

Лекція №13

Тема: «Диференціал функції. Логарифмічне диференціювання»

План

1. Диференціал функції.
2. Геометричний зміст диференціала.
3. Правила знаходження диференціала.
4. Інваріантність форми першого диференціала.
5. Логарифмічне диференціювання.
6. Похідна оберненої функції.
7. Похідна функції, заданої параметрично.
8. Похідна неявно заданої функції.

1. Диференціал функції.

Нехай функція $y = f(x)$ у точці x має відмінну від нуля похідну $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$. Тоді у деякому околі точки x відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тому приріст функції $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$. При цьому величина $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $f'(x) \cdot \Delta x$ і нескінченно мала $\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$, тому величину $f'(x) \cdot \Delta x$ називають *головною частиною* приросту функції Δy .

Диференціалом dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx , частину її приросту Δy , що дорівнює добутку похідної функції у цій точці на приріст аргументу:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \quad (2.37)$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x , тобто диференціал функції $y = x$. Оскільки $y' = 1$, то $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$, отже, формулу (2.37) можна записати у вигляді:

$$dy = f'(x) dx. \quad (2.38)$$

Таким чином, диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної.

З формули (2.38) випливає, що $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, тобто позначення похідної $\frac{dy}{dx}$ можна розглядати як відношення диференціалів dy та dx .

Приклад 2.15. Знайти диференціал функції $y = x^3 - \sin 3x$.

Розв'язання. Оскільки $y'(x) = 3x^2 - 3\cos 3x = 3(x^2 - \cos 3x)$, то диференціал $dy = 3(x^2 - \cos 3x) dx$.

2. Геометричний зміст диференціала.

Геометричний зміст диференціала: диференціал функції $y = f(x)$ в точці x - це приріст значень дотичної до графіка функції в точці $M(x, f(x))$. В наближеному розумінні можна казати про *практичну не відмінність графіка функції від дотичної (тобто лінійної функції)* в якомусь околі точки x .

З геометричної точки зору диференціал функції $y = f(x)$ у точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції у цій точці, коли змінна x отримує приріст Δx .

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $s = s(t)$. Диференціал функції $s(t)$ $ds = s'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt - це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt , якби вона рухалася рівномірно і прямолінійно із сталою швидкістю $v = s'(t)$. Зрозуміло, що фактичний шлях Δs у випадку нерівномірного руху матеріальної точки, на відміну від диференціала ds не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху ds . Проте, якщо час Δt є достатньо малим, то швидкість руху не встигає суттєво змінитись і тому рух точки на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ є майже рівномірним.

3. Правила знаходження диференціала.

Якщо функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовні, то

- 1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
- 2) $d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv$;
- 3) $d(c \cdot u) = c \cdot du$, де $c = \text{const}$;
- 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$, ($v \neq 0$).

4. Інваріантність форми першого диференціала.

Теорема 2.7. Диференціал складеної функції дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжним аргументом на диференціал цього проміжного аргументу.

Таким чином, $dy = f'_x dx = f'_u du$, тобто перший диференціал функції $y(x)$ визначається однією й тією ж формулою незалежно від того, чи є її аргумент незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Цю властивість диференціала першого порядку називають *інваріантністю (незмінністю) форми першого диференціала*.

5. Логарифмічне диференціювання.

У багатьох випадках для знаходження похідної задану функцію доцільно спочатку прологарифмувати, а потім продиференціювати отриманий результат. Таку операцію називають *логарифмічним диференціюванням*.

Якщо $y = f(x)$, то $\ln y = \ln(f(x))$. Тоді $(\ln y)' = (\ln(f(x)))'$, тобто маємо:
 $\frac{y'}{y} = (\ln(f(x)))'$. Звідси $y' = (\ln(f(x)))' \cdot y = (\ln(f(x)))' \cdot f(x)$. Вираз $\frac{y'}{y}$ називають логарифмічною похідною функції $y(x)$.

Приклад 2.8. Знайти похідну функції $y = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3}$.

Розв'язання. Знаходити похідну y' за формулою похідної частки тут недоцільно з-за складності аналітичного виразу для $y(x)$. Знайдемо спочатку логарифмічну похідну функції $y(x)$. Для цього прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4} \ln(x-1) + x - 3 \ln(x+5).$$

Диференціюючи за x обидві частини цієї рівності, маємо:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}.$$

Звідси знаходимо похідну y' :

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right) \cdot y = \\ &= \left(\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right) \times \left(\frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3} \right). \end{aligned}$$

Функцію $y = (u(x))^{v(x)}$ називають *показниково-степеневою функцією*.

Для знаходження похідної цієї функції використовують логарифмічне диференціювання. Маємо: $\ln y = v(x) \cdot \ln(u(x))$, $(\ln y)' = (v(x) \cdot \ln(u(x)))'$,
 $\frac{y'}{y} = v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u}$. Звідси $y' = \left(v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right) \cdot y = \left(v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u} \right) \cdot u^v$. Останню формулу запишемо у вигляді:

$$y' = v' \cdot \ln u \cdot u^v + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \quad (2.27)$$

З формули (2.27) випливає, що похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі її похідної як показникової та степеневої функцій.

Приклад 2.9. Знайти похідну функції $y = (\sin x)^{x^3-2}$.

Розв'язання. Для знаходження похідної y' використаємо логарифмічне диференціювання. $\ln y = (x^3 - 2) \ln \sin x$. Диференціюючи цю рівність, отримуємо:

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \cdot \ln \sin x + (x^3 - 2) \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = (3x^2 \cdot \ln \sin x + (x^3 - 2) \cdot \operatorname{ctg} x) \cdot y = \\ = (3x^2 \cdot \ln \sin x + (x^3 - 2) \cdot \operatorname{ctg} x) \cdot (\sin x)^{x^3 - 2}.$$

6. Похідна оберненої функції.

Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(y)$ – пара взаємно обернених функцій. Сформулюємо теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема 2.6 (теорема про похідну оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ є строго монотонною на проміжку $(a; b)$ і має у довільній точці x цього проміжку відмінну від нуля похідну $f'(x)$, то обернена їй функція $x = \varphi(y)$ також має похідну у відповідній точці ті при цьому похідна оберненої функції

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (2.21)$$

Теорема 2.6 дає можливість отримати похідні обернених тригонометричних функцій.

Отримаємо формулу для похідної функції $y = \arcsin x$. Ця функція, визначена на відрізку $[-1; 1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Оскільки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $x = \sin y$ монотонно зростає і її похідна $x'_y = (\sin y)'_y = \cos y > 0 \quad \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то всі умови теореми 2.6 виконуються і можна скористатися формулою (2.21):

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для отримання похідної функції $y = \arccos x$ використаємо тотожність:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Диференціюючи цю тотожність, маємо: $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$. Звідси випливає, що $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ є оберненою для функції $x = \operatorname{tg} y$, де $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку $x = \operatorname{tg} y$ монотонно зростає і $x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, тобто умови теореми 2.6 виконані. Застосуємо цю теорему:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

7. Похідна функції, заданої параметрично.

Отримаємо формулу для знаходження похідної функції $y = y(x)$, заданої у параметричній формі, тобто у вигляді рівнянь $x = x(t)$, $y = y(t)$ при заданому проміжку зміни допоміжної змінної (параметра) t : $\alpha \leq t \leq \beta$. Будемо вважати, що функції $x(t)$ та $y(t)$ мають похідні x'_t та y'_t , причому функція $x(t)$ має обернену функцію $t = \varphi(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції $t'_x = \frac{1}{x'_t}$.

Функцію $y = y(x)$, задану параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, розглянемо як складену функцію $y = y(t)$, де $t = \varphi(x)$. Тоді, за правилом диференціювання складеної функції, отримаємо: $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$.

Таким чином, ми отримали формулу диференціювання функції, заданої у параметричній формі:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) дозволяє знаходити похідну y'_x , функції, заданої у параметричній формі, без безпосереднього знаходження залежності $y = y(x)$.

Приклад 2.6. Знайти похідну y'_x функції $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ у точці, що відповідає значенню параметра $t = \pi/4$.

Розв'язання. Для застосування формули (2.26) знайдемо похідні x'_t та y'_t : $x'_t = -\sin t$, $y'_t = \cos t$. Тоді, за формулою (2.26), $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$. При значенні параметра $t = \pi/4$ $y'_x = -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = -1$.

8. Похідна неявно заданої функції.

Нехай функція задана неявно у вигляді $F(x, y) = 0$. Обчислимо похідні обох частин рівності:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y'_x = 0.$$

З останньої рівності одержимо:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Нехай функція $y = y(x)$ задана у неявній формі, тобто у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$. Для знаходження похідної y'_x немає необхідності виражати з цього рівняння змінну y через x у явному вигляді $y = f(x)$. Достатньо про диференціювати рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x , вважаючи при цьому змінну y функцією x , і з отриманого рівняння знайти y'_x . При цьому похідна y'_x виражатиметься через змінні x та y .

Приклад 2.7. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої у неявному вигляді рівнянням $x^5 + y^4 - 3x^2y^3 + 1 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння за змінною x , вважаючи при цьому y функцією змінної x :

$$5x^4 + 4y^3 \cdot y' - 6xy^3 - 9x^2y^2 \cdot y' = 0$$

$$\text{З цього рівняння знаходимо } y': y' = \frac{6xy^3 - 5x^4}{4y^3 - 9x^2y^2}.$$