

Лекція №11

Тема: «Означення і основні поняття похідної функції»

План

1. Поняття похідної функції.
2. Односторонні похідні.
3. Фізичний зміст похідної.
4. Геометричний зміст похідної.

1. Поняття похідної функції.

Диференціальне числення – це розділ математичного аналізу, у якому розглядається дослідження функцій за допомогою похідних та диференціалів. Загальні методи диференціального числення розроблено І.Ньютоном та Г.Лейбніцем наприкінці сімнадцятого століття, але лише у дев'ятнадцятому столітті О.Коші обґрунтував ці методи на основі теорії границь. Центральне поняття диференціального числення – похідна – широко використовується при розв'язуванні багатьох задач математики, фізики та інших наук. Якщо перебіг деякого процесу описується певною функцією, то його дослідження зводиться до вивчення властивостей цієї функції та її похідної.

Нехай на деякому проміжку $(a; b)$ задано функцію $y = f(x)$. Візьмемо будь-яку точку $x \in (a; b)$ і надамо x довільного приросту Δx так, щоб точка $x + \Delta x$ також належала проміжку $(a; b)$. Приріст функції при переході від точки x до точки $x + \Delta x$ має вигляд: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю відношення приросту функції Δy у цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля.

Похідна функції $y = f(x)$ у точці x позначається одним з символів: y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, y'_x , $f'(x)$.

Таким чином, за означенням похідної маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Якщо у деякій точці x границя (2.1) дорівнює ∞ , то похідну у цій точці називають *нескінченною*. Якщо ця границя у деякій точці x не існує, то у цій точці не існує і похідної $f'(x)$. Далі під похідною будемо розуміти скінченну похідну.

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ позначається одним з символів: $f'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$, $y'|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Операцію знаходження похідної від функції $f(x)$ називають *диференціюванням* цієї функції.

Приклад 2.1. Знайти похідну функції $y = x^3$ у довільній точці $x \in \mathbb{R}$ та у точці $x = 2$.

Розв'язання. Надамо значенню x приріст Δx і знайдемо відповідний приріст функції $y = x^3$:

$$\begin{aligned}\Delta y &= (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + \\ &+ (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.\end{aligned}$$

Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Знаходимо похідну $y' = (x^3)'$:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Підставивши у отриманий загальний вираз для похідної $y'(x) = 3x^2$ значення $x = 2$, отримаємо $y'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

2. Односторонні похідні.

Розглянемо поняття односторонньої похідної. Односторонні похідні визначаються за допомогою односторонніх границь.

Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x . Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і при цьому $\Delta x > 0$, називають *правою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_+(x)$:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.2)$$

Нехай функція $f(x)$ визначена у околі точки x . Границю відношення приросту функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx , якщо $\Delta x \rightarrow 0$ і при цьому $\Delta x < 0$, називають *лівою похідною* від функції $f(x)$ у точці x і позначають $f'_-(x)$:

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.3)$$

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$, то під похідною у точці $x = a$ розуміють праву похідну, а у точці $x = b$ – ліву.

З означення похідної випливає, що похідна $f'(x)$ у точці $x = x_0$ існує тоді і тільки тоді, коли у цій точці існують ліва та права похідні і вони рівні між

собою: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Якщо ж $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то похідна у цій точці не існує. Не існує похідної і у точках розриву функції $f(x)$.

Приклад 2.2. Довести, що функція $y = |x|$ не має похідної у точці $x = 0$.

Розв'язання. Приріст функції $y = |x|$ у точці $x = 0$, що відповідає приросту аргументу Δx , $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Це відношення дорівнює -1 при $\Delta x < 0$ і дорівнює 1 при $\Delta x > 0$. Тому границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ залежить від знаку Δx : вона дорівнює 1 при $\Delta x > 0$ і -1 при $\Delta x < 0$.

Таким чином, у точці $x = 0$ існують односторонні похідні $f'_-(0) = -1$ та $f'_+(0) = 1$, але $f'_-(0) \neq f'_+(0)$. Це означає, що у точці $x = 0$ похідна функції $y = |x|$ не існує.

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* у точці x_0 , якщо у цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* на проміжку, якщо вона є диференційовною у кожній точці цього проміжку.

Зв'язок між неперервністю функції у точці та її диференційовністю у цій точці встановлює наступна теорема.

Теорема 2.1. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною у точці x_0 , то вона є неперервною у цій точці.

Розглянемо фізичний зміст похідної. Він впливає з її означення та визначається тим, що похідна $f'(x)$ виражає миттєву швидкість зміни функції $f(x)$. Зокрема, похідна від шляху $s(t)$, пройденого тілом, що рухається прямолінійно, за час t , дорівнює його миттєвій швидкості у момент часу t , тобто швидкість $v(t) = s'(t)$. У цьому полягає механічний зміст похідної.

Отже, фізичний зміст похідної полягає у тому, що, коли функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна $y' = f'(x)$ є швидкістю зміни цього процесу. Яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни цієї функції відносно аргументу x , а похідну $y' = f'(x)$ – як миттєву швидкість зміни функції. Так, лінійна густина неоднорідного стержня – це похідна від його маси $m(x)$ за довжиною x : $\gamma(x) = m'(x)$; сила струму – це похідна від кількості електрики $Q(t)$ за часом t : $J(t) = Q'(t)$; теплоємність – це похідна від кількості теплоти $\omega(\tau)$ за температурою τ : $c = \omega'(\tau)$.

3. Фізичний зміст похідної.

Нехай функція переміщення матеріальної точки залежно від часу $t \in [0, T]$ має вигляд $s(t)$, а $t_0 \in [0, T]$, $t_0 + \Delta t \in [0, T]$. Тоді середня швидкість матеріальної точки за час від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює

$$v_{cp} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Миттєва швидкість в момент часу t_0 дорівнює $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp}$, тому

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Таким чином, **фізичний зміст похідної**: похідна від функції переміщення в момент часу t_0 - це миттєва швидкість в цей момент часу.

4. Геометричний зміст похідної.

Розглянемо геометричний зміст похідної. Розглянемо задачу про побудову дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 . Спочатку визначимо поняття дотичної.

Нехай P_0 – точка графіка з координатами $(x_0; f(x_0))$, а P – точка цього ж графіка з координатами $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Пряму, проведену через точки P_0 та P , називають *січною* графіка функції $y = f(x)$.

Якщо при довільному наближенні точки P за графіком функції $y = f(x)$ до точки P_0 січна P_0P наближається до певного граничного положення, то це граничне положення січної називають *дотичною* до графіка функції $y = f(x)$ у точці P_0 .

Нехай дотична до графіка $y = f(x)$ у точці P_0 існує. Позначимо $\alpha(P)$ кут, який утворює січна з додатним напрямом осі Ox , α_0 – кут, що утворений дотичною до графіка у точці P_0 з додатним напрямом Ox . Тоді

$$\operatorname{tg}(\alpha(P)) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\alpha(P) \neq \pm \frac{\pi}{2}$, то з неперервності функції $\operatorname{tg} x$ і припущення про існування дотичної у точці P_0 випливає, що $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg}(\alpha(P)) = \operatorname{tg} \alpha_0$, тобто тангенс нахилу кута дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці P_0 визначається за формулою:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Таким чином, геометричний зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ полягає у тому, що значення $f'(x_0)$ дорівнює тангенсу кута нахилу

дотичної до графіка цієї функції, проведеної у точці з абсцисою $x = x_0$, до додатного напрямку осі Ox , тобто кутовому коефіцієнту цієї дотичної. При цьому рівняння дотичної до графіка $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.4)$$

Якщо похідна $f'(x_0)$ додатна, то дотична до графіка функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox , якщо ж $f'(x_0) < 0$, то цей кут – тупий. Якщо у точці x_0 похідна $f'(x_0)$ є нескінченною, то дотична до графіка $y = f(x)$ у цій точці паралельна осі Oy . У цьому випадку рівняння дотичної має вигляд: $x = x_0$.

Нормалю до кривої називають пряму, що проходить перпендикулярно дотичній до цієї кривої через точку дотику.

Оскільки добуток кутових коефіцієнтів двох перпендикулярних прямих дорівнює -1 , то кутовий коефіцієнт нормалі до графіка функції $y = f(x)$, проведеної у точці $P_0(x_0; f(x_0))$ дорівнює $\frac{-1}{f'(x_0)}$, а відповідно рівняння цієї нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2.5)$$

Приклад 2.3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

Розв'язання. Значення $f'(x_0)$ при $x_0 = 2$ знайдено у прикладі 2.1: $f'(2) = 12$, $f(2) = 2^3 = 8$. Підставивши ці значення у рівняння дотичної, отримаємо: $y - 8 = 12(x - 2)$, або $y = 12x - 16$. Використовуючи (2.5), отримуємо рівняння нормалі: $y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)$, або $y = -\frac{1}{12}x + \frac{49}{6}$.