Державний вищий навчальний заклад
«Запорізький національний університет»
Міністерства освіти і науки України

О.Г. Спиця, І.В. Зіновєєв, Н.І.-В. Манько

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

**Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань та контрольних робіт
з лінійної алгебри студентами освітнього ступеня «бакалавр»
напряму підготовки «Математика»**

Затверджено
вченою радою ЗНУ
Протокол № від р.

Запоріжжя
2015

УДК:
ББК:

Спиця О.Г., Зіновєєв І.В., Манько Н.І.-В. Лінійна алгебра: Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань та контрольних робіт з лінійної алгебри студентами освітнього ступеня «бакалавр» напряму підготовки «Математика». – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 85 с.

Методичні вказівки містять умови індивідуальних завдань для студентів денної форми навчання та контрольних робіт для студентів заочної форми навчання, а також приклад розв’язання типового варіанту відповідної контрольної роботи з основних розділів «Лінійної алгебри»: «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь», «Визначники та їх властивості», «Матриці та дії над ними», «Лінійні векторні простори», «Лінійні оператори», «Евклідові простори», «Лінійні оператори в евклідових просторах», «Білінійні та квадратичні форми».

Призначено для студентів освітнього ступеня «бакалавр» математичного факультету денної та заочної форм навчання напряму підготовки «Математика».

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*

ЗМІСТ

ВСТУП

Данні методичні вказівки містять умови індивідуальних завдань для студентів освітнього ступеня «бакалавр» денної форми навчання, кожне з яких містить дві групи по 20 варіантів, та умови контрольних робіт для студентів заочної форми навчання, які містять 10 варіантів, і супроводжується розв'язанням типового варіанту.

Виконання кожної контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після формування достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому.

При виконанні індивідуального завдання або контрольної роботи необхідно:

1) виконувати її в окремому зошиті. На обкладинці зошита вказати прізвище, ім'я та по-батькові студента, номер варіанта та таблицю з номерами завдань і місцем для відмітки викладача (приклад оформлення титульного аркуша представлений в додатку А);

2) умову кожної задачі записувати повністю з конкретними даними для відповідного варіанта;

3) розв'язання всіх задач і пояснення до них викладати детально, звертаючись до означень, теорем, формул, які використовуються при розв'язуванні даної задачі;

4) всі обчислення (основні та допоміжні) виконувати і записувати повністю; обчислення проводити з округленнями до 10^{-3}, якщо в умові не вказано іншого.

Кожне індивідуальне завдання оцінюється в 10 балів, а контрольна робота для студентів заочної форми навчання в 60 балів. Якщо робота була оцінена викладачем меншою кількістю балів, то треба якнайшвидше виправити всі недоліки, розв'язати правильно усі задачі й здати на повторне рецензування разом із попередньою роботою.

Номер варіанта відповідає номеру за списком. В умовах деяких завдань зустрічаються параметри, значення яких детально описане.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ № 1

1. *Обчислити визначник* Δ:
   а) розклавши його за елементами i *-го рядка;*
   б) розклавши його за елементами j *-го стовпця;*
   в) одержавши попередньо нулі в i *-му рядку;*
   г) привівши попередньо до трикутного вигляду;
   д) використовуючи теорему Лапласа.

для першої групи

В 1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \; i=4,\; j=1$

В 2 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \; i=3,\; j=3$

В 3 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \; i=4,\; j=1$

В 4 $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}, \; i=1,\; j=3$

В 5 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \; i=2,\; j=4$

В 6 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}, \; i=1,\; j=2$

В 7 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \; i=2,\; j=3$

В 8 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}, \; i=3,\; j=1$

В 9 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \; i=4,\; j=3$

В 10 $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}, \; i=4,\; j=2$

В 11 $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}, \; i=3,\; j=4$

В 12 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \; i=1,\; j=2$

В 13 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=4$

В 14 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=4$

В 15 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=3$

В 16 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=2$

В 17 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=1$

В 18 $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=4$

В 19 $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=3$

В 20 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=3$

для другої групи

В 1 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=1$

В 2 $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=4$

В 3 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1$, $j=2$

В 4 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=4$

В 5 $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=2$

В 6 $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=4$, $j=4$

В 7 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$, $i=3$, $j=2$

В 8 $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$, $i=2$, $j=3$

В 9 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$

В 10 $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1$

В 11 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4$

В 12 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3$

В 13 $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$

В 14 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=4$

В 15 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=2$

В 16 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=1$

В 17 $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$

В 18 $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=1$

В 19 $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$

В 20 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=2$

2. *Знайти розв'язок матричного рівняння* $AX = B$ *двома способами* (N *– номер за списком), якщо*

для першої групи

$$A = \begin{pmatrix} -N & 1 & -1 \\ 3 & N & 1 \\ 1 & -2 & 2N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-N & 2-2N \\ 5+3N & 7+3N \\ 4N-5 & 2N-4 \end{pmatrix}.$$

для другої групи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -N \\ 3 & N & 1 \\ N & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2-2N & -N+1 \\ 5+3N & 7+3N \\ N-2 & 2N-4 \end{pmatrix}.$$

3. *Перевірити сумісність системи рівнянь і у випадку сумісності розв'язати її:*
а) методом Гаусса;
б) за формулами Крамера;
в) за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

для першої групи
(тут N – номер за списком; $n = N$, якщо $N < 15$ й $n = 26 - N$, якщо $N \geq 15$):

$$\begin{cases} (n-10)x_1 + 2x_2 - x_3 = n - 9, \\ 2x_1 + (15-n)x_2 + 3x_3 = 41 - 2n, \\ x_1 + 5x_2 + (12-n)x_3 = 47 - 3n. \end{cases}$$

для другої групи
(тут N – номер варіанта):

$$\begin{cases} (N-10)x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 - N, \\ 2x_1 - (N-15)x_2 + 3x_3 = 2N - 41, \\ x_1 + 5x_2 - (N-12)x_3 = 3N - 47. \end{cases}$$

4. *Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.*

для першої групи

В 1 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

В 2 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

В 3 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

В 4 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

В 5 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 6 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

В 7 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 8 $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

В 9 $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

В 10 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 11 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

В 12 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 13 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

В 14 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 15 $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 16 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 17 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 18 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 19 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

В 20 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

для другої групи

В 1 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

В 2 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

В 3 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

В 4 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 5 $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

В 6 $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$

В 7 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

В 8 $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

В 9 $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 10 $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 11 $\begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

В 12 $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

В 13 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

В 14 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

В 15 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 16 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 17 $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

В 18 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$

В 19 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

В 20 $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ -9x_1 \qquad + 2x_3 = 0. \end{cases}$

5. *Знайти загальний та один частинний розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_1. \end{cases}$$

для першої групи

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2
В1	2	1	1	2	4	7	3	3	2	5	8	15
В2	5	3	3	6	11	20	3	3	2	5	8	15
В3	4	3	2	5	9	16	2	3	1	4	6	11
В4	2	3	0	3	5	8	0	3	–1	2	2	3
В5	1	3	0	3	4	7	–1	3	–1	2	1	2
В6	2	3	1	4	6	11	0	1	0	1	1	2
В7	5	3	3	6	11	20	3	2	2	4	7	13
В8	3	3	2	5	8	15	1	3	1	4	5	10
В9	3	3	1	4	7	12	1	3	0	3	4	7
В10	5	3	2	5	10	17	3	3	1	4	7	12
В11	2	4	2	1	1	7	5	3	3	8	2	15
В12	6	11	5	3	3	20	5	3	3	8	2	15
В13	5	9	4	3	2	16	4	2	3	6	1	11
В14	3	5	2	3	0	8	2	0	3	2	–1	3
В15	3	4	1	3	0	7	2	–1	3	1	–1	2
В16	4	6	2	3	1	11	1	0	1	1	0	2

В17	6	11	5	3	3	20	4	3	2	7	2	13
В18	5	8	3	3	2	15	4	1	3	5	1	10
В19	4	7	3	3	1	12	3	1	3	4	0	7
В20	5	10	5	3	2	17	4	3	3	7	1	12

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	b_4
В1	1	1	2	3	4	9	3	2	2	4	7	13
В2	5	4	3	7	12	22	4	3	4	7	11	22
В3	2	2	1	3	5	9	1	1	1	2	3	6
В4	1	2	0	2	3	5	2	2	1	3	5	9
В5	1	4	0	4	5	9	1	2	1	3	4	8
В6	2	4	1	5	7	13	1	1	1	2	3	6
В7	5	4	2	6	11	19	2	1	2	3	5	10
В8	3	4	2	6	9	17	3	2	3	5	8	16
В9	3	4	1	5	8	14	3	2	2	4	7	13
В10	5	4	2	6	11	19	4	3	3	6	10	19
В11	3	4	1	1	2	9	2	3	2	7	4	13
В12	7	12	5	4	3	22	4	4	3	11	7	22
В13	3	5	2	2	1	9	1	1	1	3	2	6
В14	2	3	1	2	0	5	1	2	2	5	3	9
В15	4	5	1	4	0	9	1	1	2	4	3	8
В16	5	7	2	4	1	13	1	1	1	3	2	6
В17	6	11	5	4	2	19	2	2	1	5	3	10
В18	6	9	3	4	2	17	3	3	2	8	5	16
В19	5	8	3	4	1	14	2	3	2	7	4	13
В20	6	11	5	4	2	19	3	4	3	10	6	19

для другої групи

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2
В1	2	5	8	3	3	7	1	2	4	2	1	7
В2	2	5	8	3	3	20	3	6	11	5	3	20
В3	1	4	6	2	3	16	2	5	9	4	3	16
В4	–1	2	2	0	3	8	0	3	5	2	3	8
В5	–1	2	1	–1	3	7	0	3	4	1	3	7
В6	0	1	1	0	1	11	1	4	6	2	3	11
В7	2	4	7	3	2	20	3	6	11	5	3	20
В8	1	4	5	1	3	15	2	5	8	3	3	15
В9	0	3	4	1	3	12	1	4	7	3	3	12
В10	1	4	7	3	3	17	2	5	10	5	3	17
В11	3	8	2	5	3	7	2	1	1	2	4	7
В12	3	8	2	5	3	20	5	3	3	6	11	20
В13	3	6	1	4	2	16	4	3	2	5	9	16
В14	3	2	–1	2	0	8	2	3	0	3	5	8

В15	3	1	–1	2	–1	7	1	3	0	3	4	7
В16	1	1	0	1	0	11	2	3	1	4	6	11
В17	2	7	2	4	3	20	5	3	3	6	11	20
В18	3	5	1	4	1	15	3	3	2	5	8	15
В19	3	4	0	3	1	12	3	3	1	4	7	12
В20	3	7	1	4	3	17	5	3	2	5	10	17

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	b_4
В1	4	4	7	2	3	13	2	3	4	1	1	9
В2	12	7	11	3	7	22	3	7	12	5	4	22
В3	5	2	3	1	3	6	1	3	5	2	2	9
В4	3	3	5	0	2	9	0	2	3	1	2	5
В5	5	3	4	0	4	8	0	4	5	1	4	9
В6	7	2	3	1	5	6	1	5	7	2	4	13
В7	11	3	5	2	6	10	2	6	11	5	4	19
В8	9	5	8	2	6	16	2	6	9	3	4	17
В9	8	4	7	1	5	13	1	5	8	3	4	14
В10	11	6	10	2	6	19	2	6	11	5	4	19
В11	2	7	4	1	1	13	1	1	2	3	4	9
В12	3	11	7	5	4	22	5	4	3	7	12	22
В13	1	3	2	2	2	6	2	2	1	3	5	9
В14	0	5	3	1	2	9	1	2	0	2	3	5
В15	0	4	3	1	4	8	1	4	0	4	5	9
В16	1	3	2	2	4	6	2	4	1	5	7	13
В17	2	5	3	5	4	10	5	4	2	6	11	19
В18	2	8	5	3	4	16	3	4	2	6	9	17
В19	1	7	4	3	4	13	3	4	1	5	8	14
В20	2	10	6	5	4	19	5	4	2	6	11	19

6. *Для матриць* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & N & -2\\ 2 & -2N+3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -N & 2 & N\end{pmatrix}$, *де* N *– номер варіанту, знайти:*

для першої групи

$$A^2+2(BC)^t.$$

для другої групи

$$2A^2-(BC)^t.$$

7. *Знайти значення многочлена* $f(x)$ *від матриці* $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & N-5 \\ -1 & 3 & -N \\ N & 2 & 2 \end{pmatrix}$, *де* N *– номер варіанту:*

для першої групи

$$f(x)=3x^2+2x-1.$$

для другої групи

$$f(x)=-3x^2-x+2.$$

8. *Розв'язати рівняння (тут* N *– номер варіанту):*

для першої групи

а) $\begin{vmatrix} -x^2 & 4 & 9 \\ -x & 2 & 3 \\ -N & N & N \end{vmatrix}=0;$

б) $\begin{vmatrix} x^2 & -3 & 2 \\ x & 1 & N \\ 0 & -N & 4 \end{vmatrix}=0;$

в) $\begin{vmatrix} 3 & x & 4N \\ 2 & -1 & -3N \\ x+10 & 1 & -N \end{vmatrix}=0.$

для другої групи

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ -N & -N & -N \end{vmatrix}=0;$

б) $\begin{vmatrix} -x^2 & -3 & 2 \\ -x & 1 & N \\ 0 & -N & 4 \end{vmatrix}=0;$

в) $\begin{vmatrix} 3 & -x & 4N \\ 2 & 1 & -3N \\ x+10 & -1 & -N \end{vmatrix}=0.$

9. Розв'язати нерівності (тут N – номер варіанту):

для першої групи

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ N & -2N & N \end{vmatrix} < 1;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ N & N & 2N \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix} > 0.$

для другої групи

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -x & -2 \\ N & 2N & N \end{vmatrix} < 1;$

б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ N & N & 2N \\ -5 & 3 & x \end{vmatrix} > 0.$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ № 1

1. *Обчислити визначник* Δ*:*
   а) розклавши його за елементами i *-го рядка;*
   б) розклавши його за елементами j *-го стовпця;*
   в) одержавши попередньо нулі в i *-му рядку;*
   г) привівши його до трикутного вигляду;
   д) використовуючи теорему Лапласа.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \ i = 3, \ \ j = 2.$$

Розв'язання.

а) Застосуємо теорему про розкладання визначника за елементами рядка:

$$\Delta = \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+4\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot(-1)\cdot 64 + 1\cdot 1\cdot(-38) + 4\cdot(-1)\cdot(-30) = 222.$$

б) Застосуємо теорему про розкладання визначника за елементами стовпця:

$$\Delta = \begin{array}{c}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \end{array} = -2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(-1)\cdot(-28)+3\cdot1\cdot42-2\cdot(-1)\cdot64+1\cdot1\cdot24=222.$$

в) Застосуємо властивості визначників, а потім теорему про розкладання визначника за елементами рядка, отримаємо:

$$\Delta = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} -\mathrm{III}\cdot2 & +\mathrm{I} & & -\mathrm{III}\cdot4 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} -9 & -3 & 4 & -15 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & -2 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} -9 & -3 & -15 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot222 = 222.$$

г) Зведемо визначник до трикутного вигляду, застосовуючи властивості визначників. Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ +\mathrm{I}\cdot2 \\ -\mathrm{II} \\ +\mathrm{I}\cdot3 \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 & 2 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot5 \\ -\mathrm{III} \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -39 & -42 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot13+\mathrm{III}\cdot3 \end{array} = \frac{1}{13}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -39 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & -74 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13}\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-39)\cdot(-74) = 222.$$

д) Застосовуючи теорему Лапласа розкладемо визначник за елементами третього та четвертого рядків:

$$\Delta = \begin{array}{c} \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+1+4}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+2+3}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+2+4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+3+4} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \cdot 24 + (-7) \cdot (-1) \cdot (-15) +$$
$$+(-14) \cdot 1 \cdot (-12) + 3 \cdot 1 \cdot (-8) + (-2) \cdot (-1) \cdot (-8) + 7 \cdot 1 \cdot 1 = 222.$$

2. *Знайти розв'язок матричного рівняння $AX = B$ двома способами, якщо*

$$A = \begin{pmatrix} -33 & 1 & -1 \\ 3 & 33 & 1 \\ 1 & -2 & 66 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -32 & -64 \\ 104 & 106 \\ 127 & 62 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

I спосіб.

Запишемо розв'язок рівняння у вигляді:

$$X = A^{-1}B. \tag{1}$$

Знайдемо обернену матрицю, тобто A^{-1}, за допомогою алгебраїчних доповнень. Для цього спочатку обчислимо визначник матриці A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -33 & 1 & -1 \\ 3 & 33 & 1 \\ 1 & -2 & 66 \end{vmatrix} = -72098.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 33 & 1 \\ -2 & 66 \end{vmatrix} = 2180, \; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 66 \end{vmatrix} = -197,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 33 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -39, \; A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 66 \end{vmatrix} = -64,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -33 & -1 \\ 1 & 66 \end{vmatrix} = -2177, \; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -33 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -65,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 33 & 1 \end{vmatrix} = 34, \; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -33 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 30,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -33 & 1 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} = -1092.$$

Будемо мати: $A^{-1} = \dfrac{1}{-72098} \begin{pmatrix} 2180 & -64 & 34 \\ -197 & -2177 & 30 \\ -39 & -65 & -1092 \end{pmatrix}.$

Підставимо в (1) знайдену обернену матрицю та матрицю B з умови задачі. Отримаємо:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-72098} \begin{pmatrix} 2180 & -64 & 34 \\ -197 & -2177 & 30 \\ -39 & -65 & -1092 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -32 & -64 \\ 104 & 106 \\ 127 & 62 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{-72098}\begin{pmatrix} 2180\cdot(-32)+(-64)\cdot 104+34\cdot 127 & 2180\cdot(-64)+(-64)\cdot 106+34\cdot 62 \\ (-197)\cdot(-32)+(-2177)\cdot 104+30\cdot 127 & (-197)\cdot(-64)+(-2177)\cdot 106+30\cdot 62 \\ (-39)\cdot(-32)+(-65)\cdot 104+(-1092)\cdot 127 & (-39)\cdot(-64)+(-65)\cdot 106+(-1092)\cdot 62 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-72098}\begin{pmatrix} -69760-6656+4318 & -139520-6784+2108 \\ 6304-226408+3810 & 12608-230762+1860 \\ 1248-6760-138684 & 2496-6890-67704 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{72098}\begin{pmatrix} -72098 & -144196 \\ -216294 & -216294 \\ -144196 & -72098 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

II спосіб.

Запишемо розширену матрицю матричного рівняння та зведемо її до ступінчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень рядків:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} -33 & 1 & -1 & -32 & -64 \\ 3 & 33 & 1 & 104 & 106 \\ 1 & -2 & 66 & 127 & 62 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 11+\mathrm{I} \\ \cdot 33+\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} -33 & 1 & -1 & -32 & -64 \\ 0 & 364 & 10 & 1112 & 1102 \\ 0 & -65 & 2177 & 4159 & 1982 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 65+\mathrm{III} \\ \cdot 1/2 \\ \cdot 28+5\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc} -2145 & 0 & 2112 & 2079 & -2178 \\ 0 & 182 & 5 & 556 & 551 \\ 0 & 0 & 61006 & 122012 & 61006 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-1/3) \\ \\ \cdot 1/61006 \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc} 715 & 0 & -704 & -693 & 726 \\ 0 & 182 & 5 & 556 & 551 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} +\mathrm{III}\cdot 704 \\ -\mathrm{III}\cdot 5 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|cc} 715 & 0 & 0 & 715 & 1430 \\ 0 & 182 & 0 & 546 & 546 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 1/715 \\ \cdot 1/182 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Таким чином, $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Перевірити на сумісність систему рівнянь і у випадку сумісності розв'язати її:
а) методом Гаусса;
б) за формулами Крамера;
в) за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

$$\begin{cases} 24x_1 + 2x_2 - x_3 = 25, \\ 2x_1 - 19x_2 + 3x_3 = -27, \\ x_1 + 5x_2 - 22x_3 = -55. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Зведемо розширену матрицю системи до ступінчастого вигляду (прямий хід метода Гаусса):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 2 & -19 & 3 & -27 \\ 1 & 5 & -22 & -55 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 2 \\ \cdot 24 - \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 0 & -29 & 47 & 83 \\ 0 & 118 & -527 & -1345 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 29 - \mathrm{II}\cdot 118 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 0 & -29 & 47 & 83 \\ 0 & 0 & -9737 & -29211 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1/9737) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 24 & 2 & -1 & 25 \\ 0 & -29 & 47 & 83 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Будемо мати, що ранги матриці системи та розширеної матриці системи дорівнюють трьом й співпадають з кількістю невідомих, тобто $\mathrm{rang}A = \mathrm{rang}\widetilde{A} = 3 = n = 3$, отже система сумісна і має єдиний розв'язок. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв'яжемо її (зворотний хід метода Гаусса):

$$\begin{cases} 24x_1 + 2x_2 - x_3 = 25, \\ \quad -29x_2 + 47x_3 = 83, \\ \qquad x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{25 - 2\cdot 2 + 3}{24} = \dfrac{24}{24} = 1, \\ x_2 = \dfrac{83 - 47\cdot 3}{-29} = \dfrac{-58}{-29} = 2, \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

б) Розв'яжемо систему за формулами Крамера. Для цього обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 24 & 2 & -1 \\ 2 & -19 & 3 \\ 1 & 5 & -22 \end{vmatrix} = 9737, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 25 & 2 & -1 \\ -27 & -19 & 3 \\ -55 & 5 & -22 \end{vmatrix} = 9737,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 24 & 25 & -1 \\ 2 & -27 & 3 \\ 1 & -55 & -22 \end{vmatrix} = 19474, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 24 & 2 & 25 \\ 2 & -19 & -27 \\ 1 & 5 & -55 \end{vmatrix} = 29211.$$

Будемо мати: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{9737}{9737}=1$, $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{19474}{9737}=2$, $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{29211}{9737}=3$.

в) Розв'яжемо систему засобами матричного числення. Для цього перепишемо систему в матричному вигляді: $AX=B$, де $A=\begin{pmatrix}24 & 2 & -1\\ 2 & -19 & 3\\ 1 & 5 & -22\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}25\\ -27\\ -55\end{pmatrix}$. Розв'язок будемо шукати у вигляді: $X=A^{-1}B$. Знайдемо обернену матрицю, тобто A^{-1}, за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}24 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -19 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 5 & -22 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -2\text{III}\\ \cdot 24-\text{I}\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}24 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -29 & 47 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 118 & -527 & 1 & 0 & 24\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 29+2\text{II}\\ \\ \cdot 29-118\,\text{II}\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}696 & 0 & 65 & 29 & 2 & -4\\ 0 & -29 & 47 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -9737 & -29 & 118 & 460\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 749+\text{III}\cdot 5\\ \cdot 9737+\text{III}\cdot 47\\ \cdot(-1)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}521304 & 0 & 0 & 21576 & 2088 & -696\\ 0 & -282373 & 0 & -1363 & 15283 & 2146\\ 0 & 0 & 9737 & 29 & -118 & -460\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 13/696\\ \cdot(-1/29)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}9737 & 0 & 0 & 403 & 39 & -13\\ 0 & 9737 & 0 & 47 & -527 & -74\\ 0 & 0 & 9737 & 29 & -118 & -460\end{array}\right).$$

Будемо мати: $A^{-1}=\dfrac{1}{9737}\begin{pmatrix}403 & 39 & -13\\ 47 & -527 & -74\\ 29 & -118 & -460\end{pmatrix}$. Підставимо та отримаємо:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{9737}\begin{pmatrix}403 & 39 & -13\\ 47 & -527 & -75\\ 29 & -118 & -460\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25\\ -27\\ -55\end{pmatrix}=\frac{1}{9737}\begin{pmatrix}10075-1053+715\\ 1175+14229+4070\\ 725+3186+25300\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9737}\begin{pmatrix}9737\\ 19474\\ 29211\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

4. *Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Зведемо матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \cdot 2 \\ - \mathrm{II} \cdot 2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 7 & -11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ + \mathrm{II} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang} A = 2 < n = 3 \Rightarrow$ система має безліч розв'язків. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad -7x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{5}{7} x_3, \\ x_2 = \dfrac{11}{7} x_3 \end{cases} \text{ – загальний розв'язок.}$$

5. *Знайти загальний та один частинний розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь:*

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 \qquad + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання.

Зведемо розширену матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 4 & -1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -2 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 6 - \mathrm{II} \\ - \mathrm{III} \cdot 13 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -2 & -22 & -22 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ + \mathrm{III} \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 & -1 \end{array}\right).$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} \widetilde{A} = 4 < n = 5 \Rightarrow$ система сумісна і має безліч розв'язків. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -2, \\ \quad 6x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 5, \\ \quad\quad x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 13, \\ \quad\quad\quad 8x_4 + 8x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 3\cdot\dfrac{11}{4} - \dfrac{97}{8} + 2\left(\dfrac{1}{8} - x_5\right) + x_5, \\ x_2 = \dfrac{1}{6}\left(5 + \dfrac{97}{8} - 5\left(\dfrac{1}{8} - x_5\right) - 5x_5\right) = \dfrac{11}{4}, \\ x_3 = 13 - 7\cdot\left(\dfrac{1}{8} - x_5\right) - 7x_5 = \dfrac{97}{8}, \\ x_4 = \dfrac{1}{8} - x_5; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{45}{8} - x_5, \\ x_2 = \dfrac{11}{4}, \\ x_3 = \dfrac{97}{8}, \\ x_4 = \dfrac{1}{8} - x_5 \end{cases}$$

– загальний розв’язок системи;

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{45}{8}, \\ x_2 = \dfrac{11}{4}, \\ x_3 = \dfrac{97}{8}, \\ x_4 = \dfrac{1}{8}, \\ x_5 = 0 \end{cases}$$ – частинний розв’язок системи.

6. *Для матриць* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 33 & -2 \\ 2 & -63 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -33 & 2 & 33 \end{pmatrix}$ *знайти* $2A^2 - (BC)^t$.

Розв’язання.

Знайдемо послідовно A^2, $2A^2$, BC, $(BC)^t$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 33 & -2 \\ 2 & -63 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 33 & -2 \\ 2 & -63 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot0 + 2\cdot2 & 1\cdot2 + 2\cdot33 + 2\cdot(-63) & 1\cdot2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot1 \\ 0\cdot1 + 33\cdot0 - 2\cdot2 & 0\cdot2 + 33\cdot33 - 2\cdot(-63) & 0\cdot2 + 33\cdot(-2) - 2\cdot1 \\ 2\cdot1 - 63\cdot0 + 1\cdot2 & 2\cdot2 - 63\cdot33 + 1\cdot(-63) & 2\cdot2 - 63\cdot(-2) + 1\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & -60 & 0 \\ -4 & 1215 & -68 \\ 4 & -2138 & 131 \end{pmatrix};$$

$$2A^2=\begin{pmatrix} 10 & -120 & 0 \\ -8 & 2430 & -136 \\ 8 & -4276 & 262 \end{pmatrix};$$

$$BC=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -33 & 2 & 33 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-33) & 2\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot(-2)+1\cdot 33 \\ 2\cdot 1+1\cdot(-33) & 2\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot(-2)+1\cdot 33 \\ 1\cdot 1+7\cdot(-33) & 1\cdot 3+7\cdot 2 & 1\cdot(-2)+7\cdot 33 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -31 & 8 & 29 \\ -31 & 8 & 29 \\ -230 & 17 & 229 \end{pmatrix},$$

$$(BC)^t=\begin{pmatrix} -31 & -31 & -230 \\ 8 & 8 & 17 \\ 29 & 29 & 229 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$2A^2-(BC)^t=\begin{pmatrix} 10 & -120 & 0 \\ -8 & 2430 & -136 \\ 8 & -4276 & 262 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -31 & -31 & -230 \\ 8 & 8 & 17 \\ 29 & 29 & 229 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 41 & -89 & 230 \\ -16 & 2422 & -153 \\ -21 & -4305 & 33 \end{pmatrix}.$$

7. Знайти значення многочлена $f(x)=3x^2+2x-1$ *від матриці*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 28 \\ -1 & 3 & -33 \\ 33 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Значення многочлена від матриці A буде мати вигляд: $f(A)=3A^2+2A-E$. Знайдемо послідовно A^2, $2A^2$, $3A$:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 28 \\ -1 & 3 & -33 \\ 33 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 28 \\ -1 & 3 & -33 \\ 33 & 2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot(-1)+28\cdot 33 & 1\cdot 1+1\cdot 3+28\cdot 2 & 1\cdot 28+1\cdot(-33)+28\cdot 2 \\ -1\cdot 1+3\cdot(-1)-33\cdot 33 & -1\cdot 1+3\cdot 3-33\cdot 2 & -1\cdot 28+3\cdot(-33)-33\cdot 2 \\ 33\cdot 1+2\cdot(-1)+2\cdot 33 & 1\cdot 1+1\cdot 3+28\cdot 2 & 33\cdot 28+2\cdot(-33)+2\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 924 & 60 & 51 \\ -1093 & -58 & -193 \\ 97 & 60 & 862 \end{pmatrix};$$

$$2A^2=\begin{pmatrix} 1848 & 120 & 102 \\ -2186 & -116 & -386 \\ 194 & 120 & 1724 \end{pmatrix};$$

$$3A=3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 28 \\ -1 & 3 & -33 \\ 33 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 84 \\ -3 & 9 & -99 \\ 99 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$f(A)=2A^2-3A+2E=\begin{pmatrix} 1848 & 120 & 102 \\ -2186 & -116 & -386 \\ 194 & 120 & 1724 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 3 & 84 \\ -3 & 9 & -99 \\ 99 & 6 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1843 & 117 & 18 \\ -2183 & -123 & -287 \\ 95 & 114 & 1720 \end{pmatrix}.$$

8. Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} -x^2 & 4 & 9 \\ -x & 2 & 3 \\ -33 & 33 & 33 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & -3 & 2 \\ x & 1 & 33 \\ 0 & -33 & 4 \end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix} 3 & x & 132 \\ 2 & -1 & -99 \\ x+10 & 1 & -33 \end{vmatrix}=0$.

Розв'язання.

а) Застосуємо властивості визначника, а потім розкриємо його:

$$-33\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$2x^2+9x+12-18-3x^2-4x=0,$$

$$-x^2+5x-6=0,$$
$$x^2-5x+6=0,$$
$$x_1=2,\ x_2=3.$$
б) Розкриємо визначник:
$$\begin{vmatrix} x^2 & -3 & 2 \\ x & 1 & 33 \\ 0 & -33 & 4 \end{vmatrix}=0,$$
$$4x^2-66x+1089x^2+12x=0,$$
$$1093x^2-54x=0,$$
$$x(1093x-54)=0,$$
$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ 1093x-54=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\dfrac{54}{1093} \end{array}\right. .$$
в) Застосуємо властивості визначника, а потім розкриємо його:
$$33\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ x+10 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$
$$\begin{vmatrix} 3 & x & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ x+10 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$
$$3+8-3x(x+10)+4(x+10)+9+2x=0,$$
$$20-3x^2-30x+4x+40+2x=0,$$
$$-3x^2-24x+60=0,$$
$$x^2+8x-20=0,$$
$$x_1=-10,\ x_2=2.$$

9. Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 33 & -66 & 33 \end{vmatrix}<1;$ б) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ 33 & 33 & 66 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix}>0.$

Розв'язання.

а) Застосуємо властивості визначника, а потім розкриємо його:
$$33\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}<1,$$

$$33(3x-2+4-x-12+2)<1,$$
$$33(2x-8)<1,$$
$$66(x-4)<1,$$
$$x-4<\frac{1}{66},$$
$$x<4\frac{1}{66}.$$

б) Застосуємо властивості визначника, а потім розкриємо його:

$$33\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix}>0,$$
$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix}>0,$$
$$-2x-3+10(x+2)-5+12+x(x+2)>0,$$
$$-2x-3+10x+20-5+12+x^2+2x>0,$$
$$x^2+10x+24>0,$$
$$(x+6)(x+4)>0,$$
$$x\in(-\infty;\,-6)\cup(-4;\,+\infty).$$

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ № 2

1. Знайти:

а) матрицю переходу від базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ *до базису* $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$;

б) матрицю переходу від базису $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ *до базису* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$;

в) координати вектора $\boldsymbol{x}$ *в базисі* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$;

г) координати вектора $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ *в базисі* $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

для першої групи

В 1 $\boldsymbol{e}_1 = (2;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-1;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (2;\ -2;\ 3)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (8; -7; -6)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2; -1; -3)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (-3;\ 4;\ 2)$; $\boldsymbol{x} = (-1; -4;\ 5)$

В 2 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ 2;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0;\ 0;\ 4)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (3;\ 5;\ -6)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2;\ 4;\ 3)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (-3;\ 1;\ 1)$; $\boldsymbol{x} = (1;\ 0;\ 4)$

В 3 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 0;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (2;\ 3;\ 4)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (2; 1; -1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (2; -1; 1)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (1;\ 0;\ 1)$; $\boldsymbol{x} = (1; -3;\ -3)$

В 4 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ 1;\ 2)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1;\ 2;\ 3)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (-6;\ 1;\ 11)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (9;\ 2;\ 5)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (0;\ 3;\ 7)$; $\boldsymbol{x} = (6;\ 7;\ 10)$

В 5 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ 1;\ 2)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1;\ 2;\ 3)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (3;\ 1;\ 2)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (-1;\ 0;\ 2)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (1;\ 2;\ 1)$; $\boldsymbol{x} = (6;\ 9;\ 14)$

В 6 $\boldsymbol{e}_1 = (2;\ 1;\ -3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (3;\ 2;\ -5)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1;\ -1;\ 1)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (2;\ 3;\ 2)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1;\ 3;\ -1)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (4;\ 1;\ 3)$; $\boldsymbol{x} = (6;\ 2;\ -7)$

В 7 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 2;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2;\ -1;\ 3)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-3;\ -1;\ 4)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (6;\ 7;\ 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (3;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (2;\ 2;\ 1)$; $\boldsymbol{x} = (5; 1;\ 6)$

В 8 $\boldsymbol{e}_1 = (2;\ 3;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-1;\ 2;\ -2)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1;\ 2;\ 1)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (-2;\ 3;\ 4)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (3; -1; -4)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (-1;\ 2;\ 2)$; $\boldsymbol{x} = (2;\ -2;\ 1)$

В 9 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ -2;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (-1;\ 1;\ 1)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (1;\ 7;\ 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (-4;\ 9;\ 4)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (0;\ 3;\ 2)$; $\boldsymbol{x} = (2;\ 3;\ 6)$

В 10 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 4;\ 7)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2;\ 5;\ 8)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3;\ 6;\ 0)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (2;\ 6;\ 1)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1;\ 3;\ 2)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (0;\ 1;\ 1)$; $\boldsymbol{x} = (6;\ 9;\ -6)$

В 11 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 2;\ 3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2;\ 6;\ 10)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3;\ 4;\ 8)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (6;\ 9;\ 4)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (-1;\ -1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (10;\ 1;\ 7)$; $\boldsymbol{x} = (3;\ 6;\ 2)$

В 12 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ 2;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ -1;\ -1)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1;\ 1;\ 2)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (1;\ 0;\ 3)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (3;\ 1;\ 7)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (2;\ 1;\ 8)$; $\boldsymbol{x} = (6;\ 3;\ 5)$

В 13 $\boldsymbol{e}_1 = (1;\ -1;\ 3)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2;\ 1;\ 4)$, $\boldsymbol{e}_3 = (3;\ 1;\ 5)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (5;\ 1;\ -2)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (1;\ 3;\ -1)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (8;\ 4;\ -1)$; $\boldsymbol{x} = (-13;\ -1;\ 11)$

В 14 $\boldsymbol{e}_1 = (-1;\ 3;\ 5)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1;\ 4;\ 6)$, $\boldsymbol{e}_3 = (1;\ 5;\ 7)$; $\boldsymbol{e}'_1 = (2;\ 2;\ 5)$, $\boldsymbol{e}'_2 = (3;\ 3;\ 6)$, $\boldsymbol{e}'_3 = (4;\ 3;\ 4)$; $\boldsymbol{x} = (-1;\ 11;\ 19)$

В 15 $\boldsymbol{e}_1 = (3;\ 2;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (2;\ -3;\ 2)$,

В 16 $\boldsymbol{e}_1 = (2;\ 1;\ 1)$, $\boldsymbol{e}_2 = (-3;\ 2;\ -1)$,

$\boldsymbol{e}_3=(5;1;0)$; $\boldsymbol{e}_1'=(1;-2;5)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;0;6)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;3;4)$; $\boldsymbol{x}=(3;-3;-3)$

$\boldsymbol{e}_3=(1;0;-4)$; $\boldsymbol{e}_1'=(5;4;2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;2;4)$, $\boldsymbol{e}_3'=(3;0;5)$; $\boldsymbol{x}=(-3;-3;22)$

В 17 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-6;-6;9)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;-7;2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;-8;3)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;-2;3)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;6)$

В 18 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-4;-4;2)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;-1;0)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;5;1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;7;5)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;6)$

В 19 $\boldsymbol{e}_1=(3;2;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(2;-3;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(1;5;-4)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;1;0)$, $\boldsymbol{e}_2'=(4;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3'=(2;2;-7)$; $\boldsymbol{x}=(3;-3;-3)$

В 20 $\boldsymbol{e}_1=(2;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-3;2;-1)$, $\boldsymbol{e}_3=(5;-4;9)$; $\boldsymbol{e}_1'=(8;-1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2'=(5;-5;-1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(10;3;2)$; $\boldsymbol{x}=(-3;-3;22)$

для другої групи

В 1 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-6;-6;9)$; $\boldsymbol{e}_1'=(8;-7;-6)$, $\boldsymbol{e}_2'=(2;-1;-3)$, $\boldsymbol{e}_3'=(-3;4;2)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;6)$

В 2 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;3)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(-6;-6;3)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;5;-6)$, $\boldsymbol{e}_2'=(2;4;3)$, $\boldsymbol{e}_3'=(-3;1;1)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;-7)$

В 3 $\boldsymbol{e}_1=(3;2;3)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(-6;9;3)$; $\boldsymbol{e}_1'=(2;1;-1)$, $\boldsymbol{e}_2'=(2;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(1;0;1)$; $\boldsymbol{x}=(2;6;-7)$

В 4 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-4;-4;2)$; $\boldsymbol{e}_1'=(-6;1;11)$, $\boldsymbol{e}_2'=(9;2;5)$, $\boldsymbol{e}_3'=(0;3;7)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;6)$

В 5 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;3)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(-4;-4;8)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;1;2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(-1;0;2)$, $\boldsymbol{e}_3'=(1;2;1)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;-7)$

В 6 $\boldsymbol{e}_1=(3;2;3)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(-4;2;8)$; $\boldsymbol{e}_1'=(2;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;3;-1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;1;3)$; $\boldsymbol{x}=(2;6;-7)$

В 7 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_3=(2;-1;-1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(6;7;3)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;1;0)$, $\boldsymbol{e}_3'=(2;2;1)$; $\boldsymbol{x}=(1;-4;-6)$

В 8 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(2;-1;3)$; $\boldsymbol{e}_1'=(-2;3;4)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;-1;-4)$, $\boldsymbol{e}_3'=(-1;2;2)$; $\boldsymbol{x}=(1;-4;-4)$

В 9 $\boldsymbol{e}_1=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;-1;3)$, $\boldsymbol{e}_3=(3;-2;-1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(1;7;3)$, $\boldsymbol{e}_2'=(-4;9;4)$, $\boldsymbol{e}_3'=(0;3;2)$; $\boldsymbol{x}=(-4;-6;-4)$

В 10 $\boldsymbol{e}_1=(3;2;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(-2;-1;-1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(2;6;1)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;3;2)$, $\boldsymbol{e}_3'=(0;1;1)$; $\boldsymbol{x}=(-4;-6;-4)$

В 11 $\boldsymbol{e}_1=(1;2;3)$, $\boldsymbol{e}_2=(2;-1;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(3;-2;-1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(6;9;4)$, $\boldsymbol{e}_2'=(-1;-1;1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(10;1;7)$; $\boldsymbol{x}=(6;8;4)$

В 12 $\boldsymbol{e}_1=(2;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;2;-3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-2;-1;2)$; $\boldsymbol{e}_1'=(1;0;3)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;1;7)$, $\boldsymbol{e}_3'=(2;1;8)$; $\boldsymbol{x}=(8;4;-8)$

В 13 $\boldsymbol{e}_1=(1;2;3)$, $\boldsymbol{e}_2=(2;-1;2)$,

В 14 $\boldsymbol{e}_1=(2;3;2)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;2;-3)$,

	$\boldsymbol{e}_3=(-2;\,-3;\,2)$; $\boldsymbol{e}_1'=(5;\,1;\,-2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;\,3;\,-1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(8;\,4;\,-1)$; $\boldsymbol{x}=(6;\,8;\,4)$		$\boldsymbol{e}_3=(-3;\,2;\,1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(2;\,2;\,5)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;\,3;\,6)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;\,3;\,4)$; $\boldsymbol{x}=(8;\,4;\,-8)$
В 15	$\boldsymbol{e}_1=(2;\,1;\,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;\,-3;\,2)$, $\boldsymbol{e}_3=(-5;\,0;\,-1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(1;\,-2;\,5)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;\,0;\,6)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;\,3;\,4)$; $\boldsymbol{x}=(8;\,9;\,-5)$	**В 16**	$\boldsymbol{e}_1=(1;\,0;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-3;\,2;\,4)$, $\boldsymbol{e}_3=(0;\,-1;\,-7)$; $\boldsymbol{e}_1'=(5;\,4;\,2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;\,2;\,4)$, $\boldsymbol{e}_3'=(3;\,0;\,5)$; $\boldsymbol{x}=(9;\,-5;\,0)$
В 17	$\boldsymbol{e}_1=(2;\,1;\,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;\,-3;\,2)$, $\boldsymbol{e}_3=(1;\,-6;\,2)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;\,-7;\,2)$, $\boldsymbol{e}_2'=(1;\,-8;\,3)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;\,-2;\,3)$; $\boldsymbol{x}=(8;\,9;\,-5)$	**В 18**	$\boldsymbol{e}_1=(1;\,0;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-3;\,2;\,4)$, $\boldsymbol{e}_3=(-6;\,2;\,6)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;\,-1;\,0)$, $\boldsymbol{e}_2'=(3;\,5;\,1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(4;\,7;\,5)$; $\boldsymbol{x}=(9;\,-5;\,0)$
В 19	$\boldsymbol{e}_1=(1;\,2;\,4)$, $\boldsymbol{e}_2=(2;\,-1;\,3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-3;\,2;\,-1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(3;\,1;\,0)$, $\boldsymbol{e}_2'=(4;\,3;\,2)$, $\boldsymbol{e}_3'=(2;\,2;\,-7)$; $\boldsymbol{x}=(-8;\,2;\,3)$	**В 20**	$\boldsymbol{e}_1=(2;\,4;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;\,3;\,2)$, $\boldsymbol{e}_3=(2;\,-1;\,1)$; $\boldsymbol{e}_1'=(8;\,-1;\,-1)$, $\boldsymbol{e}_2'=(5;\,-5;\,-1)$, $\boldsymbol{e}_3'=(10;\,3;\,2)$; $\boldsymbol{x}=(2;\,3;\,12)$

2. Знайти розмірність та базис суми й перетину підпросторів $L_1=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle$ і $L_2=\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle$, якщо

для першої групи
(тут N – номер варіанта):

$$\boldsymbol{a}_1=(N;\,0;\,1;\,0),\ \boldsymbol{a}_2=(1;\,2;\,-1;\,1),\ \boldsymbol{a}_3=(-1;\,15-N;\,1;\,1);$$
$$\boldsymbol{b}_1=(0;\ -2;\ 0;\,-1),\ \boldsymbol{b}_2=(2;\ 2;\ 2;\,-N),\ \boldsymbol{b}_3=(-2;\,15-N;\,-2;\,0).$$

для другої групи
(тут N – номер варіанта):

$$\boldsymbol{a}_1=(1;\,0;\,15-N;\,0),\ \boldsymbol{a}_2=(1;\,2;\,-1;\,1),\ \boldsymbol{a}_3=(-1;\,N;\,1;\,1);$$
$$\boldsymbol{b}_1=(0;\ -2;\ 0;\,-1),\ \boldsymbol{b}_2=(2;\ 2;\ 2;\,15-N),\ \boldsymbol{b}_3=(-2;\,N;\,-2;\,0).$$

3. Знайти розклад вектора $\boldsymbol{p}(x)$ простору $R_3[x]$ по базису $\boldsymbol{p}_0=1$, $\boldsymbol{p}_1=x+N$, $\boldsymbol{p}_2=(x+N)^2$, $\boldsymbol{p}_3=(x+N)^3$, де N – номер варіанта, якщо

для першої групи

$$\boldsymbol{p}(x)=Nx^3+(15-N)x+1.$$

для другої групи

$$\boldsymbol{p}(x)=Nx^3+(N-15)x-1.$$

4. Вказати який-небудь базис простору квадратних матриць третього порядку й знайти розклад вектора $\boldsymbol{A}$ *по цьому базису.*

для першої групи

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & N-5 \\ -1 & 3 & -N \\ N & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

для другої групи

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} N & 1 & N-15 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2-N & 2 \end{pmatrix}$$

(тут N *– номер варіанта).*

5. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = 0, \\ a_{41}x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = 0. \end{cases}$$

для першої групи

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
B1	2	5	8	3	3	1	2	4	2	1
B2	2	5	8	3	3	3	6	11	5	3
B3	1	4	6	2	3	2	5	9	4	3
B4	–1	2	2	0	3	0	3	5	2	3
B5	–1	2	1	–1	3	0	3	4	1	3
B6	0	1	1	0	1	1	4	6	2	3
B7	2	4	7	3	2	3	6	11	5	3
B8	1	4	5	1	3	2	5	8	3	3
B9	0	3	4	1	3	1	4	7	3	3
B10	1	4	7	3	3	2	5	10	5	3
B11	3	8	2	5	3	2	1	1	2	4
B12	3	8	2	5	3	5	3	3	6	11
B13	3	6	1	4	2	4	3	2	5	9
B14	3	2	–1	2	0	2	3	0	3	5
B15	3	1	–1	2	–1	1	3	0	3	4
B16	1	1	0	1	0	2	3	1	4	6

B17	2	7	2	4	3	5	3	3	6	11
B18	3	5	1	4	1	3	3	2	5	8
B19	3	4	0	3	1	3	3	1	4	7
B20	3	7	1	4	3	5	3	2	5	10

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
B1	4	4	7	2	3	2	3	4	1	1
B2	12	7	11	3	7	3	7	12	5	4
B3	5	2	3	1	3	1	3	5	2	2
B4	3	3	5	0	2	0	2	3	1	2
B5	5	3	4	0	4	0	4	5	1	4
B6	7	2	3	1	5	1	5	7	2	4
B7	11	3	5	2	6	2	6	11	5	4
B8	9	5	8	2	6	2	6	9	3	4
B9	8	4	7	1	5	1	5	8	3	4
B10	11	6	10	2	6	2	6	11	5	4
B11	2	7	4	1	1	1	1	2	3	4
B12	3	11	7	5	4	5	4	3	7	12
B13	1	3	2	2	2	2	2	1	3	5
B14	0	5	3	1	2	1	2	0	2	3
B15	0	4	3	1	4	1	4	0	4	5
B16	1	3	2	2	4	2	4	1	5	7
B17	2	5	3	5	4	5	4	2	6	11
B18	2	8	5	3	4	3	4	2	6	9
B19	1	7	4	3	4	3	4	1	5	8
B20	2	10	6	5	4	5	4	2	6	11

для другої групи

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
B1	2	5	8	3	3	1	2	4	2	1
B2	2	5	8	3	3	3	6	11	5	3
B3	1	4	6	2	3	2	5	9	4	3
B4	–1	2	2	0	3	0	3	5	2	3
B5	–1	2	1	–1	3	0	3	4	1	3
B6	0	1	1	0	1	1	4	6	2	3
B7	2	4	7	3	2	3	6	11	5	3
B8	1	4	5	1	3	2	5	8	3	3
B9	0	3	4	1	3	1	4	7	3	3
B10	1	4	7	3	3	2	5	10	5	3
B11	3	8	2	5	3	2	1	1	2	4
B12	3	8	2	5	3	5	3	3	6	11
B13	3	6	1	4	2	4	3	2	5	9
B14	3	2	–1	2	0	2	3	0	3	5

B15	3	1	–1	2	–1	1	3	0	3	4
B16	1	1	0	1	0	2	3	1	4	6
B17	2	7	2	4	3	5	3	3	6	11
B18	3	5	1	4	1	3	3	2	5	8
B19	3	4	0	3	1	3	3	1	4	7
B20	3	7	1	4	3	5	3	2	5	10

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
B1	4	4	7	2	3	2	3	4	1	1
B2	12	7	11	3	7	3	7	12	5	4
B3	5	2	3	1	3	1	3	5	2	2
B4	3	3	5	0	2	0	2	3	1	2
B5	5	3	4	0	4	0	4	5	1	4
B6	7	2	3	1	5	1	5	7	2	4
B7	11	3	5	2	6	2	6	11	5	4
B8	9	5	8	2	6	2	6	9	3	4
B9	8	4	7	1	5	1	5	8	3	4
B10	11	6	10	2	6	2	6	11	5	4
B11	2	7	4	1	1	1	1	2	3	4
B12	3	11	7	5	4	5	4	3	7	12
B13	1	3	2	2	2	2	2	1	3	5
B14	0	5	3	1	2	1	2	0	2	3
B15	0	4	3	1	4	1	4	0	4	5
B16	1	3	2	2	4	2	4	1	5	7
B17	2	5	3	5	4	5	4	2	6	11
B18	2	8	5	3	4	3	4	2	6	9
B19	1	7	4	3	4	3	4	1	5	8
B20	2	10	6	5	4	5	4	2	6	11

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ № 2

1. *Знайти:*

а) *матрицю переходу від базису* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ *до базису* $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$*;*

б) *матрицю переходу від базису* $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$ *до базису* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$*;*

в) *координати вектора* $\boldsymbol{x}$ *в базисі* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$*;*

г) *координати вектора* $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ *в базисі* $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$.

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,2,1),\ \boldsymbol{e}_2 = (2,3,3),\ \boldsymbol{e}_3 = (3,7,1);$$
$$\boldsymbol{e}_1' = (3,1,4),\ \boldsymbol{e}_2' = (5,2,1),\ \boldsymbol{e}_3' = (1,1,-6);$$
$$\boldsymbol{x} = (1,2,3).$$

Розв'язання.

а) Для знаходження матриці переходу $P_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'}$ від базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ до базису $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$ скористаємось матричним рівнянням $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}P$, де $\boldsymbol{e}$ – матриця, по стовпцях якої розташовано координати векторів базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$; $\boldsymbol{e}'$ – матриця, по стовпцях якої розташовано координати векторів базису $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$. Розв'яжемо його:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{I}\cdot 2 \\ -\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} +\mathrm{II}\cdot 2 \\ \\ +\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -7 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right)\begin{array}{l} +\mathrm{III}\cdot 5 \\ +\mathrm{III} \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & -1 & 0 & -9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

Будемо мати: $P_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$.

б) Для знаходження матриці переходу $P_{\boldsymbol{e}'\to\boldsymbol{e}}$ від базису $\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$ до базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ скористаємось формулою $\boldsymbol{e}'P_{\boldsymbol{e}'\to\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{e}$. Знайдемо $P_{\boldsymbol{e}'\to\boldsymbol{e}}$ як обернену до $P_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -27 & -71 & -41 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 20 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 3+\mathrm{I} \\ \cdot 9-4\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -27 & -71 & -41 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -14 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 28 & 36 & 0 & -4 & 9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 11-71\mathrm{II} \\ \\ \cdot 11+28\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -297 & 0 & 543 & -60 & 213 & 0 \\ 0 & -11 & -14 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 28 & 40 & 99 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 4-\mathrm{III}\cdot 543 \\ \cdot 4+\mathrm{III}\cdot 14 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1188 & 0 & 0 & -15444 & -22572 & -53757 \\ 0 & -44 & 0 & 396 & 572 & 1386 \\ 0 & 0 & 4 & 28 & 40 & 99 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-1/297) \\ \cdot(-1/11) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 52 & 76 & 181 \\ 0 & 4 & 0 & -36 & -52 & -126 \\ 0 & 0 & 4 & 28 & 40 & 99 \end{array}\right).$$

Таким чином, $P_{e'\to e} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{pmatrix}$.

в) Для знаходження координат вектора $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$ в базисі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ скористаємось означенням координат вектора в базисі:

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3 .$$

Підставивши координати всіх векторів, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + 7z = 2, \\ x + 3y + z = 3, \end{cases}$$

яку розв'яжемо методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{11}{1} = 11,\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2,\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Таким чином, в базисі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ вектор $\boldsymbol{x}$ має координати $\boldsymbol{x} = (11, -2, -2)$.

г) Для знаходження координат вектора $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ в базисі

$\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ скористаємось формулами зв'язку координат одного і того ж вектора в двох базисах в матричній формі: $\boldsymbol{y} = P_{\boldsymbol{e}\to\boldsymbol{e}'}\boldsymbol{y}'$ або $\boldsymbol{y}' = P_{\boldsymbol{e}'\to\boldsymbol{e}}\boldsymbol{y}$, де $\boldsymbol{y}' = (y'_1,\ y'_2,\ y'_3)^T$, $\boldsymbol{y} = (2,\ -3,\ 1)^T$, $P_{\boldsymbol{e}'\to\boldsymbol{e}}$ – матриця переходу від базису $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ до базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Будемо мати:

$$\boldsymbol{y}' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 52 & 76 & 181 \\ -36 & -52 & -126 \\ 28 & 40 & 99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 52\cdot 2 + 76\cdot(-3) + 181\cdot 1 \\ -36\cdot 2 + (-52)\cdot(-3) + (-126)\cdot 1 \\ 128\cdot 2 + 40\cdot(-3) + 99\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 57 \\ -42 \\ 235 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14{,}25 \\ -10{,}5 \\ 58{,}75 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, в базисі $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ вектор $\boldsymbol{y}$ має координати $\boldsymbol{y}' = (14{,}25;\ -10{,}5;\ 58{,}75)$.

2. *Знайти розмірність та базис суми й перетину підпросторів* $L_1 = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ *і* $L_2 = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$, *якщо* $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,2,1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,-1,-2,1,-1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,1,2,5,4)$; $\boldsymbol{b}_1 = (1,0,1,1,1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,-1,-2,5,1)$.

Розв'язання.

Знайдемо розмірності та базиси підпросторів L_1 і L_2. Для цього запишемо матриці, складені з координат векторів і за допомогою елементарних перетворень зведемо їх до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I}\cdot 3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II}\cdot 2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim L_1 = 2\text{, базис } \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -\mathrm{I}\cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim L_2 = 2\text{, базис } \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}.$$

Для знаходження розмірності й базису суми підпросторів $L_1 \cup L_2$ складемо матрицю з базисних векторів L_1 і L_2 та за допомогою елементарних перетворень зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I}\cdot 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{II} \\ -\mathrm{II}\cdot 3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&2&1&2\\0&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \dim(L_1\cup L_2)=3,\ \text{базис } \{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}_1\}.$$

Таким чином, будемо мати, що $\dim(L_1\cap L_2)=2+2-3=1$.

Вектор базису перетину належить як підпростору L_1 так і підпростору L_2, тобто його можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{c}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2=y_1\boldsymbol{b}_1+y_2\boldsymbol{b}_2.$$

Підставивши замість векторів їх координати, одержимо однорідну СЛАР:

$$\begin{cases}x_1=y_1+2y_2,\\x_1-x_2=-y_2,\\2x_1-2x_2=y_1-2y_2,\\x_1+x_2=y_1+5y_2,\\2x_1-x_2=y_1+y_2\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}x_1-y_1-2y_2=0,\\x_1-x_2+y_2=0,\\2x_1-2x_2-y_1+2y_2=0,\\x_1+x_2-y_1-5y_2=0,\\2x_1-x_2-y_1-y_2=0.\end{cases}$$

Знайдемо її ФСР. Для цього зведемо матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\1&-1&0&1\\2&-2&-1&2\\1&1&-1&-5\\2&-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-\mathrm{I}\\-\mathrm{II}\cdot 2\\-\mathrm{II}\\-\mathrm{III}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&1&3\\0&0&-1&0\\0&2&-1&-6\\0&1&0&-3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+\mathrm{II}\cdot 2\\+\mathrm{II}\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&1&3\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\+\mathrm{III}\\-\mathrm{IV}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&-1&1&3\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що ранг матриці системи дорівнює 3, отже будемо мати 4–3=1 розв’язок у ФСР. Загальний розв’язок:

$$\begin{cases}x_1-y_1-2y_2=0,\\-x_2+y_1+3y_2=0,\\y_1=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2y_2,\\x_2=3y_2,\\y_1=0.\end{cases}$$

ФСР: $\{(2;\ 3;\ 0;\ 1)\}$.

Таким чином,

$$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{b}_2,$$

$$\boldsymbol{c}=2(1,1,2,1,2)+3(0,-1,-2,1,-1)=(2,-1,-2,5,1),$$

$$(2,-1,-2,5,1)=(2,-1,-2,5,1),$$

отже, вектор $\boldsymbol{c} = (2, -1, -2, 5, 1)$ – шуканий вектор базису перетину $L_1 \cap L_2$.

3. *Знайти розклад вектора* $\boldsymbol{p}(x) = 3x^3 + 7x + 1$ *простору* $R_3[x]$ *по базису* $\boldsymbol{p}_1 = 1$, $\boldsymbol{p}_2 = x - 25$, $\boldsymbol{p}_3 = (x-25)^2$, $\boldsymbol{p}_4 = (x-25)^3$.

Розв'язання.

За означенням, розклад вектора по базису має вигляд:

$$\boldsymbol{p} = x_1\boldsymbol{p}_1 + x_2\boldsymbol{p}_2 + x_3\boldsymbol{p}_3 + x_4\boldsymbol{p}_4$$

або, в нашому випадку

$$\boldsymbol{p} = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (x-25) + x_3 \cdot (x-25)^2 + x_4 \cdot (x-25)^3.$$

Інакше кажучи, треба знайти коефіцієнти в розкладі многочлена $\boldsymbol{p}(x)$ по степенях двочлена $(x-25)$. Для пошуку коефіцієнтів скористаємось схемою Горнера:

	3	0	7	1
25	3	75	1882	**47051**
25	3	150	**5632**	
25	3	**225**		
25	**3**			

Будемо мати:

$$\boldsymbol{p} = 47051 + 5632 \cdot (x-25) + 225 \cdot (x-25)^2 + 3 \cdot (x-25)^3$$

або

$$\boldsymbol{p} = 47051\boldsymbol{p}_1 + 5632\boldsymbol{p}_2 + 225\boldsymbol{p}_3 + 3\boldsymbol{p}_4.$$

4. *Вказати який-небудь базис простору квадратних матриць третього порядку та знайти розклад вектора* $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -10 \\ -1 & 3 & 31 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *по цьому базису.*

Розв'язання.

У якості прикладу візьмемо стандартний базис простору всіх квадратних матриць третього порядку:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_8=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_9=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-10\\-1&3&31\\7&2&2\end{pmatrix}$ у вказаному базисі буде мати розклад:

$$\begin{pmatrix}1&1&-10\\-1&3&31\\7&2&2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-10\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+31\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

або

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2-10\boldsymbol{A}_3-\boldsymbol{A}_4+3\boldsymbol{A}_5+31\boldsymbol{A}_6+7\boldsymbol{A}_7+2\boldsymbol{A}_8+2\boldsymbol{A}_9.$$

5. *Знайти загальний розв'язок та ФСР однорідної СЛАР:*

$$\begin{cases}x_1-3x_2+x_3-2x_4-x_5=0,\\x_1+3x_2\qquad+3x_4+4x_5=0,\\-x_1+4x_2-x_3+4x_4+3x_5=0,\\3x_1+4x_2+x_3-2x_4+x_5=0.\end{cases}$$

Розв'язання.

Зведемо матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix}1&-3&1&-2&-1\\1&3&0&3&4\\-1&4&-1&4&3\\3&4&1&-2&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-\mathrm{I}\\+\mathrm{I}\\-\mathrm{I}\cdot3\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-2&-1\\0&6&-1&5&5\\0&1&0&2&2\\0&13&-2&4&4\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\cdot6-\mathrm{II}\\-\mathrm{III}\cdot13\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-2&-1\\0&6&-1&5&5\\0&0&1&7&7\\0&0&-2&-22&-22\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\+\mathrm{III}\cdot2\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&-3&1&-2&-1\\0&6&-1&5&5\\0&0&1&7&7\\0&0&0&-8&-8\end{pmatrix}.$$

Будемо мати, що $\mathrm{rang}A=4<n=5\Rightarrow$ система має безліч розв'язків і $n-\mathrm{rang}A=5-4=1$ розв'язок у ФСР. Запишемо систему, що відповідає отриманій ступінчастій матриці й розв'яжемо її:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ \qquad 6x_2 - x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\quad 8x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2(-x_5) + x_5 = -x_5, \\ x_2 = -5(-x_5) - 5x_5 = 0, \\ x_3 = -7 \cdot (-x_5) - 7x_5 = 0, \\ x_4 = -x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -x_5 \end{cases}$$

– загальний розв’язок системи;

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = -1, \\ x_5 = 1 \end{cases}$$ або $\{(-1;\ 0;\ 0;\ -1;\ 1)\}$ – фундаментальна система розв’язків.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №3

1. *Визначити, чи є лінійним перетворення* A, *що переводить вектор* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *у вектор* $A\boldsymbol{x}$ *? Якщо так, то знайти його ядро, образ, ранг та дефект.*

для першої групи

B1 $A\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2 + x_3;\, -x_1 + x_2 + x_3;\, -x_1 - x_2 + x_3)$.
B2 $A\boldsymbol{x} = (6x_1 + 6x_2 - 5x_3;\, 4x_1 + 7x_2 + x_3;\, x_1 - 2x_2 - 5x_3)$.
B3 $A\boldsymbol{x} = (-9x_1 + 3x_2 - 4x_3;\, x_2;\, 7x_1 + 6x_2 + 9x_3)$.
B4 $A\boldsymbol{x} = (3x_1 + x_3;\, -x_1 + x_2 - x_3;\, x_1 - 2x_2 + x_3)$.
B5 $A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 5x_2 - 6x_3;\, x_2 - 2x_3;\, x_3)$.
B6 $A\boldsymbol{x} = (3x_1 + x_3;\, -x_1 + x_2 - x_3;\, x_1 + x_3)$.
B7 $A\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2 - x_3;\, x_2 + x_3;\, x_2)$.
B8 $A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 5x_2 - 6x_3;\, x_2 - 2x_3;\, x_3)$.
B9 $A\boldsymbol{x} = (x_1 + 3x_2;\, x_1 - x_2;\, x_1 + x_2 - 5x_3)$.
B10 $A\boldsymbol{x} = (x_1;\, 2x_1 + x_2;\, x_2 - 3x_3)$.
B11 $A\boldsymbol{x} = (5x_1 + x_2;\, x_1;\, x_2 + 7x_3)$.
B12 $A\boldsymbol{x} = (6x_1 + 2x_2 - 3x_3;\, x_2;\, -x_1 + 2x_2 - 8x_3)$.
B13 $A\boldsymbol{x} = (x_3;\, 2x_1 + 6x_3;\, -2x_1 - 7x_2 + x_3)$.
B14 $A\boldsymbol{x} = (8x_1 - 6x_2;\, -x_1 + 2x_2 + x_3;\, x_3)$.
B15 $A\boldsymbol{x} = (2x_1 + 3x_2 - 7x_3;\, x_1 + x_2 + x_3;\, x_3)$.
B16 $A\boldsymbol{x} = (-5x_1 - 2x_2 + x_3;\, 7x_1 + 2x_2;\, x_1 + x_2 - x_3)$.
B17 $A\boldsymbol{x} = (x_1 + x_2;\, -2x_1 + 3x_2;\, x_1 - x_3)$.
B18 $A\boldsymbol{x} = (-9x_1 + x_2 - 3x_3;\, x_1;\, 6x_2 + 5x_3)$.
B19 $A\boldsymbol{x} = (x_1 + 3x_2 - 4x_3;\, 2x_1 + 3x_2;\, x_1 + 3x_3)$.
B20 $A\boldsymbol{x} = (2x_1 - x_3;\, -x_1 + x_2;\, -x_1)$.

для другої групи

B1 $A\boldsymbol{x} = (-x_1 - x_2 + 2x_3;\, x_1 + x_2 + x_3;\, -x_1 + x_2 + x_3)$.
B2 $A\boldsymbol{x} = (3x_1 + 3x_2 - 5x_3;\, 4x_1 + 6x_2 + x_3;\, x_1 - 2x_2 - 5x_3)$.
B3 $A\boldsymbol{x} = (-8x_1 + 3x_2 - 2x_3;\, 2x_2;\, 5x_1 + 6x_2 + 8x_3)$.
B4 $A\boldsymbol{x} = (3x_1 + 2x_2;\, -x_1 + 3x_2 - x_3;\, 5x_1 - 2x_2 + x_3)$.
B5 $A\boldsymbol{x} = (4x_1 + x_2 - 6x_3;\, 3x_2 - 2x_3;\, x_1)$.
B6 $A\boldsymbol{x} = (-2x_1 + x_2;\, -x_1 + 3x_2 - x_3;\, x_2 + x_3)$.
B7 $A\boldsymbol{x} = (2x_1 + x_2 - 3x_3;\, x_1 + x_3;\, x_1)$.
B8 $A\boldsymbol{x} = (4x_1 + 3x_2 - 6x_3;\, x_1 - 2x_3;\, x_2)$.
B9 $A\boldsymbol{x} = (2x_1 - x_3;\, x_1 - x_2;\, 2x_1 + x_2 - 4x_3)$.

B10 $Ax = (x_2;\ 2x_1 + x_2;\ x_2 - 3x_3)$.

B11 $Ax = (3x_1 + x_2;\ x_3;\ x_2 - 6x_3)$.

B12 $Ax = (2x_1 + 2x_2 - x_3;\ x_3;\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3)$.

B13 $Ax = (x_2;\ 2x_1 - x_3;\ x_1 - 7x_2 + x_3)$.

B14 $Ax = (4x_1 - 6x_2;\ -x_1 + 3x_2 + x_3;\ x_1)$.

B15 $Ax = (2x_1 + x_2 - 7x_3;\ x_1 + 2x_2 + x_3;\ x_1)$.

B16 $Ax = (-x_1 - 2x_2 + x_3;\ 6x_1 + 2x_3;\ x_1 + x_2 - x_3)$.

B17 $Ax = (x_1 + x_3;\ -2x_1 + 3x_2;\ x_1 - x_2)$.

B18 $Ax = (-8x_1 + x_2 - 3x_3;\ x_2;\ 6x_2 + 3x_3)$.

B19 $Ax = (x_1 + 2x_2 - 4x_3;\ x_1 + 3x_2;\ -x_1 + 2x_3)$.

B20 $Ax = (-x_1 - 2x_3;\ -x_1 + x_2;\ -x_2)$.

2. *Знайти*
   - *а) власні значення та відповідні власні вектори;*
   - *б) кореневі підпростори;*
   - *в) жорданову форму та жорданів базис лінійного оператора, який заданий у деякому базисі матрицею;*
   - *г) з'ясувати, чи можна звести матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду*

$$\begin{pmatrix} k & n & r \\ l & p & s \\ m & q & t \end{pmatrix}, \text{ де}$$

для першої групи

	k	l	m	n	p	q	r	s	t
B1	4	–1	1	–2	3	–2	–1	–1	2
B2	2	–1	1	–1	2	–1	0	0	1
B3	3	0	0	–1	2	–1	1	–1	2
B4	5	0	0	–1	4	–1	–1	–1	4
B5	6	–1	1	–2	5	–2	–1	–1	4
B6	3	2	–2	1	2	1	–1	–1	4
B7	2	1	–1	0	1	0	–1	–1	2
B8	2	1	–1	1	2	1	0	0	3
B9	4	1	–1	1	4	1	0	0	5
B10	5	–2	–2	1	4	1	–1	–1	6
B11	4	5	6	–5	–7	–9	2	3	4
B12	–1	–1	–1	0	–2	–3	1	3	4
B13	7	10	12	–12	–19	–24	6	10	13
B14	1	2	3	2	4	6	5	10	15
B15	5	1	1	5	5	–5	1	1	5

B16	1	–2	0	–2	2	–2	0	–2	3
B17	0	4	3	1	0	–1	2	1	1
B18	–3	–2	2	15	8	–6	5	2	0
B19	1	2	2	1	0	–2	–2	4	6
B20	1	–1	–1	–2	0	1	4	–2	–3

для другої групи

	k	l	m	n	p	q	r	s	t
B1	4	3	–3	–1	–1	–1	1	1	0
B2	–5	3	–4	1	–2	1	5	–4	4
B3	3	2	2	–3	–2	–3	1	1	2
B4	–2	1	–1	–2	1	–2	–1	1	–2
B5	4	3	5	2	5	5	–2	–3	–3
B6	2	1	–2	1	2	–2	1	1	–1
B7	–1	1	–1	–1	1	–1	1	–1	1
B8	2	2	–4	1	1	–2	1	1	–2
B9	2	3	–3	–1	–2	3	1	1	2
B10	1	0	–4	–1	2	1	1	–1	–2
B11	–1	–2	2	2	3	–2	–1	–1	2
B12	–2	–2	2	3	1	0	3	2	–1
B13	–2	2	1	1	–2	–1	–2	3	1
B14	–2	2	1	–1	1	1	1	–2	–2
B15	2	–1	1	2	–1	1	–1	1	0
B16	6	0	0	–3	3	3	0	–3	9
B17	–1	0	0	–2	1	0	–2	0	1
B18	1	2	4	2	4	8	3	6	12
B19	1	1	–2	1	1	–2	1	1	–2
B20	2	5	–1	–1	–3	0	2	3	–2

3. Дано підпростір $L = \langle \boldsymbol{a}_1 = (-k, l, m, n); \boldsymbol{a}_2 = (p, q, -r, s) \rangle$. Знайти базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$. Визначити ортогональну проекцію $\boldsymbol{y}$ й ортогональну складову $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x} = (m, n, p, -q)$ відносно підпростору L. Задачу розв'язати двома способами.

для першої групи

	k	l	m	n	p	q	r	s
B1	9	7	3	2	5	3	7	7
B2	3	7	5	4	2	4	8	8
B3	8	4	2	6	8	9	5	5
B4	9	1	2	5	2	9	3	3
B5	1	2	8	7	9	7	8	8
B6	6	5	7	4	7	1	3	3

В7	3	6	1	8	5	4	7	7
В8	8	5	2	6	9	7	6	6
В9	6	3	5	7	3	2	5	5
В10	7	3	9	6	4	5	7	7
В11	–9	–7	–3	–2	–5	–3	–7	–7
В12	–3	–7	–5	–4	–2	–4	–8	–8
В13	–8	–4	–2	–6	–8	–9	–5	–5
В14	–9	–1	–2	–5	–2	–9	–3	–3
В15	–1	–2	–8	–7	–9	–7	–8	–8
В16	–6	–5	–7	–4	–7	–1	–3	–3
В17	–3	–6	–1	–8	–5	–4	–7	–7
В18	–8	–5	–2	–6	–9	–7	–6	–6
В19	–6	–3	–5	–7	–3	–2	–5	–5
В20	–7	–3	–9	–6	–4	–5	–7	–7

для другої групи

	k	l	m	n	p	q	r	s
В1	2	5	8	3	3	1	2	4
В2	2	5	8	3	3	3	6	11
В3	1	4	6	2	3	2	5	9
В4	–1	2	2	0	3	0	3	5
В5	–1	2	1	–1	3	0	3	4
В6	0	1	1	0	1	1	4	6
В7	2	4	7	3	2	3	6	11
В8	1	4	5	1	3	2	5	8
В9	0	3	4	1	3	1	4	7
В10	1	4	7	3	3	2	5	10
В11	3	8	2	5	3	2	1	1
В12	3	8	2	5	3	5	3	3
В13	3	6	1	4	2	4	3	2
В14	3	2	–1	2	0	2	3	0
В15	3	1	–1	2	–1	1	3	0
В16	1	1	0	1	0	2	3	1
В17	2	7	2	4	3	5	3	3
В18	3	5	1	4	1	3	3	2
В19	3	4	0	3	1	3	3	1
В20	3	7	1	4	3	5	3	2

4. У просторі R^3 з матрицею Грама G знайти кут між векторами $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{y}$.

для першої групи

B1 $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;0;-6)$, $\boldsymbol{y}=(-4;7;3)$.

B2 $G=\begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(5;-2;1)$, $\boldsymbol{y}=(4;0;-7)$.

B3 $G=\begin{pmatrix} 15 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 17 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;1;0)$, $\boldsymbol{y}=(3;2;-1)$.

B4 $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;2;-3)$, $\boldsymbol{y}=(-4;6;2)$.

B5 $G=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 13 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(7;-5;2)$, $\boldsymbol{y}=(0;-1;7)$.

B6 $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;7;-5)$, $\boldsymbol{y}=(11;1;0)$.

B7 $G=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(7;-2;1)$, $\boldsymbol{y}=(5;4;3)$.

B8 $G=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-3;1;0)$, $\boldsymbol{y}=(2;7;1)$.

B9 $G=\begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;1;9)$, $\boldsymbol{y}=(1;0;1)$.

B10 $G=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 21 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(5;-6;1)$, $\boldsymbol{y}=(-3;1;6)$.

B11 $G=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(11;-3;2)$, $\boldsymbol{y}=(0;4;2)$.

B12 $G=\begin{pmatrix}17 & 3 & -1\\ 3 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-4;4;-4)$, $\boldsymbol{y}=(2;-1;1)$.

B13 $G=\begin{pmatrix}16 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;-1;7)$, $\boldsymbol{y}=(5;-6;12)$.

B14 $G=\begin{pmatrix}1 & -7 & 0\\ -7 & 5 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(3;2;5)$, $\boldsymbol{y}=(1;2;-5)$.

B15 $G=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 4 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;-3;11)$, $\boldsymbol{y}=(2;-3;1)$.

B16 $G=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(3;2;5)$, $\boldsymbol{y}=(1;2;-5)$.

B17 $G=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ -3 & 8 & 4\\ 2 & 4 & 21\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-4;4;-4)$, $\boldsymbol{y}=(2;-1;1)$.

B18 $G=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ 1 & 7 & 5\\ -3 & 5 & 10\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(5;-6;1)$, $\boldsymbol{y}=(-3;1;6)$.

B19 $G=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 11\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-3;1;0)$, $\boldsymbol{y}=(2;7;1)$.

B20 $G=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 13\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;1;9)$, $\boldsymbol{y}=(1;0;1)$.

для другої групи

B1 $G=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 15\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;0;1)$, $\boldsymbol{y}=(1;1;9)$.

B2 $G=\begin{pmatrix}11 & -2 & -1\\ -2 & 5 & 3\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;7;1)$, $\boldsymbol{y}=(-3;1;0)$.

B3 $G=\begin{pmatrix}15 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 17\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-3;1;6)$, $\boldsymbol{y}=(5;-6;1)$.

B4 $G=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 13\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;2;-5)$, $\boldsymbol{y}=(3;2;5)$.

B5 $G=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 6\\ 13 & 6 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;-3;1)$, $\boldsymbol{y}=(1;-3;11)$.

B6 $G=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 11\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(0;4;2)$, $\boldsymbol{y}=(11;-3;2)$.

B7 $G=\begin{pmatrix}7 & 0 & 8\\ 0 & 2 & 1\\ 8 & 1 & 10\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;-1;1)$, $\boldsymbol{y}=(-4;4;-4)$.

B8 $G=\begin{pmatrix}6 & 1 & -3\\ 1 & 7 & 5\\ -3 & 5 & 10\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;-1;1)$, $\boldsymbol{y}=(-4;4;-4)$.

B9 $G=\begin{pmatrix}13 & -4 & 2\\ -4 & 9 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(5;-6;12)$, $\boldsymbol{y}=(2;-1;7)$.

B10 $G=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ -3 & 8 & 4\\ 2 & 4 & 21\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;2;-5)$, $\boldsymbol{y}=(3;2;5)$.

B11 $G=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(11;1;0)$, $\boldsymbol{y}=(1;7;-5)$.

B12 $G=\begin{pmatrix}17 & 3 & -1\\ 3 & 7 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(5;4;3)$, $\boldsymbol{y}=(7;-2;1)$.

B13 $G=\begin{pmatrix}16 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;7;1)$, $\boldsymbol{y}=(-3;1;0)$.

B14 $G=\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ -7 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-3;1;6)$, $\boldsymbol{y}=(5;-6;1)$.

B15 $G=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(0;-1;7)$, $\boldsymbol{y}=(7;-5;2)$.

B16 $G=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-4;6;2)$, $\boldsymbol{y}=(1;2;-3)$.

B17 $G=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 21 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(3;2;-1)$, $\boldsymbol{y}=(2;1;0)$.

B18 $G=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-3;1;6)$, $\boldsymbol{y}=(5;-6;1)$.

B19 $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(4;0;-7)$, $\boldsymbol{y}=(5;-2;1)$.

B20 $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-4;7;3)$, $\boldsymbol{y}=(1;0;-6)$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ № 3

1. *Визначити, чи є лінійним перетворення* A, *що переводить вектор* $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ *у вектор* $A\boldsymbol{x}=(4x_1+3x_2+x_3;\,3x_1+x_2;\,x_1+2x_2+x_3)$*? Якщо так, то знайти його ядро, образ, ранг та дефект.*

Розв'язання.

Перевіримо виконання двох властивостей: властивості адитивності та властивості однорідності.

Нехай $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$, тоді $A\boldsymbol{y}=(4y_1+3y_2+y_3;3y_1+y_2;y_1+2y_2+y_3)$. Будемо мати

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3),$$

$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\Big(\ 4(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)+(x_3+y_3);\ \ 3(x_1+y_1)+(x_2+y_2);$$
$$(x_1+y_1)+2(x_2+y_2)+(x_3+y_3)\ \Big)=\Big(\ (4x_1+3x_2+x_3)+(4y_1+3y_2+y_3);$$
$$(3x_1+x_2)+(3y_1+y_2);\ (x_1+2x_2+x_3)+(y_1+2y_2+y_3)\ \Big)=$$
$$=(4x_1+3x_2+x_3;\ 3x_1+x_2;\ x_1+2x_2+x_3)+$$
$$+(4y_1+3y_2+y_3;\ 3y_1+y_2;\ y_1+2y_2+y_3).$$

Бачимо, що $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y}$, тобто властивість адитивності виконується.

Нехай $\alpha\in R$, тоді

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3),$$

$$A(\alpha\boldsymbol{x})=(4\alpha x_1+3\alpha x_2+\alpha x_3;3\alpha x_1+\alpha x_2;\alpha x_1+2\alpha x_2+\alpha x_3)=$$
$$=\Big(\ \alpha(4x_1+3x_2+x_3);\ \alpha(3x_1+x_2);\ \alpha(x_1+2x_2+x_3)\ \Big),$$

тобто $A(\boldsymbol{\alpha x})=\alpha(A\boldsymbol{x})$ і властивість однорідності виконується.

Обидві властивості виконані, тому перетворення A є лінійним.

Запишемо матрицю цього перетворення, для чого знайдемо образи базисних векторів $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$:

$$A\boldsymbol{e}_1=(4;3;1),\qquad A\boldsymbol{e}_2=(3;1;2),\qquad A\boldsymbol{e}_3=(1;0;1).$$

Будемо мати: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}4&3&1\\3&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$. Знайдемо ранг матриці $\tilde{A}$. Для цього зведемо цю матрицю до ступінчастого вигляду:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4&3&1\\3&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-\mathrm{III}\cdot 3\\ \cdot 4-\mathrm{I}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&1\\0&-5&-3\\0&5&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ +\mathrm{II}\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}4&3&1\\0&5&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang} \tilde{A} = 2$, тому $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2$ і, отже, $\operatorname{defect} A = 3 - 2 = 1$.

Знайдемо вектори, які належати ядру: $\boldsymbol{x} \in \ker A \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ або в матричній формі: $\tilde{A}X = \boldsymbol{\theta}$. Таким чином, маємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 \qquad\quad = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

або зі зведеною ступінчастою матрицею

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо її загальний, а потім й фундаментальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}2x_3, \\ x_2 = -0{,}6x_3; \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
1	–3	5

Отже, фундаментальним розв'язком буде вектор $(1; -3; 5)$, тобто $\ker A = \{(1; -3; 5)\}$.

Знайдемо вектори, які належати образу: $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} A : \exists \boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ або в матричній формі: $\tilde{A}X = Y$. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь повинна мати розв'язок. Дослідимо її на сумісність. Для цього запишемо розширену матрицю цієї системи й зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 3 & 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 2 & 1 & y_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{III}\cdot 3 \\ \cdot 4 - \mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 0 & -5 & -3 & y_2 - 3y_3 \\ 0 & 5 & 3 & 4y_3 - y_1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & y_1 \\ 0 & 5 & 3 & -y_2 + 3y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_1 + y_2 \end{array}\right).$$

Для того, щоб ця система мала розв'язки, повинні співпадати ранги матриці системи й розширеної матриці системи. Ранг матриці системи дорівнює двом, тому ранг розширеної матриці системи повинен дорівнювати двом. Остання умова буде виконуватися, якщо $y_3 - y_1 + y_2 = 0$. Таким чином, отримали однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних (y_1, y_2, y_3), загальним розв'язком якої є $y_1 = y_2 + y_3$, а фундаментальними –

y_1	y_2	y_3
1	1	0
1	0	1

Отже, фундаментальними розв'язками будуть вектори: $(1; 1; 0)$, $(1; 0; 1)$, тобто $\operatorname{Im} A = \{(1; 1; 0), (1; 0; 1)\}$.

2. Знайти

а) власні значення та відповідні власні вектори;

б) кореневі підпростори;

в) жорданову форму та жорданів базис лінійного оператора А, який заданий у деякому базисі матрицею $\tilde{A}$;

г) з'ясувати, чи можна звести матрицю $\tilde{A}$ лінійного оператора А до діагонального вигляду

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Знайдемо характеристичний многочлен лінійного оператора

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \lambda^2.$$

Його корені $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 0$, отже, $\mathrm{Spec}\, A = \{0,\ 2\}$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = 2$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зведемо матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I}\cdot 4 \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, яка відповідає отриманій матриці, й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 0, \\ \qquad 4x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda = 2$, буде мати вигляд $\bar{x}_1 = c_1(1;0;-1;1)$, де $c_1 = const \neq 0$.

Знайдемо власний вектор, що відповідає знайденому власному значенню $\lambda = 0$. Для цього розв'яжемо однорідну СЛАР, записану в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зведемо матрицю системи до ступінчастого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 - \mathrm{I} \\ +\mathrm{IV} \\ -\mathrm{II}\cdot 4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ +\mathrm{II}\cdot 2 \\ +\mathrm{II} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо систему, яка відповідає отриманій матриці й знайдемо її розв'язок:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 + 3x_4 = 0; \\ -4x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0; \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Таким чином, власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda = 0$, буде мати вигляд $\bar{x}_2 = c_2(-1;1;0;0)$, де $c_2 = const \neq 0$.

б) Алгебраїчна кратність власного значення $\lambda = 0$ дорівнює 2. Отже, для того, щоб скористатися визначенням кореневого підпростору, нам треба знайти другий степінь лінійного оператора $A - 0I$ з матрицею $\tilde{A} - 0E$:

$$\left(\tilde{A} - 0E\right)^2 = \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер базис ядра лінійного оператора $(A - 0I)^2$. Для цього треба знайти підпростір розв'язків однорідної системи рівнянь $\tilde{A}^2 \bar{x} = \bar{0}$ з матрицею системи $\tilde{A}^2$. Маємо

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1/4 \\ \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftrightarrow \mathrm{III} \\ \cdot 1/4 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок $\begin{cases} x_1 = -x_2 + 0{,}5x_4, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$. Фундаментальна система розв'язків системи рівнянь $\tilde{A}^2 \bar{x} = \bar{0}$ буде: $\overline{f_1} = c_1(-1;\ 1;\ 0;\ 0)$, $c_1 = \mathrm{const} \neq 0$, $\overline{f_2} = c_2(1;\ 0;\ -2;\ 2)$, $c_2 = \mathrm{const} \neq 0$. Отже, система векторів $\overline{f_1}, \overline{f_2}$ – базис кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 0$.

Так як алгебраїчна кратність власного значення $\lambda = 2$ дорівнює двом, то, аналогічно попередньому випадку, знайдемо квадрат матриці лінійного оператора $A - 2I$ з матрицею $\tilde{A} - 2E$ і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\left(\tilde{A} - 2E\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1/4) \\ \cdot(-1/4) \leftrightarrow \mathrm{I} \\ +2\mathrm{II} \\ +\mathrm{III} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -8\mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок $\begin{cases} x_1 = x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$ Фундаментальна система розв'язків $\overline{f_3} = c_3(0;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\overline{f_4} = c_4(1;\ 0;\ 0;\ 1)$, $c_3, c_4 = \mathrm{const} \neq 0$ є базисом кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$.

в) Покажемо два способи знаходження жорданової форми та жорданового базису лінійного оператора.

I спосіб.

Знайдемо жорданові клітини, що відповідають власному значенню $\lambda = 2$. Ранг r_1 матриці $\tilde{A} - 2E$ дорівнює 3, ранг r_2 матриці $\left(\tilde{A} - 2E\right)^2$ дорівнює $r_2 = 2$. Число жорданових клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda = 2$, дорівнює

$$N_1(2) = r_0(0) - 2r_1(0) + r_2(0) = 4 - 2 \cdot 3 + 2 = 0,$$

тобто жорданова нормальна форма не містить клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda = 2$. Знайдемо $\left(\tilde{A} - 2E\right)^3$ та її ранг:

$$\left(\tilde{A} - 2E\right)^3 = \left(\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & 0 & -12 \\ -16 & -16 & 0 & 16 \\ 16 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \cdot 3 \\ -\mathrm{I} \cdot 4 \\ +\mathrm{IV} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{II} \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці $r_3 = 2$. Тоді

$$N_2(0)=r_1(0)-2r_2(0)+r_3(0)=3-2\cdot 2+2=1.$$

$r_2=r_3=2$, отже, жорданова нормальна форма матриці, що відповідає $\lambda=2$, має одну клітку порядку 2.

Знайдемо жорданові клітини, що відповідають власному значенню $\lambda=0$. Ранг r_1 матриці $\tilde{A}-0E$ дорівнює 3, ранг r_2 матриці $\left(\tilde{A}-0E\right)^2$ дорівнює $r_2=2$. Число жорданових клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=0$, дорівнює

$$N_1(0)=r_0(0)-2r_1(0)+r_2(0)=4-2\cdot 3+2=0,$$

тобто жорданова нормальна форма не містить клітин 1-го порядку, що відповідають власному значенню $\lambda=0$. Знайдемо $\left(\tilde{A}-0E\right)^3$ та її ранг:

$$\left(\tilde{A}-0E\right)^3=\tilde{A}^3=\begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -8 & -8 & 0 & 4\\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ -4 & -4 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 16 & 16 & 12 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -16 & -16 & -4 & 4\\ 16 & 16 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 16 & 16 & 12 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг останньої матриці $r_3=2$. Тоді

$$N_2(0)=r_1(0)-2r_2(0)+r_3(0)=3-2\cdot 2+2=1.$$

$r_2=r_3=2$, отже, жорданова нормальна форма матриці, що відповідає $\lambda=0$, має одну клітку порядку 2.

Тепер вже неважко побудувати й саму матрицю, що має жорданову нормальну форму:

$$J=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження жорданового базису, у якому матриця лінійного оператора має жорданову форму, треба знайти матрицю переходу P, розв'язавши відносно P матричне рівняння: $J=P^{-1}\tilde{A}P$, тобто $PJ-\tilde{A}P=\theta$. Нехай

$$P=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$PJ=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{11}+2x_{12} & 0 & x_{13}\\ 2x_{21} & x_{21}+2x_{22} & 0 & x_{23}\\ 2x_{31} & x_{31}+2x_{32} & 0 & x_{33}\\ 2x_{41} & x_{41}+2x_{42} & 0 & x_{43}\end{pmatrix},$$

$$AP=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\\ -4 & -4 & 1 & 3\\ 4 & 4 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3x_{11}+3x_{21}+x_{31} & 3x_{12}+3x_{22}+x_{32} \\ x_{11}+x_{21}-x_{41} & x_{12}+x_{22}-x_{42} \\ -4x_{11}-4x_{21}+x_{31}+3x_{41} & -4x_{12}-4x_{22}+x_{32}+3x_{42} \\ 4x_{11}+4x_{21}+x_{31}-x_{41} & 4x_{12}+4x_{22}+x_{32}-x_{42} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3x_{13}+3x_{23}+x_{33} & 3x_{14}+3x_{24}+x_{34} \\ x_{13}+x_{23}-x_{43} & x_{14}+x_{24}-x_{44} \\ -4x_{13}-4x_{23}+x_{33}+3x_{43} & -4x_{14}-4x_{24}+x_{34}+3x_{44} \\ 4x_{13}+4x_{23}+x_{33}-x_{43} & 4x_{14}+4x_{24}+x_{34}-x_{44} \end{pmatrix},$$

$$PJ-AP=\begin{pmatrix} -x_{11}-3x_{21}-x_{31} & x_{11}-x_{12}-3x_{22}-x_{32} \\ -x_{11}+x_{21}+x_{41} & x_{21}-x_{12}+x_{22}+x_{42} \\ 4x_{11}+4x_{21}+x_{31}-3x_{41} & x_{31}+4x_{12}+4x_{22}+x_{32}-3x_{42} \\ -4x_{11}-4x_{21}-x_{31}+3x_{41} & x_{41}-4x_{12}-4x_{22}-x_{32}+3x_{42} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} -3x_{13}-3x_{23}-x_{33} & x_{13}-3x_{14}-3x_{24}-x_{34} \\ -x_{13}-x_{23}+x_{43} & x_{23}-x_{14}-x_{24}+x_{44} \\ 4x_{13}+4x_{23}-x_{33}-3x_{43} & x_{33}+4x_{14}+4x_{24}-x_{34}-3x_{44} \\ -4x_{13}-4x_{23}-x_{33}+x_{43} & x_{43}-4x_{14}-4x_{24}-x_{34}+x_{44} \end{pmatrix}.$$

Отримаємо однорідну систему рівнянь. Матрицю цієї системи треба привести до ступінчастого вигляду, потім знайти загальний та один частинний розв'язок. Будемо мати: $x_{44}=4$, $x_{41}=1$, $x_{42}=1$, $x_{43}=0$, $x_{34}=-4$, $x_{33}=0$, $x_{32}=0$, $x_{31}=-1$, $x_{24}=1$, $x_{23}=-2$, $x_{21}=0$, $x_{22}=0$, $x_{14}=1$, $x_{13}=2$, $x_{12}=1$, $x_{11}=1$. Отже, матриця переходу до жорданового базису матиме вигляд:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 0 & -4\\ 1 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

ІІ спосіб.

Знайдемо вектори жорданового базису, які відповідають власному значенню $\lambda = 2$. Для побудови ланцюжків векторів за основу візьмемо базис кореневого підпростору $\boldsymbol{e}_1 = \overline{f_3} = (0;\ 0;\ 1;\ 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{f_4} = (1;\ 0;\ 0;\ 1)$, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$. Тоді

$$(A-2I)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A-2I)\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$(A-2I)^2\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A-2I)^2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо ланцюжки векторів

$$S_1 : (A-2I)\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1;$$
$$S_2 : (A-2I)\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_2.$$

Тепер впорядкуємо ланцюжки по довжині, а для зручності запишемо їх по рядках у матрицю й зведемо крайню ліву матрицю до ступінчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Після викреслювання нульового вектора отримаємо

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & & & & \end{array}\right)_{-\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

Ліва матриця приведена до ступінчастої форми, отже, система, яка складається з перших векторів ланцюжків, лінійно незалежна. Отже, й вся система векторів лінійно незалежна. Отримали жорданів базис $\boldsymbol{u}_1 = (1;\ 0;\ -1;\ 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0;\ 0;\ 1;\ 0)$, який відповідає власному значенню $\lambda = 2$.

Знайдемо тепер вектори жорданового базису, які відповідають власному значенню $\lambda = 0$. Для побудови ланцюжків векторів за основу візьмемо базис

$\boldsymbol{e}_1 = \overline{f_1} = (-1;\, 1;\, 0;\, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{f_2} = (1;\, 0;\, -2;\, 2)$ кореневого підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda = 0$. Тоді

$$(A - 0I)\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - 0I)\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далі

$$(A - 0I)^2\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нами побудовані ланцюжки векторів:

$$S_1 : \boldsymbol{e}_1;$$
$$S_2 : (A - 0I)\boldsymbol{e}_2,\, \boldsymbol{e}_2.$$

Тепер впорядкуємо ланцюжки по довжині, а для зручності запишемо їх по рядках у матрицю й зведемо крайню ліву матрицю до ступінчастої форми:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right)_{+\mathrm{I}} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

Ліва матриця приведена до ступінчастої форми, отже, система, яка складається з перших векторів ланцюжків, лінійно незалежна. Отже, й вся система векторів лінійно незалежна. Отримали жорданів базис $\boldsymbol{u}_3 = (1;\, -1;\, 0;\, 0)$, $\boldsymbol{u}_4 = (1;\, 0;\, -2;\, 2)$, який відповідає власному значенню $\lambda = 0$.

Кожному ланцюжку довжини h відповідає клітина порядку h в жордановій нормальній формі. Наш базис складається з двох ланцюжків, кожний довжиною 2. Отже, матриця оператора в цьому базисі має дві клітини, обидві порядку 2:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так як всі обчислення проводилися в тому базисі, в якому дана матриця оператора, то в цьому ж базисі дано вектори жорданового базису $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$. Тоді, за означенням, матриця переходу від першого базису до іншого має вигляд

$$P_{e\to u}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

г) З'ясуємо, чи можна звести матрицю лінійного оператору до діагонального вигляду. Характеристичний многочлен матриці цього оператора: $\chi_A(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)^2$, тобто маємо розклад цього многочлена на лінійні множники. Робимо висновок, що матриця $\tilde{A}$ може мати діагональну форму. Для кожного власного значення $\lambda=0$ і $\lambda=2$, алгебраїчна кратність яких дорівнює 2, знайдемо дефект матриці $\tilde{A}-\lambda_i E$: $\operatorname{defect}\left(\tilde{A}-0E\right)=1$, $\operatorname{defect}\left(\tilde{A}-2E\right)=1$. Для кожного власного значення отриманий дефект (геометрична кратність відповідного власного значення) не співпадає з алгебраїчною кратністю λ_i в $\chi_A(\lambda)$, тому матрицю $\tilde{A}$ не можна звести до діагонального вигляду.

3. *Дано підпростір* $L=\langle \boldsymbol{f}_1=(1;\,2;\,0;\,2);\ \boldsymbol{f}_2=(-1,\,2,\,4,\,2)\rangle$. *Знайти базис ортогонального доповнення* $L^{\perp}$. *Визначити ортогональну проекцію* $\boldsymbol{y}$ *й ортогональну складову* $\boldsymbol{z}$ *вектора* $\boldsymbol{x}=(-2,\,3,\,-1,\,-4)$ *відносно підпростору* L. *Задачу розв'язати двома способами.*

Розв'язання.

Нехай $\boldsymbol{x}=(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)$ – вектор ортогонального доповнення $L^{\perp}$. Тоді $\boldsymbol{x}\perp L$, тобто $\begin{cases}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1)=0,\\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+2x_4=0,\\ -x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0.\end{cases}$ Знайдемо ФСР отриманої системи:

$$\begin{cases}x_1=2x_3,\\ x_2=-x_3-x_4\end{cases}\Rightarrow$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{x}_1$	2	–1	1	0
$\boldsymbol{x}_2$	0	–1	0	1

Вектори $(2,\,-1,\,1,\,0)$ і $(0,\,-1,\,0,\,1)$ утворюють базис ортогонального доповнення $L^{\perp}$.

Визначимо тепер ортогональну проекцію $\boldsymbol{y}$ й ортогональну складову $\boldsymbol{z}$ вектора $\boldsymbol{x}=(-2,\,3,\,-1,\,-4)$ відносно підпростору L.

І спосіб.

Спочатку побудуємо ортонормований базис даного підпростору. Координати векторів $\boldsymbol{f}_1$ і $\boldsymbol{f}_2$ не пропорційні, отже, вектори $\boldsymbol{f}_1$ і $\boldsymbol{f}_2$ утворюють базис підпростору L. Застосуємо до цього базису процес ортогоналізації Грамма-Шмідта.

По f_1, f_2 побудуємо ортогональний базис g_1, g_2:

$$g_1 = f_1 = (1,\ 2,\ 0,\ 2); \qquad (g_1,\ g_1) = 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 = 9;$$

$$(f_2,\ g_1) = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 7;$$

$$g_2 = f_2 - \frac{(f_2,\ g_1)}{(g_1,\ g_1)} g_1 = (-1,\ 2,\ 4,\ 2) - \frac{7}{9}(1;\ 2;\ 0;\ 2) =$$

$$= \frac{1}{9}[9(-1;\ 2;\ 4;\ 2) - 7(1;\ 2;\ 0;\ 2)] = \frac{1}{9}(-16;\ 4;\ 36;\ 4)$$

$$\text{або } g_2 = (-4;\ 1;\ 9;\ 1).$$

Як видно, $g_1 \perp g_2$, так як $(g_1,\ g_2) = 0$.

Побудуємо тепер ортонормований базис підпростору L:

$$e_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|} = \frac{g_1}{\sqrt{(g_1;\ g_1)}} = \frac{1}{3}(1;\ 2;\ 0;\ 2) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right);$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\| g_2 \|} = \frac{g_2}{\sqrt{(g_2;\ g_2)}} = \frac{1}{\sqrt{99}}(-4;\ 1;\ 9;\ 1) = \left(-\frac{4}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}};\ \frac{9}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}}\right).$$

Знайдемо скалярні добутки даного вектора x і векторів знайденого базису:

$$(x,\ e_1) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$(x,\ e_2) = -2 \cdot \frac{-4}{\sqrt{99}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} - 1 \cdot \frac{9}{\sqrt{99}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{99}} = -\frac{2}{\sqrt{99}}.$$

Ортогональна проекція y вектора x на підпростір L й ортогональна складова z вектора x відносно підпростору L будуть такі:

$$y = \text{пр}_L x = (x,\ e_1)e_1 + (x,\ e_2)e_2 = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0;\ \frac{2}{3}\right) -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{99}}\left(-\frac{4}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}};\ \frac{9}{\sqrt{99}};\ \frac{1}{\sqrt{99}}\right) = \left(-\frac{4}{9};\ -\frac{8}{9};\ 0;\ -\frac{8}{9}\right) -$$

$$-\left(-\frac{8}{99};\ \frac{2}{99};\ \frac{18}{99};\ \frac{2}{99}\right) = \frac{1}{99}(-36;\ -90;\ -18;\ -90) = \frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10);$$

$$z = x - y = (-2;\ 3;\ -1;\ -4) + \frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10) =$$

$$= \frac{1}{11}(-18;\ 43;\ -9;\ -34).$$

II спосіб.

Як було вказано в першому способі задані вектори f_1 і f_2 є лінійно незалежними, отже утворюють базис.

Так як за означенням вектор y, який є ортогональною проекцією вектора x на підпростір L, належить L, то його можна виразити через базисні вектори цього підпростору, тобто $y = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Таким чином, отримаємо

$$x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + z.$$

Помножимо останню рівність скалярно на f_1:

$$(x;\ f_1) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + z;\ f_1) = \alpha_1 (f_1;\ f_1) + \alpha_2 (f_2;\ f_1) + (z;\ f_1) =$$
$$= \alpha_1 (f_1;\ f_1) + \alpha_2 (f_2;\ f_1), \text{ так як } z \in L^{\perp}.$$

Аналогічно,

$$(x;\ f_2) = (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + z;\ f_2) = \alpha_1 (f_1;\ f_2) + \alpha_2 (f_2;\ f_2).$$

Обчисливши відповідні скалярні добутки

$$(f_1;\ f_1) = 9,\ (f_1;\ f_2) = 7,\ (f_2;\ f_2) = 25,\ (x;\ f_1) = -4,\ (x;\ f_2) = -4,$$

отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9\alpha_1 + 7\alpha_2 = -4, \\ 7\alpha_1 + 25\alpha_2 = -4. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо: $\alpha_1 = -\dfrac{9}{22}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{22}$, а, отже

$$y = -\frac{9}{22} f_1 - \frac{1}{22} f_2 = \frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10).$$

З рівності $x = y + z$ будемо мати:

$$z = x - y = (-2;\ 3;\ -1;\ -4) - \frac{1}{11}(-4;\ -10;\ -2;\ -10) = \frac{1}{11}(-18;\ 43;\ -9;\ -34).$$

Координати шуканих векторів, знайдені різними способами, співпадають.

4. *У просторі R^3 з матрицею Грама $G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix}$ знайти кут між векторами $x = (1;\ 2;\ 3)$ і $y = (1;\ 0;\ -5)$.*

Розв'язання.

Косинус кута між ненульовими векторами x і y обчислюється за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Знайдемо скалярний добуток (x, y):

$$(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -10 \\ 4 & -10 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -256.$$

Обчислимо норми векторів x і y за формулами $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ й $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$:

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=128\Rightarrow\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{128}=8\sqrt{2}\,;$$

$$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}1 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -10\\ 4 & -10 & 23\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -5\end{pmatrix}=536\Rightarrow\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{536}=2\sqrt{134}\,.$$

Отже, $\cos\varphi=\dfrac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|\,\|\boldsymbol{y}\|}=\dfrac{-256}{8\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{134}}=-\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$, тоді $\varphi\approx\pi-\arccos\dfrac{8\sqrt{67}}{67}$.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ №4

1. *Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність. Знайти сигнатуру, канонічний та нормальний вигляди квадратичної форми за допомогою методів:*
   а) Лагранжа (2 способами);
   б) Якобі.

для першої групи

B1 $f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2x_3$.

B2 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

B3 $f = -x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

B4 $f = 9x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2 + 3x_1x_2 - 3x_1x_3 + 6x_2x_3$.

B5 $f = 4x_1^2 + 6x_2^2 - 7x_3^2 + 24x_1x_2 + 12x_1x_3 - 21x_2x_3$.

B6 $f = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 - 6x_2x_3$.

B7 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3$.

B8 $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 - 5x_1x_3$.

B9 $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$.

B10 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

B11 $f = x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2x_3$.

B12 $f = 3x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2 + 6x_1x_2 - 9x_1x_3 - x_2x_3$.

B13 $f = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

B14 $f = 7x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 - 14x_1x_2 + 7x_1x_3 + 5x_2x_3$.

B15 $f = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 7x_2x_3$.

B16 $f = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

B17 $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

B18 $f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

B19 $f = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

B20 $f = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

для другої групи

B1 $f = x_1^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

B2 $f = -x_1^2 - 19x_2^2 - 20x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 30x_2x_3$.

B3 $f = 2x_1^2 + 16x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_1x_3 + 24x_2x_3$.

В4 $f=-3x_1^2+x_2^2-16x_3^2-6x_1x_2+18x_1x_3+30x_2x_3$.

В5 $f=2x_1^2+14x_2^2+45x_3^2-4x_1x_2+12x_1x_3-48x_2x_3$.

В6 $f=x_1^2-7x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+14x_2x_3$.

В7 $f=-4x_1^2+3x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$.

В8 $f=4x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_2x_3$.

В9 $f=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_2x_3$.

В10 $f=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3$.

В11 $f=-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

В12 $f=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$.

В13 $f=4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

В14 $f=-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$.

В15 $f=x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$.

В16 $f=3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-8x_1x_3-8x_2x_3$.

В17 $f=x_1^2+x_2^2-x_3^2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

В18 $f=-2x_1^2+2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_2-6x_1x_3+4x_2x_3$.

В19 $f=-4x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$.

В20 $f=5x_1^2+13x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2+8x_2x_3$.

2. *Перевірити, чи будуть форми квадратичні форми f та g еквівалентними над полем R. Для еквівалентних форм знайти перетворення, що зводить квадратичну форму f до квадратичної форми g. Форму f взяти з умови завдання 1.*

для першої групи

В1 $g=4t_1^2-t_2^2+2t_3^2$.

В2 $g=9t_1^2-2t_2^2-4t_3^2$.

В3 $g=-t_1^2+9t_2^2+t_3^2$.

В4 $g=4t_1^2+t_2^2+3t_3^2$.

В5 $g=-2t_1^2-t_2^2-4t_3^2$.

В6 $g=9t_1^2-4t_2^2+t_3^2$.

В7 $g=-4t_1^2-t_2^2+6t_3^2$.

В8 $g=2t_1^2+4t_2^2-t_3^2$.

В9 $g=4t_1^2+t_2^2+9t_3^2$.

B10 $g = t_1^2 - 4t_2^2 + 16t_3^2$.

B11 $g = -4t_1^2 - 9t_2^2 + t_3^2$.

B12 $g = t_1^2 + t_2^2 + 14t_3^2$.

B13 $g = 9t_1^2 + 25t_2^2 - t_3^2$.

B14 $g = -7t_1^2 + 16t_2^2 - 4t_3^2$.

B15 $g = -t_1^2 - 9t_2^2 - 36t_3^2$.

B16 $g = -2t_1^2 + t_2^2 + 5t_3^2$.

B17 $g = 3t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$.

B18 $g = -t_1^2 + t_2^2 - 2t_3^2$.

B19 $g = 4t_1^2 - 2t_2^2 + t_3^2$.

B20 $g = -t_1^2 - t_2^2 - t_3^2$.

для другої групи

B1 $g = 4t_1^2 - t_2^2 + 2t_3^2$.

B2 $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 - 4t_3^2$.

B3 $g = -t_1^2 + 9t_2^2 + t_3^2$.

B4 $g = 4t_1^2 + t_2^2 + 3t_3^2$.

B5 $g = -2t_1^2 - t_2^2 - 4t_3^2$.

B6 $g = 9t_1^2 - 4t_2^2 + t_3^2$.

B7 $g = -4t_1^2 - t_2^2 + 6t_3^2$.

B8 $g = 2t_1^2 + 4t_2^2 - t_3^2$.

B9 $g = 4t_1^2 + t_2^2 + 9t_3^2$.

B10 $g = t_1^2 - 4t_2^2 + 16t_3^2$.

B11 $g = -4t_1^2 - 9t_2^2 + t_3^2$.

B12 $g = t_1^2 + t_2^2 + 14t_3^2$.

B13 $g = 9t_1^2 + 25t_2^2 - t_3^2$.

B14 $g = -7t_1^2 + 16t_2^2 - 4t_3^2$.

B15 $g = -t_1^2 - 9t_2^2 - 36t_3^2$.

B16 $g = -2t_1^2 + t_2^2 + 5t_3^2$.

B17 $g = 3t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$.

B18 $g = -t_1^2 + t_2^2 - 2t_3^2$.

B19 $g = 4t_1^2 - 2t_2^2 + t_3^2$.

В20 $g = -t_1^2 - t_2^2 - t_3^2$.

3. Для кожного значення параметра λ з'ясувати тип (знаковизначеність) квадратичної форми.

для першої групи

В1 $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 - \lambda 4x_3^2 + x_1x_2 + 4\lambda x_2x_3$.

В2 $f = 7x_1^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4\lambda x_2x_3$.

В3 $f = x_1^2 + x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 6x_2x_3$.

В4 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 4\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3$.

В5 $f = 2x_1^2 + 8\lambda x_2^2 + 5x_3^2 + 4\lambda x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6\lambda x_2x_3$.

В6 $f = x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В7 $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6\lambda x_2x_3$.

В8 $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5\lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 6\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$.

В9 $f = 5x_1^2 - 7\lambda x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2\lambda x_2x_3$.

В10 $f = 11\lambda x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$.

В11 $f = \lambda x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 - 4x_2x_3$.

В12 $f = 3x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 - 4\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.

В13 $f = 11x_1^2 - \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$.

В14 $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4\lambda x_2x_3$.

В15 $f = 5x_1^2 - 2x_2^2 + 3\lambda x_3^2 + 8x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 6x_2x_3$.

В16 $f = x_1^2 - 2\lambda x_1x_3 + x_2^2 + +2x_2x_3 + 3\lambda x_3^2$.

В17 $f = 3\lambda x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$.

В18 $f = 4x_1^2 + 8x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6\lambda x_2x_3$.

В19 $f = 3x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 - 2\lambda x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

В20 $f = 7x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$.

для другої групи

В1 $f = x_1^2 + 5\lambda x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - \lambda x_2x_3$.

В2 $f = 4\lambda x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_2x_3$.

В3 $f = -x_1^2 - 2\lambda x_2^2 + 3\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

В4 $f = 9x_1^2 + x_2^2 - 6\lambda x_3^2 + 3x_1x_2 - 3\lambda x_1x_3 + 6x_2x_3$.

В5 $f = 4\lambda x_1^2 + 6\lambda x_2^2 - 7x_3^2 + 24x_1x_2 + 12x_1x_3 - 21x_2x_3$.

B6 $f = x_1^2 - 2\lambda x_2^2 + 3x_3^2 - 4\lambda x_1 x_2 + 5x_1 x_3 - 6x_2 x_3$.

B7 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - \lambda x_3^2 + 8x_1 x_2 - 4\lambda x_1 x_3 + 7x_2 x_3$.

B8 $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 4\lambda x_3^2 + 10x_1 x_2 - 5\lambda x_1 x_3$.

B9 $f = x_1^2 + 3\lambda x_2^2 + 4x_3^2 + 4\lambda x_1 x_2 - 3x_1 x_3 + x_2 x_3$.

B10 $f = 4\lambda x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 16x_1 x_2 + 8\lambda x_1 x_3 - 4x_2 x_3$.

B11 $f = \lambda x_1^2 - 3x_2^2 + 6\lambda x_3^2 + 2x_1 x_2 + 6x_1 x_3 + 5x_2 x_3$.

B12 $f = 3x_1^2 + \lambda x_2^2 - 6x_3^2 + 6x_1 x_2 - 9x_1 x_3 - \lambda x_2 x_3$.

B13 $f = x_1^2 - \lambda x_2^2 + x_3^2 - 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 2x_2 x_3$.

B14 $f = 7\lambda x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 - 14x_1 x_2 + 7\lambda x_1 x_3 + 5x_2 x_3$.

B15 $f = 2x_1^2 - 2\lambda x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 7\lambda x_2 x_3$.

B16 $f = -4x_1^2 - 4\lambda x_2^2 + 2x_3^2 - 4\lambda x_1 x_2 + 8x_1 x_3 - 8x_2 x_3$.

B17 $f = 2\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 8x_1 x_2 + 8x_1 x_3 - 8x_2 x_3$.

B18 $f = 4x_1^2 + 4\lambda x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.

B19 $f = -x_1^2 - x_2^2 - 3\lambda x_3^2 - 2x_1 x_2 - 6\lambda x_1 x_3 + 6x_2 x_3$.

B20 $f = \lambda x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 x_2 - 2\lambda x_1 x_3 - 4x_2 x_3$.

4. *Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму f до канонічного вигляду.*

для першої групи

B1 $f = x_1^2 + 10x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 x_2 - 10x_1 x_3 - 8x_2 x_3$.

B2 $f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$.

B3 $f = -3x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_1 x_3 + 12x_2 x_3$.

B4 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.

B5 $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.

B6 $f = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_1 x_2 - 8x_2 x_3$.

B7 $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 x_2 - 4x_2 x_3$.

B8 $f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 8x_2 x_3$.

B9 $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.

B10 $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1 x_2 + 4x_2 x_3$.

B11 $f = -x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1 x_2 - 6x_1 x_3 + 6x_2 x_3$.

B12 $f = -4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1 x_2 - 4x_1 x_3 + 4x_2 x_3$.

B13 $f = 5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1 x_2 + 8x_2 x_3$.

В14 $f = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

В15 $f = -3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В16 $f = -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В17 $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В18 $f = 3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

В19 $f = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

В20 $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

для другої групи

В1 $f = -x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

В2 $f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

В3 $f = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В4 $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

В5 $f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

В6 $f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

В7 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

В8 $f = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

В9 $f = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

В10 $f = 11x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3$.

В11 $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

В12 $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

В13 $f = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

В14 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

В15 $f = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

В16 $f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 - 20x_1x_2 + 4x_1x_3 + 16x_2x_3$.

В17 $f = 3x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 12x_2x_3$.

В18 $f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

В19 $f = x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3$.

В20 $f = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ № 4

1. *Дослідити квадратичну форму* $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ *на знаковизначеність. Знайти сигнатуру, канонічний і нормальний вигляди квадратичної форми за допомогою методів*
   а) Лагранжа (2 способами);
   б) Якобі.

Розв'язання.

Дослідимо квадратичну форму $f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ на знаковизначеність. Для цього випишемо матрицю квадратичної форми й обчислимо її кутові мінори:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

В цьому випадку тільки по значеннях кутових мінорів дати відповідь неможливо.

Знайдемо всі головні мінори:

першого порядку: $\delta_{22} = \delta_{33} = 0$,

другого порядку: $\delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $\delta_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$.

Маємо від'ємний головний мінор парного порядку. Тому квадратична форма невизначена (знакозмінна).

Тепер зведемо квадратичну форму до канонічного, а потім й до нормального вигляду.

а) Застосуємо метод Лагранжа.

I спосіб. Зробимо заміну змінних $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Тоді квадратична форма перетвориться до вигляду

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3.$$

Зробимо нову заміну змінних

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = 2y_1 - 2y_3 = 2(y_1 - y_3), \qquad z_2 = y_2, \qquad z_3 = y_3,$$

одержимо

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 8z_2z_3 - 2z_3^2 = \frac{1}{2}z_1^2 - 2\left[(z_2 + 2z_3)^2 - 3z_3^2\right].$$

Після заміни змінних $z_1 = t_1$, $z_2 + 2z_3 = t_2$, $z_3 = t_3$ квадратична форма f буде зведена до канонічного вигляду

$$f=\frac{1}{2}t_1^2-2t_2^2+6t_3^2,$$

а до нормального вигляду $f=t_1^2-t_2^2+t_3^2$ – заміною $\sqrt{\frac{1}{2}}z_1=t_1$, $\sqrt{2}\left(z_2+2z_3\right)=t_2$, $\sqrt{6}z_3=t_3$.

II спосіб. Виконаємо погоджені елементарні перетворення рядків і стовпців матриці квадратичної форми й приєднаної одиничної матриці:

$$\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \underset{-\mathrm{II}}{\left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2+\mathrm{I} \\ +2\mathrm{I} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \underset{\cdot 2+\mathrm{I}\ \ +2\mathrm{I}}{\left(\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \underset{+\mathrm{II}}{\left(\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Матриця третього порядку, що стоїть зверху, є діагональною. Виходить, це матриця квадратичної форми, що має канонічний вигляд. Відповідно до алгоритму матриця третього порядку, що стоїть знизу – це шукана матриця переходу. Тому

$$f=-2z_1^2+z_2^2+6z_3^2$$

й

$$\begin{cases} x_1=z_1+z_2+3z_3, \\ x_2=-z_1+z_2-z_3, \\ x_3=\qquad\qquad\quad z_3. \end{cases}$$

До нормального вигляду $f=-t_1^2+t_2^2+t_3^2$ зводить заміна $\begin{cases} t_1=\sqrt{2}z_1, \\ t_2=z_2, \\ t_3=\sqrt{6}z_3. \end{cases}$

б) Запишемо матрицю квадратичної форми: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$. Тоді кутові мінори: $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-1$, $\Delta_3=-6$. Один з кутових мінорів нульовий, тому методом Якобі дану квадратичну форму до канонічного вигляду звести не можна.

Виходячи з канонічного вигляду квадратичної форми $f=-2z_1^2+z_2^2+6z_3^2$ зробимо висновок, що $r_+=2$, $r_-=1$, а, отже, сигнатура $s=r_+-r_-=2-1=1$.

2. *Перевірити, чи будуть квадратичні форми* f *й* $g=9t_1^2-2t_2^2+4t_3^2$ *еквівалентними над полем* R. *Для еквівалентних форм знайти перетворення, що зводить квадратичну форму* f *до квадратичної форми* $g=9t_1^2-2t_2^2+4t_3^2$. *Форму* f *взяти з умови задачі 1.*

Розв'язання.

Вище був отриманий канонічний вигляд для форми f: $f=-2x_1^2+x_2^2+6x_3^2$, а також її індекси інерції та сигнатура: $r_+=2$, $r_-=1$ і $s=2-1=1$. Для форми g: індекси інерції $r_+=2$, $r_-=1$ і сигнатура $s=2-1=1$. Отже, форми еквівалентні.

Знайдемо тепер перетворення, що зводить форму f до форми g. Форма $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ зводиться до нормального вигляду $f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2$ заміною

$$\begin{cases} y_1\sqrt{2}=z_1,\\ y_2=z_2,\\ y_3\sqrt{6}=z_3, \end{cases}$$

де y_i, $i=\overline{1,3}$ визначаються співвідношеннями:

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-2x_3,\\ y_2=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-x_3,\\ y_3=x_3, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} z_1\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 - 2x_3, \\ z_2 = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - x_3, \\ z_3\dfrac{\sqrt{6}}{6} = x_3 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3, \\ z_2 = \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - x_3, \\ z_3 = x_3\sqrt{6}. \end{cases}$$

Форму $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 + 4t_3^2$ заміною $\begin{cases} 3t_1 = z_1, \\ t_2\sqrt{2} = z_2, \\ 2t_3 = z_3 \end{cases}$ зводимо до нормального вигляду $g = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2$.

Отже, шукане перетворення, що зводить форму f до форми g має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2 - 2\sqrt{2}x_3 = 3t_1, \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - x_3 = t_2\sqrt{2}, \\ x_3\sqrt{6} = 2t_3. \end{cases}$$

Або, виразивши x_i через t_i, $i = \overline{1,3}$, будемо мати:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}t_1 + t_2\sqrt{2} + t_3\sqrt{6}, \\ x_2 = t_1\sqrt{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}t_2 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}t_3, \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}t_3. \end{cases}$$

3. *Для кожного значення параметра λ з'ясувати тип (знаковизначеність) квадратичної форми:*

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) = 5x_1^2 + \lambda x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Розв'язання.

Запишемо матрицю $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ квадратичної форми та знайдемо всі її кутові мінори:

$$\Delta_1 = 5, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 5\lambda - 4, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 - 5\lambda - 1;$$

а тепер й головні мінори:

першого порядку: $\delta_{22} = \delta_{33} = \lambda$,

другого порядку: $\delta_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 5\lambda - 1$, $\delta_{23} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$.

Знайдемо спочатку всі значення λ, при яких квадратична форма додатно-означена. Для цього потрібно розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 5 > 0 \\ \Delta_2 = 5\lambda - 4 > 0, \\ \Delta_3 = 5\lambda^2 - 5\lambda - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > \dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{5 - 3\sqrt{5}}{10} < \lambda < \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{5} < \lambda < \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

Квадратична форма невід'ємна (не строго додатно-означена), якщо всі головні мінори невід'ємні, в тому числі й всі кутові мінори. Але останні невід'ємні при $\dfrac{4}{5} < \lambda < \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$. Тут не дослідженими є лише значення $\lambda = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$ і $\lambda = \dfrac{4}{5}$. Обчислимо значення всіх інших головних мінорів:

при $\lambda = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$: $\delta_{22} = \delta_{33} = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10} > 0$, $\delta_{13} = 5 \cdot \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10} - 1 = \dfrac{3 + 3\sqrt{5}}{2} > 0$, $\delta_{23} = \left(\dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \right)^2 - 1 = \dfrac{-3 + 3\sqrt{5}}{10} > 0$;

при $\lambda = \dfrac{4}{5}$: $\delta_{22} = \delta_{33} = \dfrac{4}{5} > 0$, $\delta_{13} = 5 \cdot \dfrac{4}{5} - 1 = 3 > 0$, $\delta_{23} = \left(\dfrac{4}{5} \right)^2 - 1 = \dfrac{-9}{25} < 0$.

Отже, при $\lambda = \dfrac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$ квадратична форма невід'ємна. А так як при цьому значенні вона не є додатно-означеною, то вона квазідодатно-означена. При $\lambda = \dfrac{4}{5}$ існує від'ємний головний мінор парного порядку, отже, при цьому значенні λ квадратична форма є невизначеною.

Знайдемо тепер всі значення λ, при яких квадратична форма від'ємно-означена. Для цього потрібно розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 5 < 0 \\ \Delta_2 = 5\lambda - 4 > 0, \\ \Delta_3 = 5\lambda^2 - 5\lambda - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda \in \varnothing.$$

Отже, при ні при яких значеннях λ квадратична форма не буде від'ємно-означеною.

Квадратична форма недодатна, якщо всі головні мінори парного порядку невід'ємні й всі головні мінори непарного порядку недодатні. В нашому випадку таких значень λ немає, тобто $\lambda \in \varnothing$.

При всіх інших значеннях λ квадратична форма невизначена.

Таким чином, при $\lambda \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \right)$ квадратична форма додатно-означена; при $\lambda = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ квадратична форма квазідодатно-означена; при $\lambda \in \left(-\infty; \frac{4}{5} \right] \cup \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}; +\infty \right)$ квадратична форма невизначена.

4. Знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичну форму $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$ *до канонічного вигляду.*

Розв'язання.

Запишемо матрицю заданої квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 3) = 0.$$

Власними значеннями матриці A є числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$. Звідси випливає, що квадратична форма f має такий канонічний вигляд

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

При $\lambda = 1$ система рівнянь для визначення координат власних векторів має вигляд

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо ФСР отриманої однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_1 = x_2 + x_3 - x_4$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\boldsymbol{a}_1$	1	1	0	0
$\boldsymbol{a}_2$	1	0	1	0
$\boldsymbol{a}_3$	–1	0	0	1

Вектори $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ є лінійно незалежними власними векторами матриці A, які відповідають власному значенню $\lambda = 1$. Будь-який власний вектор матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$, є лінійною комбінацією векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, тому що координати цього вектора задовольняють системі рівнянь.

Застосуємо процес ортогоналізації до системи векторів $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, одержимо ортонормовану сукупність лінійно незалежних власних векторів $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3$ матриці A, що відповідають власному значенню $\lambda = 1$. Маємо

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|},\ \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{g}_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}},\ \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{f}_3 = \frac{\boldsymbol{g}_3}{\|\boldsymbol{g}_3\|},\ \boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{f}_1)\boldsymbol{f}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{f}_2)\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \|\boldsymbol{g}_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}},\ \boldsymbol{f}_3 = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -3$ аналогічним чином одержимо наступну систему рівнянь для визначення координат власного вектора $\boldsymbol{a}_4$ матриці A

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Матриця цієї системи має ранг, рівний трьом, тому фундаментальна система розв'язків складається з одного ненульового розв'язку $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Власний вектор $\boldsymbol{a}_4$ виявляється таким: $\boldsymbol{a}_4 = (1, -1, -1, 1)$.

Нормований власний вектор: $\boldsymbol{f}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Складемо матрицю Q ортогонального перетворення змінних, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. Для цього помістимо в стовпці матриці Q координати власних векторів $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, одержимо

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, квадратична форма

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

за допомогою ортогонального перетворення змінних

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 - \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 + \frac{1}{2} y_4, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4, \\ x_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} y_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}} y_3 - \frac{1}{2} y_4, \\ x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} y_3 + \frac{1}{2} y_4. \end{cases}$$

зводиться до канонічного вигляду

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2.$$

УМОВИ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ЗАОЧНОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1

1. *Обчислити визначник* Δ:
а) розклавши його за елементами i *-го рядка;*
б) розклавши його за елементами j *-го стовпця;*
в) одержавши попередньо нулі в i *-му рядку;*
г) привівши попередньо до трикутного вигляду;
д) використовуючи теорему Лапласа.

В 1 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=1$

В 2 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=3$

В 3 $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=1$

В 4 $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=3$

В 5 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=4$

В 6 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, $i=1,\ j=2$

В 7 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3$

В 8 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i=3,\ j=1$

В 9 $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=3$

В 10 $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i=4,\ j=2$

2. *Знайти розв'язок матричного рівняння* $AX=B$ *двома способами* (N *– номер варіанту), якщо*

$$A=\begin{pmatrix} -N & 1 & -1 \\ 3 & N & 1 \\ 1 & -2 & 2N \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1-N & 2-2N \\ 5+3N & 7+3N \\ 4N-5 & 2N-4 \end{pmatrix}.$$

3. *Перевірити сумісність системи рівнянь і у випадку сумісності розв'язати її:*
а) методом Гаусса;
б) за формулами Крамера;
в) за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

$$\begin{cases}(N-10)x_1+2x_2-x_3=N-9,\\ 2x_1+(15-N)x_2+3x_3=41-2N,\\ x_1+5x_2+(12-N)x_3=47-3N.\end{cases}$$

(тут N – номер варіанту)

4. *Знайти загальний та один частинний розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+a_{35}x_5=b_3,\\ a_{41}x_1+a_{42}\,x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4+a_{45}x_5=b_1.\end{cases}$$

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2
B1	2	1	1	2	4	7	3	3	2	5	8	15
B2	5	3	3	6	11	20	3	3	2	5	8	15
B3	4	3	2	5	9	16	2	3	1	4	6	11
B4	2	3	0	3	5	8	0	3	–1	2	2	3
B5	1	3	0	3	4	7	–1	3	–1	2	1	2
B6	2	3	1	4	6	11	0	1	0	1	1	2
B7	5	3	3	6	11	20	3	2	2	4	7	13
B8	3	3	2	5	8	15	1	3	1	4	5	10
B9	3	3	1	4	7	12	1	3	0	3	4	7
B10	5	3	2	5	10	17	3	3	1	4	7	12

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	b_4
B1	1	1	2	3	4	9	3	2	2	4	7	13
B2	5	4	3	7	12	22	4	3	4	7	11	22
B3	2	2	1	3	5	9	1	1	1	2	3	6
B4	1	2	0	2	3	5	2	2	1	3	5	9
B5	1	4	0	4	5	9	1	2	1	3	4	8
B6	2	4	1	5	7	13	1	1	1	2	3	6
B7	5	4	2	6	11	19	2	1	2	3	5	10
B8	3	4	2	6	9	17	3	2	3	5	8	16
B9	3	4	1	5	8	14	3	2	2	4	7	13
B10	5	4	2	6	11	19	4	3	3	6	10	19

5. *Для матриць* $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & N & -2\\ 2 & -2N+3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -N & 2 & N\end{pmatrix}$, *де* N *– номер варіанту, знайти* $A^2+2(BC)^t$.

6. *Знайти значення многочлена* $f(x)=3x^2+2x-1$ *від матриці* $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & N-5\\ -1 & 3 & -N\\ N & 2 & 2\end{pmatrix}$*, де* N *– номер варіанту.*

7. *Розв'язати рівняння (тут* N *– номер варіанту):*

а) $\begin{vmatrix}-x^2 & 4 & 9\\ -x & 2 & 3\\ -N & N & N\end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix}x^2 & -3 & 2\\ x & 1 & N\\ 0 & -N & 4\end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix}3 & x & 4N\\ 2 & -1 & -3N\\ x+10 & 1 & -N\end{vmatrix}=0$.

8. *Розв'язати нерівності (тут* N *– номер варіанту):*

а) $\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & x & -2\\ N & -2N & N\end{vmatrix}<1$; б) $\begin{vmatrix}2 & x+2 & 1\\ N & N & 2N\\ 5 & -3 & -x\end{vmatrix}>0$.

9. *Знайти:*

а) матрицю переходу від базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ *до базису* $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$;

б) матрицю переходу від базису $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ *до базису* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$;

в) координати вектора $\boldsymbol{x}$ *в базисі* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$;

г) координати вектора $\boldsymbol{y}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$ *в базисі* $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$.

В 1 $\boldsymbol{e}_1=(2;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;1;0)$, $\boldsymbol{e}_3=(2;-2;3)$; $\boldsymbol{e}'_1=(8;-7;-6)$, $\boldsymbol{e}'_2=(2;-1;-3)$, $\boldsymbol{e}'_3=(-3;4;2)$; $\boldsymbol{x}=(-1;-4;5)$

В 2 $\boldsymbol{e}_1=(1;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;2;1)$, $\boldsymbol{e}_3=(0;0;4)$; $\boldsymbol{e}'_1=(3;5;-6)$, $\boldsymbol{e}'_2=(2;4;3)$, $\boldsymbol{e}'_3=(-3;1;1)$; $\boldsymbol{x}=(1;0;4)$

В 3 $\boldsymbol{e}_1=(1;0;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(0;1;0)$, $\boldsymbol{e}_3=(2;3;4)$; $\boldsymbol{e}'_1=(2;1;-1)$, $\boldsymbol{e}'_2=(2;-1;1)$, $\boldsymbol{e}'_3=(1;0;1)$; $\boldsymbol{x}=(1;-3;-3)$

В 4 $\boldsymbol{e}_1=(1;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;1;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(1;2;3)$; $\boldsymbol{e}'_1=(-6;1;11)$, $\boldsymbol{e}'_2=(9;2;5)$, $\boldsymbol{e}'_3=(0;3;7)$; $\boldsymbol{x}=(6;7;10)$

В 5 $\boldsymbol{e}_1=(1;1;1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;1;2)$, $\boldsymbol{e}_3=(1;2;3)$; $\boldsymbol{e}'_1=(3;1;2)$, $\boldsymbol{e}'_2=(-1;0;2)$, $\boldsymbol{e}'_3=(1;2;1)$; $\boldsymbol{x}=(6;9;14)$

В 6 $\boldsymbol{e}_1=(2;1;-3)$, $\boldsymbol{e}_2=(3;2;-5)$, $\boldsymbol{e}_3=(1;-1;1)$; $\boldsymbol{e}'_1=(2;3;2)$, $\boldsymbol{e}'_2=(1;3;-1)$, $\boldsymbol{e}'_3=(4;1;3)$; $\boldsymbol{x}=(6;2;-7)$

B 7	$\boldsymbol{e}_1=(1;\,2;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(2;\,-1;\,3)$, $\boldsymbol{e}_3=(-3;\,-1;\,4)$; $\boldsymbol{e}'_1=(6;\,7;\,3)$, $\boldsymbol{e}'_2=(3;\,1;\,0)$, $\boldsymbol{e}'_3=(2;\,2;\,1)$; $\boldsymbol{x}=(5;1;\,6)$	**B 8**	$\boldsymbol{e}_1=(2;\,3;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(-1;\,2;\,-2)$, $\boldsymbol{e}_3=(1;\,2;\,1)$; $\boldsymbol{e}'_1=(-2;\,3;\,4)$, $\boldsymbol{e}'_2=(3;-1;-4)$, $\boldsymbol{e}'_3=(-1;\,2;\,2)$; $\boldsymbol{x}=(2;\,-2;\,1)$
B 9	$\boldsymbol{e}_1=(1;\,-2;\,1)$, $\boldsymbol{e}_2=(1;\,1;\,1)$, $\boldsymbol{e}_3=(-1;\,1;\,1)$; $\boldsymbol{e}'_1=(1;\,7;\,3)$, $\boldsymbol{e}'_2=(-4;\,9;\,4)$, $\boldsymbol{e}'_3=(0;\,3;\,2)$; $\boldsymbol{x}=(2;\,3;\,6)$	**B 10**	$\boldsymbol{e}_1=(1;\,4;\,7)$, $\boldsymbol{e}_2=(2;\,5;\,8)$, $\boldsymbol{e}_3=(3;\,6;\,0)$; $\boldsymbol{e}'_1=(2;\,6;\,1)$, $\boldsymbol{e}'_2=(1;\,3;\,2)$, $\boldsymbol{e}'_3=(0;\,1;\,1)$; $\boldsymbol{x}=(6;\,9;\,-6)$

10. Знайти розмірність та базис суми й перетину підпросторів $L_1=\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\rangle$ і $L_2=\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\rangle$, якщо

$$\boldsymbol{a}_1=(N;\,0;\,1;\,0),\ \boldsymbol{a}_2=(1;\,2;\,-1;\,1),\ \boldsymbol{a}_3=(-1;\,15-N;\,1;\,1);$$
$$\boldsymbol{b}_1=(0;\ -2;\ 0;\,-1),\ \boldsymbol{b}_2=(2;\ 2;\ 2;\,-N),\ \boldsymbol{b}_3=(-2;\,15-N;\,-2;\,0)$$

(тут N – номер варіанта).

11. Знайти розклад вектора $\boldsymbol{p}(x)=Nx^3+(15-N)x+1$ простору $R_3[x]$ по базису $\boldsymbol{p}_0=1$, $\boldsymbol{p}_1=x+N$, $\boldsymbol{p}_2=(x+N)^2$, $\boldsymbol{p}_3=(x+N)^3$, де N – номер варіанта.

12. Вказати який-небудь базис простору квадратних матриць третього порядку й знайти розклад вектора $\boldsymbol{A}$ по цьому базису.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & N-5 \\ -1 & 3 & -N \\ N & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(тут N – номер варіанта).

13. Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4+a_{15}x_5=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4+a_{25}x_5=0, \\ a_{31}x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4+a_{35}x_5=0, \\ a_{41}x_1+a_{42}\,x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4+a_{45}x_5=0. \end{cases}$$

	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
B1	2	5	8	3	3	1	2	4	2	1
B2	2	5	8	3	3	3	6	11	5	3
B3	1	4	6	2	3	2	5	9	4	3
B4	–1	2	2	0	3	0	3	5	2	3
B5	–1	2	1	–1	3	0	3	4	1	3
B6	0	1	1	0	1	1	4	6	2	3

B7	2	4	7	3	2	3	6	11	5	3
B8	1	4	5	1	3	2	5	8	3	3
B9	0	3	4	1	3	1	4	7	3	3
B10	1	4	7	3	3	2	5	10	5	3

	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
B1	4	4	7	2	3	2	3	4	1	1
B2	12	7	11	3	7	3	7	12	5	4
B3	5	2	3	1	3	1	3	5	2	2
B4	3	3	5	0	2	0	2	3	1	2
B5	5	3	4	0	4	0	4	5	1	4
B6	7	2	3	1	5	1	5	7	2	4
B7	11	3	5	2	6	2	6	11	5	4
B8	9	5	8	2	6	2	6	9	3	4
B9	8	4	7	1	5	1	5	8	3	4
B10	11	6	10	2	6	2	6	11	5	4

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

1. *Визначити, чи є лінійним перетворення A, що переводить вектор $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ у вектор $A\boldsymbol{x}$? Якщо так, то знайти його ядро, образ, ранг та дефект.*

B1 $A\boldsymbol{x}=(x_1+x_2+x_3;\,-x_1+x_2+x_3;\,-x_1-x_2+x_3)$.

B2 $A\boldsymbol{x}=(6x_1+6x_2-5x_3;\,4x_1+7x_2+x_3;\,x_1-2x_2-5x_3)$.

B3 $A\boldsymbol{x}=(-9x_1+3x_2-4x_3;\,x_2;\,7x_1+6x_2+9x_3)$.

B4 $A\boldsymbol{x}=(3x_1+x_3;\,-x_1+x_2-x_3;\,x_1-2x_2+x_3)$.

B5 $A\boldsymbol{x}=(4x_1+5x_2-6x_3;\,x_2-2x_3;\,x_3)$.

B6 $A\boldsymbol{x}=(3x_1+x_3;\,-x_1+x_2-x_3;\,x_1+x_3)$.

B7 $A\boldsymbol{x}=(x_1+x_2-x_3;\,x_2+x_3;\,x_2)$.

B8 $A\boldsymbol{x}=(4x_1+5x_2-6x_3;\,x_2-2x_3;\,x_3)$.

B9 $A\boldsymbol{x}=(x_1+3x_2;\,x_1-x_2;\,x_1+x_2-5x_3)$.

B10 $A\boldsymbol{x}=(x_1;\,2x_1+x_2;\,x_2-3x_3)$.

2. *Знайти*
   - *а) власні значення та відповідні власні вектори;*
   - *б) кореневі підпростори;*
   - *в) жорданову форму та жорданів базис лінійного оператора, який заданий у деякому базисі матрицею;*
   - *г) з'ясувати, чи можна привести матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду*

$$\begin{pmatrix} k & n & r \\ l & p & s \\ m & q & t \end{pmatrix}, \text{ де}$$

	k	l	m	n	p	q	r	s	t
В1	4	–1	1	–2	3	–2	–1	–1	2
В2	2	–1	1	–1	2	–1	0	0	1
В3	3	0	0	–1	2	–1	1	–1	2
В4	5	0	0	–1	4	–1	–1	–1	4
В5	6	–1	1	–2	5	–2	–1	–1	4
В6	3	2	–2	1	2	1	–1	–1	4
В7	2	1	–1	0	1	0	–1	–1	2
В8	2	1	–1	1	2	1	0	0	3
В9	4	1	–1	1	4	1	0	0	5
В10	5	–2	–2	1	4	1	–1	–1	6

3. *Дано підпростір* $L = \langle \boldsymbol{a}_1 = (-k, l, m, n); \boldsymbol{a}_2 = (p, q, -r, s) \rangle$. *Знайти базис ортогонального доповнення* $L^{\perp}$. *Визначити ортогональну проекцію* $\boldsymbol{y}$ *й ортогональну складову* $\boldsymbol{z}$ *вектора* $\boldsymbol{x} = (m, n, p, -q)$ *відносно підпростору* L. *Задачу розв'язати двома способами.*

	k	l	m	n	p	q	r	s
В1	9	7	3	2	5	3	7	7
В2	3	7	5	4	2	4	8	8
В3	8	4	2	6	8	9	5	5
В4	9	1	2	5	2	9	3	3
В5	1	2	8	7	9	7	8	8
В6	6	5	7	4	7	1	3	3
В7	3	6	1	8	5	4	7	7
В8	8	5	2	6	9	7	6	6
В9	6	3	5	7	3	2	5	5
В10	7	3	9	6	4	5	7	7

4. *У просторі* R^3 *з матрицею Грама* G *знайти кут між векторами* $\boldsymbol{x}$ *і* $\boldsymbol{y}$.

В1 $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 15 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = (1; 0; -6)$, $\boldsymbol{y} = (-4; 7; 3)$.

В2 $G = \begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = (5; -2; 1)$, $\boldsymbol{y} = (4; 0; -7)$.

В3 $G=\begin{pmatrix} 15 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 17 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(2;1;0)$, $\boldsymbol{y}=(3;2;-1)$.

В4 $G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;2;-3)$, $\boldsymbol{y}=(-4;6;2)$.

В5 $G=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 13 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(7;-5;2)$, $\boldsymbol{y}=(0;-1;7)$.

В6 $G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;7;-5)$, $\boldsymbol{y}=(11;1;0)$.

В7 $G=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(7;-2;1)$, $\boldsymbol{y}=(5;4;3)$.

В8 $G=\begin{pmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 5 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(-3;1;0)$, $\boldsymbol{y}=(2;7;1)$.

В9 $G=\begin{pmatrix} 13 & -4 & 2 \\ -4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(1;1;9)$, $\boldsymbol{y}=(1;0;1)$.

В10 $G=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -3 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 21 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}=(5;-6;1)$, $\boldsymbol{y}=(-3;1;6)$.

5. *Дослідити квадратичну форму на додатну визначеність за критерієм Сильвестра. Знайти сигнатуру, канонічний та нормальний вигляди квадратичної форми за допомогою методів:*
   а) Лагранжа;
   б) Якобі.

В1 $f=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-x_2x_3$.

В2 $f=4x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$.

В3 $f=-x_1^2-2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3$.

В4 $f=9x_1^2+x_2^2-6x_3^2+3x_1x_2-3x_1x_3+6x_2x_3$.

В5 $f=4x_1^2+6x_2^2-7x_3^2+24x_1x_2+12x_1x_3-21x_2x_3$.

B6 $f = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 - 6x_2x_3$.

B7 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 7x_2x_3$.

B8 $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_2 - 5x_1x_3$.

B9 $f = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + x_2x_3$.

B10 $f = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

6. *Перевірити, чи будуть квадратичні форми f та g еквівалентними над полем R. Для еквівалентних форм знайти перетворення, що зводить квадратичну форму f до квадратичної форми g. Форму f взяти з умови завдання 5.*

B1 $g = 4t_1^2 - t_2^2 + 2t_3^2$.

B2 $g = 9t_1^2 - 2t_2^2 - 4t_3^2$.

B3 $g = -t_1^2 + 9t_2^2 + t_3^2$.

B4 $g = 4t_1^2 + t_2^2 + 3t_3^2$.

B5 $g = -2t_1^2 - t_2^2 - 4t_3^2$.

B6 $g = 9t_1^2 - 4t_2^2 + t_3^2$.

B7 $g = -4t_1^2 - t_2^2 + 6t_3^2$.

B8 $g = 2t_1^2 + 4t_2^2 - t_3^2$.

B9 $g = 4t_1^2 + t_2^2 + 9t_3^2$.

B10 $g = t_1^2 - 4t_2^2 + 16t_3^2$.

7. *Знайти всі значення λ, при яких квадратична форма f буде додатно-означеною.*

B1 $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 - \lambda 4x_3^2 + x_1x_2 + 4\lambda x_2x_3$.

B2 $f = 7x_1^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 4\lambda x_2x_3$.

B3 $f = x_1^2 + x_2^2 - \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 6x_2x_3$.

B4 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 4\lambda x_1x_3 - 2x_2x_3$.

B5 $f = 2x_1^2 + 8\lambda x_2^2 + 5x_3^2 + 4\lambda x_1x_2 - 8x_1x_3 + 6\lambda x_2x_3$.

B6 $f = x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 4x_2x_3$.

B7 $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6\lambda x_2x_3$.

B8 $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5\lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 6\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$.

B9 $f = 5x_1^2 - 7\lambda x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2\lambda x_2x_3$.

B10 $f = 11\lambda x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$.

8. *Знайти ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму f до канонічного вигляду.*

B1 $f = x_1^2 + 10x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 10x_1x_3 - 8x_2x_3$.

B2 $f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

B3 $f = -3x_1^2 + 3x_2^2 - 12x_1x_3 + 12x_2x_3$.

B4 $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

B5 $f = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

B6 $f = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 8x_2x_3$.

B7 $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

B8 $f = 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

B9 $f = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

B10 $f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Додаток А

Приклад оформлення титульного аркуша індивідуального завдання

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАСТАВА
«ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Кафедра алгебри та геометрії

Індивідуальне завдання №1
з лінійної алгебри
студента(ки) групи __________

____

номер варіанту: _______

Відмітки про виконання роботи

номер завдання	1					2		3				4
	а	б	в	г	д	1 сп	2 сп	совм	а	б	в	
відмітка викладача												

номер завдання	5	6	7	8			9	
				а	б	в	а	б
відмітка викладача								

Кількість балів:

Запоріжжя, 2015

Методичні вказівки
(українською мовою)

Спиця Оксана Геннадіївна
Зіновєєв Ігор Валерійович
Манько Наталія Іванівна – Володимирівна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

**Методичні вказівки
до виконання індивідуальних завдань та контрольних робіт
з лінійної алгебри студентами освітнього ступеня «бакалавр»
напряму підготовки «Математика»**

Рецензент *С.М. Гребенюк*
Відповідальний за випуск *А.К. Приварников*
Коректор *О.Г. Спиця*