

Додаток А

Означення А.1. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *збіжним*, якщо збігається числова послідовність його часткових сум $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Число $S = \lim_n S_n$ називають *сумою ряду* (у випадку існування границі); позначення: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Означення А.2. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Означення А.3. Числовий ряд називають *умовно збіжним*, якщо він збігається, але не абсолютно.

Теорема А.1 (необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді $\lim_n a_n = 0$.

А.1. Ознаки збіжності знакопостійних рядів

Загальна ознака порівняння. Якщо члени двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ($b_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) задовольняють співвідношення $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, то із збіжності другого ряду випливає збіжність першого, а з розбіжності першого – розбіжність другого. Тобто

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{зб.} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{зб.}; \quad \left. \begin{array}{l} \text{II. } a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розб.} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \text{розб.}$$

$$\begin{array}{l} a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{зб.} \Leftarrow \text{зб.} \\ \text{розб.} \Rightarrow \text{розб.} \end{array}$$

Ознака порівняння в граничній формі. Якщо члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з додатними членами задовольняють співвідношення $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \text{const} \neq 0$, то обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Ознака Д'Аламбера. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$).

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ (скінченна} \\ \text{або нескінченна)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{при } q < 1 \text{ ряд збігається,} \\ \text{при } q > 1 \text{ розбігається,} \\ \text{при } q = 1 \text{ про збіжність ряду нічого не} \\ \text{можна сказати (сумнівний випадок).} \end{array}$$

Ознака Коші (радикальна): Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$).

$$\left. \begin{array}{l} \exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = q \text{ (скінченна} \\ \text{або нескінченна)} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{при } q < 1 \text{ ряд збігається,} \\ \text{при } q > 1 \text{ розбігається,} \\ \text{при } q = 1 - \text{сумнівний випадок.} \end{array}$$

Ознака Коші-Маклорена (інтегральна). Якщо для членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$) існує така функція $f(x)$, що

$$\left. \begin{array}{l} 1) f(n) = a_n \text{ для всіх натуральних} \\ n \geq n_0, \\ 2) f(x) - \searrow \text{ (нестрого) на } [n_0; +\infty), \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ збігається або розбігається} \\ \text{одночасно з невласним інтегралом } \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx. \end{array}$$

Наслідок із інтегральної ознаки Коші-Маклорена .

Узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{збігається при } p > 1, \\ \text{розбігається при } p \leq 1. \end{cases}$

Ознака Раабе .

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ &\exists \lim_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = r, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1) r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}, \\ 2) r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 3) r = 1 \Rightarrow ??? \text{ (сумнівний випадок)}. \end{cases}$$

Ознака Гаусса.

$$\left. \begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ &q_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad 0 < \theta_n < 1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 1) \lambda > 1 \wedge (\lambda = 1 \wedge \mu > 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 2) \lambda < 1 \wedge (\lambda = 1 \wedge \mu \leq 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розбігається}. \end{cases}$$

A.2. Ознаки збіжності знакозмінних рядів

Ознака Лейбніца. Розглянемо знакочередний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n+1} c_n + \dots, \quad c_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\left. \begin{aligned} 1) \{c_n\} \searrow (\text{нестрого}), \\ 2) \lim_n c_n = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n - \text{збігається}.$$

$$\text{Ознака Діріхле.} \quad \left. \begin{aligned} 1) B_n = \sum_{k=1}^n b_k, \{B_n\} - \text{обмежена}, \\ 2) \{a_n\} \searrow, \quad 3) \lim_n a_n = 0, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \text{збіг}.$$

$$\text{Ознака Абеля.} \quad \left. \begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збігається}, \\ 2) \{b_n\} - \text{монотонна}, \quad 3) \{b_n\} - \text{обм.}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n - \text{збіг}.$$

Додаток Б

Область збіжності функціональної послідовності $\{f_n(x) = x^n\}$ – півінтервал $(-1; 1]$. Гранична функція (поточкова границя), визначена на цій множині, подається у вигляді:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{A} S(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in A \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Ознака Вейєрштраса рівномірної збіжності функціонального ряду.

$$\left. \begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \text{ заданий на множині } A; \\ 2) \exists \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ збігається, } c_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ 3) |u_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in A; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{A}$$

Ознака Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду

$$\left. \begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \xrightarrow{X}; \\ 2) \{a_n(x)\} - \text{поточково нестрого монотонна на } X; \\ 3) \{a_n(x)\} - \text{рівномірно обмежена на } X, \text{ тобто} \\ \exists \mu > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |a_n(x)| \leq \mu, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x) \xrightarrow{X}$$

Ознака Діріхле рівномірної збіжності функціонального ряду:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \{b_n(x)\} \text{ така, що } \left\{ B_n(x) = \sum_{k=1}^n b_k(x) \right\} - \text{рівномірно обмежена} \\ \text{на множині } X, \text{ тобто } \exists \mu > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |B_n(x)| \leq \mu, \\ 2) \{a_n(x)\} - \text{пото́чково не зростаюча на } X, \\ 3) a_n(x) \xrightarrow[X]{} \theta(x) \quad (\theta(x) \equiv 0), \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \xrightarrow[X]{}.$$

Теорема про неперервність суми функціонального ряду.

Розглянемо функціональний ряд $\sum_n u_n(x)$ на множині X .

$$\left. \begin{array}{l} 1) u_n(x) - \text{неперервна в точці } x_0 \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow[X]{} S(x), \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) - \text{неперервна в точці } x_0$$

Почленний граничний перехід під знаком суми функціонального ряду.

$$\left. \begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow[X]{} S(x); \\ 2) a - \text{гранична точка множини } X; \\ 3) \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = C_n, \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{I) } \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C; \\ \text{II) } \lim_{x \rightarrow a} S(x) = C, \text{ тобто } \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \end{array} \right.$$

Почленне інтегрування функціональних рядів.

$$\left. \begin{array}{l} 1) u_n(x) - \text{неперервна на } [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a, b]} S(x), \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{I) } \exists \int_a^b S(x) dx; \text{ II) } \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx - \text{збігається;} \\ \text{III) } \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \end{array} \right.$$

Почленне диференціювання функціональних рядів.

$$\left. \begin{array}{l} 1) u_n(x) - \text{неперервно диференційовні на } [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}; \\ 2) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[0, a]}^{\text{Поточ.}} S(x); \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{[a, b]}; \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{I) } \exists S'(x) \text{ на } [a, b]; \\ \text{II) } \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' \end{array} \right.$$

Означення Б.1 Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

називають *степеневим рядом*, а числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Формули для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

формула 1: $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$; **формула 2:** $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ за умови, що $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Теорема про неперервність суми степеневого ряду. Сума степеневого ряду $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є неперервною функцією на інтервалі збіжності $(-r; r)$, де r - радіус збіжності степеневого ряду.

Теорема про інтегрування степеневих рядів. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можна почленно інтегрувати на $[0; x] \subset (-r; r)$ (r - радіус збіжності), крім того, радіус збіжності отриманого почленным інтегруванням степеневого ряду буде той самий, що і у вихідного ряду, тобто r .

Теорема про диференціювання степеневих рядів. Степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності, при цьому, отриманий почленным диференціюванням ряд має той самий радіус збіжності, що й вихідний ряд.

Розвинення деяких елементарних функцій в степеневі ряди:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{на } \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{на } \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{на } \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad \text{на } (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \quad \text{на } (-1; 1),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{на } (-1, 1),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{на } (-1, 1),$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \text{на } (-1, 1).$$

Формула Стірлінга: $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{(-n)} \cdot e^{\frac{\theta_n}{12n}}, \quad 0 < \theta_n < 1.$

Теорема Вейерштрасса про рівномірне наближення неперервної функції послідовністю многочленів.

$\forall f(x)$ – неперервна на відрізку $[a; b]$ $\exists \{P_n(x)\}$ – послідовність многочленів: $P_n(x) \xrightarrow{[a,b]} f(x).$

$R_0[a, b]$ – евклідов простір кусково-неперервних функцій, усі точки розриву яких є регулярними,

зі скалярним добутком $(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx,$

Ортогональна система тригонометричних функцій в просторі $R_0[-\pi; \pi]$:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots.$$

Означення Б.2 Рядом Фур'є функції $f(x)$ називають ряд вигляду

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{коефіцієнти якого визначаються формулами}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad \forall k \in 0, 1, 2, 3, \dots, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Основна теорема теорії рядів Фур'є. Якщо функція $f(x)$

- 1) кусково-диференційовна на $\mathbb{R}$,
- 2) з регулярними точками розриву,
- 3) 2π -періодична,

тоді ряд Фур'є цієї функції поточково збігається до цієї функції, тобто в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$ має місце гранична рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = f(x_0) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$