

Лекція №14

Тема: «Похідні та диференціали вищих порядків»

План

1. Похідні вищих порядків.
2. Формула другої похідної функції, заданої параметрично
3. Таблиця похідних вищих порядків.
4. Формула Лейбніца.
5. Диференціали вищих порядків.

1. Похідні вищих порядків.

Похідна функції $y = f(x)$ $y' = f'(x)$ теж є функцією змінної x , тому можна розглядати задачу знаходження похідної цієї функції. Якщо функція $y' = f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *похідною другого порядку* функції $y = f(x)$ і позначають $y''(x)$ або $\frac{d^2y}{dx^2}$. Отже, $y''(x) = (y'(x))'$. Похідну від похідної другого порядку функції $y = f(x)$ називають її третьою похідною або *похідною третього порядку* та позначають $y'''(x)$. Таким чином, $y'''(x) = (y''(x))'$. Аналогічно можна визначити похідну довільного n -го порядку як похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку. Для похідної n -го порядку використовують позначення $y^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n y}{dx^n}$.

Похідною n -го порядку або n -ою похідною функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку цієї функції, тобто

$$y^{(n)}(x) = (y^{(n-1)}(x))'.$$

Похідні порядків, вищих, ніж перший, називають *похідними вищих порядків*.

Приклад. Знайти похідну третього порядку від функції $y = 3x^5 + 2x^2 + 7$.

Розв'язання. Послідовно диференціюючи задану функцію, знаходимо її першу, другу та третю похідні:

$$y' = (3x^5 + 2x^2 + 7)' = 15x^4 + 4x, \quad y'' = (y')' = (15x^4 + 4x)' = 60x^3 + 4,$$

$$y''' = (y'')' = (60x^3 + 4)' = 180x^2.$$

2. Формула другої похідна функції, заданої параметрично

Перша та друга похідна функції, заданої параметрично, знаходиться за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

3. Таблиця похідних вищих порядків.

Наведемо формули для похідних n -го порядку деяких елементарних функцій.

$$1. (x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)x^{m-n}.$$

$$2. (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a.$$

$$3. (e^x)^{(n)} = e^x.$$

$$4. (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$5. (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

$$6. (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}. \quad)$$

4. Формула Лейбніца.

Для знаходження похідної n -го порядку добутку функцій $u(x)$ та $v(x)$ використовують формулу Лейбніца:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}.$$

$$\text{або } (u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)},$$

Приклад. Знайти похідну $y^{(25)}$ функції $y = x^2 \sin x$.

Розв'язання. Застосуємо формулу Лейбніца. Для цього виберемо $u = \sin x$, $v = x^2$. $v' = 2x$, $v'' = 2$. При $k > 2$ $v^{(k)} = 0$. Тому маємо:

$$(uv)^{(25)} = u^{(25)}v + 25u^{(24)}v' + \frac{25 \cdot 24}{2!}u^{(23)}v''.$$

Маємо похідні:

$$(\sin x)^{(23)} = \sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos x,$$

$$(\sin x)^{(24)} = \left((\sin x)^{(23)}\right)' = (-\cos x)' = \sin x,$$

$$(\sin x)^{(25)} = \left((\sin x)^{(24)}\right)' = (\sin x)' = \cos x,$$

отримаємо $y^{(25)} = \cos x \cdot x^2 + 50 \sin x \cdot x - 600 \cos x$.

5. Диференціали вищих порядків.

Нехай $y = f(x)$ – диференційовна функція незалежної змінної x . Тоді її диференціал $dy = f'(x)dx$ теж є функцією аргументу x і можна знайти диференціал цієї функції. Диференціал диференціала функції $y = f(x)$ називають її *другим диференціалом*, або *диференціалом другого порядку*. Його позначають d^2y або $d^2f(x)$.

Знайдемо вираз для d^2y .

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)dx^2.$$

Таким чином, отримали формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогічно можна визначити диференціал третього порядку як диференціал диференціала другого порядку:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)' dx = f'''(x)dx^3.$$

Диференціалом n -го порядку називають диференціал диференціала $(n-1)$ -го порядку:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

З формули випливає, що n -у похідну функції $y = f(x)$ можна записати у вигляді відношення її диференціала n -го порядку до n -го степеню диференціала незалежної змінної: $y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Наведені вище формули для диференціалів вищих порядків є вірними, якщо x є незалежною змінною. Якщо ж змінна x є функцією незалежної змінної t , тобто $x = x(t)$, то

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Таким чином, якщо у функції $y = f(x)$ змінна x є залежною змінною ($x = x(t)$), то $d^2y \neq f''(x)dx^2$. Ми бачимо, що диференціали вищих порядків не мають властивості інваріантності форми.

Приклад. Знайти диференціал третього порядку функції $y = e^{5x}$, де x — незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки потрібно знайти диференціал третього порядку функції незалежної змінної, то можна використати формулу при $n = 3$, тобто

маємо: $d^3y = f'''(x)dx^3$. $f'''(x) = (e^{5x})''' = 125e^{5x}$. Звідси випливає, що $d^3y = 125e^{5x}dx^3$.

Приклад. Знайти d^2y , якщо $y = x^3$ і $x = t^4 + 2t$, t – незалежна змінна.

Розв'язання. Оскільки $y(x)$ є складеною функцією (x – залежна змінна, $x = x(t)$), тому використовувати формулу не можна. Тут $d^2y = d(f'(x)dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$. Отже, для $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, будемо мати, що $dx = x'_t dt = (4t^3 + 2)dt$, $d^2x = x''_t dt^2 = 12t^2 dt^2$.

Підставивши ці вирази у вираз для другого диференціалу d^2y , отримаємо:

$$\begin{aligned} d^2y &= 6x \cdot dx^2 + 3x^2 \cdot 12d^2x = 6(t^4 + 2t)(4t^3 + 2)^2 dt^2 + \\ &+ 36(t^4 + 2t)^2 t^2 dt^2 = 12(t^4 + 2t)(11t^6 + 14t^3 + 2)dt^2. \end{aligned}$$

Зауважимо, що аналогічний результат ми б отримали, записавши спочатку y як функцію незалежної змінної t , тобто підставивши у вираз для $y(x)$ функцію $x = t^4 + 2t$ і далі використавши формулу для отриманої функції незалежної змінної t .