}$ – найменша серед усіх верхніх меж. Нехай x – такий н.д.д, для якого $x < \bar{x}$. Якщо x – недодатне, то для будь-якого $x' \in A$ нерівність $x' > x$ є вірною. Тепер нехай x – додатне, тобто $x \in A$. Нерівність $x < \bar{x}$ рівносильна висловлюванню:

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad x_0 = \bar{x}_0 \wedge x_1 = \bar{x}_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} = \bar{x}_{n-1} \wedge x_n < \bar{x}_n. \quad (1.7)$$

Розглянемо н.д.д. x' вигляду

$$x' = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n x_{n+1} x_{n+2} \dots \in A.$$

Із (1.7) випливає, що $x' > x$, тому що

$$\begin{array}{ccccccc} x = & x_0, & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n & x_{n+1} \dots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ x' = & \bar{x}_0, & \bar{x}_1 & \dots & \bar{x}_{n-1} & \bar{x}_n & x_{n+1} \dots \end{array}$$

Таким чином, виконуються обидві вимоги означення точної верхньої межі. Отже, $\bar{x} = \sup\{x\}$.

II. Нехай $\{x\} = \{x = -x_0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \dots\}$ – множина недодатних н.д.д. .

Знайдемо $\bar{x} = \sup\{x\}$ аналогічно випадку I:

$\bar{x}_0$ – найменша із цілих частин н.д.д. множини $\{x\}$;

$\bar{x}_1$ – найменша із цифр першого десяткового знаку н.д.д. множини $\{-\bar{x}_0, x_1 x_2 \dots\}$;

$\bar{x}_2$ – найменша з цифр другого десят. знаку н.д.д. множини $\{-\bar{x}_0, \bar{x}_1 x_2 \dots\}$ і т.д.

Аналогічно випадку I можна довести, що

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots = \sup\{x\}. \blacksquare$$

2. Деякі числові множини. Їх позначення.

Серед множин на числовій прямій $\mathbb{R}$ можна виділити:

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – інтервал;

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ – відрізок;

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ – напівінтервал;

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ – напівінтервал;

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$ – напівпряма;

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ – напівпряма;

$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ – розширена числова пряма

$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

$U^\circ_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$.

3. Відкриті і замкнуті множини.

Означення 1.10. Множина $M(\subset \mathbb{R})$ називається *відкритою*, якщо $\forall x_0 \in M \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \subset M$.

Означення 1.11. Множина $F(\subset \mathbb{R})$ називається *замкнутою*, якщо $\mathbb{R} \setminus F$ відкрита множина.

Означення 1.12. Точка $a \in \mathbb{R}$ називається *граничною* точкою множини M , якщо $\forall U_\varepsilon(a) : U_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$.

4. Відображення функцій (ін'єктивне, с'юрєктивне, бієктивне).

Означення 1.18. Нехай X та Y – деякі множини. Кажуть, що функція, визначена на X із значеннями в Y , якщо за певним законом f кожному елементу $x \in X$ відповідає елемент $y \in Y$. Множину X називають областю визначення функції. Множину $f(X) = \{y \in Y : \exists (x \in X) \wedge (y = f(x))\}$ всіх значень функції, які вона приймає на елементах множини X називають множиною значень або областю значень функції.

Для функції (відображення) прийняті наступні позначення: $f : X \rightarrow Y$,
 $X \xrightarrow{f} Y$

Зауважимо, що термін „функція” вперше з'явився в 1692р. у Г. Лейбніца (G.W. Leibnitz), але в більш вузькому розумінні. В сучасному розумінні цей термін вжив Й. Бернуллі (J. Bernoulli) в листі до Лейбніца в 1698 році.

Означення 1.19. Відображення називають взаємно-однозначним, якщо рівняння $f(x) = y$ для кожного $y \in Y$ має не більше одного розв'язку.

Означення 1.20. Відображення називають сюр'єктивним, якщо $f(x) = y$ для кожного $y \in Y$ має не менше одного розв'язку.

Означення 1.21. Відображення називають бієктивним, якщо рівняння $f(x) = y$ для кожного $y \in Y$ має єдиний розв'язок.