

Лекція №12

Тема: «Диференційовність функції. Таблиця похідних»

План

1. Диференційовність функції
2. Правила диференціювання
3. Таблиця похідних

1. Диференційовність функції

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* у точці x_0 , якщо у цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Функцію $y = f(x)$ називають *диференційовною* на проміжку, якщо вона є диференційовною у кожній точці цього проміжку.

Зв'язок між неперервністю функції у точці та її диференційовністю у цій точці встановлює наступна теорема.

Теорема 2.1. Якщо функція $y = f(x)$ є диференційовною у точці x_0 , то вона є неперервною у цій точці.

 **Означення** (диференційовності і диференціалу). Якщо приріст функції $y = f(x)$ в точці x_0 можна представити у вигляді (5.3), то

- 1) функція $f(x)$ називається *диференційовною в точці x_0* ,
- 2) головна лінійна частина приросту функції $A \cdot \Delta x$ називається *диференціалом функції $f(x)$ в точці x_0* і позначається $df(x_0)$ (або $dy(x_0)$), тобто

$$df(x_0) \stackrel{def}{=} A \cdot \Delta x.$$

Уведемо позначення $dx = \Delta x$, тоді $df(x_0) = A \cdot dx$.

Із зауважень, наданих до означення випливає, що функція, яка має похідну в точці є в цій точці диференційовною. Це твердження можна обернути, і має місце наступна теорема.

Теорема 5.4. Функція $f(x)$ диференційовною в точці x_0 тоді і лише тоді, коли вона в цій точці має похідну, крім того стала A в головній лінійній частині приросту функції дорівнює $f'(x_0)$.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то здійснюються рівності

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx,$$

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

2. Правила диференціювання

Теорема 2.2. Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ диференційовні у точці x , то їх сума, різниця, добуток та частка (частка за умови, що дільник $v(x) \neq 0$) також диференційовні у цій точці, причому виконуються рівності:

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (2.6)$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (2.7)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (2.8)$$

Теорема 2.3. Якщо $y = f(x) = C$, де C – стале число, то

$$f'(x) = (C)' = 0. \quad (2.9)$$

Теорема 2.4. Сталій множник можна виносити за знак похідної, тобто

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x). \quad (2.10)$$

Використовуючи означення та властивості похідної, отримаємо формули для похідних основних елементарних функцій.

Знайдемо формулу похідної степеневої функції.

$$\begin{aligned} y' = (x^k)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^k - x^k}{\Delta x} = x^k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^k - 1}{\Delta x} = \\ &= x^k \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \cdot \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = k \cdot \frac{x^k}{x} = k \cdot x^{k-1}. \end{aligned}$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha \rightarrow 0$ $(1 + \alpha)^k - 1 \approx k \cdot \alpha$. Таким чином, маємо формулу:

$$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}. \quad (2.11)$$

Аналогічним чином отримаємо формули для похідних тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\
 &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = -\sin x.
 \end{aligned}$$

Отже, ми отримали формули:

$$(\sin x)' = \cos x \quad (2.12)$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (2.13)$$

При знаходженні цих похідних ми використали формулу, що є наслідком з першої важливої границі: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin k\alpha}{\alpha} = k$.

Знайдемо похідні від функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$. Для цього використаємо формулу (2.8) похідної частки функцій.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Таким чином, справедливими є формули:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (2.14)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (2.15)$$

Знайдемо похідну показникової функції $y = e^x$:

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Маємо формулу:

$$(e^x)' = e^x. \quad (2.16)$$

Для отримання формули (2.16), ми використали отриману при вивченні другої важливої границі формули $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. Отриманий результат свідчить, що функція $y = e^x$ при диференціюванні не змінюється.

Похідну показникової функції загального вигляду $y = a^x$ знайдемо аналогічно формулі (2.16), для чого використаємо рівність $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Таким чином, вірною є рівність:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \quad (2.17)$$

Знайдемо похідну логарифмічних функцій $y = \ln x$ та $y = \log_a x$.

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x / x}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Тут ми використали еквівалентність нескінченно малих: при $\alpha \rightarrow 0$ $\ln(1 + k\alpha) \sim k\alpha$.

Для отримання похідної від функції $y = \log_a x$ перейдемо у ній до натуральних логарифмів: $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Тоді за теоремою 2.4, виносячи сталий множник $\frac{1}{\ln a}$ за знак похідної, отримуємо:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (2.18)$$

Знайдемо похідну від складеної функції $y = f(\varphi(x))$.

Теорема 2.5 (теорема про похідну складеної функції). Якщо функція $u = \varphi(x)$ має похідну u'_x у точці x , а функція $y = f(u)$ має похідну y'_u у відповідній точці u , то складена функція $y = f(\varphi(x))$ має похідну y'_x у точці x і при цьому виконується рівність

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \quad (2.19)$$

Згідно з формулою (2.19) маємо таке правило диференціювання складеної функції: похідна складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжним аргументом на похідну від проміжного аргументу за кінцевим аргументом. Це правило залишається справедливим, коли складена функція має кілька проміжних аргументів. Наприклад, якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

При диференціюванні складених функцій потрібно чітко уявляти собі, яка з дій, що призводить до значення складеної функції, є останньою. Та величина, над якою виконується остання дія, приймається за проміжний аргумент.

Приклад 2.4. Знайти похідні функцій: 1) $y = \ln^5 x$; 2) $y = \sin(3x + 2)^3$; 3) $y = 5^{\sqrt{\lg 2x}}$.

Розв'язання. 1) Для функції $y = \ln^5 x$ останньою є дія піднесення до п'ятого степеня, тому проміжним аргументом є $u = \ln x$ і $y = u^5$. За формулою (2.19) маємо:

$$y' = y'_u \cdot u'_x = 5u^4 \cdot (\ln x)' = 5\ln^4 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{5\ln^4 x}{x}.$$

2) Для функції $y = \sin(3x + 2)^3$ останньою операцією є знаходження синуса, тому проміжний аргумент $u = (3x + 2)^3$. Функція u теж є складеною, тому виділимо її проміжний аргумент $v = 3x + 2$. Функція $y(x)$ має вигляд:

$$y = \sin u, \quad u = v^3, \quad v = 3x + 2.$$

Для похідної y'_x маємо:

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\sin u)'_u \cdot (v^3)'_v \cdot (3x + 2)'_x = \\ &= \cos u \cdot 3v^2 \cdot 3 = 9 \cos(v^3) \cdot (3x + 2)^2 = 9 \cos(3x + 2)^3 \cdot (3x + 2)^2. \end{aligned}$$

На практиці проміжні аргументи не записують, але похідні від них позначають штрихом.

3) Знайдемо похідну складеної функції $y = 5^{\sqrt{\lg 2x}}$.

$$\begin{aligned} (5^{\sqrt{\lg 2x}})' &= 5^{\sqrt{\lg 2x}} \cdot (\sqrt{\lg 2x})' = 5^{\sqrt{\lg 2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\lg 2x}} \cdot (\lg 2x)' = \frac{5^{\sqrt{\lg 2x}}}{2\sqrt{\lg 2x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot (2x)' = \\ &= \frac{5^{\sqrt{\lg 2x}} \cdot 2}{2\sqrt{\lg 2x} \cdot \cos^2 2x} = \frac{5^{\sqrt{\lg 2x}}}{\sqrt{\lg 2x} \cdot \cos^2 2x}. \end{aligned}$$

$$\text{Тут ми використали похідну від } \sqrt{v}: (\sqrt{v})'_v = \left(v^{\frac{1}{2}}\right)'_v = \frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}}.$$

При достатній підготовці похідну знаходять зразу, не вводячи допоміжних позначень для похідних від проміжних аргументів.

У різноманітних науково-технічних дослідженнях часто використовують так звані *гіперболічні функції*. Гіперболічним синусом $\operatorname{sh} x$, гіперболічним косинусом $\operatorname{ch} x$, гіперболічним тангенсом $\operatorname{th} x$ та гіперболічним котангенсом $\operatorname{cth} x$ називають функції, що визначаються за такими формулами:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Функції $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ визначені на всій числовій прямій, а функція $\operatorname{cth} x$ визначена для всіх дійсних $x \neq 0$.

Похідні гіперболічних функцій можна визначити, використовуючи їх означення, а також основні формули диференціювання:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad (2.20)$$

3. Таблиця похідних

$c' = 0$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$x' = 1$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, x \neq 0$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a, a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0, a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(\cos x)' = -\sin x$	якщо $y = (f(x))^{g(x)}$, то треба логарифмувати обидві частини рівняння

Виведемо декілька формул за означенням, а потім за допомогою теорем про похідну складної та оберненої функцій.

1) Отримаємо формулу за означенням

$$(x^a)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^a - x^a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^a \cdot \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1 \right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = x^{a-1} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

$$A = \lim_{\square x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\square x}{x}\right)^a - 1}{\frac{\square x}{x}}$$

$$A = \left| \begin{array}{l} u = \frac{\square x}{x} \\ u \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(1+u)^a - 1}{u}$$

$$q = (1+u)^a - 1$$

$$q+1 = (1+u)^a$$

$$\ln(q+1) = \alpha \ln(1+u)$$

$$\frac{\alpha \ln(1+u)}{\ln(q+1)} = 1$$

$$\frac{(1+u)^\alpha - 1}{u} = \frac{q}{u} \cdot \frac{\alpha \ln(1+u)}{\ln(1+q)} = \frac{q}{\ln(1+q)} \cdot \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot \alpha$$

$$A = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q}{\ln(1+q)} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \cdot \alpha = \alpha$$

$$(x^\alpha)' = x^{\alpha-1} \cdot A = x^{\alpha-1} \cdot \alpha$$

2) Виведемо формулу за означенням

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a$$

3) Знайдемо формулу за означенням

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

4) За означенням

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x$$

5) За означенням

$$\begin{aligned} (tg x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) \cos x - \sin x \cos(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x) \cos x \Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x - x)}{\cos(x+\Delta x) \cos x \Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

6) Одержимо наступну формулу іншим способом, застосовуючи вже виведену похідну $(e^x)' = e^x$, а також теорему про похідну від складеної функції. Нехай $x > 0$, тоді

$$(x^\alpha)' = (e^{\ln x^\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

7) Використаємо виведену похідну $(\sin x)' = \cos x$ і теорему про похідну від складеної функції:

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) = -\sin x$$

8) Отримаємо наступну похідну іншим способом. Застосовуємо формули $(\sin x)' = \cos x$ і $(\cos x)' = -\sin x$ і формулу похідної частки:

$$(tg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9) Функція $y = \arcsin x$ є оберненою до $x = \sin y$ на відрізку $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. На цьому відрізку функція $x = \sin y$ є неперервною і зростаючою з множиною значень $-1 \leq x \leq 1$, а $(\sin y)' = \cos y$, тому функція $y = \arcsin x$ неперервна, зростаюча на відрізку $-1 \leq x \leq 1$, а її похідна, згідно до теореми про похідну від оберненої функції, дорівнює

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10) Застосовуємо формулу $(e^x)' = e^x$ і теорему про похідну від оберненої функції

$$y = \ln x$$

$$x = e^y$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

11) Застосовуємо формулу $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ і теорему про похідну від оберненої функції

$$y = \operatorname{arctg}(x)$$

$$x = \operatorname{tg}(y)$$

$$\frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{(\operatorname{tg}(y))'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Розглянемо приклади застосування основних правил диференціювання, а також наведеної таблиці похідних основних елементарних функцій.

Приклад 2.5. Знайти похідні наступних функцій:

$$1) \quad y = \sqrt{2 \cos x - 1}; \quad 2) \quad y = \frac{\ln^2 x}{x^3}; \quad 3) \quad y = \operatorname{arctg} \sqrt{x+2} - \arcsin 2x;$$

$$4) \quad y = 2^{\sin 3x + \cos 2x}; \quad 5) \quad y = (3x-1)^3 \operatorname{sh} 5x.$$

Розв'язання. 1) Знайдемо похідну складеної функції $y = \sqrt{2 \cos x - 1}$.

$$(\sqrt{2 \cos x - 1})' = \frac{1}{2\sqrt{2 \cos x - 1}} \cdot (2 \cos x - 1)' = -\frac{2 \sin x}{2\sqrt{2 \cos x - 1}} = -\frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x - 1}}.$$

2) Похідну функції $y = \frac{\ln^2 x}{x^3}$ знаходимо за формулою похідної частки:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln^2 x}{x^3} \right)' &= \frac{(\ln^2 x)' \cdot x^3 - \ln^2 x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \ln^2 x}{x^6} = \\ &= \frac{x^2 \ln x (2 - 3 \ln x)}{x^6} = \frac{\ln x \cdot (2 - 3 \ln x)}{x^4}. \end{aligned}$$

3) Для обчислення похідної функції $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x+2} - \arcsin 2x$ застосуємо формули похідної різниці функцій та похідної складеної функції:

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x+2} - \arcsin 2x \right)' &= \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x+2} \right)^2} \cdot \left(\sqrt{x+2} \right)' - \\ &- \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{1}{2\sqrt{x+2} \cdot (x+3)} - \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}. \end{aligned}$$

4) Обчислимо похідну складеної функції $y = 2^{\sin 3x + \cos 2x}$:

$$\begin{aligned} \left(2^{\sin 3x + \cos 2x} \right)' &= \ln 2 \cdot 2^{\sin 3x + \cos 2x} \cdot (\sin 3x + \cos 2x)' = \\ &= \ln 2 \cdot 2^{\sin 3x + \cos 2x} \cdot (3\cos 3x - 2\sin 2x). \end{aligned}$$

5) Знайдемо похідну функції $y = (3x-1)^3 \operatorname{sh} 5x$ як похідну добутку функцій:

$$\begin{aligned} \left((3x-1)^3 \operatorname{sh} 5x \right)' &= \left((3x-1)^3 \right)' \cdot \operatorname{sh} 5x + (3x-1)^3 \cdot (\operatorname{sh} 5x)' = \\ &= 3 \cdot (3x-1)^2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sh} 5x + (3x-1)^3 \cdot 5 \operatorname{ch} 5x = 9(3x-1)^2 \cdot \operatorname{sh} 5x + \\ &+ 5(3x-1)^3 \operatorname{ch} 5x = (3x-1)^2 \times (9\operatorname{sh} 5x + 5(3x-1) \operatorname{ch} 5x). \end{aligned}$$