

Лекція №4

Тема: «Границя числової послідовності»

План

1. Послідовності та їх види.
2. Збіжні послідовності та їх властивості.
3. Основні формули для границі послідовності.
4. Підпослідовності. Граничні точки.
5. Фундаментальні послідовності.

1. Послідовності та їх види.

Нехай кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n , тоді говорять, що задано числову послідовність $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ або $\{x_n\}$.

Загальний член послідовності $\{x_n\}$ є функцією натурального аргументу n , тобто $x_n = f(n)$. Надаючи n різні значення $n=1,2,3,\dots$, одержимо послідовність значень функції:

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), x_3 = f(3), \dots, x_n = f(n), \dots$$

Наприклад, для $x_n = \frac{1}{n}$ послідовність має вигляд: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Відмітимо, що послідовність задана, якщо зазначений спосіб одержання її членів.

Виходячи з означення, послідовність завжди має нескінченну кількість елементів: будь-які два різних її елемента відрізняються принаймні своїми номерами, яких нескінченна кількість.

Послідовність називається *обмеженою*, якщо множина її значень обмежена, тобто існує таке число $M > 0$, що для всіх n виконується нерівність $|x_n| < M$. Геометрично це означає, що всі члени послідовності належать інтервалу $(-M, M)$.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *обмеженою зверху*, якщо множина її значень обмежена зверху, тобто всі її члени менше деякого числа M , тобто нерівність $x_n < M$ виконується $\forall n \in N$, і *обмеженою знизу*, якщо множина її значень обмежена знизу, тобто існує таке число M , що для всіх членів послідовності $x_n > M$.

Так послідовність із загальним членом $x_n = \frac{1}{n}$ є обмеженою; послідовність натуральних чисел $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ обмежена знизу; послідовність цілих від'ємних чисел $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots (n \in \mathbb{N})$ обмежена зверху.

Послідовність, яка не є обмеженою (зверху, знизу) називається *необмеженою* (зверху, знизу).

Приклад 2.1. Довести обмеженість послідовності:

$$x_n = \frac{(-1)^n n^2 + 5}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

Розв'язання. З очевидних нерівностей

$$\left| (-1)^n n^2 + 5 \right| \leq \left| (-1)^n n^2 \right| + 5 = n^2 + 5, \quad \sqrt{n^4 + 1} > n^2$$

випливає, що $|x_n| = \frac{\left| (-1)^n n^2 + 5 \right|}{\sqrt{n^4 + 1}} \leq \frac{n^2 + 5}{n^2} = 1 + \frac{5}{n^2} \leq 6,$ тобто

послідовність обмежена.

Приклад 2.2. Довести необмеженість послідовності: $x_n = \frac{4 - n^2}{n - 3}.$

Розв'язання. Сформулюємо заперечення означення обмеженості послідовності: $\forall C > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |x_n| > C.$

Розглянемо $|x_n| = \frac{n^2 \left| \frac{4}{n^2} - 1 \right|}{n \left| 1 - \frac{3}{n} \right|} = n \frac{\left| 1 - \frac{4}{n^2} \right|}{\left| 1 - \frac{3}{n} \right|}.$ Якщо $n \geq 4$, то $\frac{4}{n^2} \leq \frac{1}{4}$ і

$$1 - \frac{4}{n^2} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2}, \quad 0 < 1 - \frac{3}{n} < 1, \quad \text{звідки } |x_n| = n \frac{1 - \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{3}{n}} > n \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{n}{2} > C.$$

Для $C > 0$ візьмемо $n > 2C$, наприклад $n = [2C] + 1$, тоді $|x_n| > \frac{n}{2} > C$,

звідки випливає, що послідовність необмежена.

Верхню (нижню) грань множини значень елементів послідовності $\{x_n\}$ називають верхньою (нижньою) гранню даної послідовності і позначають $\sup\{x_n\}$ ($\inf\{x_n\}$).

Будемо називати послідовність *зростаючою*, якщо $\forall n \in N \quad x_n < x_{n+1}$ і *спадною*, якщо $\forall n \in N \quad x_n > x_{n+1}$.

Зростаючі і спадні послідовності називають *монотонними*. Наприклад, послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *спадна*, послідовність $\{n\}$ *зростаюча*, а послідовність $\left\{\sin \frac{\pi n}{2}\right\}$ не є монотонною.

2. Збіжні послідовності та їх властивості.

 **Означення 2.15** (збіжної послідовності на мові н.м.п.).

$\{x_n\}$ – збіжна $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R} : \{x_n - a\}$ – н.м.п.

Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$. Позначення:

$$\lim_n x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \quad (\text{«} x_n \text{ прямує до } a \text{»}).$$

Приклад 2.3 Розглянемо послідовність $\left\{x_n = \frac{1}{n} + 1\right\}$.

Оберемо $a = 1$, тоді $\{x_n - a\} = \left\{\frac{1}{n} + 1 - 1\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ – н.м.п.

Висновок: $\lim_n x_n = 1$.

Оскільки $\{x_n - a\}$ – н.м.п., то отримаємо наступне означення границі послідовності на мові $\varepsilon - n_0$

Означення 2.16 (границі послідовності на мові $\varepsilon - n_0$).

$$\lim_n x_n = a \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Означення 2.17 (збіжної послідовності на мові $\varepsilon - n_0$, def 2 зб.).

$$\{x_n\} \text{ – збіжна} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Означення 2.18 (збіжної послідовності на мові $\varepsilon - \text{околу}$, def 3 зб.).

$\{x_n\}$ – збіжна $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a \in \mathbb{R} : \text{у будь-якому } \varepsilon \text{ – околі точки } a \text{ лежать усі члени послідовності, починаючи з номера } n_0.$

Зауваження 2.1 Із означення збіжності $\{x_n\}$ випливає, що видалення будь-якої скінченної кількості членів послідовності не впливає на її збіжність і значення границі.

Означення 2.19 $\{x_n\}$ – розбіжна $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x_n\}$ – не є збіжною.

Зауваження 2.2 Оскільки $\{x_n\}$ – н.в.п. $\Leftrightarrow \lim_n x_n = \infty$, то можна виписати такі означення нескінченних границь:

$$\lim_n x_n = \infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |x_n| > A;$$

$$\lim_n x_n = +\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad x_n > A;$$

$$\lim_n x_n = -\infty \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall A > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad x_n < -A.$$

Зауваження 2.3 $\{x_n\}$ – збігається до $a \Rightarrow \{\alpha_n = x_n - a\}$ – н.м.п.,

$$x_n = a + \alpha_n.$$

Властивості збіжних послідовностей

Теорема 2.10 Границя збіжної послідовності визначається однозначно.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – збігається.

Припустимо супротивне: нехай $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \neq b \wedge \lim_n x_n = a \wedge \lim_n x_n = b$.

Із означення def 1 зб. випливає, що

$$\lim_n x_n = a \Leftrightarrow \{\alpha_n = x_n - a\} - \text{н.м.п.}$$

$$\lim_n x_n = b \Leftrightarrow \{\beta_n = x_n - b\} - \text{н.м.п.}$$

Тоді властивість 1^{MB} дає: $\{\alpha_n - \beta_n = a - b\} \in \text{н.м.п.}$. Оскільки вона, до того ж ще й стаціонарна, то (теорема 2.7) $a - b = 0$, тобто $a = b$. ■

Теорема 2.11 Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються, тоді

$$\lim_n (x_n \pm y_n) = \lim_n x_n \pm \lim_n y_n.$$

$$\exists \Leftrightarrow (\exists \wedge \exists)$$

Доведення. Із умови і означення def 1 зб. випливає:

$$\{x_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists \lim_n x_n = a \Rightarrow x_n = a + \alpha_n, \{\alpha_n\} - \text{н.м.п.};$$

$$\{y_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists \lim_n y_n = b \Rightarrow y_n = b + \beta_n, \{\beta_n\} - \text{н.м.п.}$$

Тоді $x_n \pm y_n = (a \pm b) - (\alpha_n \pm \beta_n)$, а за означенням def 1 зб.,

$$\lim_n (x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_n x_n \pm \lim_n y_n. \blacksquare$$

Теорема 2.12 Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається, тоді вона обмежена.

Доведення. Із умови і означення def 1 зб. випливає:

$$\{x_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x_n = a + \alpha_n, \{\alpha_n\} - \text{н.м.п.}$$

Оскільки $\{\alpha_n = x_n - a\}$ – н.м.п., то вона обмежена (властивість 3^{MB}). Далі застосуємо означення обмеженої послідовності def 2 обм.:

$$\exists A > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_n| < A.$$

Із останньої нерівності отримаємо:

$$|\alpha_n| \leq A \Rightarrow |x_n - a| \leq A \Rightarrow \underset{=m}{a - A} \leq x_n \leq \underset{=M}{a + A}.$$

Отже, для $m = a - A$ і $M = a + A$ виконується нерівність $m \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Звідки (за означенням def 1 обм.) випливає, що $\{x_n\}$ – обмежена. ■

Теорема 2.13 Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються, тоді

$$\lim_n (x_n \cdot y_n) = \lim_n x_n \cdot \lim_n y_n.$$

$$\exists \quad \Leftarrow (\exists \quad \wedge \quad \exists)$$

Доведення. Із умови і означення def 1 зб. випливає:

$$\{x_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x_n = a + \alpha_n, \quad \{\alpha_n\} - \text{н.м.п.};$$

$$\{y_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} : y_n = b + \beta_n, \quad \{\beta_n\} - \text{н.м.п.}$$

Застосовуємо властивості н.м.п.:

$$x_n \cdot y_n = ab + \underbrace{(a\beta_n + b\alpha_n + \beta_n \cdot \alpha_n)}_{\text{н.м.п.} + \text{н.м.п.} + \text{н.м.п.} \cdot \text{н.м.п.}}.$$

За означенням def 1 зб., отримаємо: $\lim_n (x_n y_n) = ab$. ■

Теорема

2.14

$$\left. \begin{array}{l} \lim_n y_n = b; \\ b \neq 0; \end{array} \right\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty} - \text{обм.}$$

Доведення. За означенням 2.16,

$$\lim_n y_n = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |y_n - b| < \varepsilon.$$

Зокрема,

$$\text{для } \varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |y_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Із останньої нерівності маємо:

$$||y_n| - |b|| \leq |y_n - b| < \frac{|b|}{2};$$

$$|b| - \frac{|b|}{2} < |y_n| < |b| + \frac{|b|}{2}; \quad \frac{|b|}{2} < y_n < 3 \frac{|b|}{2};$$

$$\forall n \geq n_0 \quad y_n \neq 0 \wedge \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Звідки випливає, що послідовність $\left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty}$ є визначеною та обмеженою. ■

Теорема 2.15

$$\left. \begin{array}{l} \{x_n\} \text{ і } \{y_n\} \text{ — збіг.,} \\ \lim_n y_n \neq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1) \exists n_0 \in \mathbb{N} : \text{ визначеною є послід.} \\ \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty}, \\ 2) \lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_n x_n}{\lim_n y_n}. \end{array} \right.$$

Доведення. Оскільки $\lim_n y_n \neq 0$, то з попередньої властивості випливає,

що $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad y_n \neq 0$. Отже, послідовність $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty}$ визначена.

Застосуємо означення def 1 зб:

$$\{x_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : x_n = a + \alpha_n, \quad \{\alpha_n\} - \text{н.м.п.};$$

$$\{y_n\} - \text{збіг.} \Rightarrow \exists b \in \mathbb{R} : y_n = b + \beta_n, \quad \{\beta_n\} - \text{н.м.п.}.$$

В наслідок теореми 2.14 і властивостей н.м.п., одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} &= \frac{x_n \cdot b - a \cdot y_n}{b y_n} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot ((a + \alpha_n) - a \cdot (b + \beta_n)) = \\ &= \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{y_n} \cdot (b \cdot \alpha_n - a \cdot \beta_n). \\ &\quad \underbrace{\text{обм.} \cdot (\text{н.м.п.} - \text{н.м.п.})}_{\text{н.м.п.}} \end{aligned}$$

Таким чином, за означенням def 1 зб., $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. ■

3. Основні формули для границі послідовності.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, |q| > 1$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} n q^n = 0, |q| < 1$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, |a| > 1, k > 0 \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, a > 0, a \neq 1 \quad 12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \text{ де } \theta_n \in (0;1) - \text{формула Стірлінга.}$$

4. Підпоследовності. Граничні точки.

Означення. Підпоследовністю послідовності $\{x_n\}$ називається дійсна функція, яка задана на деякій нескінченновимірній підмножині натурального ряду. Позначається $\{x_{n_k}\}$.

Теорема (про існування верхньої і нижньої границі обмеженої послідовності або **друга основна теорема теорії послід.**). Будь-яка обмежена послідовність має верхню і нижню границю.

Наслідок (теорема Больцано-Вейєрштрасса). Із будь-якої обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпоследовність

Доведення цього твердження аналогічне доведенню твердження 1. ■

Означення 2.22 (граничної точки на мові околів, def 1 гр.т.). Дійсне число $x \in \mathbb{R}$ називають граничною точкою послідовності, якщо у будь-якому ε -околі міститься нескінченна множина членів даної послідовності. Тобто

$$x \in \mathbb{R} - \text{гранична точка послідовності } \{x_n\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \{x_n\} - \text{ нескінченна} \\ \text{множина.}$$

Означення 2.23 (граничної точки на мові підпоследовностей, def 2 гр.т.). Дійсне число $x \in \mathbb{R}$ називають граничною точкою послідовності, якщо існує підпоследовність $\{x_{k_n}\}$ даної послідовності, яка збігається до x .

Тобто

$$x \in \mathbb{R} - \text{гранична точка послідовності } \{x_n\} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists \\ \{x_{k_n}\}: \lim_{n} x_{k_n} = x.$$

Твердження 2.5 Два означення граничної точки еквівалентні.

Доведення.
 $def\ 1\ гр.т. \Rightarrow def\ 2\ гр.т.$

1. Розглянемо 1-оکیل ($\varepsilon=1$) точки x , тобто $(x-1, x+1)$. За означенням $def\ 1\ гр.т.$ в цьому ε - окові міститься нескінченна множина членів послідовності. Виберемо якийсь один з цих членів послідовності. Нехай це буде $x_{k_1} \in (x-1, x+1)$.
2. Розглянемо $\frac{1}{2}$ -оکیل ($\varepsilon=\frac{1}{2}$) точки x , тобто $\left(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right)$. Оберемо серед нескінченної кількості членів послідовності, що містяться в цьому окові, той, що буде мати номер більш за k_1 . Тобто $\exists k_2 > k_1 : x_{k_2} \in \left(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}\right)$.
3. Індуктивно припустимо, що члени підпослідовності $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$ вже обрано.
4. Розглянемо $\frac{1}{n+1}$ -оکیل. Оберемо серед нескінченної кількості членів послідовності, що містяться в цьому окові, той, що буде мати номер більш за k_n . Тобто $\exists k_{n+1} > k_n : x_{k_{n+1}} \in \left(x-\frac{1}{n+1}, x+\frac{1}{n+1}\right)$.

Таким чином, побудовано послідовність номерів $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$, що є номерами членів підпослідовності $\{x_{k_n}\}$, для якої $x_{k_n} \in \left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right)$. Тоді

$$\begin{array}{ccc} x - \frac{1}{n} < x_{k_n} < x + \frac{1}{n} \\ \square \quad \downarrow \quad \square \\ \quad \quad x \end{array}$$

Висновок: підпослідовність $\{x_{k_n}\}$, що збігається до x обрано. Це відповідає означенню $def\ 2\ гр.т.$

 $def\ 2\ гр.т. \Rightarrow def\ 1\ гр.т.$

Дано: виконується означення $def\ 2\ гр.т.$
Тобто існує підпослідовність $\{x_{k_n}\}$, що збігається до x . За означенням збіжної послідовності на мові ε -околів, у будь-якому ε -окові точки x буде міститися нескінченна множина членів послідовності $\{x_{k_n}\}$, а саме усі, починаючи з деякого номера, а тому й нескінченна множина членів самої послідовності $\{x_n\}$. ■

Приклад 2.6 (послідовності з двома граничними точками). Розглянемо послідовність

$$\left\{1; 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1 - \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1 - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \dots\right\}.$$

Тоді

$$x_{2k} = 1 - \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1, \quad x_{2k-1} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

За означенням граничної точки на мові підпоследовностей, числа 1 і 0 є граничними точками даної послідовності.

Доведемо, що інших граничних точок ця послідовність не має. Нехай гранична точка є такою, що $x_0 \neq 0$ і $x_0 \neq 1$. Нехай $\beta = \max\{|x_0 - 0|, |x_0 - 1|\}$, $\varepsilon = \frac{\beta}{3}$. Тоді ε -околиці точок $x_0, 0$ і 1 не перетинаються.

Оскільки $x_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$, то в середині ε -околиці точки 1 лежать усі члени послідовності з парними номерами, починаючи з деякого номера, тому зовні цього околиці лежить скінченна множина членів послідовності з парними номерами. Аналогічно, оскільки $x_{2k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, то зовні ε -околиці точки 0 лежить скінченна множина членів послідовності з непарними номерами. Отже, в ε -околиці точки x_0 лежить скінченна множина членів послідовності, як з парними, так і з непарними номерами (рис. 2.3). Тому точка x_0 не може бути граничною за означенням граничної точки на мові околиць.



Рис. 2.3

Висновок. Дана послідовність має дві і тільки дві граничні точки.

5. Фундаментальні послідовності.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називають *фундаментальною*, якщо

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такий, що $\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0$ виконується нерівність $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Приклад. Довести, що $x_n = \frac{\cos^3 n!}{4^n}$ фундаментальна.

Розв'язання. Оцінимо модуль різниці:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos^3(n+1)!}{4^{n+1}} + \frac{\cos^3(n+2)!}{4^{n+2}} + \dots + \frac{\cos^3(n+p)!}{4^{n+p}} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{4^{n+1}} + \dots + \frac{1}{4^{n+p}} = \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^p}}{1 - \frac{1}{4}} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} < \frac{1}{4^n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

З останньої нерівності маємо $4^n > \frac{1}{\varepsilon}$, $n > \log_4 \frac{1}{\varepsilon}$. За n_0 можна взяти,

наприклад, $n_0 = \left\lceil \log_4 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$.

Теорема. (Критерій Коші збіжності послідовності). Для того, щоб послідовність була збіжною необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.