В.А.УЛАНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Под редакцией
профессора В.В.Ковалева

МОСКВА
"ФИНАНСЫ и СТАТИСТИКА"
2000

УДК 658.15.011.2(076.1)
ББК 65.290-93в6я73
У47

Уланов В.А.

У47 Сборник задач по курсу финансовых вычислений / Под ред. проф. В.В. Ковалева. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 400 с.: ил.

ISBN 5-279-02089-3

Дан краткий обзор основных понятий, используемых в курсе финансовых вычислений, приведены вопросы для обсуждения. Представлены решения типовых примеров и задачи для самопроверки по изучаемому материалу. Сборник содержит также финансовые таблицы и основные формулы, необходимые для решения типовых задач. Материалы пособия могут использоваться в курсах "Финансовая математика", "Финансовый менеджмент", "Финансовый анализ".

Для преподавателей и студентов экономических вузов, научных и практических работников, специализирующихся в области управления финансами и бухгалтерского учета.

$У \frac{1602120000 - 151}{010(01) - 2000} 135 - 2000$

УДК 658.15.011.2(076.1)
ББК 65.290-93в6я73

ISBN 5-279-02089-3

Введение

В последние годы в связи с постепенным становлением рыночных отношений в экономике России вновь, спустя многие десятилетия, появилась потребность в распространении количественных методов оценки финансовых операций. Причины этого очевидны: появление реально самостоятельных предприятий, становление рынка капитала, коренное изменение сущности и роли банковской системы. Многие решения финансового характера нецелесообразно принимать лишь на интуитивной основе; гораздо более качественные результаты могут быть достигнуты, если используются формализованные методы оценки. Кроме того, можно привести немало ситуаций, когда оптимальное решение, основанное лишь на интуиции, не может быть принято в принципе. В подобных ситуациях как раз и применяются методы финансовых вычислений, или, как их иногда называют, методы финансовой математики.

Владение методами финансовых вычислений необходимо не только работникам, специализирующимся в области управления финансами и бухгалтерского учета. Фактически любому человеку в жизни приходится выполнять какие-то расчеты финансового характера. Изучение большинства методов финансовых вычислений не требует серьезной математической подготовки, однако определенные усилия необходимы, если ставится цель понять сущность той или иной используемой формулы. По большому счету без такого понимания нельзя правильно и эффективно применять формулы при расчетах и грамотно освоить навыки в использовании сравнительно простых, но многочисленных вычислительных процедур. Как и в любой дисциплине, в области финансовых вычислений можно выделить основополагающие понятия и алгоритмы.

Сразу же отметим, что рассмотренные в пособии и другой подобной литературе формализованные методы не являются панацеей от возможных негативных последствий принятых с их помощью решений финансового характера. Однако владение ими нередко позволяет избежать многих ошибок и недоразумений при заключении финансовых сделок и проведении финансовых операций.

Пособие содержит три главы, соответствующие трем основным фундаментальным темам: простые проценты, сложные проценты и аннуитеты. Как правило, каждая следующая глава опирается на материал, изложенный в предыдущей главе. Тем не менее каждая глава носит самостоятельный характер и ее можно изучать, обладая, естественно, некоторыми необходимыми минимальными знаниями, отдельно от других глав.

Каждая глава содержит ряд параграфов, состоящих из четырех разделов: а) основные положения; б) вопросы для обсуждения; в) типовые примеры и методы их решения; г) задачи для самостоятельного решения. В разделе “Основные положения” кратко излагаются ключевые понятия и определения, характеризующие данную тему. Второй раздел содержит вопросы, которые по существу позволяют повторить и осмыслить теоретический материал параграфа, используемый при решении примеров и задач. Иногда и сами вопросы представляют собой небольшие задачи, которые можно решить устно. В третьем разделе приведены примеры с решениями, на основе которых продемонстрированы основные приемы и методы, используемые в финансовых вычислениях. Часто при решении конкретного примера даются ответы на большее количество вопросов, чем требуется по условию примера. Более того, в развитии решения периодически излагаются отдельные вопросы теоретического характера. Нередко приводятся два способа решения одного и того же примера. Все это делается с целью демонстрации как разнообразия методов решений, так и тесной (и естественной) их связи между собой. Четвертый раздел содержит задачи для самостоятельного решения. Эти задачи развивают навыки индивидуальной работы. Ответы и указания к задачам приводятся в конце книги.

При осуществлении разнообразных финансовых расчетов приходится использовать большое количество формул. Нумерованный список основных формул приведен в приложении. При изложении решения того или иного примера указывается номер формулы, которая применяется в данном расчете. Если же используемой при решении примера формулы нет в списке, то она приводится непосредственно в тексте.

Приложение также содержит таблицы порядковых номеров дней в году (обычном и високосном) и финансовые таблицы, с помощью которых можно решить многие задачи пособия.

Для параграфов в пособии применяется двойная нумерация, где первый индекс означает номер главы, второй – номер параграфа в этой главе. Для примеров и задач используется тройная нумерация: первый индекс означает номер главы, второй – номер параграфа в данной главе, третий – номер примера или задачи в данном параграфе.

В формулировках условий примеров и задач, как правило, подчеркивается, какая ставка (процентная, учетная или непрерывная) имеется в виду и за какой период данная ставка установлена. Если же встречаются, например, выражения типа: "ставка 30%", то речь идет о процентной ставке 30% годовых. Аналогичным образом, говоря о непрерывной ставке, например 30%, без уточнения периода, имеем в виду силу роста 30% за год. Вообще, если для любой ставки не конкретизирован период, за который ставка установлена, то, как это принято, речь идет о годовой ставке. Если по условию задачи на некоторую сумму денег начисляются сложные проценты по процентной ставке 30% годовых и количество начислений в году не указано, то сложные проценты начисляются один раз в конце года.

Ответы на вопросы некоторых задач (например, предполагающих составление плана погашения кредита) лучше было бы представить в виде таблицы. Однако в целях сокращения объема в пособии ответы к такого рода задачам не даны в виде таблиц, а указаны значения величин только за какой-либо один период. Тем не менее по этим значениям вполне можно судить о правильности решения задачи.

В это пособие не включены задачи, при решении которых приходится иметь дело со степенными уравнениями, имеющими высокую степень, или с трансцендентными уравнениями (например, при определении процентной ставки, использующейся для оценки аннуитета, или при учете инфляции и т.п.). Такого типа уравнения можно решать интерполяционными методами и получать приближенные значения корней с любой степенью точности. В связи с развитием вычислительной техники эти уравнения легко решаются с помощью пакета многочисленных электронных таблиц, в частности *Excel, Lotus 1-2-3*. Однако пакетом надо уметь пользоваться, что не предполагается при чтении этой книги. Впрочем, логика составления указанных уравнений, безусловно, должна быть понятна.

Несколько слов о том, насколько соответствуют действительности числовые значения, используемые в примерах и задачах. Безусловно, хотелось бы в излагаемом материале дать близкие к практике, действующие или хотя бы мало изменяющиеся в течение длительного времени правдоподобные значения ставок и денежных величин. Однако это невозможно сделать в настоящее время в связи с инфляционными процессами, захлестнувшими в последние годы экономику нашей страны. В ряде задач использованы данные второй половины 1998 – начала 1999 г. К счастью, все приведенные вычисления не зависят от выбора денежной единицы, от размера ставки. Поэтому читатель может воспринимать, например, появляющиеся в тексте рубли как некие условные денежные единицы. По указанным причинам даны в известной степени условные (если не оговорена конкретная дата) курсы валют по отношению к рублю.

Это пособие задумывалось как логически необходимое дополнение для книги: В.В. Ковалева и В.А. Уланова "Курс финансовых вычислений" (М.: Финансы и статистика, 1999). В частности, поэтому в данном пособии сохранены и обозначения, используемые в "Курсе...". Но конечно, при чтении пособия для ознакомления с теоретическим материалом можно использовать и другую литературу по аналогичной тематике. Список такого рода литературы, изданной на русском языке, приведен в конце пособия. Заметим, однако, что данное пособие в известном смысле является автономным. Многие задачи можно успешно решить после внимательного прочтения методических материалов к параграфам, ответов на вопросы и тщательного изучения предложенных решений типовых примеров.

Хорошо известно, что только после самостоятельного решения достаточно большого количества разнообразных задач можно сделать заключение о том, как понят соответствующий материал. Тем более это утверждение справедливо, когда необходимо освоить основные алгоритмы, используемые при проведении финансовых вычислений. Цель пособия – представить методы решения задач, связанных с финансовыми вычислениями, и дать возможность читателям попрактиковаться самим в финансовых расчетах, поскольку доведение решения до итогового результата играет в финансовой практике основную роль. Точность вычислений при решении примеров и задач обычно соответствует количеству знаков в финансовых таблицах, приведенных в приложении. Очевидно, что при решении задач для облегчения вычислений необходимо активно использовать обычный калькулятор, а в более сложных случаях – финансовый калькулятор или персональный компьютер. Ответы, получаемые при решении одной и той же задачи с помощью финансовых таблиц и с помощью компьютера, могут несколько отличаться друг от друга. Это следует иметь в виду, сверяясь с ответами, представленными в пособии.

При написании данного пособия использовались оригинальные, по мнению автора, задачи, встречающиеся в отечественной и зарубежной литературе. Многие примеры и задачи составлены самим автором пособия. Безусловно, некоторые примеры и задачи носят иллюстративный характер, в частности это относится к ситуациям, связанным с налогообложением. Это достаточно сложная и обширная тема, изучению которой должна быть посвящена отдельная работа. В данном пособии при приведении соответствующих примеров и задач ставилась лишь цель показать влияние взимания налогов на доходность финансовых операций и методы возможной оценки этого влияния.

В приложении представлен один из вариантов рабочей программы курса "Финансовые вычисления". В настоящее время в некоторых вузах часть разделов, представленных в программе, излагаются в курсе, называемом "Финансовая математика". Однако математика здесь по большому счету не выходит за рамки несложных алгебраических преобразований и знания прогрессии. В некоторых случаях, правда, необходимо иметь представление об операции предельного перехода, еще реже – о производной и интеграле, но все необходимые сведения вполне укладываются в школьную программу. Представляется, что название дисциплины "Финансовые вычисления" в большей степени соответствует как ее логике и содержательной части, так и дореволюционной русской традиции. Напомним, в частности, что в России сложные проценты и аннуитеты были, как правило представлены в таких курсах, как "Высшие финансовые вычисления", "Долгосрочные финансовые операции", "Политическая арифметика". Важно подчеркнуть, что упор в дисциплине должен делаться не на математику, а на собственно финансовые вычисления; главное не "чисто" математические вычисления, а финансовая природа операций. Математика в данном случае является удобным и эффективным аппаратом для количественной оценки финансовых операций.

Материалы пособия могут использоваться в курсах "Финансовая математика", "Финансовый менеджмент", "Финансовый анализ", а также в практических расчетах работниками финансово-кредитных учреждений.

Глава 1
ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1.1. Определение ставок и вычисление процентов

Основные положения

- Денежные ресурсы, участвующие в финансовой операции, имеют временну́ю ценность: одна и та же сумма денег неравноценна в разные периоды. Учет временно́го фактора в финансовых операциях осуществляется путем начисления процентов или дисконтирования.
- Для сопоставления в пространственно-временном аспекте результатов финансовой операции используют показатель, называемый ставкой и определяемый отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к некоторому базовому капиталу. Это отношение выражается в десятичных дробях или в процентах.
- Процентная ставка определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к величине исходного капитала.
- Учетная ставка определяется отношением процентных денег, уплаченных (полученных) за единицу времени (обычно за год), к ожидаемой к получению (возвращаемой) сумме денежных средств.
- Эффективность любой финансовой операции может быть охарактеризована ставкой.
- Удобной и наглядной характеристикой (особенно при оценке вклада) является индекс роста суммы за данный период, показывающий, во сколько раз выросла величина капитала по отношению к величине капитала в конце предыдущего периода.
- Процесс, в котором заданы исходная сумма и ставка, в финансовых вычислениях называется процессом наращения, искомая величина называется наращенной суммой, а ставка – ставкой наращения.

• Процесс, в котором заданы ожидаемая в будущем к получению (возвращаемая) сумма и ставка, называется процессом дисконтирования, искомая величина называется приведенной суммой, а ставка – ставкой дисконтирования.

• В качестве ставки наращения или дисконтирования может выступать как процентная, так и учетная ставка.

• Число, равное сумме начального числа и начисленных на него процентов, называется наращенным числом. Проценты по отношению к наращенному числу называются процентами *"на 100"*, а проценты по отношению к начальному числу называются процентами *"со 100"*. Проценты *"на 100"* находят в задачах следующего типа: даны ставка процента и сумма двух слагаемых, одно из которых представляет собой проценты *"со 100"* другого; требуется найти одно из слагаемых.

• Число, равное разности между начальным числом и начисленными на него процентами, называется уменьшенным числом. Проценты по отношению к уменьшенному числу называются процентами *"во 100"*. Проценты *"во 100"* находят в задачах следующего типа: даны ставка процента и разность двух слагаемых, одно из которых (вычитаемое) представляет собой проценты *"со 100"* другого; требуется найти одно из слагаемых.

Вопросы для обсуждения

1. В чем заключается временна́я ценность денег?
2. С помощью каких показателей (абсолютных и относительных) можно характеризовать результативность финансовой операции?
3. Как определяется процентная ставка и в каких границах, согласно определению, она может меняться?
4. Как определяется учетная ставка и в каких границах, согласно определению, она может меняться?
5. Каким образом связаны между собой процентная ставка, учетная ставка и дисконт-фактор? В каких единицах могут выражаться эти показатели?
6. Какими ставками пользуются, как правило, в прогнозных расчетах?

7. Прокомментируйте с финансовой точки зрения ситуацию, когда: а) процентная или учетная ставка равна нулю; б) учетная ставка равна единице.
8. Что показывает индекс роста вклада за некоторый промежуток времени? Приведите формулы, связывающие индекс роста с дисконт-фактором и ставками.
9. Как определяется индекс роста за несколько промежутков времени, расположенных последовательно друг за другом?
10. Что называется процессом наращения? Какая ставка может являться ставкой наращения?
11. Что называется процессом дисконтирования? Какая ставка может являться ставкой дисконтирования?
12. О каком направлении во времени денежного потока идет речь при наращении? А при дисконтировании?
13. Как, используя процентную или учетную ставку, показать, что время в определенном смысле генерирует деньги?
14. Чем отличается экономическое понятие "процент" от математического понятия "процент"?
15. Связана ли доходность финансовой операции с риском при проведении этой операции?
16. В чем заключается экономический смысл дисконтирования?
17. Каким образом можно охарактеризовать будущую стоимость и приведенную стоимость?
18. В виде суммы каких компонент может быть представлена процентная ставка? Поясните такое представление и дайте краткую характеристику каждой компоненте.
19. Приведите определения процентов *"со 100"* и формулу их вычислений.
20. Какую часть числа составляют: а) 5%; б) 25%; в) 50%; г) 75%?
21. Во сколько раз увеличится число, если его увеличить: а) на 100%; б) на 300%; в) на 350%; г) на 900%?
22. Сколько будет 5% от 5%?
23. Приведите определения процентов *"на 100"* и формулу их вычислений.
24. В задачах какого типа находят проценты *"на 100"*?
25. Приведите определения процентов *"во 100"* и формулу их вычислений.
26. В задачах какого типа находят проценты *"во 100"*?

27. Как проценты *"со 100"*, *"на 100"* и *"во 100"* от одного числа соотносятся друг с другом?
28. Во сколько раз 10% *"со 100"* больше, чем 5% *"со 100"*? во сколько раз 10% *"на 100"* больше, чем 5% *"на 100"*?
29. Как проверить, правильно ли найдены проценты *"на 100"* *"во 100"*?
30. Как можно интерпретировать величину дохода от предоставления в долг некоторой денежной суммы в терминах процентов *"со 100"*, *"на 100"*, *"во 100"* ?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.1.1. Предприниматель получил на полтора года кредит в размере 40 тыс. руб. с условием возврата 50 тыс. руб. Определите процентную ставку, учетную ставку и дисконт-фактор за полтора года. Чему равен индекс роста суммы кредита?

Решение. Полагая в формуле (1) (см. приложение 1) $t = 1{,}5$ года, $PV = 40$ тыс. руб., $FV = 50$ тыс. руб., получим величину процентной ставки за полтора года:

$$r_{1,5} = \frac{50-40}{40} = 0{,}25 \text{, или, что равносильно, } r_{1,5} = 25\% .$$

Аналогичным образом учетную ставку и дисконт-фактор находим соответственно по формулам (2),(4):

$$d_{1,5} = \frac{50-40}{50} = 0{,}2 \text{ или } d_{1,5} = 20\% ;$$

$$v_{1,5} = \frac{40}{50} = 0{,}8 \text{ или } v_{1,5} = 80\% .$$

Заметим, что величины $d_{1,5}$, $v_{1,5}$ можно было найти, используя и другие соотношения. Например,

$$d_{1,5} = \frac{r_{1,5}}{1+r_{1,5}} = \frac{0{,}25}{1+0{,}25} = 0{,}2 ;$$

$$v_{1,5} = 1 - d_{1,5} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 .$$

Индекс роста $B_{1,5}$ суммы кредита показывает, во сколько раз возвращаемая сумма больше выданной:

$$B_{1,5} = \frac{25}{20} = 1,25 .$$

Пример 1.1.2. Известно, что капитал, помещенный в банк, вырос за первый год в 1,4 раза, а за второй год вся сумма увеличилась в 1,2 раза. Определите индекс роста вклада и процентную ставку за два года. На сколько процентов увеличился капитал за все время?

Решение. Индекс роста капитала B_2 за два года находим перемножением индексов роста за каждый год:

$$B_2 = 1,4 \cdot 1,2 = 1,68 .$$

Следовательно, двухгодовая процентная ставка, показывающая, на сколько процентов увеличится капитал, составит:

$$r_2 = B_2 - 1 = 1,68 - 1 = 0,68 .$$

Таким образом, капитал за два года увеличится на 68%.

Пример 1.1.3. Имеется два варианта вложения капитала на 3 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 15%, за второй год вся сумма увеличится на 35%, а за третий год – еще на 10%. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 20% от суммы предыдущего года. Какой вариант лучше?

Решение. Поскольку для первого варианта индексы роста капитала за каждый год равны 1,15; 1,35 и 1,1, то индекс роста за 3 года составит:

$$1,15 \cdot 1,35 \cdot 1,1 = 1,70775 \approx 1,708 .$$

Подобным образом находим индекс роста капитала за 3 года для второго варианта:

$$1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,728 .$$

Так как согласно первому варианту за 3 года капитал увеличится на 70,8%, а согласно второму варианту – на 72,8%, то второй вариант вложения капитала лучше.

Заметим, что 70,8% и 72,8% представляют собой процентные ставки за 3 года.

Пример 1.1.4. Определите доходность в виде процентной ставки за предоставление потребительского кредита на следующих условиях: 45% стоимости покупок оплачивается сразу, а через год вносится оставшаяся часть стоимости покупок и 10% от стоимости покупок в качестве платы за кредит.

Решение. Воспользуемся формулой (1). Обозначим через P стоимость покупок. Поскольку 45% стоимости покупок оплачивается сразу, то на один год кредит предоставляется в размере $PV = 0{,}55P$. Величина дохода за предоставленный кредит составит $FV - PV = 0{,}1P$. Поэтому

$$r_1 = \frac{0{,}1P}{0{,}55P} = 0{,}1818, \text{ или } = 18{,}18\% .$$

Пример 1.1.5. Найдите с 90 тыс. руб.: а) 15% *"со 100"*; б) 15% *"на 100"*; в) 15% *"во 100"*.

Решение. Выражая 15% в десятичных дробях (т.е. получая 0,15), пользуемся последовательно формулами (6), (7), (8) при $r = 0{,}15$ и $Q = S = K = 90$ тыс. руб.:

$$\text{а) } Q' = 90 \cdot 0{,}15 = 13{,}5 \text{ тыс. руб.};$$

$$\text{б) } S' = \frac{90 \cdot 0{,}15}{1 + 0{,}15} = 11{,}739 \text{ тыс. руб.};$$

$$\text{в) } K' = \frac{90 \cdot 0{,}15}{1 - 0{,}15} = 15{,}882 \text{ тыс. руб.}$$

Получили, что по отношению к одному числу *проценты "на 100"* меньше процентов *"со 100"*, которые в свою очередь меньше процентов *"во 100"*.

Для проверки найденных процентов *"на 100"* надо из данного числа (90 тыс. руб.) вычесть полученные проценты *"на 100"* (11,739 тыс. руб.), определив тем самым так называемое начальное число. Затем от начального числа найти проценты *"со 100"*, которые должны совпадать с найденными согласно условию задачи процентами *"на 100"*. Выполним эти действия:

$$90 - 11{,}739 = 78{,}261 \text{ тыс. руб.};$$

$$78{,}261 \cdot 0{,}15 = 11{,}739 \text{ тыс. руб.}$$

Для проверки найденных процентов *"во 100"* надо к данному числу (90 тыс. руб.) прибавить полученные *проценты "во 100"* (15,882 тыс. руб.) и затем от найденной суммы (т.е. начального числа 105,882 тыс. руб.) найти проценты *"со 100"*:

$$90 + 15{,}882 = 105{,}882 \text{ тыс. руб.};$$

$$105{,}882 \cdot 0{,}15 = 15{,}882 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.1.6. Предприниматель реализовал партию товара за 80 тыс. руб., получив при этом 25% прибыли. Определите величину прибыли и себестоимость товара.

Решение. Поскольку 80 тыс. руб. представляют собой сумму себестоимости товара и процентов *"со 100"* этой себестоимости (прибыли), то величина прибыли определяется по формуле (7) вычисления процентов *"на 100"*. Полагая $S = 80$ тыс. руб., $r = 0{,}25$, находим:

$$S' = \frac{80 \cdot 0{,}25}{1 + 0{,}25} = 16 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, себестоимость товара составляет 80 – 16 = 64 тыс. руб.

Пример 1.1.7. Предприниматель реализовал партию товара за 57 тыс. руб., получив при этом 5% убытка. Определите величину убытка и себестоимость товара.

Решение. Поскольку 57 тыс. руб. представляют собой разность себестоимости товара и процентов *"со 100"* этой себестоимости (убытка), то величина убытка определяется по формуле (8) вычисления процентов *"во 100"* при $K = 57$ тыс. руб. и $r = 0{,}05$:

$$K' = \frac{57 \cdot 0{,}05}{1 - 0{,}05} = 3 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, себестоимость товара составляет 57 + 3 = = 60 тыс. руб.

Из разобранных двух последних примеров видно, что при применении формул вычисления процентов *"на 100"* или *"во 100"* (формулы (7) и (8)) вначале нужно определить, с каким капиталом (согласно условию задачи) имеем дело – с наращенным или уменьшенным, после чего решение задачи не представляет трудностей.

Задачи

1.1.1. Предприятие получило кредит на один год в размере 100 тыс. руб. с условием возврата 160 тыс. руб. Рассчитайте процентную и учетную ставки.

1.1.2. Предприятие за взятый кредит через год должно вернуть 400 тыс. руб. Определите величину кредита, если учетная ставка равна 25%. Чему равен дисконт-фактор?

1.1.3. Кредит в размере 40 тыс. руб. выдан на два года с условием возврата 45 тыс. руб. Определите двухгодовые процентную и учетную ставки и дисконт-фактор.

1.1.4. Вклад 5 тыс. руб. положен в банк на 3 месяца с условием, что доход от финансовой сделки составит 800 руб. Определите квартальные процентную и учетную ставки и дисконт-фактор. Чему равен индекс роста вклада за квартал?

1.1.5. Определите доходность в виде процентной ставки за предоставление потребительского кредита на следующих условиях: 35% стоимости покупок оплачивается сразу, а через год вносится оставшаяся часть стоимости покупок и 20% от стоимости покупок в качестве платы за кредит.

1.1.6. Доходы от трех финансовых операций, проведенных в течение одного и того же срока, составили соответственно 10, 8 и 20 тыс. руб. Сравните между собой нормы прибыли этих операций, если в них было вложено 50, 20 и 100 тыс. руб. Чему будут равны учетная ставка и дисконт-фактор в каждой финансовой операции?

1.1.7. Предполагается инвестировать три проекта в размере соответственно 40, 20 и 80 тыс. руб. Ожидается, что в зависимости от ситуации доходности этих инвестиций за два года могут колебаться в следующих границах: для первой – от 15 до 30%, для второй – от 35 до 50%, для третьей – от 10 до 15%. Определите, какой минимальный и какой максимальный доход можно получить за два года.

1.1.8. В результате инвестирования первоначальный капитал за первый год вырос в 1,4 раза, за второй год общий капитал вырос в 1,6 раза и за третий год вся сумма увеличилась в 1,3 раза. Чему равен индекс роста суммы? Определите, на сколько процентов увеличилась первоначальная сумма за 3 года.

1.1.9. Имеется два варианта вложения капитала на 2 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 50%, а за второй год вся сумма увеличится на 10%. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 30% от суммы предыдущего года. Какой вариант лучше?

1.1.10. Клиент банка получил от помещения денег на депозит на год 900 руб. Какая сумма была помещена на депозит, если индекс роста ее за это время составил 1,4?

1.1.11. Индексы роста вклада за четыре квартала, следующие друг за другом, составили 1,15; 1,1; 1,12 и 1,05. На сколько процентов за это время увеличился вклад? Определите учетную ставку и дисконт-фактор: а) за полгода; б) за год.

1.1.12. Партия товара была куплена предпринимателем за 200 тыс. руб., а продана за 325 тыс. руб. Сколько процентов прибыли получил предприниматель?

1.1.13. Товарооборот магазина в июне составил 940 тыс. руб., а в июле – 890 тыс. руб. На сколько процентов уменьшился товарооборот в июле?

1.1.14. За продажу дачного участка комиссионер получил 8 тыс. руб., что составило 5% с продажной цены. Определите, за какую сумму был продан дачный участок.

1.1.15. Предприниматель, купив первую и вторую партии товара соответственно за 36 тыс. руб. и 42 тыс. руб., продал их соответственно за 48 тыс. руб. и за 58 тыс. руб. При продаже какой партии был получен больший процент прибыли?

1.1.16. Найдите: а) 3% *"на 100"* с 412 руб.; б) 5% *"на 100"* с 735 руб.; в) 10% *"на 100"* с 2300 руб.; г) 25% *"на 100"* с 42 тыс. руб.; д) 50% *"на 100"* с 9 тыс. руб.

1.1.17. Найдите: а) 3% *"во 100"* с 1261 руб.; б) 5% *"во 100"* с 760 руб.; в) 10% *"во 100"* с 1150 руб.; г) 25% *"во 100"* с 23 тыс. руб.; д) 50% *"во 100"* с 8 тыс. руб.

1.1.18. Найдите с 1500 руб. и 12 тыс. руб.: а) 25% *"со 100"*; б) 25% *"на 100"*; в) 25% *"во 100"*.

1.1.19. Предприятие реализовало партию товара за 230 тыс. руб., получив при этом 30% прибыли. Определите величину прибыли и себестоимость товара.

1.1.20. Предприятие реализовало партию товара за 45 тыс. руб., получив при этом 8% убытка. Определите величину убытка и себестоимость товара.

1.1.21. Из-за порчи было списано 10% товара. Определите, сколько товара было списано, если его осталось 963 кг.

1.1.22. Общий заработок рабочего, включая премию в размере 10% от месячного оклада, составил 1980 руб. Найдите величину премии и величину оклада.

1.1.23. Предприниматель за 1 кг некоторого товара хочет получить 12 руб. 60 коп. Какую цену ему следует назначить, чтобы, сделав 3%-ную скидку, получить 12 руб. 60 коп. за 1 кг?

1.2. Простая процентная ставка

Основные положения

• Схема простых процентов предполагает неизменность величины, с которой происходит начисление.

• При наращении с использованием простой процентной ставки приращение капитала пропорционально сроку ссуды и процентной ставке, т.е. доход инвестора растет линейно вместе со сроком.

• Точные проценты определяются исходя из точного числа дней в году (365 или 366), а обыкновенные – из приближенного числа дней в году (360).

• При точном подсчете числа дней срока ссуды определяется фактическое количество дней между двумя датами (датой выдачи и датой возврата ссуды). При приближенном подсчете определяют точное число полных месяцев в сроке и добавляют число оставшихся дней. Длительность каждого полного месяца полагается равной 30 дням. При точном и при приближенном подсчете числа дней срока ссуды день ее выдачи и возврата считают за один день.

• Используются следующие способы расчета простых процентов: а) обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаемые как 360/360; б) обыкновенные проценты с точным числом дней, обозначаемые как 365/360 или *ACT*/360; в) точный процент с точным числом дней, обозначаемый как 365/365 или *ACT*/*ACT*.

• В финансовой практике при расчете процента используют и такие величины, как дивизор и процентное число. Дивизор – это отношение принятого числа дней в году к процентной ставке. Численно дивизор равен такому количеству рублей, с которого при данной процентной ставке получается 1 руб. дохода в день. Процентным числом называется произведение величины капитала на время, в течение которого происходит наращение на капитал простых процентов (иногда это произведение еще делят на 100).

• Финансовое соглашение может не только предусматривать постоянную процентную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (переменную) ставку.

• При применении простых процентов доходы по мере их начисления целесообразно снимать для потребления или использования в других инвестиционных проектах или текущей деятельности.

• Для сравнения доходности финансовых операций с различными сроками используют показатели, учитывающие временной период, в течение которого получен доход. Одним из показателей является эквивалентное значение простой годовой процентной ставки. При этом считается, что если в результате инвестирования некоторой суммы получен доход, то такой же доход можно получить в результате размещения той же суммы по соответствующей эквивалентной простой годовой процентной ставке.

• Реинвестированием называется вложение доходов в некоторый проект производственного или финансового характера с намерением получить на них в дальнейшем дополнительный доход.

• Математическое дисконтирование является процессом, обратным к наращению первоначального капитала. При математическом дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала (называемой приведенной стоимостью), которая через заданное время при наращении простыми процентами по данной процентной ставке будет равна сумме, ожидаемой к получению (уплате) через это заданное время.

• При математическом дисконтировании в качестве ставки дисконтирования используется процентная ставка.

• Понятие приведенной стоимости является одним из важнейших в количественном анализе финансовых операций.

Вопросы для обсуждения

1. Как происходит начисление простых процентов на капитал в течение всего срока?
2. Что показывает множитель наращения в формуле наращения простыми процентами? Как он связан с индексом роста первоначальной суммы?
3. Если вклад в банке увеличился на 300%, то во сколько раз увеличился вклад?
4. Верно ли, что наращение по простой процентной ставке происходит процентами "*со 100*"?
5. Какова зависимость наращенной суммы от времени при начислении простых процентов по процентной ставке на инвестируемый капитал? Каков вид ее графика?
6. Как связаны между собой наращение по простой процентной ставке и арифметическая прогрессия?
7. За какой период происходит удвоение первоначальной суммы в результате наращения по простой процентной ставке?
8. Изменится ли величина наращенной суммы за несколько лет, если начисление простых процентов по данной процентной ставке будет осуществляться не каждый год, а чаще, например каждый месяц?
9. В каких случаях применяют наращение по простой процентной ставке?
10. Если простую процентную ставку увеличить в два раза, то во сколько раз увеличится величина начисленных процентов по сравнению с ситуацией, когда использовалась исходная процентная ставка?
11. Если простую процентную ставку увеличить в два раза, то на сколько процентов увеличится наращенная сумма по сравнению с ситуацией, когда использовалась исходная процентная ставка?
12. Чем отличаются точные проценты от обыкновенных?
13. Какие существуют способы подсчета числа дней срока инвестирования?
14. Чем можно пользоваться для упрощения процедуры расчета точного числа дней ссуды?
15. Может ли подсчет точного числа дней ссуды и приближенного числа дней ссуды давать один и тот же результат?

16. Какие способы расчета простых процентов используются на практике? Какие из них выгоднее для кредитора, а какие – для должника?
17. Как можно пояснить, что на практике не используется способ начисления точных процентов с приближенным числом дней?
18. Что представляет собой способ начисления процентов 365/360? Чем он отличается от способа 360/360?
19. Что называется дивизором? Дайте ему экономическую интерпретацию.
20. Какая величина называется процентным числом? Приведите пример ее применения в банковских расчетах.
21. Какая ставка называется переменной? В каких случаях она применяется?
22. Чем объяснить, что доходность финансовой операции часто определяется в расчете на год?
23. Каким образом можно сравнить доходности финансовых операций с различными сроками?
24. Взимание комиссионных при выдаче ссуды увеличивает или уменьшает доходность сделки для кредитора?
25. Каким образом можно определить стоимость привлеченных денежных средств для заемщика?
26. Какая финансовая операция называется реинвестированием?
27. В чем заключается основное преимущество операции реинвестирования при начислении простых процентов?
28. Как связано математическое дисконтирование с процессом наращения?
29. Какая ставка используется в качестве ставки дисконтирования при математическом дисконтировании?
30. Что называется приведенной стоимостью?
31. Существует ли связь между дисконтным множителем и множителем наращения?
32. Как определяется дисконт при дисконтировании? Можете ли вы привести иные понятия, также называемые дисконтом?
33. Поясните фразу: «При математическом дисконтировании в условиях простых процентов ожидаемый в будущем к получению капитал учитывается процентами *“на 100”*».

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.2.1. Вы поместили в банк вклад 10 тыс. руб. под простую процентную ставку 26% годовых. Какая сумма будет на вашем счете через 3 года? Какова будет величина начисленных процентов? Если банк осуществляет регулярные выплаты начисленных процентов, то какую сумму Вы будете получать: а) каждый год; б) каждый квартал?

Решение. Полагая в формуле (9) $P = 10$ тыс. руб., $n = 3$ года, $r = 0{,}26$, получим наращенную сумму через 3 года, если не происходят выплаты простых процентов:

$$F = 10 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}26) = 17{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, величина начисленных процентов I составит:

$$I = F - P = 17{,}8 - 10 = 7{,}8 \text{ тыс. руб.}$$

Величину начисленных простых процентов, выплачиваемых ежегодно, определяем из формулы (12) при $l = 1$:

$$I_1 = 10 \cdot 1 \cdot 0{,}26 = 2{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

При ежеквартальных выплатах $l = 0{,}25$ года, и поэтому величина каждой выплаты составит:

$$I_2 = 10 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}26 = 0{,}65 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что проценты на уже начисленные проценты не начисляются независимо от срока хранения вклада. Поэтому имеет смысл начисленные простые проценты регулярно получать и использовать, например, для иных инвестиций. Поскольку приращение вклада при наращении простыми процентами растет линейно вместе со сроком его хранения, то величины I_1 и I_2 можно найти, поделив I соответственно на 3 и на 12.

Пример 1.2.2. На какой срок необходимо поместить денежную сумму под простую процентную ставку 28% годовых, чтобы она увеличилась в 1,5 раза?

Решение. Искомый срок определяем из равенства множителя наращения величине 1,5:

$$1 + n \cdot 0{,}28 = 1{,}5\,.$$

Решая это уравнение относительно n, получим $n = \frac{0{,}5}{0{,}28} = 1{,}786$ года. Таким образом, если в году 365 дней, то необходимый срок составит 1 год и 287 дней.

Пример 1.2.3. Предпринимателю 14 февраля была предоставлена ссуда в размере 20 тыс. руб. с погашением 14 июля того же года под процентную ставку 30% годовых. Рассчитайте различными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год невисокосный.

Решение. Величина уплачиваемых процентов за пользование ссудой зависит от числа дней, которое берется в расчет. Для упрощения процедуры расчета точного числа дней пользуются специальными таблицами (одна – для обычного года, вторая – для високосного), в которых все дни в году последовательно пронумерованы. Продолжительность финансовой операции определяется вычитанием номера первого дня из номера последнего дня. Поэтому точное число дней находим по таблице 1 в приложении 2: 195 – 45 = 150 дней. Естественно, это число можно найти и непосредственно, исходя из количества дней в соответствующих месяцах. Приближенное число дней ссуды состоит из 16 дней февраля (30 – 14); 120 дней (по 30 дней четырех месяцев: март, апрель, май, июнь) и 14 дней июля. Т.е. приближенное число дней составляет: 16 + 120 + 14 = 150. Теперь с помощью формулы (10) можно рассчитать возможные значения суммы к погашению. Во всех случаях $P = 20$ тыс. руб., $r = 0{,}3$.

1. В расчет принимаются точные проценты и точное число дней ссуды (т.е. $T = 365$, $t = 150$):

$$F = 20\,(1 + \frac{150}{365}0{,}3) = 22{,}466 \text{ тыс. руб.}$$

2. В расчет принимаются обыкновенные проценты и точное число дней ссуды (т.е. $T = 360$, $t = 150$):

$$F = 20\,(1 + \frac{150}{360}0{,}3) = 22{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

3. В расчет принимаются обыкновенные проценты и приближенное число дней ссуды (т.е. $T = 360$, $t = 150$):

$$F = 20\,(1 + \frac{150}{360}0{,}3) = 22{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Очевидно, что обыкновенные проценты и точное число дней ссуды доставляют большее значение суммы к погашению, чем точные проценты и точное число дней ссуды. В условиях этого примера второй и третий варианты расчета обеспечивают одинаковые суммы при возврате долга. Вообще, как правило, число точных и число приближенных дней краткосрочной (до одного года) ссуды либо очень близки, либо совпадают, что позволяет в банковских расчетах обычно пользоваться приближенным числом дней ссуды. Так, если бы ссуда была выдана с 15 января по 14 июля, то точное число дней ссуды – 180, а приближенное – 179. Следовательно, по второму и третьему вариантам расчета соответственно получим:

$$F = 20(1 + \frac{180}{360}0{,}3) = 23 \text{ тыс. руб.};$$

$$F = 20(1 + \frac{179}{360}0{,}3) = 22{,}983 \text{ тыс. руб.}$$

Вообще видно, что во всех случаях суммы к погашению различаются незначительно, но при больших величинах ссуд даже небольшие расхождения могут иметь значение.

Отметим, что число точных и число приближенных дней ссуды могут достаточно сильно отличаться друг от друга, если срок ссуды более 360 дней. Если, например, ссуда предоставлена с 14 февраля одного года до 13 февраля следующего, то точное число дней равно 364, а приближенное – 359. Отсюда следуют и более существенные различия в суммах к погашению.

Пример 1.2.4. Предприниматель 18 апреля обратился в банк за ссудой до 19 ноября того же года под простую процентную ставку 25% годовых. Банк, удержав в момент предоставления ссуды проценты за весь ее срок, выдал предпринимателю 12 тыс. руб. Какую сумму необходимо будет вернуть банку, если при расчете начисленных процентов использовались обыкновенные проценты с точным числом дней?

Решение. Обозначим через F сумму, которую необходимо будет вернуть банку, и вначале для определения процентов I, удержанных банком, воспользуемся формулой (14), где $P = F$. Число дней находим либо прямым подсчетом, либо по таблице:

$t = 215$ дней (323 – 108). Так как $T = 360$, $r = 0{,}25$, дивизор $D' = \frac{360}{0{,}25} = 1440$, $P - I = F - I =$ 12 тыс. руб., то

$$I = \frac{12 \cdot 215}{1440 - 215} = 2{,}106 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, предприниматель обязан возвратить долг в размере:

$$F = 12 + I = 12 + 2{,}106 = 14{,}106 \text{ тыс. руб.}$$

Для проверки найдем простые проценты, начисленные за 215 дней на сумму 14,106 тыс. руб.:

$$14{,}106 \cdot \frac{215}{360} \cdot 0{,}25 = 2{,}106 \text{ тыс. руб.},$$

что подтверждает правильность вычислений.

Заметим, что проценты I представляют собой проценты *"во 100"* с 12 тыс. руб. Действительно, поскольку процентная ставка за 215 дней (215/360 года) составляет $\frac{215}{360} \cdot 0{,}25 = 0{,}1493$, то

$$I = \frac{12 \cdot 0{,}1493}{1 - 0{,}1493} = 2{,}106 \text{ тыс. руб.}$$

При решении примера можно было рассуждать и таким образом. Поскольку проценты, удержанные банком, составили величину $F \cdot \frac{215}{360} \cdot 0{,}25$, то предпринимателю выдана сумма $F - F \cdot \frac{215}{360} \cdot 0{,}25 = 12$ тыс. руб. Отсюда:

$$F = \frac{12}{1 - \frac{215}{360} \cdot 0{,}25} = 14{,}106 \text{ тыс. руб.}$$

Забегая немного вперед, можно сказать, что на 12 тыс. руб. в течение 215 дней происходит наращение по простой учетной ставке 25% годовых.

Пример 1.2.5. Сберегательный счет был открыт 10 марта и на него была положена сумма 8 тыс. руб. В следующем месяце (14 апреля) на счет поступило 4 тыс. руб. Затем 25 июня со счета было снято 3 тыс. руб. и 4 сентября – 2 тыс. руб. Счет был закрыт 20 декабря. Все операции осуществлялись в течение високосного года. Определите сумму, полученную владельцем счета, если процентная ставка равнялась 30% годовых и при расчете использовались обыкновенные проценты с точным числом дней.

Решение. Этот пример можно решить обычным способом, определяя величину начисленных процентов последовательно за промежутки времени, когда сумма на счете не менялась. Мы же воспользуемся (как это и делают в банках при обслуживании текущего счета) величинами $\frac{Pt}{100}$, которые, так же как и Pt называются процентными числами (через P обозначена величина вклада, через t – время его хранения). В этом случае в формуле для вычисления дивизора $D = \frac{T}{r}$ ставка r выражена не десятичной дробью, а в процентах.

Для того чтобы найти общую величину начисленных процентов за весь срок, определим процентные числа за каждый промежуток времени, когда сумма на счете не менялась. Затем сложим все процентные числа и полученное значение поделим на дивизор.

Вначале определяем суммы, которые последовательно фиксировались на счете: 8 тыс. руб., 12 (8 + 4) тыс. руб., 9 (12 – 3) тыс. руб., 7 (9 – 2) тыс. руб. Затем находим сроки хранения этих сумм. Они соответственно равны 35 (105 – 70) дням, 72 (177 – 105) дням, 71 (248 – 177) дню, 107 (355 – 248) дням. Сумма процентных чисел составит:

$$\frac{8 \cdot 35 + 12 \cdot 72 + 9 \cdot 71 + 7 \cdot 107}{100} = 25{,}32.$$

Дивизор в данном случае равен: $D = \frac{360}{30} = 12$. Следовательно, общая величина начисленных процентов составит: $\frac{25{,}32}{12} = 2{,}11$ тыс. руб., а владелец счета получит: 7 + 2,11 = 9,11 тыс. руб.

Отметим, что процентные числа можно было вычислять и с несколько иным образом найденными сроками, а именно: для каждого поступления срок хранения определяется исходя из даты поступления и даты закрытия счета. Если происходило изъятие денег, то соответствующее процентное число берется со знаком минус. Тогда: для 8 тыс. руб. – 285 (355 – 70) дней, для 4 тыс. руб. – 250 (355 – 105) дней, для 3 тыс. руб. – 178 (355 – 177) дней и для 2 тыс. руб. – 107 (355 – 248) дней. Находим (учитывая знаки) сумму процентных чисел:

$$\frac{8\cdot 285+4\cdot 250-3\cdot 178-2\cdot 107}{100}=25{,}32,$$

т.е. получили такую же величину, как и способом, изложенным ранее.

Поскольку февраль не входит в период работы со сберегательным счетом, то при осуществлении операций и в течение невисокосного года получим окончательно также 9,11 тыс. руб.

Пример 1.2.6. Господин N поместил в банк 16 тыс. руб. на следующих условиях: в первые полгода процентная ставка равна 24% годовых, каждый последующий квартал ставка повышается на 3%. Найдите наращенную сумму за полтора года, если проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада. При какой постоянной процентной ставке можно получить такую же наращенную сумму? Найдите наращенную сумму за полтора года, если с изменением ставки происходит одновременно и капитализация процентного дохода.

Решение. Пусть вначале проценты начисляются только на первоначальную сумму вклада. Рассмотрим отдельно периоды, в течение которых ставка была постоянной. Поскольку на первый период длительностью $n_1=0{,}5$ года установлена процентная ставка $i_1=0{,}24$, то приращение капитала (в тыс. руб.) за этот период равно величине $16\cdot 0{,}5\cdot 0{,}24$. На второй период длительностью $n_2=0{,}25$ года (квартал) установлена процентная ставка $i_2=0{,}24+0{,}03=0{,}27$, и, следовательно, приращение капитала за этот период равно величине $16\cdot 0{,}25\cdot 0{,}27$. Аналогичным образом на периоды n_3,n_4,n_5, каждый из которых равен 0,25 года, установлены соответственно ставки $i_3=0{,}3$, $i_4=0{,}33$, $i_5=0{,}36$, доставляющие приращения капитала $16\cdot 0{,}25\cdot 0{,}3$; $16\cdot 0{,}25\cdot 0{,}33$; $16\cdot 0{,}25\cdot 0{,}36$. Суммируя первоначальный капитал и все его приращения, получим наращенную сумму за полтора года (общий множитель всех слагаемых 16 вынесем за скобки):

$$F = 16\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}24+0{,}25\cdot 0{,}27+0{,}25\cdot 0{,}3+$$
$$+0{,}25\cdot 0{,}33+0{,}25\cdot 0{,}36) = 22{,}96 \text{ тыс. руб.}$$

Такую же наращенную сумму можно получить, если простые проценты начисляются за полтора года по ставке

$$\bar{i} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}24+0{,}25\cdot 0{,}27+0{,}25\cdot 0{,}3+0{,}25\cdot 0{,}33+0{,}25\cdot 0{,}36}{1{,}5} = 0{,}29\,.$$

Действительно, $F = 16\cdot(1+1{,}5\cdot 0{,}29) = 22{,}96$ тыс. руб.

Отметим, что в указанных обозначениях величины F и $\bar{i}$, конечно, можно найти по формулам (15) и (16). Записывая (16) в виде

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{m} n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} n_k} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{n_k}{\sum_{k=1}^{m} n_k}\right)\cdot i_k\,,$$

замечаем, что ставка $\bar{i}$ равна взвешенной сумме процентных ставок, где весом для каждой ставки i_k служит доля длительности периода n_k, которую он составляет от общей суммы длительностей периодов $\sum_{k=1}^{m} n_k$, причем очевидно, что сумма всех весов равна единице. Таким образом, для ставки 24% весом является дробь $1/3$ (так как полгода составляют третью часть от полутора лет), для каждой последующей ставки весом будет дробь $1/6$ (так как квартал составляет шестую часть от полутора лет).

Если же с изменением ставки происходит одновременно и капитализация процентного дохода (т.е наращенная сумма вкладывается вновь под измененную простую процентную ставку), то за полтора года наращенная сумма составит:

$$F = 16\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}24)(1+0{,}25\cdot 0{,}27)(1+0{,}25\cdot 0{,}3)\times$$
$$\times(1+0{,}25\cdot 0{,}33)(1+0{,}25\cdot 0{,}36) = 24{,}264 \text{ тыс. руб.}$$

Естественно, получили сумму, превышающую 22,96 тыс. руб., поскольку в этом случае за каждый период проценты начисляются не только на первоначальную сумму вклада, но и на проценты, начисленные за предыдущий период.

Пример 1.2.7. В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 8,9 тыс. руб. через 120 дней при взятом кредите в размере 8 тыс. руб. Определите доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки. При начислении банк использует простые обыкновенные проценты.

Решение. Подставляя в формулу (23) значения F = 8,9 тыс. руб., P = 8 тыс. руб., t = 120 дней, T = 360 дней, получим:

$$r = \frac{8{,}9-8}{8\cdot 120}\cdot 360 = 0{,}3375.$$

Таким образом, инвестируя 8 тыс. руб. под простую процентную ставку 33,75% годовых, через 120 дней при использовании обыкновенных процентов можно получить 8,9 тыс. руб. Действительно,

$$8\cdot\left(1+\frac{120}{360}\cdot 0{,}3375\right) = 8{,}9 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.2.8. Банк в начале года выдал кредит на сумму 30 тыс. руб. сроком на два месяца по ставке 28% годовых и через два месяца – кредит на сумму 45 тыс. руб. сроком на четыре месяца по ставке 34% годовых. Определите общую доходность этих кредитных операций за полгода в виде годовой процентной ставки в двух случаях: когда при выдаче второго кредита не используются и когда используются деньги, возвращенные банку после погашения первого кредита. За предоставление кредита банк начислял простые обыкновенные проценты.

Решение. Найдем начисленные проценты за первый кредит по формуле (12) при $P = 30$ тыс. руб., $t = 60/360$ года, $r = 0{,}28$:

$$I_1 = 30\cdot\frac{60}{360}\cdot 0{,}28 = 1{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичным образом при $P = 45$ тыс. руб., $t = 120/360$ года, $r = 0{,}34$ находим для второго кредита:

$$I_2 = 45\cdot\frac{120}{360}\cdot 0{,}34 = 5{,}1 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, общий доход, полученный банком, равен:

$$I = I_1 + I_2 = 1{,}4 + 5{,}1 = 6{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Если при выдаче второго кредита не использовались деньги, возвращенные банку после погашения первого кредита, то общая величина вложенных средств равна 75 (30 + 45) тыс. руб. Поэтому общая доходность этих кредитных операций за полгода в виде простой годовой процентной ставки по формуле (23) составляет:

$$r = \frac{6{,}5}{75 \cdot 180} \cdot 360 = 0{,}1733, \text{ или } 17{,}33\%.$$

Если же второй кредит в размере 45 тыс. руб. включает 30 тыс. руб. (первый кредит), то

$$r = \frac{6{,}5}{45 \cdot 180} \cdot 360 = 0{,}2889, \text{ или } 28{,}89\% \text{ годовых.}$$

Очевидно, повторное использование финансовых ресурсов повышает доходность.

Пример 1.2.9. Предприниматель получил в банке кредит на 90 дней по процентной ставке 36% годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2,5% от величины кредита. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде годовой простой процентной ставки, если банк начисляет простые проценты на исходную сумму кредита, полагая, что в году 360 дней. Как изменится доходность при выдаче кредита на 60 дней и на 120 дней?

Решение. Обозначим через P величину кредита (в каких-либо денежных единицах), тогда величина удержанных комиссионных составит $0{,}025P$ и, следовательно, предпринимателю будет выдана сумма $P - 0{,}025P = 0{,}975P$. Через 90 дней предприниматель должен будет вернуть сумму $P(1 + \frac{90}{360} \cdot 0{,}36) = 1{,}09P$. Таким образом, общий доход банка составит: $1{,}09P - 0{,}975P =$ $= 0{,}115P$. Теперь, используя формулу (23), можно определить доходность финансовой операции для банка в виде годовой процентной ставки:

$$r = \frac{0{,}115\,P}{0{,}975\,P \cdot 90} \cdot 360 = 0{,}4718,$$

т.е. $r = 47{,}18\%$, что больше объявленных банком 36% годовых. Таким образом, удержание комиссионных увеличивает доходность финансовой операции для кредитора (банка).

При выдаче кредита на 60 дней его величина вместе с начисленными процентами составит: $P(1+\frac{60}{360}\cdot 0{,}36) = 1{,}06\,P$, и, следовательно, доходность для банка будет равна:

$$r = \frac{1{,}06P - 0{,}975P}{0{,}975P\cdot 60}\cdot 360 = 0{,}5231, \text{ или } 52{,}31\%,$$

т.е. больше, чем при выдаче кредита на 90 дней.

Если же срок кредита составляет 120 дней, то предприниматель должен будет вернуть $1{,}12P$ и доходность для банка в виде простой годовой процентной ставки составит:

$$r = \frac{1{,}12P - 0{,}975P}{0{,}975P\cdot 120}\cdot 360 = 0{,}4462, \text{ или } 44{,}62\%,$$

т.е. меньше, чем при сроке кредита 90 дней.

Рассмотренный пример показывает, что при удержании комиссионных увеличение срока кредита уменьшает доходность финансовой сделки для кредитора. Конечно, если комиссионные не взимаются, то при любом сроке кредита доходность такой финансовой сделки в виде простой годовой процентной ставки будет постоянна и равна 36%.

Пример 1.2.10. Банк за использование в течение двух месяцев 800 тыс. руб. должен выплатить 60 тыс. руб. Определите стоимость привлеченных средств в виде простой годовой процентной ставки в условиях начисления обыкновенных процентов.

Решение. Стоимость привлеченных средств можно найти по формуле (23), где через P обозначена использованная сумма средств; через $F-P$ – проценты, выплаченные за использование суммы P в течение времени n. Полагая $P=800$ тыс. руб., $F-P=60$ тыс. руб., $n=2/12=1/6$ года, получим:

$$r = \frac{60}{800\cdot\frac{1}{6}} = 0{,}45, \text{ или, что эквивалентно, } 45\% \text{ годовых.}$$

Пример 1.2.11. Из какого капитала можно получить 24 тыс. руб. через два года наращением по простым процентам по процентной ставке 25%? Чему равен дисконт?

Решение. Пользуясь формулой (18), где $F = 24$ тыс. руб., $n = 2$ года, $r = 0{,}25$, получим:

$$P = \frac{24}{1 + 2 \cdot 0{,}25} = 16 \text{ тыс. руб.}$$

Отсюда можно найти дисконт: $D_r = F - P = 24 - 16 = 8$ тыс. руб. Этот дисконт представляет собой 50% (процентная ставка за два года) *"на 100"* с 24 тыс. руб. Действительно, по формуле (7): $\frac{24 \cdot 0{,}5}{1 + 0{,}5} = 8$ тыс. руб.

С целью проверки можно по формуле (9) определить наращенную сумму с капитала $P = 16$ тыс. руб. за 2 года по простой процентной ставке 25% годовых:

$$F = 16(1 + 2 \cdot 0{,}25) = 24 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконтный множитель $\frac{1}{1 + 2 \cdot 0{,}25} = 0{,}6667$ представляет собой величину, обратную множителю наращения $1 + 2 \cdot 0{,}25$, и показывает долю капитала $P = 16$ тыс. руб. в капитале $F = 24$ тыс. руб.

Пример 1.2.12. Вам 27 декабря будет нужна сумма 15 тыс. руб. Какую сумму 10 июня этого же года Вы должны положить в банк под простую процентную ставку 36% годовых, если в расчете применяется обыкновенный процент с точным числом дней?

Решение. Полагая в формуле (18) $F = 15$ тыс. руб., $n = 200/360$ года (200 дней), $r = 0{,}36$, получим:

$$P = \frac{15}{1 + \frac{200}{360} \cdot 0{,}36} = 12{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Если бы в расчете применялся точный процент с точным числом дней, то величина вклада должна быть несколько большей. Так, для невисокосного года:

$$P = \frac{15}{1 + \frac{200}{365} \cdot 0{,}36} = 12{,}529 \text{ тыс. руб.},$$

что превышает полученную ранее сумму на 29 руб.

Пример 1.2.13. На какой срок клиент банка может взять кредит в размере 20 тыс. руб. под простые проценты с условием, чтобы величина возврата долга не превышала 22 тыс. руб., если процентная ставка равна 34%, в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней и год високосный?

Решение. Полагая в формуле (21) для расчета срока в днях $F = 22$ тыс. руб., $P = 20$ тыс. руб., $T = 366$ дней, $r = 0{,}34$, получим:

$$n = \frac{22 - 20}{20 \cdot 0{,}34} \cdot 366 = 107{,}65 \text{ дня.}$$

Так что клиент банка может взять кредит не более чем на 107 дней. Для проверки по формуле (9) найдем наращенную сумму за 107 дней:

$$F = 20(1 + \frac{107}{366} \cdot 0{,}34) = 21{,}988 \text{ тыс. руб.}$$

Кстати, если взять 108 дней, то получим 22,007 тыс. руб., т.е. превышение всего на 7 руб., что, конечно, не является существенным.

Пример 1.2.14. Депозитный сертификат номиналом 20 тыс. руб. с начислением процентов по простой процентной ставке 40% годовых выпущен на один год. По какой цене его можно приобрести за 60 дней до срока погашения, чтобы обеспечить доходность такой финансовой сделки в виде простой процентной ставки 45% годовых? Расчетное количество дней в году равно 365.

Решение. Депозитный сертификат – документ, подтверждающий, что его владелец является держателем срочного депозита в банке. Для определения допустимой цены покупки сертификата необходимо его номинал вместе с начисленными за год процентами дисконтировать по простой процентной ставке 45% годовых, исходя из периода в 60 дней:

$$P = \frac{20(1 + 0{,}4)}{1 + \frac{60}{365} \cdot 0{,}45} = 26{,}071 \text{ тыс. руб.}$$

Если цена покупки депозитного сертификата будет больше полученной величины 26,071 тыс. руб., то при его приобретении доставляется доходность, меньшая 45%.

Задачи

1.2.1. Клиент поместил в банк вклад в сумме 4,5 тыс. руб. под 18% годовых с ежеквартальной выплатой простых процентов. Какую сумму клиент будет получать каждый квартал? Как изменится сумма при выплате простых процентов каждый месяц?

1.2.2.Клиент поместил в банк вклад 6 тыс. руб. под простую процентную ставку 20% годовых. Какая сумма будет на счете клиента через: а) 7 месяцев; б) 3 года; в) 3 года 9 месяцев?

1.2.3. Банк принимает депозиты на 3 месяца по процентной ставке 28% годовых, на 6 месяцев – по 32% годовых и на год – по 34% годовых. Определите сумму, которую получит владелец депозита в размере 20 тыс. руб. при начислении простых процентов во всех трех случаях.

1.2.4. В финансовом договоре клиента с банком предусмотрено погашение долга в размере 24 тыс. руб. через 150 дней при взятом кредите в 20 тыс. руб. Определите доходность такой сделки для банка в виде годовой процентной ставки. При начислении банк использует простые обыкновенные проценты.

1.2.5. Банк в начале года выдал кредит на сумму 20 тыс. руб. сроком на три месяца по ставке 30% годовых и через три месяца кредит на сумму 40 тыс. руб. сроком на полгода по ставке 35% годовых. Определите общую доходность этих кредитных операций за девять месяцев в виде простой годовой процентной ставки в двух случаях: когда при выдаче второго кредита не используются и когда используются деньги, возвращенные банку после погашения первого кредита. За предоставление кредита банк начислял простые обыкновенные проценты.

1.2.6. Предприниматель взял в банке ссуду на два года под процентную ставку 32% годовых. Определите, во сколько раз сумма долга к концу срока ссуды будет больше выданной банком суммы, если банк начисляет простые проценты.

1.2.7. Банк выдал ссуду на 45 дней в размере 10 тыс. руб. под простую процентную ставку 30% годовых. Рассчитайте доход банка, если при начислении простых процентов считается, что в году: а) 360 дней; б) 365 дней.

1.2.8. Имеются две денежные суммы, одна из которых больше другой на 2 тыс. руб. Обе суммы помещаются в банк под простые проценты, причем бóльшая сумма – на 9 месяцев под 30% годовых, а меньшая – на 4 месяца под 25% годовых. Начисленные проценты за бóльшую сумму в 3 раза больше начисленных процентов за меньшую сумму. Найдите размеры первоначальных денежных сумм.

1.2.9. Найдите величину дохода кредитора, если за предоставление в долг на полгода некоторой суммы денег он получил 46,55 тыс. руб. При этом применялась простая процентная ставка в 22%.

1.2.10. Сертификат, выданный на 120 дней, обеспечивает держателю доход в виде дисконта, равного 15% от суммы погашения. Определите размер простой годовой процентной ставки, доставляющей такой же доход при начислении: а) обыкновенных процентов; б) точных процентов (год невисокосный); в) точных процентов (год високосный).

1.2.11. Вклад до востребования был размещен с 10 января по 14 апреля того же года. Рассчитайте двумя способами (приближенно и точно) количество дней, которое может быть использовано для начисления процентов, если год: а) високосный; б) невисокосный. Выполните аналогичные расчеты, если вклад до востребования был размещен с 18 марта по 26 июля.

1.2.12. Определите количество дней для начисления процентов при точном и приближенном способе подсчета, если вклад до востребования был размещен: а) с 12 февраля по 15 мая того же года; б) с 5 июня по 3 ноября того же года. Как изменились бы результаты, если бы рассматриваемый год был високосный?

1.2.13. Предоставлена ссуда в размере 180 тыс. руб. 16 января с погашением через 9 месяцев под 25% годовых (год невисокосный). Рассчитайте сумму к погашению при различных способах начисления простых процентов: а) обыкновенный процент с точным числом дней; б) обыкновенный процент с приближенным числом дней; в) точный процент с точным числом дней.

1.2.14. Предоставлена ссуда в размере 60 тыс. руб. 12 марта с погашением 15 августа того же года под процентную ставку 32% годовых. Рассчитайте различными возможными способами сумму к погашению, если начисляются простые проценты и год високосный.

1.2.15. Предприниматель 7 февраля обратился в банк за ссудой до 14 мая того же года под простую процентную ставку 18% годовых. Банк, удержав в момент предоставления ссуды проценты за весь ее срок, выдал предпринимателю 50 тыс. руб. Какую сумму необходимо будет вернуть банку, если при расчете начисленных процентов использовались обыкновенные проценты с точным числом дней и год високосный?

1.2.16. Предприятие обратилось 1 марта в банк за кредитом в 150 тыс. руб., обязуясь вернуть сумму с процентами в конце года. Какой способ начисления простых процентов выгоден для предприятия и какой – для банка, если используется процентная ставка 26% годовых и год невисокосный?

1.2.17. Вы получили ссуду 12 февраля на условиях начисления простых процентов. Взятую сумму с процентами необходимо вернуть 27 декабря того же года. Во сколько раз вырастет долг при различных способах начисления простых процентов, если применяется процентная ставка 32% годовых и год невисокосный?

1.2.18. Вклад в размере 40 тыс. руб. был размещен в банке 12 марта под простую процентную ставку 30% годовых. При востребовании вклада 15 октября того же года вкладчику были начислены проценты в размере 47,134 тыс. руб. Какой способ начисления процентов использовал банк?

1.2.19. За срок ссуды величина обыкновенных процентов (с точным числом дней) составила 6,4 тыс. руб. Определите величину точных процентов при условии, что год невисокосный. Как изменится ответ, если год високосный?

1.2.20. За срок ссуды сумма к погашению составила 86 тыс. руб., причем начислялись обыкновенные проценты с точным числом дней. Определите величину суммы к погашению при начислении точных процентов при условии, что размер ссуды 70 тыс. руб. и год: а) невисокосный; б) високосный.

1.2.21. Какое необходимо время, чтобы 28 тыс. руб., помещенные в банк под простую процентную ставку 20% годовых, увеличились на такую же величину, как и 30 тыс. руб., помещенные в банк с 16 февраля по 28 июля того же года под простую процентную ставку 25% годовых? На первый капитал начисляются обыкновенные проценты с точным числом дней, на второй – обыкновенные проценты с приближенным числом дней.

1.2.22. По депозитному 30-дневному сертификату номиналом в 10 тыс. руб. начисляются обыкновенные проценты по ставке 25% годовых. Рассчитайте, какой должна быть годовая процентная ставка при начислении точных процентов с условием, чтобы они были равны обыкновенным. Какова величина начисленных процентов? Год високосный.

1.2.23. За какой срок вклад 5 тыс. руб. возрастет до 6 тыс. руб. при начислении процентов по простой процентной ставке 32% годовых?

1.2.24. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 20% годовых, чтобы она увеличилась в 2,5 раза?

1.2.25. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 30% годовых, чтобы начисленные проценты были в 1,8 раза больше первоначальной суммы?

1.2.26. Предпринимателю через некоторое время понадобится сумма в 25 тыс. руб., между тем он располагает лишь 22 тыс. руб. С целью накопления требуемой суммы предприниматель собирается положить в банк 22 тыс. руб. Предлагаемая банком процентная ставка равна 30% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы, если банк начисляет простые проценты, используя в расчетах точные проценты, и год невисокосный?

1.2.27. Заемщик собирается взять в банке кредит в размере 20 тыс. руб. с погашением его суммой, не превышающей 22 тыс. руб. Простая процентная ставка банка по кредитам равна 27% годовых. На какое максимальное количество дней заемщик может взять кредит, если банк начисляет точные проценты, полагая в году 365 дней?

1.2.28. Вкладчик, владея суммой в 20,5 тыс. руб., хочет получить, положив деньги на депозит, через год не менее 27 тыс. руб. Имеет ли смысл ему обратиться в банк, применяющий простую процентную ставку 26% годовых? Какая ставка необходима для осуществления намерения вкладчика?

1.2.29. Вкладчик хочет положить на депозит 15 тыс. руб. и за 5 месяцев накопить не менее 18 тыс. руб. Определите требуемую простую годовую процентную ставку, на основании которой вкладчик должен выбрать банк для размещения своих средств, если в расчете применяются обыкновенные проценты и приближенное число дней.

1.2.30. Банк за использование в течение четырех месяцев 960 тыс. руб. должен выплатить 70 тыс. руб. Определите стоимость привлеченных средств в виде простой годовой процентной ставки в условиях начисления обыкновенных процентов.

1.2.31. Вкладчик намеревается положить в банк 8 тыс. руб., чтобы через 200 дней накопить 9,2 тыс. руб. Какова должна быть простая процентная ставка, обеспечивающая такое накопление? Зависит ли величина ставки от способа начисления простых процентов?

1.2.32. Банк выдал кредит на 9 месяцев по простой процентной ставке 28% годовых, при этом удержав комиссионные в размере 3% от суммы кредита. Определите действительную доходность для банка такой кредитной операции в виде годовой простой процентной ставки, если простые проценты начислялись на исходную сумму кредита.

1.2.33. Предприниматель получил в банке кредит на 150 дней по процентной ставке 30% годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 1,5% от величины кредита. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде годовой простой процентной ставки, если банк начисляет простые проценты на исходную сумму кредита, полагая в году 360 дней. Изменится ли величина доходности при выдаче кредита на 90 дней?

1.2.34. Выдается ссуда по процентной ставке 40% годовых, при этом взимаются комиссионные в размере 2% от величины ссуды. Простые точные проценты начисляются на исходную величину ссуды, год високосный. На какой срок должна быть выдана ссуда, чтобы доходность такой сделки для кредитора в виде годовой простой процентной ставки составляла 100%?

1.2.35. При выдаче ссуды по процентной ставке 42% годовых были удержаны комиссионные в размере 2,5% от величины ссуды. Простые точные проценты начислялись на исходную величину ссуды, год високосный. На какой срок была выдана ссуда, если доходность такой сделки для кредитора в виде годовой простой процентной ставки составила 64%?

1.2.36. При выдаче банком ссуды на 80 дней по процентной ставке 38% годовых сразу удерживаются комиссионные. Простые обыкновенные проценты начисляются на исходную величину ссуды, год невисокосный. Определите, какой процент от величины ссуды составили комиссионные, если доходность такой финансовой операции для банка в виде простой годовой процентной ставки оказалась равной 40%.

1.2.37. Банк выдал одному предпринимателю 30 тыс. руб. на 80 дней, затем полученные от него деньги выдал второму предпринимателю на 60 дней и, наконец, полученную от второго предпринимателя сумму выдал третьему предпринимателю на 160 дней. Все ссуды были выданы под простую процентную ставку 30% годовых, и начислялись обыкновенные проценты. Какую сумму должен вернуть банку третий предприниматель? Определите доходность для банка всей финансовой операции в виде годовой простой процентной ставки.

1.2.38. Банк выдавал кредиты своим четырем клиентам A, B, C и D – следующим образом: клиенту A – на 45 дней под 28% годовых; все деньги, полученные от клиента A, сразу выдал клиенту B на 120 дней под 33% годовых; всю сумму, полученную от клиента B, выдал клиенту C на 100 дней под 32% годовых и, получив деньги от клиента C, выдал их клиенту D на 40 дней под 30% годовых. Клиент D в конце срока вернул банку 37 632 руб. Какую сумму получил клиент A, если во всех случаях начислялись простые обыкновенные проценты?

1.2.39. Банк выдал клиенту ссуду в размере 20 тыс. руб. 5 января с условием возврата долга 4 мая. Всю полученную сумму банк в этот же день выдал другому клиенту, который 3 июля вернул в банк 23,1 тыс. руб. В обоих случаях применялась одинаковая простая процентная ставка и расчет велся способом 365/360 (обыкновенный процент с точным числом дней). Определите эту ставку, если все действия совершались в течение одного года, являющегося високосным.

1.2.40. Банк продает депозитные сертификаты на следующих условиях: сертификат сроком на 3 месяца под 40% годовых или на год – под 45% годовых. Какие сертификаты выгоднее приобретать с целью получения в конце года наибольшего дохода, если банк начисляет по вкладам простые обыкновенные проценты?

1.2.41. Банк продает депозитные сертификаты на следующих условиях: сертификат сроком на 3 месяца под 40% годовых; на 6 месяцев – под 42% годовых; на год – под 45% годовых. Какие сертификаты выгоднее приобретать с целью получения в конце года наибольшего дохода, если банк начисляет по вкладам простые обыкновенные проценты?

1.2.42. Какую сумму необходимо положить в банк под процентную ставку: а) 25% годовых; б) 50% годовых; в) 80% годовых, чтобы получать ежегодную ренту в 400 руб., а сумма на счете в банке оставалась бы неизменной?

1.2.43. Какую сумму необходимо положить в банк под простую процентную ставку 30% годовых, чтобы получать: а) ежеквартально ренту в 300 руб.; б) ежемесячно ренту в 100 руб., а сумма на счете в банке оставалась бы неизменной?

1.2.44. Банк предоставляет клиенту кредит в размере 8 тыс. руб. под простую процентную ставку 20% годовых. Используя дивизор, найдите доход банка, если срок кредита составляет: а) 40 дней; б) 4 месяца; в) 200 дней. Расчет ведется способом 360/360.

1.2.45. Используя дивизор, вычислите простой процент с капитала 4,8 тыс. руб., отданного в долг по ставке 20% годовых на срок с 8 июля по 25 ноября (год невисокосный), если расчет ведется способом 365/365 (точный процент с точным числом дней).

1.2.46. Банк за предоставление кредита с 18 апреля по 10 сентября того же года под 24% годовых получил от заемщика в совокупности 12 тыс. руб. Используя дивизор, определите доход банка и сумму, полученную заемщиком, если начисленные простые проценты были удержаны банком в момент предоставления кредита и использовался способ 365/360. Чему равны были бы искомые величины, если бы применялся способ 360/360?

1.2.47. При открытии сберегательного счета на него 16 января была положена сумма 14 тыс. руб., однако 20 февраля со счета было снято 8 тыс. руб. Позже, 14 апреля, на счет была добавлена сумма 3 тыс. руб., 16 июня – 2 тыс. руб., а 10 сентября счет был закрыт. Рассчитайте с помощью процентных чисел сумму, полученную владельцем счета, если процентная ставка составляла 20% годовых, начислялись простые проценты способом 365/360 и все операции осуществлялись в течение одного високосного года.

1.2.48. Предприниматель открыл счет в банке, положив на него 20 тыс. руб. Затем 4 июля он добавил 5 тыс. руб. и 20 ноября этого же года счет закрыл, получив 28,2 тыс. руб. Найдите дату открытия счета, если простая процентная ставка составляла 24% годовых и использовался способ 365/360.

1.2.49. Какую сумму необходимо поместить в банк под простую процентную ставку 40% годовых, чтобы накопить 26 тыс. руб.: а) за 9 месяцев; б) за 2,5 года; в) за 4 года?

1.2.50. Какую сумму необходимо поместить в банк под простую процентную ставку 36% годовых, чтобы накопить 12 тыс. руб.: а) за 20 дней; б) за 70 дней; в) за 300 дней? Рассмотрите отдельно случай начисления обыкновенных процентов и случай начисления точных процентов в високосном году.

1.2.51. Предпринимателю 18 ноября будет нужна сумма в 25 тыс. руб. Какую сумму 10 февраля этого же года он должен положить в банк под простую процентную ставку 34% годовых, если в расчете применяется обыкновенный процент с приближенным числом дней?

1.2.52. Предприниматель взял 14 апреля банковский кредит и погасил его 10 августа того же года суммой в 180 тыс. руб. Какой величины был кредит, если процентная ставка по кредитам равна 25% годовых и банк начислял простые проценты способом: а) 365/360; б) 365/365?

1.2.53. Господин N поместил свой капитал в банк под процентную ставку 30% годовых. Через год он взял из своего капитала половину, а затем через 8 месяцев закрыл счет. Величина начисленных процентов за весь период нахождения денег в банке составила 2340 руб. Определите величину капитала, помещенного в банк, если банк начисляет простые проценты способом 360/360.

1.2.54. Клиент поместил в банк свободные денежные средства под процентную ставку 30% годовых. Через 1 год и 8 месяцев клиент закрыл счет, получив 9 тыс. руб. Определите величину наращенной суммы, которая была в конце первого года, если банк начисляет простые проценты способом 360/360. Если бы клиент не закрыл счет, то через какое время он смог бы получить 9,6 тыс. руб.?

1.2.55. Сумма в 30 тыс. руб. помещена в банк под 20% годовых на два счета таким образом, чтобы брат и сестра по мере достижения ими возраста 18 лет получили по одинаковой сумме.

Определите, сколько получит каждый из них, если в данный момент брату 15 лет 4 месяца и 3 дня, а сестре 14 лет 1 месяц и 20 дней. Каким образом 30 тыс. руб. будут распределены на два счета? Банк начисляет простые проценты, используя в расчетах обыкновенный процент с приближенным числом дней.

1.2.56. Сумма в 50 тыс. руб. помещена в банк под 30% годовых на три счета таким образом, чтобы три брата по мере достижения ими возраста 18 лет получили по одинаковой сумме. Определите, сколько получит каждый из братьев, если в данный момент старшему брату 16 лет 5 месяцев и 10 дней, среднему брату 12 лет 6 месяцев и 2 дня, а младшему брату 10 лет и 3 месяца. Каким образом 50 тыс. руб. будут распределены на три счета? Банк начисляет простые проценты, используя в расчетах обыкновенный процент с приближенным числом дней.

1.2.57. На сумму 200 тыс. руб. начисляются простые проценты по процентной ставке 35% годовых. Определите наращенную сумму на конец первого квартала, если ежемесячно проводится операция реинвестирования и начисляются обыкновенные проценты. Какова была бы наращенная сумма в случае непроведения операции реинвестирования?

1.2.58. Контрактом предусматриваются следующие процентные ставки на год: за первый квартал – 30% годовых; за второй квартал – 32% годовых; за третий и четвертый кварталы – 25% годовых. Определите множитель наращения за год, если в течение года начисляются простые проценты. Какой одной простой годовой процентной ставкой можно заменить данные ставки?

1.2.59. За предоставленный на год кредит предусмотрены следующие процентные ставки: за первый квартал – 3% ежемесячно; за второй квартал – 3,5% ежемесячно; за третий и четвертый кварталы – 2,5% ежемесячно. Определите множитель наращения за год, если в течение года начисляются простые проценты. Какой одной простой годовой процентной ставкой можно заменить данные ставки?

1.2.60. Контрактом было предусмотрено, что после первого квартала годовая процентная ставка повысится на 3%; после второго – еще на 5% и после третьего квартала – еще на 7%. Множитель наращения за год оказался равным 1,365. Определите величину первоначальной годовой процентной ставки, если в течение года начислялись простые проценты.

1.2.61. Заключается финансовое соглашение на 3 года, в котором предусматривается схема начисления простых процентов по следующим годовым процентным ставкам: за первый год – 20%; в каждые следующие два полугодия процентная ставка повышается на 5%; в каждом последующем квартале годовая процентная ставка повышается на 1%. Определите множитель наращения за 3 года.

1.2.62. На некоторую сумму в течение полугода начисляются простые проценты по следующим процентным ставкам: за первые два месяца – 30% годовых; за третий месяц – 32% годовых и за оставшиеся месяцы – 35% годовых. Определите множитель наращения за полгода, если: а) первоначальная сумма, на которую начисляются проценты, не изменяется; б) при каждом изменении процентной ставки происходит реинвестирование (капитализация процентов).

1.2.63. Простая процентная ставка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 26% годовых, через квартал была увеличена до 30%, а еще через полгода – до 35% годовых. Определите величину процентов, начисленных за год на вклад 10 тыс. руб. При какой постоянной годовой процентной ставке можно обеспечить такую же величину начисленных простых процентов?

1.2.64. Вклад 15 тыс. руб. был положен в банк 9 апреля при простой процентной ставке 40% годовых. С 1 июня банк снизил процентную ставку по вкладам до 35% годовых. Вклад был закрыт 10 августа того же года. Рассчитайте различными возможными способами величину начисленных процентов.

1.2.65. Господин N поместил в банк свободные денежные средства, на которые согласно договору начисляются простые проценты по изменяющейся процентной ставке: за первые четыре месяца – 27% годовых, каждый следующий месяц ставка увеличивается на 0,5%. Через год, закрыв счет, господин N получил 64,25 тыс. руб. Определите, какую сумму получил бы господин N, закрыв счет через 9 месяцев.

1.2.66. Вкладчик поместил в банк 35 тыс. руб. на следующих условиях: в первый год процентная ставка равна 28% годовых, каждые следующие полгода ставка повышается на 2%. Найдите наращенную сумму за три года, если начисляются простые проценты. При какой постоянной процентной ставке можно получить такую же наращенную сумму? Найдите наращенную сумму за три года, если с изменением ставки происходит одновременно и капитализация процентного дохода.

1.2.67. Клиент 4 января положил в банк 5 тыс. руб. и закрыл счет 10 сентября этого же года, являющегося високосным. Какую сумму банк выдал клиенту, если в течение всего срока начислялись простые проценты способом 365/365 (точные проценты с точным числом дней), но процентная ставка менялась: в начале года – 24%, с 1 апреля – 28% и с 1 июня – 32% годовых?

1.2.68. Депозитный сертификат номиналом 60 тыс. руб. с начислением процентов по простой процентной ставке 35% годовых выпущен на один год. По какой цене его можно приобрести за 150 дней до срока погашения, чтобы обеспечить доходность такой финансовой сделки в виде простой процентной ставки 42% годовых? Расчетное количество дней в году равно 365.

1.3. Простая учетная ставка

Основные положения

• Банковское (коммерческое) дисконтирование применяется в ситуации предварительного начисления простого процента, например при операции по учету векселя, заключающейся в покупке банком или другим финансовым учреждением векселя у владельца до наступления срока оплаты по цене, меньшей той суммы, которая должна быть выплачена по векселю в конце срока. Сумма, которую получает векселедержатель при досрочном учете векселя, называется дисконтированной величиной векселя. Проценты, удерживаемые банком в свою пользу, часто называют дисконтом.

• Если специальным образом не оговорены условия, вексель, как правило, учитывается по простой учетной ставке и при этом используются обыкновенные проценты.

• Банковское дисконтирование (в отличие от математического) нельзя осуществить во всех ситуациях (например, по достаточно большой учетной ставке и задолго до срока платежа).

• Математическое дисконтирование выгоднее для векселедержателя, а банковское дисконтирование – для банка.

• Удержание простых процентов в момент предоставления ссуды можно рассматривать как соглашение между кредитором и должником о том, что наращение будет осуществляться по простой учетной ставке. Аналогичное соображение можно высказать и относительно операции учета векселя.

• При применении наращения на основе простой учетной ставки величина начисляемых процентов с каждым годом увеличивается, в то время как при наращении капитала на основе простой процентной ставки капитал ежегодно увеличивается на одну и ту же величину. Простая учетная ставка обеспечивает более быстрый рост капитала, чем такая же по величине процентная ставка.

• Финансовый результат, полученный с помощью простой учетной ставки, можно получить и с помощью эквивалентной ей простой процентной ставки.

• Финансовое соглашение может не только предусматривать постоянную учетную ставку на весь период, но и устанавливать изменяющуюся во времени (переменную) ставку.

Вопросы для обсуждения

1. Что представляет собой банковское дисконтирование? В каких случаях оно применяется?
2. Какая ставка используется при банковском дисконтировании?
3. Что называется дисконтированной величиной векселя?
4. Как часто называют проценты, удерживаемые банком в свою пользу?
5. Поясните фразу: «Банковское дисконтирование осуществляется процентами *"со 100"*».
6. Что может произойти, если при достаточно большой учетной ставке попытаться учесть вексель задолго до срока платежа?
7. Верно ли, что по простой процентной ставке вексель можно учесть за любое время до срока его погашения?
8. Какая ставка (учетная или процентная) и в каком смысле более жестко отражает временной фактор?

9. Сравните (аналитически и графически) между собой математическое и банковское дисконтирование в случае, когда процентная и учетная ставки одинаковы по величине.
10. Может ли в принципе банк при учете денежных обязательств (в частности, векселей) использовать процентную ставку и математическое дисконтирование?
11. Какого типа дисконтирование (математическое или банковское) выгоднее для векселедержателя?
12. В каких ситуациях возникает задача, обратная банковскому дисконтированию?
13. Какие существуют способы наращения капитала простыми процентами?
14. Чем отличается наращение на основе простой учетной ставки от наращения на основе простой процентной ставки?
15. Какая из простых ставок, процентная или учетная, обеспечивает более быстрый рост капитала? Поясните аналитически и графически.
16. Можно ли установить связь между операцией учета векселя и наращением по простой учетной ставке?
17. Верно ли, что наращение капитала по простой учетной ставке осуществляется процентами "во 100"?
18. Какие учетная и процентная ставки называются эквивалентными?
19. Может ли простая учетная ставка, эквивалентная простой процентной ставке, превышать 100%?
20. Каким образом с помощью понятий наращенной суммы и приведенной стоимости можно интерпретировать соотношение между эквивалентными ставками (учетной и процентной)?
21. Как можно оценить доходность операции учета векселя?
22. Чем отличается декурсивный способ начисления процентов от антисипативного?
23. В чем заключается суть факторного анализа учета векселя?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.3.1. В банк 6 мая предъявлен для учета вексель на сумму 14 тыс. руб. со сроком погашения 10 июля того же года. Банк учитывает вексель по учетной ставке 40% годовых, используя способ 365/360. Определите сумму, которую получит вексель держатель от банка, и комиссионные, удерживаемые банком в свою пользу за предоставленную услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя по учетной ставке 40% годовых имеет смысл?

Решение. Величина суммы, полученной векселедержателем, рассчитывается по формуле (19) и при $F=14$ тыс. руб., $n=\frac{65}{360}$ года, $d=0{,}4$ составит:

$$P=14\cdot(1-\frac{65}{360}0{,}4)=12{,}989 \text{ тыс. руб.}$$

Дисконт D_d, полученный банком, представляет собой разность между F (номинальной величиной векселя) и P (дисконтированной величиной векселя): $D_d=14-12{,}989=1{,}011$ тыс. руб.

Учет векселя по учетной ставке d имеет смысл, если $n<\frac{1}{d}$, т.е. для данного случая $n<2{,}5$ года. Если $n=2{,}5$ года, то $P=14\cdot(1-2{,}5\cdot 0{,}4)=0$, т.е. владелец векселя вообще ничего не получит. При $n>2{,}5$ сумма P, которую должен получить при учете векселя его владелец, становится отрицательной, что не может иметь места.

Отметим, что поскольку $\frac{65}{360}\cdot 40\%=7{,}22\%$, то комиссионные D_d, полученные банком, представляют собой и 7,22% *"во 100"* с 12,989 тыс. руб. Действительно, по формуле (8) получим:

$$\frac{12{,}989\cdot 0{,}0722}{1-0{,}0722}=1{,}011 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.3.2. Вексель на сумму 9 тыс. руб. учитывается по простой учетной ставке за 120 дней до погашения с дисконтом 600 руб. в пользу банка. Определите величину этой годовой учетной ставки при временнóй базе, равной 360 дней в году.

Решение. Полагая в формуле (24) $F=9$ тыс. руб., $F-P=0{,}6$ тыс. руб., $t=120$ дней, $T=360$ дней, получим:

$$d=\frac{0{,}6}{9\cdot 120}\cdot 360=0{,}20.$$

Таким образом, простая учетная ставка составляет 20% годовых. Для проверки можно определить дисконт в пользу банка (т.е. решаем обратную задачу: по известной учетной ставке определяем дисконт):

$$F - P = F\frac{t}{T}d = 9\frac{120}{360}\cdot 0{,}2 = 0{,}6 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.3.3. Банк 7 июня учел три векселя со сроками погашения в этом же году соответственно 8 августа, 30 августа и 21 сентября. Применяя учетную ставку 25% годовых, банк удержал комиссионные в размере 2750 руб. Определите номинальную стоимость первых двух векселей, если номинальная стоимость второго векселя в два раза больше первого и третий вексель предъявлен на сумму 20 тыс. руб.

Решение. По таблице 1 приложения 2 находим, что первый вексель учтен за 62 дня до срока погашения, второй – за 84 дня и третий – за 106 дней. Полагая $F = 20$ тыс. руб., $n = \frac{106}{360}$ года, $d = 0{,}25$, по формуле $D_d = Fnd$ определим комиссионные, удержанные банком за согласие учесть третий вексель:

$$D_d^{(3)} = 20\cdot\frac{106}{360}\cdot 0{,}25 = 1{,}472 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, общий дисконт от учета остальных двух векселей составит:

$$D_d^{(1)} + D_d^{(2)} = 2{,}75 - 1{,}472 = 1{,}278 \text{ тыс. руб.}$$

Обозначим теперь через F номинальную стоимость первого векселя, тогда номинальная стоимость второго векселя равна $2F$. Следовательно,

$$D_d^{(1)} = F\cdot\frac{62}{360}\cdot 0{,}25,\ D_d^{(2)} = 2F\cdot\frac{84}{360}\cdot 0{,}25.$$

Поскольку в сумме эти дисконты доставляют 1,277 тыс. руб., то, складывая их, получим уравнение:

$$F\cdot\frac{62}{360}\cdot 0{,}25 + 2F\cdot\frac{84}{360}\cdot 0{,}25 = 1{,}278,$$

решая которое относительно F, находим

$$F = \frac{1{,}278 \cdot 360}{0{,}25 \cdot 230} = 8 \text{ тыс. руб.}$$

Отсюда получаем и номинальную стоимость второго векселя – 16 тыс. руб.

Пример 1.3.4. Вексель на сумму 18 тыс. руб., выданный 14 ~~мая и сроком пога~~шения 20 ноября этого же года, был учтен в банке 10 октября по учетной ставке 36% годовых способом 365/360. На номинальную стоимость векселя предусматривалось начисление простых процентов по процентной ставке 25% годовых способом 365/365. Найдите сумму, полученную векселедержателем. Провести анализ дохода банка. Год високосный.

Решение. Поскольку на 18 тыс. руб. будут начислены простые проценты за 190 дней, то вначале по формуле (10) находим сумму, которая должна быть выплачена предъявителю векселя при его погашении:

$$F = 18(1 + \frac{190}{366} \cdot 0{,}25) = 20{,}336 \text{ тыс. руб.}$$

Поскольку вексель был учтен за 41 день до срока погашения, то по формуле (19) владелец векселя получит сумму:

$$P = 20{,}336(1 - \frac{41}{360} \cdot 0{,}36) = 19{,}502 \text{ тыс. руб.}$$

В данном случае можно провести более глубокий анализ процесса учета векселя. Общий доход банка составит величину $\Delta = F - P = 20{,}336 - 19{,}502 = 0{,}834$ тыс. руб. Этот доход складывается из двух частей – проценты по векселю, причитающиеся за время, оставшееся до момента погашения векселя, и собственно комиссионные за предоставленную услугу.

Найдем срочную стоимость векселя в момент учета его банком:

$$\overline{P} = 18(1 + \frac{149}{366} \cdot 0{,}25) = 19{,}832 \text{ тыс. руб.}$$

Теперь можно определить проценты по векселю, составляющие часть дохода банка:

$$\Delta_p = F - \overline{P} = 20{,}336 - 19{,}832 = 0{,}504 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, собственно комиссионные, получаемые банком за услугу, оказываемую векселедержателю, составят величину:

$$\Delta_c = \Delta - \Delta_p = 0{,}834 - 0{,}504 = 0{,}33 \text{ тыс. руб.}$$

Величину Δ_c можно было найти и по формуле $\Delta_c = \overline{P} - P$. С позиции банка сумма 330 руб. представляет собой плату за возможность более быстрого получения наличных векселедержателем. Отметим, что реальные потери векселедержателя составляют именно величину 330 руб., а не 834 руб., как это кажется на первый взгляд. Конечно, банк может получить больше 330 руб., увеличивая учетную ставку.

Следует отметить, что если бы учетная ставка была, допустим, 30% годовых, а процентная – 40% годовых, то банк оказался бы в проигрыше. Действительно, используя обозначения примера, получим:

$$F = 18(1 + \frac{190}{366} \cdot 0{,}4) = 21{,}738 \text{ тыс. руб.};$$

$$P = 20{,}336(1 - \frac{41}{360} \cdot 0{,}3) = 20{,}995 \text{ тыс. руб.};$$

$$\overline{P} = 18(1 + \frac{149}{366} \cdot 0{,}4) = 20{,}931 \text{ тыс. руб.}$$

Поэтому банк потеряет величину:

$$\Delta_p - \Delta = P - \overline{P} = 20{,}995 - 20{,}931 = 0{,}064 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.3.5. В банк 15 февраля предъявлен для учета вексель на сумму 40 тыс. руб. со сроком погашения 30 июня того же года. Банк учитывает вексель по простой процентной ставке 30% годовых. Определите сумму, полученную векселедержателем, и величину дисконта банка, если при учете использовался способ 365/365 и год високосный. Каковы будут определяемые величины при учете по простой учетной ставке 30% и использовании способа 365/360?

Решение. Если учет производится по простой процентной ставке, то, полагая в формуле (18) $F = 40$ тыс. руб., $n = \frac{136}{366}$ года, $r = 0{,}3$, находим сумму, полученную владельцем векселя:

$$P = \frac{40}{1 + \frac{136}{366} \cdot 0{,}3} = 35{,}988 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, дисконт банка составляет:

$$D_r = 40 - 35{,}988 = 4{,}012 \text{ тыс. руб.}$$

Если же учет производится по простой учетной ставке, то пользуемся формулой (19) при $F = 40$ тыс. руб., $n = \frac{136}{366}$ года, $d = 0{,}3$. В этом случае векселедержатель получит:

$$P = 40(1 - \frac{136}{360} \cdot 0{,}3) = 35{,}467 \text{ тыс. руб.,}$$

и поэтому дисконт банка составит:

$$D_d = 40 - 35{,}467 = 4{,}533 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, во втором случае векселедержатель получит на 521 руб. меньше, а банк – соответственно на 521 руб. больше.

Заметим, что если бы владелец векселя предъявил в банк вексель за 4 года до срока погашения, а банк учел вексель по простой процентной ставке, то векселедержатель получил бы:

$$P = \frac{40}{1 + 4 \cdot 0{,}3} = 18{,}182 \text{ тыс. руб.,}$$

т.е. достаточно большую сумму, в то время как учет по простой учетной ставке 30% годовых за 4 года до срока погашения в принципе невозможен, так как для этой ставки верхней границей является 10/3 года.

Обратим внимание и на следующий факт. Поскольку $\frac{136}{366} \cdot 30\% = 11{,}148\%$, то комиссионные D_r, полученные банком, представляют собой и 11,148% *"на 100"* с 40 тыс. руб. Действительно, по формуле (7) получим:

$$\frac{40 \cdot 0{,}11148}{1 + 0{,}11148} = 4{,}012 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.3.6. За вексель, учтенный за 5 лет по учетной ставке 14% годовых, заплачено 4 тыс. руб. Определите номинальную величину векселя.

Решение. Ситуация, описанная в условии примера, равносильна следующей: на сумму 4 тыс. руб. в течение 5 лет осуществляется наращение простыми процентами по простой учетной ставке 14% годовых. Необходимо определить наращенную сумму. Поэтому можно воспользоваться формулой (20), в которой $P = 4$ тыс. руб., $n = 5$ лет, $d = 0{,}14$:

$$F = \frac{4}{1 - 5 \cdot 0{,}14} = 13{,}333 \text{ тыс. руб.},$$

что и равно номинальной величине векселя.

Если же описанную ситуацию рассматривать с точки зрения процесса наращения, то приращение капитала в 4 тыс. руб. за 5 лет составит величину: $I_d = 13{,}333 - 4 = 9{,}333$ тыс. руб. Найдем приращение капитала за каждый год.

За первый год $(n = 1)$ капитал увеличится на величину

$$I_d^{(1)} = \frac{Pd}{1-d} = \frac{4 \cdot 0{,}14}{1 - 0{,}14} = 0{,}651 \text{ тыс. руб.}$$

За два года $(n = 2)$ капитал увеличится на величину

$$\frac{2Pd}{1-2d} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 0{,}14}{1 - 2 \cdot 0{,}14} = 1{,}556 \text{ тыс. руб.},$$

и, следовательно, его приращение за второй год составит:

$$I_d^{(2)} = \frac{2Pd}{1-2d} - \frac{Pd}{1-d} = 1{,}556 - 0{,}651 = 0{,}905 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичным образом получаем приращения за третий, четвертый и пятый годы:

$$I_d^{(3)} = \frac{3Pd}{1-3d} - \frac{2Pd}{1-2d} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 0{,}14}{1 - 3 \cdot 0{,}14} - 1{,}556 = 2{,}897 - 1{,}556 = 1{,}341 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_d^{(4)} = \frac{4Pd}{1-4d} - \frac{3Pd}{1-3d} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 0{,}14}{1 - 4 \cdot 0{,}14} - 2{,}897 = 5{,}091 - 2{,}897 = 2{,}194 \text{ тыс. руб.};$$

$$I_d^{(5)} = \frac{5Pd}{1-5d} - \frac{4Pd}{1-4d} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 0{,}14}{1 - 5 \cdot 0{,}14} - 5{,}091 = 9{,}333 - 5{,}091 = 4{,}242 \text{ тыс. руб.}$$

С целью проверки просуммируем полученные величины: $I_d^{(1)} + I_d^{(2)} + I_d^{(3)} + I_d^{(4)} + I_d^{(5)} = 9{,}333$ тыс. руб., т.е., как и должно быть, получили I_d.

Пример 1.3.7. Найдите учетную ставку, эквивалентную простой процентной ставке 30% годовых, при наращении капитала: а) за год; б) за 150 дней. Временны́е базы ставок одинаковы.

Решение. а) Для расчета воспользуемся формулой (26), где $r = 0{,}3$, $n = 1$ год:

$$d = \frac{0{,}3}{1+0{,}3} = 0{,}2308.$$

Таким образом, ученая ставка 23,08% годовых обеспечивает за год такое же наращение простыми процентами, как и процентная ставка 30% годовых.

б) Здесь возможны три случая, когда в году 360, 365 или 366 дней, т.е. $n = \frac{150}{360}$ года, $n = \frac{150}{365}$ года или $n = \frac{150}{366}$ года. Пользуясь формулой (26), соответственно получаем:

$$d = \frac{0{,}3}{1+\frac{150}{360}0{,}3} = 0{,}2667, \qquad d = \frac{0{,}3}{1+\frac{150}{365}0{,}3} = 0{,}2671,$$

$$d = \frac{0{,}3}{1+\frac{150}{366}0{,}3} = 0{,}2672.$$

Если бы в случае а) временны́е базы были бы неодинаковы, например, для учетной ставки – 360 дней, для процентной ставки – 365 дней, то следовало бы пользоваться формулой (28), где $T_r = 365$ дней, $T_d = 360$ дней и $t = 150$ дней:

$$d = \frac{360 \cdot 0{,}3}{365 + 150 \cdot 0{,}3} = 0{,}2634.$$

Пример 1.3.8. Предприниматель получил 12 марта ссуду в банке по простой учетной ставке 22% годовых и должен возвратить 15 августа того же года 30 тыс. руб. Определите различными возможными способами сумму, полученную предпринимателем, и величину дисконта, если год невисокосный и проценты удерживаются банком при выдаче ссуды. Какова будет доходность такой операции для банка в виде годовой простой процентной ставки?

Решение. Величина суммы, полученной предпринимателем, зависит от числа дней, которое берется в расчет. Точное число дней ссуды определяется, например, по таблице: 227 – 71 = 156 дней. Приближенное число дней состоит из 18 дней марта (30 – 12); 120 дней (по 30 дней четырех месяцев: апрель, май, июнь, июль) и 15 дней августа. Т.е. приближенное число дней составляет 18 + 120 + 15 = 153 дня. Теперь с помощью формулы (19) можно рассчитать возможные значения суммы P, полученной предпринимателем, и величину дисконта D_d.

1. В расчет принимаются точные проценты и точное число дней ссуды:

$$P = 30(1 - \frac{156}{365} 0{,}22) = 27{,}179 \text{ тыс. руб.},$$
$$D_d = 30 - 27{,}179 = 2{,}821 \text{ тыс. руб.}$$

2. В расчет принимаются обыкновенные проценты и точное число дней ссуды:

$$P = 30(1 - \frac{156}{360} 0{,}22) = 27{,}140 \text{ тыс. руб.},$$
$$D_d = 30 - 27{,}140 = 2{,}860 \text{ тыс. руб.}$$

3. В расчет принимаются обыкновенные проценты и приближенное число дней ссуды:

$$P = 30(1 - \frac{153}{360} 0{,}22) = 27{,}195 \text{ тыс. руб.},$$
$$D_d = 30 - 27{,}195 = 2{,}805 \text{ тыс. руб.}$$

Для определения доходности для банка такой кредитной операции необходимо учитывать расчетное количество дней в году. Если для учетной и процентной ставок используется одна и та же временнáя база, например 365 дней в году, и в расчет принимается точное число дней ссуды, то по формуле (25), полагая $n = \frac{156}{365}$ года, $d = 0{,}22$, находим:

$$r = \frac{0{,}22}{1 - \frac{156}{365} \cdot 0{,}22} = 0{,}2428.$$

Таким образом, процентная ставка $r = 24{,}28\%$ обеспечивает через 156 дней (считая, что в году 365 дней) получение такой же наращенной величины из начального капитала, что и учетная ставка $d = 22\%$. Действительно,

$$F = 27{,}179(1 + \frac{156}{365} \cdot 0{,}2428) = 30 \text{ тыс. руб.}$$

В предположении, что в году 360 дней для точного ($n = \frac{156}{360}$) и приближенного ($n = \frac{153}{360}$) числа дней ссуды, соответственно получим:

$$r = \frac{0{,}22}{1 - \frac{156}{360} \cdot 0{,}22} = 0{,}2432, \quad r = \frac{0{,}22}{1 - \frac{153}{360} \cdot 0{,}22} = 0{,}2427.$$

Если временны́е базы для процентной и учетной ставок разные, то варианты расчета доходности для банка в виде годовой простой процентной ставки рассматриваются аналогичным образом. Например, полагая в формуле (27) $T_r = 365$, $T_d = 360$, при точном числе дней $t = 156$ находим:

$$r = \frac{365 \cdot 0{,}22}{360 - 156 \cdot 0{,}22} = 0{,}2466.$$

Продолжая подобным образом, можно рассчитать r для всех возможных случаев. Конечно, формулу (27) можно было использовать и в случае одной и той же временно́й базы для процентной и учетной ставок.

Пример 1.3.9. В банк предъявлен вексель на сумму 50 тыс. руб. за полтора года до срока его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых, следующие полгода – 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

Решение. Так как на первое полугодие установлена учетная ставка 30% годовых, то дисконт за этот период равен $50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3$ тыс. руб. Дисконт за второе полугодие – $50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}36$ тыс. руб. Поскольку на последующие кварталы установлены учетные ставки

$36\% + 2\% = 38\%$ и $38\% + 2\% = 40\%$ годовых, то дисконты равны соответственно $50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}38$ тыс. руб. и $50 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}4$ тыс. руб.

Суммируя полученные величины, находим дисконт D_d за полтора года:

$$D_d = 50 \cdot (0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}36 + 0{,}25 \cdot 0{,}38 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) = 26{,}25 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, владелец векселя получит 50 – 26,25 = 23,75 тыс. руб.

Такой же дисконт $D_d = 26{,}25$ тыс. руб. можно было получить, и установив на полтора года постоянную простую учетную ставку

$$d = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}36 + 0{,}25 \cdot 0{,}38 + 0{,}25 \cdot 0{,}4}{1{,}5} = 0{,}35,$$

т.е. $d = 35\%$ годовых.

Пример 1.3.10. При учете предъявленного векселя на сумму 30 тыс. руб. за 40 дней до срока его погашения доход банка составил 1,5 тыс. руб. Определите доходность этой финансовой операции для банка в виде простой годовой процентной ставки при расчетном количестве дней в году, равном 360.

Решение. Вначале находим сумму, выплаченную предъявителю векселя: $P = 30 - 1{,}5 = 28{,}5$ тыс. руб. Затем, полагая $F - P = 1{,}5$ тыс. руб., $t = 40$ дней, $T = 360$ дней, по формуле (23) получим:

$$r = \frac{1{,}5}{28{,}5 \cdot 40} \cdot 360 = 0{,}4737, \text{ или } 47{,}37\%.$$

Решим этот пример другим способом, согласно которому вначале находим по формуле (24) простую годовую учетную ставку, по которой осуществлялся учет векселя:

$$d = \frac{1{,}5}{30 \cdot 40} \cdot 360 = 0{,}45.$$

И после этого по формуле (27) определяем эквивалентную простую процентную ставку:

$$r = \frac{360 \cdot 0{,}45}{360 - 40 \cdot 0{,}45} = 0{,}4737.$$

Естественно, получили тот же результат.

Пример 1.3.11. Депозитный сертификат дисконтного типа номиналом 300 тыс. руб. куплен за 100 дней до его погашения по цене, определяемой простой учетной ставкой 30% годовых, и через 40 дней продан по цене, определяемой простой учетной ставкой 28% годовых. Найдите доходность такой финансовой операции в виде простой годовой процентной ставки при расчетном количестве дней в году, равном 360. Какова будет доходность, если владелец сертификата продержит его до погашения?

Решение. Доход от приобретения депозитного сертификата дисконтного типа определяется тем, что он продается по цене ниже номинала, а погашается по номиналу. Также владелец такого сертификата может получить доход, продав сертификат до даты его погашения.

Цену покупки депозитного сертификата находим по формуле (19) при $F = 300$ тыс. руб., $t = 100$ дней, $T = 360$ дней, $d = 0{,}3$:

$$300(1 - \frac{100}{360} \cdot 0{,}3) = 274{,}882 \text{ тыс. руб.}$$

Поскольку позже депозитный сертификат был продан за 60 дней до срока погашения, то его цена продажи составила ($t = 60$ дней, $d = 0{,}28$):

$$300(1 - \frac{60}{360} \cdot 0{,}28) = 286 \text{ тыс. руб.}$$

Доходность такой операции купли-продажи определяем по формуле (23), где $P = 274{,}882$ тыс. руб., $F = 286$ тыс. руб., $t = 40$ дней, $T = 360$ дней:

$$r = \frac{286 - 274{,}882}{274{,}882 \cdot 40} \cdot 360 = 0{,}3640 \text{, или } 36{,}40\% \text{ годовых.}$$

Следует заметить, что найденная доходность по существу не зависит от величины номинала данного депозитного сертификата, а зависит от размеров учетных ставок и сроков от момента покупки и продажи до момента погашения сертификата. Это хорошо видно при решении аналогичного примера в общем виде. Кстати, и этот пример можно было решать, полагая величину номинала депозитного сертификата произвольной величиной F, которая при нахождении доходности просто сократится.

Если же сертификат не будет продан до срока погашения, то в этом случае доходность будет равна простой процентной ставке, обеспечивающей через 100 дней получение такой же наращенной величины из начального капитала, что и учетная ставка 30% годовых, т.е. надо воспользоваться формулой (25):

$$r = \frac{0{,}3}{1 - \frac{100}{360} \cdot 0{,}3} = 0{,}3273\text{, или } 32{,}73\% \text{ годовых.}$$

Пример 1.3.12. Вексель учитывается банком за 120 дней до срока его погашения по простой учетной ставке 39% годовых. Определите доходность для банка такой финансовой операции в виде простой годовой процентной ставки, если: а) комиссионные не удерживаются; б) удерживаются комиссионные в размере 1% от суммы, выплачиваемой за вексель. Расчетное число дней в году принимается равным 360.

Решение. а) Пусть предъявлен вексель на некоторую сумму F, тогда доход банка составит: $F \cdot \frac{120}{360} \cdot 0{,}39 = 0{,}13F$, а предъявитель векселя получит сумму $F - 0{,}13F = 0{,}87F$. Следовательно, по формуле (23) доходность для банка будет:

$$\frac{0{,}13F}{0{,}87F \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}4483\text{, т.е. } 44{,}83\%.$$

Очевидно, можно было и сразу применить формулу (27) при $T_r = T_d = 360$:

$$r = \frac{360 \cdot 0{,}39}{360 - 120 \cdot 0{,}39} = 0{,}4483.$$

б) Так как сумма, выплачиваемая за вексель, равна $0{,}87F$, то величину удержанных комиссионных определяем, взяв от этой суммы 1%: $0{,}87F \cdot 0{,}01 = 0{,}0087F$. Предъявитель векселя получит величину $0{,}87F - 0{,}0087F = 0{,}8613F$. Следоватсльно, общий доход банка составит: $F - 0{,}8613F = 0{,}1387F$. Теперь по формуле (23) можно определить доходность учета векселя для банка в виде простой годовой процентной ставки:

$$r = \frac{0{,}1387F}{0{,}8613F \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}4831, \text{ т.е. } 48{,}31\%.$$

Таким образом, взимание комиссионных повышает доходность учета для банка.

Задачи

1.3.1. Векселедержатель 20 февраля предъявил для учета вексель со сроком погашения 28 марта того же года. Банк учел вексель по учетной ставке 35% годовых и выплатил клиенту 19,3 тыс. руб. Какой величины комиссионные удержаны банком в свою пользу, если год невисокосный?

1.3.2. Векселедержатель предъявил для учета вексель на сумму 60 тыс. руб. со сроком погашения 21 октября текущего года. Вексель предъявлен 3 октября. Банк согласился учесть вексель с дисконтом в 26% годовых. Определите сумму, которую векселедержатель получит от банка, и величину комиссионных, удерживаемых банком в свою пользу за предоставленную услугу. За какое время до срока платежа операция учета векселя по учетной ставке 26% имеет смысл?

1.3.3. Банк 9 июня учел два векселя со сроками погашения соответственно 29 июня и 23 июля того же года. Применяя учетную ставку 30% годовых, банк выплатил клиентам в общей сложности 34 216 руб. Определите номинальную стоимость первого векселя, если второй вексель предъявлен на сумму 10 тыс. руб.

1.3.4. Вексель на сумму 15 тыс. руб., выданный 3 апреля со сроком погашения 10 августа, был учтен в банке 11 июля по учетной ставке 26% годовых способом 365/360. На номинальную стоимость векселя предусматривалось начисление простых процентов по процентной ставке 32% годовых способом 365/365. Найдите сумму, полученную векселедержателем.

1.3.5. Предприятие продало товар на условиях потребительского кредита с оформлением простого векселя: его номинальная стоимость – 1,8 млн. руб., срок векселя – 90 дней, простая процентная ставка за предоставленный кредит – 20% годовых. Через 60 дней с момента оформления векселя предприятие решило учесть вексель в банке; предложенная банком простая годовая учетная ставка составляет: а) 18%; б) 25%. Рассчитайте сумму, получаемую предприятием, и комиссионные, получаемые банком, если начисляются обыкновенные проценты.

1.3.6. Какой величины прибыль получит банк в результате учета 5 февраля по простой учетной ставке 30% годовых трех векселей, каждый из которых на сумму 15 тыс. руб., а сроки их погашения – 5 мая, 7 июня и 1 августа того же високосного года?

1.3.7. Вексель на сумму 80 тыс. руб. предъявлен в банке за 120 дней до срока его погашения. Банк учитывает вексель по простой процентной ставке 32% годовых. Определите дисконт, полученный банком, если при учете полагалось, что в году 360 дней. Какова была бы величина дисконта, если бы банк использовал простую учетную ставку 32% годовых?

1.3.8. В банк 13 июля предъявлен для учета вексель, выданный 4 мая того же года и со сроком погашения 1 сентября, причем на номинальную стоимость векселя предусматривалось начисление простых процентов по процентной ставке 35% годовых способом 365/365. Банк для определения своих комиссионных при учете векселя применяет простую процентную ставку 40% годовых и способ 365/360. Определите номинальную стоимость векселя, если величина общего дохода банка составила 3521 руб.

1.3.9. Банк за 20 дней до срока учел вексель на сумму 40 тыс. руб., при этом удержав комиссионные в размере 800 руб. Какую учетную ставку использовал банк, если считается, что в году 360 дней? Как изменится результат, если банк при учете векселя использует простую процентную ставку?

1.3.10. Векселедержатель собирается предъявить какому-либо банку для учета вексель на сумму 50 тыс. руб. за 45 дней до срока его погашения. Один банк предлагает учесть вексель по учетной ставке 30% годовых. Другой банк предлагает учесть вексель по простой процентной ставке 30% годовых. Чьи условия выгоднее для векселедержателя?

1.3.11. В банк предлагаются для учета два векселя: на сумму 30 тыс. руб. со сроком погашения через 2 месяца и на сумму 34 тыс. руб. со сроком погашения через 8 месяцев. При какой: а) учетной ставке, б) процентной ставке банк при учете этих векселей выплатит одинаковые суммы, если расчетное число дней в году равно 360?

1.3.12. За вексель, учтенный за полтора года до срока по простой учетной ставке в 12%, заплачено 4,5 тыс. руб. Определите номинальную величину векселя.

1.3.13. Банк за 200 дней до срока учел вексель по учетной ставке 28% годовых и в тот же день продал этот вексель другому банку, который учел вексель по процентной ставке, также равной 28% годовых. В результате такой операции первый банк получил доход в 1,5 тыс. руб. Определите номинальную стоимость векселя, если при любом учете предполагалось, что в году 360 дней.

1.3.14. Предприниматель разделил свой капитал на две равные части, одну из них он поместил в банк под простую процентную ставку 30% годовых, а другую часть потратил на покупку векселя со сроком погашения через 250 дней, при этом он учел вексель по простой учетной ставке, также равной 30% годовых. Через 250 дней деньги, полученные предпринимателем по векселю, превышали сумму, образовавшуюся к этому сроку в банке, на 572 руб. Какова была величина первоначального капитала предпринимателя, если во всех расчетах предполагалось, что в году 360 дней?

1.3.15. Дисконтный сертификат, выданный на 90 дней, обеспечивает держателю доход в виде дисконта, равного 18% от величины номинала. Определите размер простой годовой учетной ставки, доставляющей такой же доход при наращении, если в году: а) 360 дней; б) 366 дней.

1.3.16. Предприниматель хочет получить ссуду в 50 тыс. руб. на полгода. Банк согласился предоставить ссуду на условиях начисления простых процентов по учетной ставке 24% годовых. Какую сумму предприниматель будет должен банку?

1.3.17. Банк выдал предпринимателю ссуду на полгода по простой учетной ставке 20% годовых, удержав проценты при выдаче ссуды. Определите сумму, полученную предпринимателем, и величину дисконта, если предприниматель должен возвратить 30 тыс. руб.

1.3.18. Клиент получил 14 апреля ссуду в банке по простой учетной ставке 25% годовых и должен возвратить 20 ноября того же года 10 тыс. руб. Определите различными возможными способами сумму, полученную клиентом, и величину дисконта, если год невисокосный и проценты удерживаются банком при выдаче ссуды.

1.3.19. Клиент получил 10 февраля ссуду в банке по простой учетной ставке 30% годовых и должен возвратить весь долг 27 мая того же года. Какова будет доходность такой операции для банка в виде годовой простой процентной ставки, если год високосный и: а) временна́я база для учетной и процентной ставок одна и та же и равна числу дней в году; б) для учетной ставки временна́я база равна 360 дней, а для процентной ставки – 366 дней?

1.3.20. На капитал в 10 тыс. руб. в течение 4 лет осуществляется наращение простыми процентами по учетной ставке 12% годовых. Найдите приращение первоначального капитала за каждый год и общую наращенную сумму.

1.3.21. Предприниматель получил в банке кредит на 60 дней по учетной ставке 30% годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2% от величины кредита. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде годовой простой процентной ставки, если банк начисляет простые проценты на исходную сумму кредита, полагая в году 360 дней. Как изменится доходность при выдаче кредита на 30 дней и на 90 дней?

1.3.22. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 34% годовых, чтобы она увеличилась в 1,5 раза? Как изменится ответ, если наращение осуществляется по простой учетной ставке 34% годовых?

1.3.23. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под простую процентную ставку 40% годовых, чтобы начисленные проценты были в 1,2 раза больше первоначальной суммы? Как изменится ответ, если наращение осуществляется по простой учетной ставке 40% годовых?

1.3.24. Найдите простую учетную ставку, эквивалентную простой процентной ставке 20% годовых, при наращении капитала за невисокосный год. Рассмотрите случаи одинаковых и разных временны́х баз.

1.3.25. Депозитный сертификат дисконтного типа сроком на 45 дней продается по цене, определяемой простой учетной ставкой 32% годовых и расчетным количеством дней в году, равным 360. Определите эквивалентное значение простой годовой процентной ставки, определяющей стоимость привлеченных средств банка, при расчетном количестве дней в году, равном 365.

1.3.26. Депозитный сертификат дисконтного типа номиналом 400 тыс. руб. куплен за 150 дней до его погашения по цене, определяемой простой учетной ставкой 34% годовых, и через 90 дней продан по цене, определяемой простой учетной ставкой 30% годовых. Найдите доходность такой финансовой операции в виде простой годовой процентной ставки при расчетном количестве дней в году, равном 360. Какова будет доходность, если владелец сертификата продержит его до погашения? Влияет ли на доходность величина номинала этого сертификата?

1.3.27. Какая простая процентная ставка при учете векселя (по формуле математического дисконтирования) за 60 дней до срока погашения эквивалентна учетной ставке при коммерческом учете, если учетная ставка равна: а) 10%, б) 20%, в) 50% годовых? Временны́е базы при использовании ставок одинаковы и равны 360 дней.

1.3.28. Банк учитывает вексель за 180 дней до срока по учетной ставке 34% годовых, используя временну́ю базу в 360 дней. Определите доходность такой операции в виде простой годовой процентной ставки при временно́й базе, равной 365.

1.3.29. При учете предъявленного векселя на сумму 150 тыс. руб. за 200 дней до срока его погашения доход банка составил 24 тыс. руб. Определите: а) доходность этой финансовой операции для банка в виде простой годовой процентной ставки; б) по какой простой учетной ставке был учтен вексель. Расчетное число дней в году принимается равным 360.

1.3.30. Вексель на сумму 50 тыс. руб., выданный 1 июня и сроком погашения 1 сентября того же года, был учтен в банке 2 августа по учетной ставке 32% годовых. На номинальную стоимость векселя предусматривалось начисление простых процентов по процентной ставке 30% годовых. Определите в виде простой годовой процентной ставки доходность этой финансовой операции для предъявителя векселя и для банка, если и при учете, и при наращении берутся в расчет точные проценты с точным числом дней и год невисокосный. Зависит ли величина доходности от суммы, написанной на векселе? Зависит ли величина доходности финансовой операции для банка от процентной ставки, по которой начисляются простые проценты?

1.3.31. В банк предъявлен вексель за 280 дней до срока платежа. Какова должна быть простая годовая учетная ставка, используемая банком, чтобы доходность операции учета в виде простой процентной ставки составляла 40% годовых? Расчетное количество дней в году равно 360.

1.3.32. Банк использует при выдаче кредитов простую процентную ставку 45% годовых для расчетного количества дней в году, равном 365. За 70 дней до срока погашения в банк предъявлен вексель. Какую простую учетную ставку должен использовать банк, полагая в году 360 дней, чтобы обеспечить равенство доходностей операции учета и кредитных операций?

1.3.33. Вексель учитывается банком за 80 дней до срока его погашения по простой учетной ставке 35% годовых. Определите доходность для банка такой финансовой операции в виде простой годовой процентной ставки, если: а) комиссионные не удерживаются; б) удерживаются комиссионные в размере 2% от суммы, выплачиваемой за вексель. Расчетное число дней в году принимается равным 360.

1.3.34. Вексель, до срока оплаты которого осталось 140 дней, учтен в банке по простой учетной ставке 38% годовых при расчетном количестве дней в году, равном 360. Доходность операции учета в виде простой годовой процентной ставки составила: а) 44,59%; б) 45,33%. Определите, какое при этом принималось расчетное количество дней в году.

1.3.35. На сумму 20 тыс. руб. начисляются с начала года простые проценты по учетной ставке 30% годовых. Определите наращенную сумму на конец первого квартала, если ежемесячно проводится операция реинвестирования, начисляются точные проценты с точным числом дней и год високосный. Какова была бы наращенная сумма в случае непроведения операции реинвестирования?

1.3.36. В банк предъявлен вексель на сумму 80 тыс. руб. за полгода до срока его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые два месяца – 24% годовых и затем в каждом следующем месяце ставка повышается на 1,5%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель. Можно ли воспользоваться постоянной учетной ставкой, доставляющей такой же дисконт?

1.3.37. За какое время до срока погашения необходимо предъявить для учета вексель на сумму 1000 руб., чтобы результаты учета по простой процентной ставке 30% годовых и по простой учетной ставке 30% годовых отличались меньше чем на одну копейку? Временные базы при использовании ставок одинаковые.

1.4. Погашение кредита и амортизационные отчисления

Основные положения

• Потребительским (или личным) кредитом называется кредит, который предоставляет банк, финансовая компания или розничный торговец отдельному индивидууму на потребительские цели.

• Один из способов погашения потребительского кредита предусматривает начисление процентов на всю сумму кредита и присоединение их к основному долгу в момент открытия кредита, причем погашение долга с процентами (наращенной суммы) происходит равными величинами в течение всего срока кредита.

• При погашении потребительского кредита равными платежами для определения доли каждой выплаты, идущей на погашение основного долга, и доли этой же выплаты, идущей на погашение начисленных процентов, пользуются *"правилом 78"*.

• Для должника более приемлемым является способ погашения кредита, учитывающий, что долг не является постоянной величиной, а с течением времени уменьшается. В этом случае процентные платежи за пользование потребительским кредитом рассчитываются каждый раз на оставшуюся часть долга. Сам же основной долг выплачивается равными суммами.

• Существуют различные варианты выплаты долга, оговариваемые контрактом. Например, в случае невыплаты заемщиком вовремя всего долга может быть предусмотрена возможность частичного погашения долга и продления срока кредита. Если превышен срок погашения кредита, то устанавливается так на-

5—

зываемая штрафная (более высокая) процентная ставка, по которой заемщик и рассчитывается с кредитором за весь период просрочки.

• Амортизация представляет собой постепенное снижение ценности основных фондов вследствие их изнашивания, а также постепенное перенесение стоимости основных фондов на вырабатываемую продукцию с целью накопления средств для их обновления. Суммы, на которые уменьшается стоимость основных фондов, образуют амортизационные отчисления.

• В практической деятельности устанавливают нормативные сроки службы и единые нормы амортизации. Они корректируются с учетом фактических условий работы, естественных условий, влияния агрессивной среды.

• С помощью выбора способа расчета амортизационных отчислений можно управлять размером прибыли по годам, а следовательно, и размером налогов на прибыль. Возможны различные схемы амортизационных отчислений. Наиболее распространенными являются схема равномерной амортизации и схема ускоренной амортизации.

• Согласно схеме равномерной амортизации сумма годовых амортизационных отчислений определяется делением первоначальной стоимости, уменьшенной на величину предполагаемой ликвидационной стоимости, на экономически обоснованную продолжительность (в годах) периода эксплуатации данного актива.

• Во многих ситуациях целесообразно применять ускоренную схему амортизации (например, стимулируя замену стареющего оборудования). Для этого, например, можно руководствоваться таким способом расчета уменьшения стоимости имущества, который использует дроби, получающиеся в результате применения *"правила 78"*.

Вопросы для обсуждения

1. Какой кредит называется потребительским? Приведите примеры.
2. Какие способы погашения потребительского кредита Вы знаете?

3. При каком способе погашения кредита фактическая процентная ставка оказывается больше ставки, предусмотренной при оформлении кредита? Почему так происходит?
4. Что называется стоимостью кредита?
5. В чем заключается "*правило 78*" и для каких целей оно служит?
6. Что послужило названием "*правила 78*"?
7. Какие еще схемы выплат общей суммы процентов в течение периода кредитования Вы можете предложить?
8. Соответствует ли логике ссудозаемных операций схема с убывающей величиной процентного платежа?
9. Какие ситуации можно предусмотреть с помощью "*правила 78*"?
10. Почему банки заинтересованы в том, чтобы должник погашал сумму долга частями в течение данного ему срока, а не в конце его?
11. Почему способ погашения, учитывающий, что долг с течением времени уменьшается, выгоден клиенту, взявшему кредит?
12. Что собой представляет кредит под залог материальных ценностей?
13. Какие проценты используют, как правило, при расчетах, связанных с обслуживанием кредита под залог материальных ценностей?
14. Что такое амортизация?
15. Что такое амортизационные отчисления?
16. На что влияет выбор схемы амортизационных отчислений?
17. Что собой представляет равномерная амортизация?
18. Почему целесообразно применять схему ускоренной амортизации?
19. Приведите пример схемы ускоренной амортизации.

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.4.1. Покупатель приобрел телевизор стоимостью 3,6 тыс. руб. При этом он сразу уплатил 25% стоимости телевизора, а на остальную сумму получил кредит на 6 месяцев под простую процентную ставку 20% годовых. Кредит погашается ежемесячными платежами.

1. Составьте план погашения кредита с помощью "*правила 78*", если проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита, причем погашение долга с процентами происходит равными величинами в течение всего срока кредита.

2. Составьте план погашения кредита с учетом, что долг с течением времени уменьшается и процентные платежи за пользование потребительским кредитом рассчитываются каждый раз на оставшуюся часть долга. Сам же основной долг выплачивается равными суммами.

Решение. Поскольку покупатель сразу уплатил $3{,}6 \cdot 0{,}25 =$ $= 0{,}9$ тыс. руб., то он получил кредит в размере $3{,}6 - 0{,}9 =$ $= 2{,}7$ тыс. руб.

1. Наращенную сумму долга за 6 месяцев (0,5 года) находим по формуле наращения простыми процентами (10):

$$F = 2{,}7(1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 2{,}97 \text{ тыс. руб.}$$

Определяем величину начисленных процентов: $I = 2{,}97 - 2{,}7 =$ $= 0{,}27$ тыс. руб.

Так как всего 6 погасительных платежей, то величина каждого из них составит:

$$a = \frac{2{,}97}{6} = 0{,}495 \text{ тыс. руб.}$$

Составим план выплат с помощью "*правила 78*". Находим сумму порядковых номеров всех платежей: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Согласно "*правилу 78*" часть первого погасительного платежа пойдет на выплату $\frac{6}{21}$ от общей начисленной величины процентов (т.е. $\frac{6}{21}I$), а оставшаяся часть погасительного платежа ($a - \frac{6}{21}I$) пойдет в счет выплаты основного долга. Часть второго погасительного платежа пойдет на выплату $\frac{5}{21}$ от общей начисленной величины процентов (т.е. $\frac{5}{21}I$), а оставшаяся часть платежа ($a - \frac{5}{21}I$) пойдет в счет выплаты основного долга. Для третьего платежа надо взять дробь $\frac{4}{21}$ и т.д.

Таким образом, из первого погасительного платежа в счет уплаты процентов пойдет $0{,}27 \cdot \frac{6}{21} = 0{,}077$ тыс. руб. Следовательно, в первом месяце часть основного долга погашается в размере $0{,}495 - 0{,}077 = 0{,}418$ тыс. руб. На начало следующего месяца получим остаток основного долга, равный $2{,}7 - 0{,}418 = 2{,}282$ тыс. руб.

Во втором месяце в счет уплаты процентов пойдет $\frac{5}{21}$ от общей суммы начисленных процентов, что составляет $0{,}27 \cdot \frac{5}{21} = 0{,}064$ тыс. руб., а часть основного долга погашается в размере $0{,}495 - 0{,}064 = 0{,}431$ тыс. руб. На начало третьего месяца получим остаток основного долга, равный $2{,}282 - 0{,}431 = 1{,}851$ тыс. руб. и т.д. Для наглядности результаты всех расчетов представим в виде таблицы.

План погашения кредита

Номер месяца	Остаток основного долга на начало месяца, тыс. руб.	Дроби	Погашение общей величины начисленных процентов, тыс. руб.	Погашение основного долга, тыс. руб.
1	2,7	6/21	0,077	0,418
2	2,282	5/21	0,064	0,431
3	1,851	4/21	0,051	0,444
4	1,407	3/21	0,039	0,456
5	0,951	2/21	0,026	0,469
6	0,482	1/21	0,013	0,482
Σ			0,27	2,7

Последняя строка таблицы служит для контроля произведенных расчетов: сумма всех чисел, стоящих в строчках четвертого столбца, должна равняться общей величине начисленных процентов (называемой стоимостью кредита), а аналогичная сумма для пятого столбца – основному долгу. Кроме того, для каждого месяца сумма соответствующих строчек четвертого и пятого столбцов постоянна и равна величине погасительного платежа – 0,495 тыс. руб.

С помощью *“правила 78”* заемщик также может приблизительно узнать, какую сумму в счет оплаты процентов ему не придется отдавать в случае возврата кредита раньше срока (если, конечно, такая ситуация предусмотрена в договоре). Пусть в нашем примере после двух погасительных платежей было принято решение возвратить кредит. Начиная с единицы, нумеруем оставшиеся четыре планируемых платежа и находим сумму их новых порядковых номеров: 1+ 2+ 3+ 4 = 10. Тогда $\frac{10}{21}$ общей величины начисленных процентов не придется выплачивать, что в данном примере составит $0{,}27 \cdot \frac{10}{21} = 0{,}129$ тыс. руб.

Очевидно, что в кредитном договоре могут предусматриваться любые схемы весовых коэффициентов в распределении общей суммы процентов в течение периода кредитования. Например, при составлении плана погашения кредита можно взять последовательность равных дробей (конечно, в сумме дающих единицу). В данном случае каждая дробь будет равна $^1\!/_6$, и поэтому каждый раз в счет уплаты процентов пойдет величина $\frac{0{,}27}{6} = 0{,}045$ тыс. руб., и каждый раз часть основного долга погашается в размере 0,45 – 0,045 = 0,405 тыс. руб. Таким образом, получаем равномерное распределение выплат процентов и выплат основного долга.

2. При втором способе погашения кредита учитывается, что долг не является постоянной величиной, а с течением времени уменьшается и процентные платежи за пользование потребительским кредитом рассчитываются каждый раз на оставшуюся часть долга. Сам же долг выплачивается равными суммами.

Как и в первом способе, ежемесячные погасительные платежи представляют собой сумму выплаты части основного долга и процентного платежа для данного месяца.

Каждый месяц выплачивается часть основного долга, равная $R = \frac{2{,}7}{6} = 0{,}45$ тыс. руб., или 450 руб.

Процентные платежи для каждого месяца найдем с учетом постепенного уменьшения величины долга. За первый месяц начисляются проценты в размере

$$I_1 = 2{,}7 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}2 = 0{,}045 \text{ тыс. руб., или } 45 \text{ руб.}$$

За второй месяц начисляются проценты на остаток долга:

$$I_2 = (2{,}7 - 0{,}45) \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}2 = I_1 \cdot \frac{5}{6} = 0{,}0375 \text{ руб., или } 37{,}5 \text{ руб.}$$

Аналогичным образом для третьего платежа получим:

$$I_3 = (2{,}7 - 2 \cdot 0{,}45) \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}2 = I_1 \cdot \frac{4}{6} = 0{,}03 \text{ руб., или } 30 \text{ руб.,}$$

и т.д. Фактически при вычислении процентных платежей мы величину первого процентного платежа умножаем последовательно на дроби $\frac{5}{6}, \frac{4}{6}, \frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$. Таким образом: $I_4 = 45 \cdot \frac{3}{6} = 22{,}5$ руб., $I_5 = 45 \cdot \frac{2}{6} = 15$ руб., $I_6 = 45 \cdot \frac{1}{6} = 7{,}5$ руб. Следовательно, общая величина процентного платежа (стоимость кредита):

$$I = 45 + 37{,}5 + 30 + 22{,}5 + 15 + 7{,}5 = 157{,}5 \text{ руб.,}$$

что можно получить и пользуясь формулой (17). Действительно, полагая $P = 2700$ руб., $k = 6$, $n = 0{,}5$ и $r = 0{,}2$, получим:

$$I = 2700 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{6+1}{2 \cdot 6} = 157{,}5 \text{ руб.}$$

Для наглядности представим план погашения кредита в табличном виде.

(руб.)

Номера месяцев	Остаток основного долга на начало месяца	Процентный платеж	Ежемесячная выплата основного долга	Величина ежемесячного погасительного платежа
1	2700	45	450	495
2	2250	37,5	450	487,5
3	1800	30	450	480
4	1350	22,5	450	472,5
5	900	15	450	465
6	450	7,5	450	457,5
Σ		157,5	2700	2857,5

Заметим, что, как и в предыдущей таблице, последняя строка служит для контроля правильности расчетов.

Видно, что при данной схеме погасительных платежей общая величина выплат меньше на 112,5 руб. по сравнению со способом погашения кредита, изложенным ранее.

Если же выплачивать кредит равными долями, то каждый погасительный платеж равен:

$$b = \frac{2700 + 157{,}5}{6} = 476{,}25 \text{ руб.}$$

Заметим, что при изложенном способе погашения кредита можно считать, что первоначальная величина долга остается постоянной, но каждый месяц меняется процентная ставка. Так, если в первый месяц она равнялась 20% годовых, то во втором месяце – $20\% \cdot \frac{5}{6} = 16{,}67\%$, в третьем – $20\% \cdot \frac{4}{6} = 13{,}33\%$ и т.д.

Пример 1.4.2. Банк предоставил господину N кредит с 4 марта по 16 июля того же года под залог ста пятидесяти ценных бумаг. Курсовая стоимость каждой ценной бумаги на день выдачи кредита составляет 400 руб. Кредит предоставлен под процентную ставку 30% годовых, и его сумма составляет 75% величины залога. Затраты банка на обслуживание долга в размере 1% от номинальной суммы кредита были удержаны вместе с начисленными процентами в момент предоставления кредита. Господин N 16 июля выплатил банку только 25 тыс. руб. Банк согласился на продление погашения кредита до 16 августа под 36% годовых, не взимая сразу при этом начисленные проценты на остаток долга. Найдите величину кредита, полученного господином N, и определите, какую сумму господин N должен будет выплатить банку 16 августа.

Решение. При расчетах, связанных с обслуживанием кредита под залог материальных ценностей, используют обыкновенные проценты с точным числом дней.

Вначале определяем курсовую стоимость всех ценных бумаг:

$$400 \cdot 150 = 60\,000 \text{ руб.}$$

Следовательно, номинальная величина кредита составляет:

$$60\,000 \cdot 0{,}75 = 45\,000 \text{ руб.}$$

Так как с 4 марта по 16 июля – 134 дня, то по формуле (12) вычисляем процентный платеж за кредит:

$$45\,000 \cdot \frac{134}{360} \cdot 0{,}3 = 5025 \text{ руб.},$$

который, естественно, можно было найти и пользуясь формулой $I = \frac{Pt}{D'}$, определив вначале значение дивизора $D' = \frac{360}{0{,}3} = 1200$ и полагая $t = 134$ дня. Затраты банка на обслуживание долга составят:

$$45\,000 \cdot 0{,}01 = 450 \text{ руб.}$$

Банк предварительно взыскивает процентный платеж и оплату за обслуживание долга, поэтому клиент получил кредит в размере:

$$45\,000 - 5025 - 450 = 39\,525 \text{ руб.}$$

Видно, что господин N получил "на руки" меньшую сумму, чем номинальная величина кредита.

На 16 июля остаток долга составит: $45\,000 - 25\,000 = 20\,000$ тыс. руб. Определяем процентный платеж за 31 просроченный день:

$$20\,000 \cdot \frac{31}{360} \cdot 0{,}36 = 620 \text{ руб.}$$

Таким образом, господин N 16 августа должен будет отдать банку:

$$20\,000 + 620 = 20\,620 \text{ руб.}$$

Пример 1.4.3. Предпринимателю необходима сумма в 100 тыс. руб. на 3 месяца. Банк предоставил ему кредит в размере 80% от стоимости залога под 24% годовых и за обслуживание долга взыскал 1% от номинальной суммы кредита. Определите величину залога, если кредит взят 1 февраля и год невисокосный.

Решение. Обозначим через P величину залога. Поскольку номинальная величина кредита равна 100 тыс. руб., плата за обслуживание долга равна $100 \cdot 0{,}01 = 1$ тыс. руб., то P равняется сумме 101 тыс. руб. (100 тыс. руб. + 1 тыс. руб.) и процентного платежа. Кредит выдается на 89 дней.

Величину процентного платежа можно получить, вычисляя проценты *"во 100"* с помощью одного из соотношений формулы (14). В данном случае, так как срок финансовой операции выражен в днях, воспользуемся соотношением, содержащим дивизор. Последовательно определяем дивизор $D' = \frac{360}{0{,}24} = 1500$ и процентный платеж:

$$\frac{101 \cdot 89}{1500 - 89} = 6{,}371 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, $P = 101 + 6{,}371 = 107{,}371$ тыс. руб. Поэтому стоимость материальных ценностей, отдаваемых в залог, должна быть равна величине:

$$\frac{P}{0{,}8} = \frac{107{,}371}{0{,}8} = 134{,}214 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что данный пример (как, впрочем, и другие) можно решить с помощью алгебраического уравнения. Обозначим через x стоимость залога, тогда $0{,}8x$ – номинальная величина кредита. Пользуясь условием примера, составляем уравнение:

$$0{,}8x - 0{,}8x \cdot \frac{89}{360} \cdot 0{,}24 - 1 = 100,$$

решая которое находим $x = 134{,}213$ тыс. руб.

Отличие полученных результатов на 1 руб. объясняется принятой в данном примере точностью вычисления, увеличивая которую можно, в частности, получить при решении первым способом 134,21331 тыс. руб., при решении вторым способом – 134,21332 тыс. руб., т.е. разница между значениями составляет 1 коп.

Пример 1.4.4. Предприятие приобрело универсальный станок за 320 тыс. руб. Срок службы станка – 8 лет, после чего он реализуется по остаточной стоимости 50 тыс. руб. Составьте таблицу уменьшения стоимости станка по годам. Рассмотрите два случая: а) уменьшение стоимости станка происходит равномерно; б) уменьшение стоимости станка происходит в соответствии с "*правилом 78*".

Решение. а) Срок службы станка составляет $n = 8$ лет. Обозначим P первоначальную стоимость станка, P_n – остаточную стоимость станка через n лет и $\overline{P} = P - P_n$. Полагая $P = 320$ тыс.

руб., $P_n = P_8 = 50$ тыс. руб., получим $\overline{P} = 320 - 50 = 270$ тыс. руб. При осуществлении схемы равномерной амортизации стоимость уменьшается ежегодно на одну и ту же величину $\frac{\overline{P}}{n} = \frac{270}{8} = 33{,}75$ тыс. руб. и таблица принимает вид:

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	320
1	33,75	286,25
2	33,75	252,5
3	33,75	218,75
4	33,75	185
5	33,75	151,25
6	33,75	117,5
7	33,75	83,75
8	33,75	50

Остаточные стоимости, представленные в таблице, образуют арифметическую прогрессию с первым членом 320 и разностью –33,75.

б) Рассмотрим теперь схему ускоренной амортизации в соответствии с "*правилом 78*". Обозначим:

$$S = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1+n}{2}n.$$

Суть этой схемы заключается в следующем: в конце первого года стоимость имущества уменьшается на $\frac{n}{S}$-ю часть величины $\overline{P}$; в конце второго года – на $\frac{n-1}{S}$-ю часть величины $\overline{P}$; в конце третьего года – на $\frac{n-2}{S}$-ю часть величины $\overline{P}$ и т.д. до n-го года, в конце которого стоимость имущества уменьшается на $\frac{1}{S}$-ю часть величины $\overline{P}$.

Поскольку $1+2+...+8=\frac{1+8}{2}\cdot 8=36$, то для составления таблицы необходимо величину $\overline{P}$ последовательно умножать на $\frac{8}{36},\frac{7}{36},\frac{6}{36},...,\frac{1}{36}$: $270\cdot\frac{8}{36}=60$ тыс. руб., $270\cdot\frac{7}{36}=52{,}5$ тыс. руб., $270\cdot\frac{6}{36}=46$ тыс. руб. и т.д. Поэтому стоимость станка, например, на конец первого года составит: 320 – 60 = 260 тыс. руб.; на конец второго года – 260 – 52,5 = 207,5 тыс. руб. Продолжая вычисления аналогичным образом, получим таблицу:

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	320
1	60	260
2	52,5	207,5
3	45	162,5
4	37,5	125
5	30	95
6	22,5	72,5
7	15	57,5
8	7,5	50

Очевидно, амортизационные отчисления, представленные в таблице, образуют арифметическую прогрессию с первым членом 60 и разностью (-7,5). Относительно значений остаточных стоимостей такого вывода, конечно, сделать нельзя.

Задачи

1.4.1. Товар стоимостью 2,7 тыс. руб. продается в кредит на 3 года под простую процентную ставку 16% годовых с равными ежеквартальными погасительными платежами. Проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. Определите долг с процентами, проценты и величину разового погасительного платежа.

1.4.2. Товар стоимостью 4 тыс. руб. продается в кредит на 2 года под простую процентную ставку 20% годовых с равными ежеквартальными погасительными платежами. Проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. Определите долг с процентами, проценты и величину разового погасительного платежа. С помощью *"правила 78"* составьте план погашения кредита.

1.4.3. Покупатель приобретает музыкальный центр, стоимость которого 14,6 тыс. руб. Он уплатил сразу 3 тыс. руб., а на остальную сумму получил кредит на 9 месяцев под простую процентную ставку 12% годовых с ежемесячными равными погасительными платежами. Определите долг с процентами, проценты и величину разового погасительного платежа, если проценты начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу в момент открытия кредита. С помощью *"правила 78"* составьте план погашения кредита.

1.4.4. Товар стоимостью 5,4 тыс. руб. продается в кредит на 3 года под процентную ставку 15% годовых с полугодовыми погасительными платежами, причем начисляются простые проценты. Составьте план погашения кредита с учетом того, что долг с течением времени уменьшается и процентные платежи за пользование потребительским кредитом рассчитываются каждый раз на оставшуюся часть долга. Сам же основной долг выплачивается равными суммами.

1.4.5. Фирма предлагает бытовую технику и компьютеры в кредит на срок до 6 месяцев с первым взносом не менее 33% от стоимости товара и ежемесячными погасительными платежами. Простая процентная ставка по кредитам – 2,5% в месяц. Покупатель приобретает компьютер стоимостью 8,4 тыс. руб., заплатив 45% его стоимости и оформив кредит на 5 месяцев. Составьте план погашения кредита с учетом, что долг с течением времени уменьшается и процентные платежи за пользование кредитом рассчитываются каждый раз на оставшуюся часть долга. Сам же основной долг выплачивается равными суммами.

1.4.6. Клиент обратился в банк 9 апреля с целью получения кредита под залог двухсот ценных бумаг, причем курсовая стоимость каждой ценной бумаги на этот день составляет 1000 руб. Банк предоставляет кредит под 25% годовых на 3 месяца в размере 80% курсовой стоимости ценных бумаг. В контракте с клиентом оговаривается, что затраты банка на обслуживание долга составляют 1% от номинальной суммы кредита и удерживаются вместе с процентным платежом в момент предоставления кредита. В случае просрочки выплаты долга клиент рассчитывается с банком за каждый лишний день по ставке 30% годовых. Найдите величину кредита, который получит клиент. Если клиент возвратит долг только 30 июля, то какую сумму ему придется дополнительно выплатить за просроченные дни? При расчетах, связанных с обслуживанием кредита под залог материальных ценностей, банк использовал обыкновенные проценты с точным числом дней.

1.4.7. Предпринимателю необходима сумма в 45 тыс. руб. на 2 месяца. Банк предоставит ему кредит в размере 75% от стоимости залога под 28% годовых и за обслуживание долга взыщет 450 руб. Определите величину залога, если кредит взят 10 сентября и в расчетах используются обыкновенные проценты с точным числом дней.

1.4.8. Банк предоставил предпринимателю кредит на 3 месяца (с 20 мая по 20 августа) под залог двухсот пятидесяти ценных бумаг. Курсовая стоимость каждой ценной бумаги на день выдачи кредита составляет 100 руб. Кредит предоставлен под процентную ставку 20% годовых, и его сумма составляет 80% величины залога. Затраты банка на обслуживание долга в размере 1% от номинальной суммы кредита были удержаны вместе с начисленными процентами в момент предоставления кредита. Предприниматель 20 августа выплатил банку только 10 тыс. руб. Банк согласился на продление погашения кредита еще на три месяца под 24% годовых, не взимая сразу при этом начисленные проценты на остаток долга. Найдите величину кредита, полученного предпринимателем, и определите, какую сумму предприниматель должен будет выплатить банку 20 ноября. При расчетах, связанных с обслуживанием кредита под залог материальных ценностей, банк использовал обыкновенные проценты с точным числом дней.

1.4.9. Банк предоставил кредит в размере 80% от стоимости залога под процентную ставку 20% годовых, а за обслуживание долга удержал 1% от номинальной суммы кредита при его выдаче. На какой срок получил кредит клиент, если банк ему выдал 20 760 руб., а величина залога составляет 30 тыс. руб.? В расчетах банк применяет обыкновенные проценты.

1.4.10. Туристическая фирма приобрела микроавтобус за 42 тыс. руб. Полагая, что срок службы микроавтобуса 6 лет, составьте таблицу уменьшения его стоимости по годам. Рассмотрите два случая: а) уменьшение стоимости микроавтобуса происходит равномерно; б) уменьшение стоимости микроавтобуса происходит в соответствии с "*правилом 78*".

1.4.11. Фирма приобрела оборудование за 950 тыс. руб. Срок службы оборудования – 10 лет, после чего фирма намеревается реализовать изношенное оборудование за 70 тыс. руб. Составьте таблицу уменьшения стоимости оборудования по годам. Рассмотрите два случая: а) уменьшение стоимости оборудования происходит равномерно; б) уменьшение стоимости оборудования происходит в соответствии с "*правилом 78*".

1.5. Вычисление средних значений

Основные положения

• На практике периодически возникают задачи, связанные с переоформлением финансовых соглашений на новых условиях или с заменой нескольких финансовых сделок на одну. Одним из методов решения такого типа задач при применении простых процентов является вычисление средних значений срока, ставки и капитала.

• Средним сроком называется срок, на который необходимо предоставить несколько капиталов под соответствующие ставки с целью получения такого же дохода, как и при предоставлении этих же капиталов под соответствующие эти же ставки на исходные разные сроки.

• Средней ставкой называется ставка, под которую необходимо предоставить несколько капиталов на соответствующие исходные сроки с целью получения такого же дохода, как и при предоставлении этих же капиталов на соответствующие эти же сроки, но под разные ставки.

• Средним капиталом называется капитал, который приносит такой же доход по соответствующим ставкам и за соответствующие им сроки, что и исходные капиталы по тем же ставкам за соответствующие им сроки.

• Одним из подходов к определению стоимости привлеченных средств в условиях применения простых процентов является нахождение ставки через взвешенную сумму ставок, под которые эти средства были привлечены. Обычно указанная стоимость (ее еще называют средневзвешенной стоимостью) выражается в виде средней простой процентной ставки без учета сроков использования средств, т.е. весом для каждой ставки служит доля соответствующего привлеченного капитала, которую он составляет в общей сумме привлеченных средств.

• Доходность (средневзвешенная) выданных под простые проценты средств определяется аналогичным образом, как и стоимость привлеченных средств, в виде взвешенной суммы ставок, под которые эти средства были выданы. Как правило, средневзвешенная доходность выражается средней простой процентной ставкой без учета сроков, на которые выдавались средства.

Вопросы для обсуждения

1. По какой формуле определяется средний срок кредита в условиях применения простых процентов?
2. По какой формуле определяется средняя процентная ставка?
3. Что такое средняя величина кредита?
4. Поясните фразу: "Средняя процентная ставка является взвешенной суммой исходных процентных ставок".
5. Каким образом определяются одновременно две средние величины в условиях применения простых процентов (например, средний срок кредита и средняя процентная ставка)?
6. Пусть даны простые годовые процентные ставки, под которые взяты кредиты, а соответствующие сроки даны в месяцах. Можно ли найти средний срок сразу в месяцах, не переводя исходные сроки в годы?
7. Что произойдет со средним сроком, если каждый исходный срок умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю?
8. Что произойдет со средним сроком, если каждый исходный срок изменить на одно и то же время?

9. В каком случае средний срок будет равен просто среднему арифметическому исходных сроков?
10. Верно ли утверждение, что средняя процентная ставка не изменится, если каждый исходный срок умножить на одно и то же число или изменить на одно и то же время?
11. Как могут характеризовать работу банка средняя процентная ставка и средний срок кредита?
12. Могут ли значительно отличаться средние значения, найденные по разным формулам как взвешенные суммы исходных значений? Если да, то почему это происходит?
13. Если простые проценты взыскиваются при выдаче ссуд, то какими формулами надо пользоваться при отыскании средних значений?
14. Можно ли при использовании соответствующей формулы значение средней ставки сразу получать в процентах?
15. Каким образом можно определить стоимость привлеченных средств?
16. Какие величины, как правило, выступают в качестве весов в формуле определения стоимости привлеченных средств?
17. Каким образом можно определить доходность выданных средств?
18. Сравните между собой доходность выданных средств под простые проценты для кредитора и стоимость привлеченных средств для заемщика. В чем их сходство и отличие?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.5.1. Предприятие получило следующие кредиты под разные простые процентные ставки: 36 тыс. руб. на 240 дней под 35% годовых; 28 тыс. руб. на 150 дней под 32% годовых; 60 тыс. руб. на 100 дней под 38% годовых; 52 тыс. руб. на 80 дней под 34% годовых. Определите: а) средний срок кредита; б) среднюю процентную ставку; в) средний срок и среднюю процентную ставку одновременно; г) среднюю величину кредита.

Решение. а) Вначале сделаем некоторые замечания по поводу использования формулы (32), представляющей один из вариантов определения среднего срока кредита. Конечно, в формуле периоды n_k измеряются в любых единицах времени (годы, кварталы, месяцы, дни и т.д.), согласованных с размерностями соответствующих процентных ставок i_k (годовые, квартальные, месячные, дневные и т.д.). Однако вид формулы (32) позволяет определять средний срок, не особенно заботясь о согласовании размерностей исходных сроков и процентных ставок. Так, если, например, сроки n_k даны в днях (вообще в любых, но единых для всех сроков единицах времени), а i_k представляют собой годовые процентные ставки, то, не занимаясь переводом n_k в годы, по формуле (32) сразу получаем средний срок $\bar{n}$ в днях. Аналогичные соображения можно высказать и в связи с применением формул (30), (34), (36).

Полагаем $P_1 = 36$ тыс. руб., $P_2 = 28$ тыс. руб., $P_3 = 60$ тыс. руб., $P_4 = 52$ тыс. руб. Несмотря на то что $i_1 = 0{,}35$; $i_2 = 0{,}32$; $i_3 = 0{,}38$ и $i_4 = 0{,}34$ – годовые процентные ставки, в соответствии со сказанным выше, средний срок будем измерять в днях, а исходные сроки переводить в годы не будем, т.е. $n_1 = 240$ дней, $n_2 = 150$ дней, $n_3 = 100$ дней, $n_4 = 80$ дней. По формуле (32) получим:

$$\bar{n} = \frac{36 \cdot 240 \cdot 0{,}35 + 28 \cdot 150 \cdot 0{,}32 + 60 \cdot 100 \cdot 0{,}38 + 52 \cdot 80 \cdot 0{,}34}{36 \cdot 0{,}35 + 28 \cdot 0{,}32 + 60 \cdot 0{,}38 + 52 \cdot 0{,}34} = 129{,}95 \text{ дня},$$

т.е. $\bar{n} = 130$ дней.

Если же срок каждого кредита измерять в годах, считая, что в году 360 дней, то $n_1 = 0{,}667$ года, $n_2 = 0{,}417$ года, $n_3 = 0{,}278$ года, $n_4 = 0{,}222$ года и

$$\bar{n} = \frac{36 \cdot 0{,}667 \cdot 0{,}35 + 28 \cdot 0{,}417 \cdot 0{,}32 + 60 \cdot 0{,}278 \cdot 0{,}38 + 52 \cdot 0{,}222 \cdot 0{,}34}{36 \cdot 0{,}35 + 28 \cdot 0{,}32 + 60 \cdot 0{,}38 + 52 \cdot 0{,}34} =$$

$$= 0{,}361 \text{ года},$$

или $\bar{n} = 0{,}361 \cdot 360 = 129{,}96$ дня, т.е. $\bar{n} = 130$ дней. Естественно, получили тот же самый результат.

Для проверки правильности результата найдем начисляемые проценты на каждый кредит при исходных сроках, считая в году 360 дней, и сложим эти проценты:

$$36 \cdot 0{,}667 \cdot 0{,}35 + 28 \cdot 0{,}417 \cdot 0{,}32 + 60 \cdot 0{,}278 \cdot 0{,}38 + 52 \cdot 0{,}222 \cdot 0{,}34 =$$

$$= 22{,}404 \text{ тыс. руб.}$$

Теперь найдем сумму процентов при замене всех сроков на средний срок:

$$36\cdot 0{,}361\cdot 0{,}35+28\cdot 0{,}361\cdot 0{,}32+60\cdot 0{,}361\cdot 0{,}38+52\cdot 0{,}361\cdot 0{,}34=$$
$$=22{,}396 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, получили (в пределах точности вычислений) одну и ту же сумму – 22,4 тыс. руб. Если исходный срок каждого кредита в годах взять с бóльшим количеством знаков после запятой, то сумма начисляемых процентов на каждый кредит при исходных сроках составит 22,396 тыс. руб.

Формулу (32) можно записать и таким образом:

$$\bar{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}P_k n_k i_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}P_k i_k}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{P_k i_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}P_k i_k}\right)\cdot n_k,$$

т.е. средний срок равен взвешенной сумме исходных сроков, где весом для каждого срока n_k служит доля произведения $P_k\, i_k$, которую оно составляет от общей суммы $\sum\limits_{k=1}^{m}P_k\, i_k$, причем очевидно, что сумма всех весов обязательно равна единице. Выполняя вычисления для данного случая, получим:

$$\bar{n}=0{,}2031\, n_1+0{,}1444\, n_2+0{,}3675\, n_3+0{,}2850\, n_4.$$

Конечно, 0,2031 + 0,1444 + 0,3675 + 0,2850 = 1. Заметим, что из-за приближенных вычислений сумма весов может незначительно отличаться от единицы.

б) Как и в пункте а), измеряя сроки в днях, воспользуемся формулой (30):

$$\bar{i}=\frac{36\cdot 240\cdot 0{,}35+28\cdot 150\cdot 0{,}32+60\cdot 100\cdot 0{,}38+52\cdot 80\cdot 0{,}34}{36\cdot 240+28\cdot 150+60\cdot 100+52\cdot 80}=0{,}3505,$$

или 35,05%.

Записывая формулу (30) таким образом:

$$\bar{i}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}P_kn_ki_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}P_kn_k}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{P_kn_k}{\sum\limits_{k=1}^{m}P_kn_k}\right)i_k,$$

получаем представление $\bar{i}$ в виде взвешенной суммы процентных ставок. Для нашего случая:

$$\bar{i}=0{,}3757\,i_1+0{,}1826\,i_2+0{,}2609\,i_3+0{,}1809\,i_4.$$

Обратим внимание на тот факт, что, применяя формулы (29), (30), (33) и (34), ставки можно выражать как в десятичных дробях, так и в процентах. Это утверждение следует из вида формул. Если, в частности, исходные ставки даны в процентах, то в результате применения формул соответствующие ставки сразу будут выражены в процентах.

в) В этом случае нельзя одновременно применять формулы (30) и (32). Можно показать, что если средний срок кредита рассчитывается по формуле (32), то среднюю процентную ставку надо рассчитывать по формуле (29). А если средняя процентная ставка находится по формуле (30), то средний срок кредита надо находить по формуле (31). Обычно время учитывается при расчете среднего срока кредита. Следовательно, воспользуемся формулами (32) и (29). По формуле (32) $\bar{n}=130$ дней, а по формуле (29):

$$\bar{i}=\frac{36\cdot0{,}35+28\cdot0{,}32+60\cdot0{,}38+52\cdot0{,}34}{36+28+60+52}=0{,}3525,$$

т.е. отличается от 35,05% – средней процентной ставке, найденной в предыдущем пункте. Заметим, что, применяя формулу (29), мы фактически решаем следующую задачу: найти среднюю процентную ставку, когда кредиты выданы на одинаковый срок (130 дней).

Если бы применяли формулы (30) и (31), то $\bar{i}=35{,}05\%$ и $\bar{n}=130{,}68$ дней или $\bar{n}=131$ день.

По существу задача одновременного определения среднего срока кредита и средней процентной ставки имеет бесчисленное множество решений, так как величины $\bar{n}$ и $\bar{i}$ можно находить просто из равенства начисленных процентов:

$$(36+28+60+52)\cdot\bar{n}\cdot\bar{i}=22{,}40\text{, т.е. }\bar{n}\cdot\bar{i}=0{,}1273.$$

Определяя подходящим образом $\bar{n}$, находим $\bar{i}$ (или наоборот). Только надо учитывать соответствие размерностей $\bar{n}$ и $\bar{i}$. Так, если $\bar{n}$ измеряется в годах, то $\bar{i}$ – годовая процентная ставка; если $\bar{n}$ измеряется в днях, то $\bar{i}$ – дневная процентная ставка и т.п. Например, пусть $\bar{n}=130$ дней, тогда

$$\bar{i}=\frac{0{,}1273}{130}=0{,}0009792,$$

т.е. $\bar{i}=0{,}09792\,\%$ в день, или, умножая на 360, получаем 35,25% в год.

г) Среднюю величину кредита $\bar{P}$ можно определить по формуле, аналогичной формулам (30) и (32):

$$\bar{P}=\frac{\sum_{k=1}^{m}P_k n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m}n_k i_k}.$$

Подставляя вместо букв численные значения, находим, что $\bar{P}=40{,}884$ тыс. руб.

Подобным образом, как и в предыдущем пункте, можно одновременно находить среднюю величину кредита и среднюю процентную ставку или одновременно находить среднюю величину кредита и средний срок, но эти задачи на практике встречаются реже, чем задача определения среднего срока и средней процентной ставки.

В разобранном примере значения средней процентной ставки, найденной по различным формулам, не отличались значительно друг от друга. Но так бывает не всегда.

Пример 1.5.2. Выданы следующие кредиты под простые процентные ставки: 340 тыс. руб. на 1 день под 20% годовых и 1 тыс. руб. на 340 дней под 40% годовых. Сравните между собой средние процентные ставки, определенные разными способами.

Решение. Пусть $P_1 = 340$ тыс. руб., $P_2 = 2$ тыс. руб., $n_1 = 1$ день, $n_2 = 340$ дней, $i_1 = 0{,}2$, $i_2 = 0{,}4$.

Если воспользоваться формулой (29), то:

$$\bar{i} = \frac{340 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}4}{340 + 1} = 0{,}2006,$$

а если применить формулу (30), то:

$$\bar{i} = \frac{340 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 340 \cdot 0{,}4}{340 \cdot 1 + 1 \cdot 340} = 0{,}3.$$

Таким образом, $\bar{i}$, найденное по формуле (29), практически совпадает с одной из исходных процентных ставок $i_1 = 20\%$; а $\bar{i}$, найденное по формуле (30), является средним арифметическим ставок $i_1 = 20\%$ и $i_2 = 40\%$. Это хорошо видно из представления средней ставки в виде взвешенной суммы исходных ставок:

а) для формулы (29) $\bar{i} = 0{,}9971\, i_1 + 0{,}0029\, i_2$;

б) для формулы (30) $\bar{i} = 0{,}5\, i_1 + 0{,}5\, i_2$.

Пример 1.5.3. Заемщик взял 27 января у одного кредитора под одну и ту же простую процентную ставку в 40% суммы в размере 10 тыс. руб., 6 тыс. руб., 20 тыс. руб. и 16 тыс. руб. со сроками погашения соответственно 1 марта, 14 мая, 25 июня и 18 августа того же года. Определите средний срок погашения всех ссуд и сумму, которую заемщик должен будет отдать кредитору, если в расчет принимаются точные проценты с точным числом дней и согласно соглашению для кредитора важно только то, чтобы величина начисленных процентов оставалась неизменной. Год невисокосный.

Решение. Всего заемщик взял у кредитора сумму в 52 тыс. руб. Считая, что на эту сумму сразу начисляются проценты и так как $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0{,}4$, по любой формуле для определения средней процентной ставки получим $\bar{i} = 0{,}4$.

Несмотря на то что процентные ставки i_1, i_2, i_3, i_4 являются годовыми, в соответствии со сделанными выше замечаниями средний срок погашения всех ссуд будем измерять в днях и отсчитывать от дня первого планового платежа, т.е. $n_1 = 0$, $n_2 = 74$, $n_3 = 116$, $n_4 = 170$. Взятые суммы измеряем в тыс. руб.:

$P_1 = 10$, $P_2 = 6$, $P_3 = 20$, $P_4 = 16$. Следовательно, сразу воспользовавшись формулой (31), являющейся в этой ситуации частным случаем формулы (32), получаем:

$$\bar{n} = \frac{10 \cdot 0 + 6 \cdot 74 + 20 \cdot 116 + 16 \cdot 170}{10 + 6 + 20 + 16} = 105{,}46 \approx 106 \text{ дней.}$$

Отсчитывая от 1 марта 106 дней, получим 15 июня – дату, когда заемщик может отдать единовременно весь долг.

Поскольку кредитор выдал суммы 27 января, найдем, что 15 июня заемщик должен отдать долг в размере:

$$52\,(1 + \frac{139}{365} \cdot 0{,}4) = 59{,}921 \text{ тыс. руб.}$$

Если бы в расчет принимались обыкновенные проценты с точным числом дней, то средний срок погашения ссуды остался бы тот же (т.е. 15 июня – дата единовременного возврата долга), однако размер возвращаемой суммы, естественно, увеличился:

$$52\,(1 + \frac{139}{360} \cdot 0{,}4) = 60{,}031 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.5.4. Банк собирался выдать ссуды в размере 15 тыс. руб., 25 тыс. руб. и 20 тыс. руб. на сроки соответственно 2, 6 и 9 месяцев под простые ставки 36, 40 и 44% годовых, причем проценты удерживались сразу. Под какую единую ставку банк согласится выдать эти ссуды, если он намерен взыскать при выдаче ссуд ту же величину процентов, как в первоначальном контракте с клиентом? Чему будет равен средний срок ссуды при таком изменении контракта?

Решение. Так как банк сразу удерживает проценты, то клиент на руки получает меньшую по величине ссуду, чем объявлено банком. Например, при ссуде 20 тыс. руб. на 9 месяцев под простую ставку 44% годовых клиент получает $20\,(1 - 0{,}75 \cdot 0{,}44) = 13{,}4$ тыс. руб. и должен будет вернуть банку через 9 месяцев 20 тыс. руб., т.е. на сумму 13,4 тыс. руб. в течение полугода фактически происходит наращение по простой учетной ставке 40%. Таким образом, при определении новой ставки можно воспользоваться формулой (34) определения среднего значения простой учетной ставки.

Измеряя ссуды в тыс. руб., а сроки – в месяцах, полагаем $F_1 = 15$, $F_2 = 25$, $F_3 = 20$; $n_1 = 2$, $n_2 = 6$, $n_3 = 9$; $d_1 = 0{,}36$, $d_2 = 0{,}4$, $d_3 = 0{,}44$. Отсюда:

$$\bar{d} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 0{,}36 + 25 \cdot 6 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 9 \cdot 0{,}44}{15 \cdot 2 + 25 \cdot 6 + 20 \cdot 9} = 0{,}4167, \text{ или } 41{,}67\%.$$

Поскольку уже определена средняя ставка, то для нахождения среднего срока воспользуемся формулой (35):

$$\bar{n} = \frac{15 \cdot 2 + 25 \cdot 6 + 20 \cdot 9}{15 + 25 + 20} = 6 \text{ месяцев.}$$

Если же, как это обычно делается, время учитывать при определении среднего срока, то по формулам (36) и (33) получим:

$$\bar{n} = \frac{15 \cdot 2 \cdot 0{,}36 + 25 \cdot 6 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 9 \cdot 0{,}44}{15 \cdot 0{,}36 + 25 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}44} = 6{,}2 \text{ месяца;}$$

$$\bar{d} = \frac{15 \cdot 0{,}36 + 25 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}44}{15 + 25 + 20} = 0{,}4033, \text{ или } 40{,}33\%.$$

Пример 1.5.5. Банк выдает предпринимателю три ссуды соответственно на 180, 300 и 240 дней под простые ставки 38, 45 и 40% годовых. После того как банк при выдаче ссуд взыскал простые обыкновенные проценты, предприниматель получил на руки суммы 30 тыс., 20 тыс. и 50 тыс. руб. Определите средний срок ссуды.

Решение. Поскольку проценты удержаны сразу, то на выданные суммы по существу происходит наращение по соответствующим учетным ставкам. Пусть $P_1 = 30$ тыс. руб., $P_2 = 20$ тыс. руб., $P_3 = 50$ тыс. руб., $d_1 = 0{,}38$, $d_2 = 0{,}45$, $d_3 = 0{,}4$. Воспользуемся формулой (36). Можно либо в ней заменить F_k на $\dfrac{P_k}{1 - n_k d_k}$, либо вначале найти $F_k = \dfrac{P_k}{1 - n_k d_k}$, а затем применить формулу (36).

Поступим в соответствии с последним способом, т.е. вначале найдем суммы, которые надо вернуть банку. Обратим внимание, что в данном случае при вычислениях исходные сроки необходимо перевести в годы: $n_1 = 180/360 = 0{,}5$ года, $n_2 = 300/360 = 0{,}833$ года, $n_3 = 240/360 = 0{,}667$ года. Применяя формулу (20), получим:

$$F_1 = \frac{30}{1-0{,}5\cdot 0{,}38} = 37{,}037 \text{ тыс. руб.};$$

$$F_2 = \frac{20}{1-0{,}833\cdot 0{,}45} = 31{,}992 \text{ тыс. руб.};$$

$$F_3 = \frac{50}{1-0{,}667\cdot 0{,}4} = 68{,}194 \text{ тыс. руб.}$$

А теперь воспользуемся формулой (36), причем для упрощения расчетов заметим, что $F_k n_k d_k = F_k - P_k$. Следовательно,

$$\bar{n} = \frac{(37{,}037-30)+(31{,}992-20)+(68{,}194-50)}{37{,}037\cdot 0{,}38+31{,}992\cdot 0{,}45+68{,}194\cdot 0{,}4} = 0{,}668 \text{ года},$$

т.е. $\bar{n} = 360\cdot 0{,}668 = 240{,}48$ дня. Округляя, получим средний срок ссуды, равный 241 дню.

Полезно представлять себе и другой способ решения. Можно вначале определить по формуле (25) эквивалентные простые процентные ставки:

$$i_1 = \frac{0{,}38}{1-0{,}5\cdot 0{,}38} = 0{,}4691; \quad i_2 = \frac{0{,}45}{1-0{,}833\cdot 0{,}45} = 0{,}7198;$$

$$i_3 = \frac{0{,}4}{1-0{,}667\cdot 0{,}4} = 0{,}5456,$$

а затем воспользоваться формулой (30):

$$\bar{n} = \frac{30\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4691+20\cdot 0{,}833\cdot 0{,}7198+50\cdot 0{,}667\cdot 0{,}5456}{30\cdot 0{,}4691+20\cdot 0{,}7198+50\cdot 0{,}5456} = 0{,}668 \text{ года}.$$

Пример 1.5.6. Банк использовал в течение 4 месяцев депозиты на суммы 40, 20 и 80 тыс. руб., размещенные соответственно на 1, 2 и 1 месяц по простым процентным ставкам 34, 30 и 42% годовых. Определите стоимость привлеченных средств за 4 месяца для банка в виде средней годовой процентной ставки.

Решение. Полагаем $P_1 = 40$ тыс. руб., $P_2 = 20$ тыс. руб., $P_3 = 80$ тыс. руб.; $i_1 = 34\%$; $i_2 = 30\%$; $i_3 = 42\%$ и воспользуемся формулой (29). Так как исходные ставки берем в процентах (а это, как уже отмечалось, благодаря виду формулы можно сделать), то и результат получим в процентах:

$$\bar{i} = \frac{40 \cdot 34\% + 20 \cdot 30\% + 80 \cdot 42\%}{40 + 20 + 80} = 38\%.$$

Заметим, что другой способ определения стоимости привлеченных средств основан на использовании формулы (23), где через P обозначена использованная сумма средств; через $F - P$ – проценты, выплаченные за использование суммы P в течение времени n. Таким образом, эта стоимость (обозначим ее через i^*) определяется по формуле

$$i^* = \frac{\sum_{k=1}^{m} P_k n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k \cdot n}.$$

Поскольку для любого $k = 1,2,...,m$ справедливо $n \geq n_k$, то нетрудно показать, что для $\bar{i}$ из формулы (29) выполнено неравенство $\bar{i} \geq i^*$. Если $n_k = n$, для любого $k = 1,2,...,m$, то $\bar{i} = i^*$.

В нашем примере $n_1 = 1$ месяц, $n_2 = 2$ месяца, $n_3 = 1$ месяц, $n = 4$ месяца, поэтому

$$i^* = \frac{40 \cdot 1 \cdot 34\% + 20 \cdot 2 \cdot 30\% + 80 \cdot 1 \cdot 42\%}{(40 + 20 + 80) \cdot 4} = 10{,}57\%.$$

Если бы все депозиты были размещены в течение 4 месяцев, то получили бы $i^* = 38\%$.

В ситуации, когда банк выдает денежные средства, ставки $\bar{i}$ и i^* определяют доходность для банка выданных средств. Величину $\bar{i}$ называют также средневзвешенной доходностью.

Задачи

1.5.1. Заемщик взял 18 мая у одного кредитора под одну и ту же простую процентную ставку в 30% суммы в размере 6 тыс. руб., 4 тыс. руб., 3,5 тыс. руб. и 12 тыс. руб. со сроками погашения соответственно 20 июня, 18 августа, 30 сентября и 14 октября того же года. Определите средний срок погашения всех ссуд и сумму, которую заемщик должен будет отдать кредитору, если в расчет принимаются: а) обыкновенные проценты с точным числом дней; б) точные проценты с точным числом дней, и согласно соглашению для кредитора важно только то, чтобы величина начисленных процентов оставалась неизменной. Год невисокосный.

1.5.2. Предприятие получило следующие кредиты под разные простые процентные ставки: 40 тыс. руб. на 7 месяцев под 30% годовых, 60 тыс. руб. на 9 месяцев под 36% годовых и 30 тыс. руб. на 4 месяца под 26% годовых. Определите: а) средний срок кредита; б) среднюю процентную ставку; в) средний срок и среднюю процентную ставку одновременно; г) среднюю величину кредита. В расчетах полагать год равным 360 дням.

1.5.3. Выданы следующие кредиты под простые процентные ставки: 150 тыс. руб. на 2 дня под 15% годовых и 2 тыс. руб. на 300 дней под 25% годовых. Определите двумя способами средние процентные ставки.

1.5.4. Выданы три кредита под разные простые процентные ставки: 42,5 тыс. руб. на 100 дней под 40% годовых, 37 тыс. руб. на 140 дней под 30% годовых и третий кредит на 200 дней под 60% годовых. Найдите величину третьего кредита, если средняя процентная ставка составляет 50%.

1.5.5. Выданы три кредита под разные простые процентные ставки: 35 тыс. руб. на 133 дня под 45% годовых, 19,5 тыс. руб. на 275 дней под 30% годовых и 42,75 тыс. руб. на 111 дней. Найдите величину процентной ставки, под которую выдан третий кредит, если средний срок кредита составляет приблизительно 139 дней.

1.5.6. Банк собирался выдать ссуды 10 тыс. руб., 40 тыс. руб. и 20 тыс. руб. на сроки соответственно 2, 5 и 7 месяцев под простые ставки 34, 40 и 42% годовых, причем проценты удерживались сразу. На какой единый срок банк согласится выдать эти ссуды, если он намерен взыскать при выдаче ссуд ту же величину процентов, как в первоначальном контракте с клиентом? Чему будет равна средняя ставка при таком изменении контракта?

1.5.7. Банк выдает клиенту три ссуды соответственно на 120, 270 и 150 дней под простые ставки 38, 45 и 42% годовых. После того как банк при выдаче ссуд взыскал простые обыкновенные проценты, клиент получил на руки суммы 10 тыс. руб., 16 тыс. руб. и 24 тыс. руб. Определите: а) средний срок ссуды; б) среднюю ставку; в) средний срок и среднюю ставку одновременно; г) среднюю величину ссуды.

1.5.8. Банк использовал в течение полугода депозиты на суммы 50, 30 и 90 тыс. руб., размещенные соответственно на 3, 1 и 2 месяца. Депозиты размещены по простым процентным ставкам соответственно 26, 20 и 32% годовых. Определите стоимость привлеченных средств за полгода для банка в виде средней годовой процентной ставки. Каким еще образом можно оценить стоимость привлеченных средств?

1.5.9. Банк в течение 4 месяцев выдавал следующие одномесячные кредиты на условиях начисления простых процентов: 80 тыс. руб., 30 тыс. руб., 70 тыс. руб. и 20 тыс. руб. соответственно по процентным ставкам 38, 32, 35 и 30% годовых. Определите средневзвешенную доходность кредитных операций за 4 месяца.

1.5.10. Банк в течение 4 месяцев выдал четыре одномесячных кредита на условиях начисления простых процентов соответственно по процентным ставкам 30, 24, 26 и 20% годовых. Средневзвешенная доходность кредитных операций за все время оказалась равной 26,625%. Определите величины кредитов, если первый из них больше на 20 тыс. руб. второго, на 10 тыс. руб. третьего и на 50 тыс. руб. четвертого кредита.

1.6. Валютные расчеты

Основные положения

• В процессе взаимного обмена национальных валют устанавливается их курс, представляющий собой цену денежных единиц одной страны, выраженную в денежных единицах другой страны. Само определение курса валют называется их котировкой. Полная котировка предполагает определение курса покупателя (покупки) и курса продавца (продажи), согласно которым банки покупают и продают валюту. Единица низшего разряда установленной котировки называется пунктом.

• Курс валют в зависимости от формы его выражения называется обменным или девизным. Обменный курс показывает, сколько единиц отечественной валюты можно получить в обмен на единицу иностранной, т.е. это цена иностранной валюты, выраженная в единицах отечественной валюты. Девизный курс, являясь обратной величиной к обменному, показывает, сколько единиц иностранной валюты можно получить за единицу отечественной, т.е. это цена отечественной валюты, выраженная в единицах иностранной валюты. Определение обменного курса также называют прямой котировкой, а девизного курса – косвенной котировкой.

• Кроме обменного и девизного используются также и кросс-курсы валют, представляющие собой соотношения между двумя валютами, следующие из их курсов по отношению к некоторой третьей валюте.

• Девизы называются конвертируемыми, если есть возможность их свободного обмена (конверсии) на валюту других стран по действующему курсу.

• Финансовая операция, связанная с инвестированием денежных средств в валюте, в общем виде представляет собой последовательность следующих действий: конвертирование средств в другую валюту; размещение на рынках финансовых инструментов полученных средств на некоторый срок; обратная конвертация средств, полученных от инвестирования, в исходную (или иную) валюту.

Вопросы для обсуждения

1. Что понимается под курсом валюты?
2. Что такое котировка валют? Из чего состоит полная котировка валют?
3. Что означает термин "девизы"? Что показывает девизный курс?
4. Как называется единица низшего разряда объявленной котировки валют?
5. Чем отличается обменный курс от девизного? Можно ли, зная обменный курс, указать девизный, и наоборот?
6. Каким еще образом называют обменный и девизный курсы?

7. Какие девизы называются конвертируемыми?
8. Как соотносятся между собой по величине курсы покупки и продажи валюты при прямой котировке?
9. Как соотносятся между собой по величине курсы покупки и продажи валюты при косвенной котировке?
10. Как определяется кросс-курс валют?
11. Выгодно ли российским экспортерам снижение курса рубля по отношению к доллару?
12. В каких случаях выгоднее пользоваться рублевым депозитом, а в каких – валютным?
13. Как можно определить в общем виде финансовую операцию, связанную с инвестированием денежных средств в валюте?
14. Может ли финансовая операция "конвертация – наращение – конвертация" дать отрицательную доходность в виде годовой простой процентной ставки?
15. Поясните, в каких случаях наращение, осуществляемое на валютном депозите, совпадает с результатом финансовой операции "конвертация – наращение – конвертация".

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.6.1. В обменном пункте Санкт-Петербурга в начале декабря 1998 г. установлена следующая котировка немецкой марки к рублю: покупка – 10,76 руб., продажа – 12,24 руб. Определите: а) сколько рублей будет получено при обмене 230 немецких марок; б) какое количество немецких марок можно приобрести на 4284 руб.

Решение. а) Для перевода суммы в иностранной валюте (230 немецких марок) в эквивалентную ей сумму в национальной валюте (рубли) необходимо умножить ее на курс покупки:

$$230 \cdot 10{,}76 = 2474{,}8 \text{ руб.}$$

б) Для перевода суммы в национальной валюте (4284 руб.) в эквивалентную ей сумму в иностранной валюте (немецкие марки) необходимо ее разделить на курс продажи:

$$\frac{4284}{12{,}24} = 350 \text{ немецких марок.}$$

В условии примера указана прямая котировка валюты (обменный курс). Косвенная же котировка в данном случае составляет:

покупка : 1 руб. – 1/10,76 = 0,0929 нем. марки

продажа : 1 руб. – 1/12,24 = 0,0817 нем. марки.

При косвенной котировке количество рублей, которое будет получено за 230 немецких марок, находится следующим образом:

$$\frac{230}{0{,}0929} = 2475{,}78 \text{ руб.}$$

Полученное расхождение (в 2 копейки) с предыдущим ответом объясняется выбранной точностью вычисления. Если косвенный курс покупки (основываясь на прямой котировке) взять точнее, например 0,0929368 немецкой марки, то получим 2474,8 руб.

Заметим, что при прямой котировке валюты курс покупки меньше курса продажи, при косвенной – наоборот.

Пример 1.6.2. Банк в Санкт-Петербурге в начале декабря 1998 г. установил следующую котировку валют:

	Покупка	Продажа
Доллар США / рубль	19,20	20,80
Финляндская марка / рубль	3,62	4,06

Определите: а) кросс-курс доллара США к финляндской марке; б) сколько финляндских марок можно приобрести на 200 долларов США; в) сколько долларов США можно приобрести на 2500 финляндских марок.

Решение. а) Рассмотрим операцию обмена долларов на финляндские марки. Вначале доллары обмениваются на рубли по курсу покупки 1 долл. США = 19,20 руб., а затем полученная сумма обменивается на финляндские марки по курсу продажи 1 фин. марка = 4,06 руб., т.е. 1 руб. = $\frac{1}{4{,}06}$ фин. марки. Таким образом, 1 долл. США = $19{,}20 \cdot \frac{1}{4{,}06} = 4{,}729$ фин. марки. Делаем вывод, что в этом банке кросс-курс покупки доллара США к финляндской марке равен 4,729 фин. марки за доллар.

Теперь рассмотрим операцию обмена финляндских марок на доллары. Вначале финляндские марки обмениваются на рубли по курсу покупки 1 фин. марка = 3,62 руб., т.е. 1 руб. = $\frac{1}{3,62}$ фин. марки, а затем полученная сумма обменивается на доллары по курсу продажи 1 долл. США = 20,80 руб., т.е. 1 долл. США $= 20{,}80 \cdot \frac{1}{3{,}62} = 5{,}746$ фин. марок. Следовательно, в этом банке кросс-курс продажи доллара США к финляндской марке равен 5,746 фин. марок за доллар.

б) Так как кросс-курс покупки доллара США к финляндской марке равен 4,729 фин. марки за доллар, то при обмене 200 долл. получим: $200 \cdot 4{,}729 = 945{,}8$ фин. марок.

Этот же результат можно получить, конечно, и с помощью рассуждений, аналогичных выше приведенным. Действительно, вначале доллары обмениваются на рубли по курсу покупки: $200 \cdot 19{,}20 = 3840$ руб. Полученная сумма обменивается на финляндские марки по курсу продажи: $\frac{3840}{4{,}06} = 945{,}8$ фин. марок.

в) Аналогичным образом, обменивая финляндские марки на рубли по курсу покупки и затем рубли – на доллары по курсу продажи, соответственно получаем:

$$2500 \cdot 3{,}62 = 9050 \text{ руб.};$$

$$\frac{9050}{20{,}80} = 435{,}10 \text{ долл.}$$

Поделив 2500 фин. марок на 5,746 (кросс-курс продажи доллара США к финляндской марке), приходим к тому же ответу.

Пример 1.6.3. Предприниматель обменивает имеющиеся у него немецкие марки и помещает полученную сумму на рублевом депозите сроком на полгода под простую процентную ставку 40% годовых, после чего наращенную сумму будет конвертировать опять в немецкие марки. Определите доходность такой финансовой операции в виде годовой простой процентной ставки, если курс покупки немецких марок на начало срока – 9,24 руб., ожидаемый курс продажи через полгода – 10,6 руб.

Целесообразна ли эта финансовая операция, если на валютном депозите для наращения используется простая учетная ставка 12% годовых?

Решение. Обозначим имеющееся количество немецких марок через P. Обменивая их на рубли, предприниматель получит $9{,}24P$ руб. Через полгода наращенная сумма на рублевом депозите составит (формула (9)): $9{,}24P(1+0{,}5\cdot 0{,}4)=11{,}088P$ руб., что при конвертации по ожидаемому курсу продажи даст $\frac{11{,}088P}{10{,}6}=1{,}046P$ немецких марок. Теперь по формуле (23) определяем доходность финансовой операции:

$$\frac{1{,}046P-P}{P\cdot 0{,}5}=\frac{1{,}046-1}{0{,}5}=0{,}092.$$

Далее найдем по формуле (3) или (25) при $n=0{,}5$ года величину простой процентной ставки, обеспечивающей такой же доход, как и учетная ставка $d=12\%$:

$$r=\frac{0{,}12}{1-0{,}5\cdot 0{,}12}=0{,}1277.$$

Так как доходность финансовой операции равна 9,2%, то лучше поместить немецкие марки на валютный депозит, который обеспечивает доходность в 12,77%.

Если бы через полгода курс продажи немецких марок превысил 11,088 руб., то рассматриваемая финансовая операция, связанная с конвертацией валюты, доставила бы вообще отрицательную доходность, т.е. фактически часть денежных средств была бы просто потеряна.

Пример 1.6.4. Клиент собирается поместить в банке 3000 долл. США на рублевом депозите сроком на 120 дней под 42% годовых и затем наращенную сумму будет конвертировать опять в доллары. Курс покупки долларов на начало срока – 17 руб. 30 коп., ожидаемый курс продажи через 120 дней – 19 руб. 10 коп. Процентная ставка при долларовом депозите – 18% годовых. При любом депозите начисляются простые обыкновенные проценты. Найдите наращенную сумму: а) при конвертации валюты; б) непосредственно на валютном депозите. Выясните максимальное значение курса продажи, выше которого нет смысла в конвертировании при помещении денежных средств на депозит.

Решение. Сумма, полученная при конвертации валюты, составит: $3000 \cdot 17{,}3 = 51900$ руб. По формуле (10) при $P = 51900$ руб., $t = 120$ дней, $T = 360$ дней, $r = 0{,}42$ определяем наращенную сумму на рублевом депозите:

$$51\,900(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}42) = 59\ 166 \text{ руб.},$$

конвертируя которую по ожидаемому курсу продажи, клиент получит $\frac{59\,166}{19{,}1} = 3097{,}70$ долл.

Если же он воспользуется валютным депозитом, т.е. при прямом наращении исходной суммы по долларовой процентной ставке, то получит:

$$3000(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}18) = 3180 \text{ долл.},$$

т.е. сумму, которая больше наращенной суммы, полученной при конвертации. Таким образом, при ожидаемом курсе продажи 19 руб. 10 коп. за доллар валюту не имеет смысла конвертировать.

Такой же вывод можно сделать, определяя доходность финансовой операции “конвертация – наращение – конвертация” в виде годовой простой процентной ставки по формуле (23):

$$\frac{3097{,}70 - 3000}{3000 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}0977.$$

Конечно, доходность 9,77% существенно меньше ставки 18% при долларовом депозите. Заметим, что доходность, естественно, можно найти и не зная величины суммы, помещаемой на депозит.

Максимальное значение ожидаемого курса продажи K^*, выше которого нет смысла в конвертировании при помещении денежных средств на депозит, должно быть такой величины, которая при конвертации 59 166 руб. дает 3180 долларов. Т.е. K^* определяется из уравнения 3180=59 166/K^*, решая которое находим: $K^* = 18{,}61$ руб.

Значение K^* можно найти, и не используя величину суммы, помещаемой на депозит, а зная только процентные ставки на депозитах и курс покупки:

$$K^* = 17{,}3 \frac{1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}42}{1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}18} = 18{,}61 \text{ руб.}$$

Задачи

1.6.1. Банк в Санкт-Петербурге 9 ноября 1998 г. установил следующую котировку доллара США к рублю: покупка – 15,40; продажа – 16,50. Определите: а) сколько рублей будет получено при обмене 150 долл.; б) какое количество долларов можно приобрести на 3,3 тыс. руб.

1.6.2. Банк в Санкт-Петербурге 9 ноября 1998 г. установил следующую котировку итальянской лиры: покупка – 8,30 руб. за 1000 лир, продажа – 9,25 руб. за 1000 лир. Определите: а) сколько рублей будет получено при обмене 26 тыс. лир; б) какое количество лир можно приобрести на 888 руб.

1.6.3. Банк в Санкт-Петербурге 9 ноября 1998 г. установил следующую котировку валют:

	Покупка	Продажа
Доллар США / рубль	15,40	16,50
Немецкая марка / рубль	9,45	10,30

Определите: а) кросс-курс доллара США к немецкой марке; б) сколько немецких марок можно приобрести на 240 долл.; в) сколько долларов США можно приобрести на 873 немецкие марки.

1.6.4. Банк в Санкт-Петербурге 9 ноября 1998 г. установил следующую котировку валют:

	Покупка	Продажа
Доллар США / рубль	15,40	16,50
Фунт стерлингов / рубль	24,10	26,80
Немецкая марка / рубль	9,45	10,30
Французский франк / рубль	2,34	2,86

Клиент имеет 250 фунтов стерлингов, 320 немецких марок и 550 французских франков. Какое количество долларов США он сможет приобрести, используя всю имеющуюся валюту?

1.6.5. Известны следующие курсы валют на 7 декабря 1998 г.:

	Покупка	Продажа
Доллар США / рубль	20,10	21,50
Доллар США /французский франк	3,422	3,661

Определите кросс-курс французского франка к рублю.

1.6.6. Известны следующие курсы валют на 7 декабря 1998 г.:

	Покупка	Продажа
Немецкая марка / доллар США	0,574	0,595
Доллар США /французский франк	3,422	3,661

Определите кросс-курс немецкой марки к французскому франку.

1.6.7. Доллары США были приобретены 1 августа 1998 г. по курсу 6 руб. 34 коп. за доллар. Минимальный и максимальный курсы покупки банками долларов 6 ноября 1998 г. составляли 14 руб. 20 коп. и 15 руб. 70 коп. за доллар. Какова эффективность вложения рублей в доллары в виде: а) годовой процентной ставки; б) годовой учетной ставки (при способе 365/365)?

1.6.8. Клиент собирается поместить в банке 1500 долл. на рублевом депозите сроком на полгода под 36% годовых и затем наращенную сумму будет конвертировать опять в доллары. Курс покупки долларов на начало срока – 15 руб.20 коп., ожидаемый курс продажи через полгода – 18 руб. 60 коп. Процентная ставка при долларовом депозите – 12% годовых. При любом депозите начисляются простые проценты. Найдите наращенную сумму: а) при конвертации валюты; б) непосредственно на валютном депозите. Выясните максимальное значение курса продажи, выше которого нет смысла в конвертировании при помещении денежных средств на депозит.

1.6.9. Клиент, имея сумму в размере 20 тыс. руб., предполагает поместить ее на валютном (долларовом) депозите на 9 месяцев под 14% годовых и затем обменять полученную сумму на рубли. Выясните целесообразность (в абсолютных и относительных показателях) этой финансовой сделки с банком, если курс продажи долларов на начало срока – 16 руб.15 коп., ожидаемый курс покупки через 9 месяцев – 19 руб. 10 коп. Процентная ставка при рублевом депозите – 38% годовых. При любом депозите начисляются простые обыкновенные проценты.

1.6.10. Предприниматель обменивает имеющиеся у него доллары США и помещает полученную сумму на рублевом депозите сроком на три месяца под простую процентную ставку 42% годовых, после чего наращенную сумму будет конвертировать опять в доллары. Определите доходность такой финансовой операции в виде годовой простой процентной ставки, если курс покупки долларов на начало срока – 17,14 руб., ожидаемый курс продажи через три месяца – 18,2 руб. Целесообразна ли эта финансовая операция, если простая процентная ставка при долларовом депозите равна 14% годовых?

1.6.11. Господин N 28 августа 1998 г. имеющиеся у него немецкие марки обменивает на рубли и полученную сумму помещает в банк на срок до 26 декабря 1998 г. на условиях начисления простых процентов. После закрытия счета господин N конвертирует наращенную сумму опять в немецкие марки. Какова будет доходность такой финансовой операции в виде годовой простой процентной ставки при различных способах начисления простых процентов, если применяется процентная ставка 60% годовых и год невисокосный? Курс покупки немецких марок на начало срока – 9 руб. 60 коп., ожидаемый курс продажи в конце декабря – 11 руб. 20 коп.

1.6.12. Господин N 6 тыс. руб. конвертирует в доллары США, помещает их на валютном депозите сроком на 3 месяца под простую учетную ставку 12% годовых и полученную наращенную сумму обменивает на рубли. Какова будет доходность такой финансовой операции в виде годовой учетной ставки, если курс продажи долларов США на начало срока – 16 руб. 20 коп., а ожидаемый через 3 месяца курс покупки – 17 руб. 10 коп.? Какую сумму в рублях надеется получить господин N?

1.6.13. Предприниматель собирается свободную сумму в 4000 долл. поместить на рублевый или долларовый депозит на три месяца, причем и в том и в другом случае проценты начисляются по простой учетной ставке. Курс покупки долларов на начало срока – 16 руб. 40 коп., ожидаемый курс продажи через три месяца – 17 руб. 80 коп. Определите наращенную сумму: а) при конвертации валюты; б) непосредственно на валютном депозите, если учетные ставки при рублевом и долларовом депозитах соответственно равны 42 и 16%. Как следует поступить предпринимателю?

1.6.14. Господин N 1 августа 1998 г. поместил 8 тыс. руб. на трехмесячный депозит под простую процентную ставку 40% годовых. На сколько больше рублей получил бы господин N, если бы он на все деньги приобрел доллары США, а 1 ноября обменял доллары на рубли? Банк 1 августа продавал доллары США по курсу 6 руб. 38 коп. за доллар, а 1 ноября покупал доллары США по курсу 14 руб. 30 коп. за доллар, и по рублевому депозиту начислялись обыкновенные проценты с точным числом дней.

1.6.15. Балтийский банк в Санкт-Петербурге объявил о вкладах для физических лиц, которые можно сделать с 7 декабря 1998 г. по 1 февраля 1999 г. Один из вкладов – "новогодний" сроком на 3 месяца, причем в рублях – под процентную ставку 44% годовых, в долларах США – под 13% годовых. Минимальная сумма для рублевого вклада – 10 тыс. руб., для валютного – 1000 долл. Вы имеете 20 тыс. руб. и намереваетесь 7 декабря сделать вклад в Балтийском банке. Курс продажи долларов США в этом банке – 20 руб. Укажите курсы покупки долларов через три месяца, при которых предпочтительнее рублевый вклад; при которых предпочтительнее валютный вклад. При любом вкладе начисляются простые обыкновенные проценты с приближенным числом дней.

1.7. Налог на прибыль

Основные положения

• Налогообложение играет большую роль в экономике любой страны. В современной рыночной экономике применяется сложная и разнообразная система налогов, обеспечивающая подавляющую часть государственных доходов.

• Налоги оказывают существенное влияние на принятие инвестиционных решений: предпочтительность того или иного инвестиционного решения определяется возможными размерами налоговых выплат.

• Физическое лицо выплачивает налог со своего совокупного дохода, в который входят прибыли из любого источника, в том числе прибыль от размещения капитала. В ряде стран облагают налогом и проценты, получаемые при помещении некоторой денежной суммы в рост.

• При прогрессивном подоходном налоге с ростом дохода его доля, изымаемая в госбюджет в форме налога, увеличивается. Такое положение обеспечивается путем разбиения суммы дохода на несколько частей, к каждой из которой применяется своя ставка налога, называемая предельной.

• Средняя ставка налога показывает величину уплаченного налога в процентах от совокупного подлежащего налогообложению дохода.

Вопросы для обсуждения

1. В чем заключается важность налогообложения?
2. Каким образом налоги оказывают влияние на принятие инвестиционных решений?
3. Как определяется совокупный доход физического лица?
4. Чем отличается предельная ставка налога от средней ставки налога?
5. Какая ставка налога более важна для принятия решений по инвестициям: предельная или средняя?
6. В каких случаях средняя и предельная ставки налога совпадают?
7. Как влияет налог на проценты при наращении простыми процентами на процентную ставку?
8. Каким образом с точки зрения коммерческого учета можно интерпретировать налог на проценты при наращении по простой учетной ставке?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.7.1. Дана следующая (условная) схема налога на проценты:

8% с части дохода от 0 тыс. руб. до 5 тыс. руб.;

12% с части дохода от 5 тыс. руб. до 20 тыс. руб.;

16% с части дохода от 20 тыс. руб. до 40 тыс. руб.;

22% с части дохода от 40 тыс. руб. и выше.

Предприниматель получил в качестве начисленных процентов сумму 41 тыс. руб. Какой налог он должен уплатить? Чему равна в этом случае средняя ставка налога?

Решение. Разобьем 41 тыс. руб. на части, соответствующие предельным ставкам налога: 41 = 5 + 15 + 20 + 1. Следовательно, общая величина налога на проценты составит:

$$5 \cdot 0{,}08 + 15 \cdot 0{,}12 + 20 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}22 = 5{,}62 \text{ тыс. руб.}$$

Для определения средней ставки налога поделим полученную величину на 41 тыс. руб.:

$$\frac{5{,}62}{41} = 0{,}13707, \text{ или } 13{,}707\%.$$

Таким образом, если бы ставка налога на проценты была неизменной и равной 13,707%, то величина налога на сумму 41 тыс. руб. составила бы 5,62 тыс. руб.

Средняя ставка показывает общее влияние налогов, однако предельная ставка более четко отражает ситуацию. Так, если бы величина начисленных процентов возросла бы с 41 тыс. руб. до 61 тыс. руб., то размер налога увеличился бы согласно предельной ставке 22% на сумму $20 \cdot 0{,}22 = 4{,}4$ тыс. руб., а не на сумму $20 \cdot 0{,}13707 = 2{,}7414$ тыс. руб. в соответствии со средней ставкой.

Пример 1.7.2. Для участия в некотором проекте предпринимателю понадобится 28 тыс. руб. Между тем он располагает лишь 25 тыс. руб. С целью накопления требуемой суммы предприниматель собирается положить в банк 25 тыс. руб. Предлагаемая банком процентная ставка равна 40% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, используя в расчетах точные проценты и точное число дней, а ставка налога на проценты равна 12%? Год невисокосный. Какое будет количество дней, если налог на проценты не надо уплачивать?

Решение. Обозначим через t необходимое число дней, тогда, полагая в формуле (37) $P = 25$ тыс. руб., $F_q = 28$ тыс. руб., $n = t/365$ года, $r = 0{,}4$, $q = 0{,}12$, получим уравнение относительно переменной t:

$$28 = 25 \cdot [1 + \frac{t}{365} \cdot 0{,}4 \cdot (1 - 0{,}12)]\ .$$

Решая это линейное уравнение, находим: t = 124,43 дня. Таким образом, 125 дней будет вполне достаточно для достижения требуемой суммы.

Если бы не было налога на проценты, то, либо решая уравнение $28 = 25 \cdot (1 + \frac{t}{365} \cdot 0{,}4)$, получающееся из формулы (10), либо пользуясь непосредственно формулой (21), получим:

$$t = \frac{28 - 25}{25 \cdot 0{,}4} \cdot 365 = 109{,}5 \text{ дня.}$$

Следовательно, необходимость уплаты налога на проценты увеличивает искомый срок на 15 дней. Вообще, как видно из формулы (37), налог на проценты по существу уменьшает ставку наращения: начисление процентов фактически происходит не по ставке $0{,}4$, а по ставке $0{,}4 \cdot (1 - 0{,}12) = 0{,}352$, т.е. по процентной ставке 35,2% годовых, которая меньше 40%.

Заметим, что, обозначая $n = \frac{t}{T}$ и разрешая формулу (37) относительно t, получим формулу, аналогичную (21):

$$t = \frac{F - P}{P \cdot r(1 - q)} \cdot T\ ,$$

которой можно воспользоваться при ответе на первый вопрос примера и которая при $q = 0$ совпадает с формулой (21).

Пример 1.7.3. На депозит была помещена сумма в 20 тыс. руб. на 240 дней под простую учетную ставку 30% годовых. Определите наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12% и начисляются обыкновенные проценты. Если в условиях примера наращение осуществлялось по годовой процентной ставке 30%, то какова будет наращенная сумма после уплаты налога на проценты?

Решение. Пользуемся формулой (38), где $P = 20$ тыс. руб., $n = \frac{240}{360}$ года, $d = 0{,}3$, $q = 0{,}12$:

$$F_q = \frac{20}{1-\frac{240}{360}\cdot 0{,}3}(1-\frac{240}{360}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}12) = 24{,}4 \text{ тыс. руб.}$$

Без уплаты налога наращенная сумма равнялась бы (по формуле (20)) 25 тыс. руб. Формула (38) показывает, что государство как бы учитывает сумму 25 тыс. руб. за 240 дней по простой учетной ставке $0{,}3\cdot 0{,}12 = 0{,}036$, что равносильно 3,6% годовых.

Если наращение осуществлялось по простой процентной ставке 30% годовых, то по формуле (37):

$$F_q = 20\cdot[1+\frac{230}{360}\cdot 0{,}3\cdot(1-0{,}12)] = 23{,}52 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.7.4. Клиент положил в банк 60 тыс. руб. под простую процентную ставку 40% годовых и через полгода с учетом уплаты налога на проценты получил 70,2 тыс. руб. Определите ставку налога на проценты.

Решение. Пусть $F_q = 70{,}2$ тыс. руб., $P = 60$ тыс. руб., $n = 0{,}5$ года, $r = 0{,}4$. Разрешая формулу (37) относительно q, получим:

$$q = 1-\frac{1}{nr}(\frac{F_q}{P}-1) = 1-\frac{1}{0{,}5\cdot 0{,}4}(\frac{70{,}2}{60}-1) = 0{,}15,$$

что эквивалентно $q = 15\,\%$.

Задачи

1.7.1. Дана следующая (условная) схема налога на проценты:

9% с части дохода от 0 тыс. руб. до 10 тыс. руб.;

13% с части дохода от 10 тыс. руб. до 25 тыс. руб.;

18% с части дохода от 25 тыс. руб. до 38 тыс. руб.;

26% с части дохода от 38 тыс. руб. и выше.

Предприниматель получил в качестве начисленных процентов сумму: а) 37,9 тыс. руб.; б) 38,1 тыс. руб. Какой налог он должен уплатить? Чему равна средняя ставка налога?

1.7.2. На депозит была помещена сумма в размере 8 тыс. руб. под 20% годовых на 15 месяцев на условиях однократного начисления простых обыкновенных процентов. Определите наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12%.

1.7.3. Клиент банка поместил деньги на депозит под простую процентную ставку и через год получил с учетом уплаты налога на проценты 860 руб. Какая сумма была помещена на депозит, если индекс роста ее за это время без учета уплаты налога на проценты составил 1,38 и ставка налога на проценты равна 12%?

1.7.4. В результате использования простой процентной ставки индекс роста вклада за год составил 1,215. На сколько процентов за это время увеличился вклад с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 14%?

1.7.5. На депозит была помещена сумма в размере 6 тыс. руб. на полтора года, по истечении которых на сумму были начислены простые проценты по годовой учетной ставке 16%. Определите наращенную сумму с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12%.

1.7.6. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму на условиях однократного начисления (по истечении срока) простых процентов по процентной ставке 35% годовых, чтобы она с учетом уплаты налога на проценты увеличилась в 2 раза, если ставка налога равна 20%? Как изменится ответ при осуществлении наращения по простой учетной ставке?

1.7.7. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму на условиях однократного начисления (по истечении срока) простых процентов по процентной ставке 40% годовых, чтобы начисленные проценты с учетом уплаты налога на проценты были в 1,6 раза больше первоначальной суммы, если ставка налога на проценты равна 15%? Как изменится ответ при осуществлении наращения по простой учетной ставке?

1.7.8. Вклад 50 тыс. руб. был размещен в банке 10 февраля под простую процентную ставку 35% годовых и востребован 14 декабря того же года. После уплаты налога на проценты вкладчик стал обладателем суммы в размере 63,133 тыс. руб. Какой способ начисления процентов использовал банк, если ставка налога на проценты равна 12%? Год невисокосный.

1.7.9. Простая процентная ставка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 28% годовых, через полгода была увеличена до 35%, а еще через квартал – до 40% годовых. Определите наращенную за год сумму с учетом уплаты налога начисляются проценты, если ставка налога на проценты равна 15%, величина вклада – 12 тыс. руб. и обыкновенные проценты начисляются в конце года.

1.7.10. За какой срок вклад 8 тыс. руб. возрастет до 9 тыс. руб. с учетом уплаты налога на проценты при однократном начислении (по истечении срока) процентов по простой процентной ставке 34% годовых, если ставка налога на проценты равна 12%?

1.7.11. Для участия в некотором проекте предпринимателю понадобится 12 тыс. руб. Между тем он располагает лишь 10 тыс. руб. С целью накопления требуемой суммы предприниматель собирается положить в банк 10 тыс. руб. Предлагаемая банком процентная ставка равна 35% годовых. Какое количество дней необходимо для накопления требуемой суммы с учетом уплаты налога на проценты, если банк начисляет простые проценты, используя в расчетах точные проценты и точное число дней, а ставка налога на проценты равна 12%? Каково необходимое количество дней, если налог на проценты не надо уплачивать? Год високосный.

1.7.12. Какую сумму необходимо положить в банк под процентную ставку 30% годовых с начислением простых процентов по истечении года, чтобы с учетом уплаты налога на проценты можно было бы получать ежегодную ренту в размере 600 руб., а сумма на счете в банке оставалась бы неизменной? Ставка налога на проценты равна 20%.

1.7.13. Какую сумму необходимо поместить в банк под простую процентную ставку 36% годовых на условиях однократного начисления процентов в конце срока помещения денег, чтобы накопить с учетом уплаты налога на проценты 20 тыс. руб.: а) за полгода; б) за 2 года, если ставка налога на проценты равна 15%?

1.7.14. Клиент собирается поместить в банк 2000 долл. на рублевом депозите сроком на полгода под 58% годовых. Курс покупки долларов на начало срока – 15 руб.40 коп., ожидаемый курс продажи через полгода – 18 руб. 70 коп. Процентная ставка при долларовом депозите – 24%. При любом депозите простые проценты начисляются по истечении срока. Найдите наращенную сумму: а) при конвертации валюты; б) непосредственно на валютном депозите с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12%.

1.7.15. Господин N 1 июля 1998 г. поместил 12 тыс. руб. на трехмесячный депозит под простую процентную ставку 34% годовых. По рублевому депозиту начислялись точные проценты с точным числом дней, ставка налога на проценты равна 12%. На сколько больше рублей получил бы господин N, если бы он на все деньги приобрел доллары США, а 1 октября обменял доллары на рубли? Банк 1 июля продавал доллары США по курсу 6 руб. 20 коп. за доллар, а 1 октября покупал доллары США по курсу 14 руб. 10 коп. за доллар, и комиссионные при обмене валюты не взимались.

1.7.16. Вкладчик, владея 18 тыс. руб., хочет получить, положив деньги на депозит, через полгода не менее 20 тыс. руб. Определите требуемую простую годовую процентную ставку, на основании которой вкладчик должен выбрать банк, если ставка налога на проценты равна 15%.

1.7.17. Положив в банк 50 тыс. руб. под простую процентную ставку 42% годовых, предприниматель через 9 месяцев получил с учетом уплаты налога на проценты 62,6 тыс. руб. Определите ставку налога на проценты.

1.7.18. Клиент поместил 25 тыс. руб. в банк под простую процентную ставку 34% годовых сроком на 3 месяца. Определите доходность такой сделки для клиента в виде простой годовой процентной ставки, если ставка налога на проценты равна 15%. Зависит ли эта доходность от величины помещенной суммы?

1.8. Инфляция

Основные положения

• Инфляция представляет собой процесс, характеризующийся повышением общего уровня цен в экономике или, что практически эквивалентно, снижением покупательной способности денег. При этом инфляция может проявляться двояко: во-первых, в переполнении сферы обращения бумажными деньгами вследствие их чрезмерного выпуска; во-вторых, в сокращении товарной массы в обращении при неизменном количестве выпущенных денег. Основополагающим сущностным признаком инфляции является рост цен в среднем.

• Темпы инфляции определяются с помощью системы индексов цен – относительных показателей, характеризующих среднее изменение уровня цен некоторого фиксированного набора товаров и услуг за выбранный период.

• Индекс цен (его также называют индексом инфляции) показывает, во сколько раз выросли цены за рассматриваемый период. Наиболее широко используемым индексом цен является индекс потребительских цен, отражающий рост цен на некоторый постоянный потребительский набор товаров и услуг (такой набор часто называют потребительской корзиной).

• Темп инфляции, выраженный в процентах, показывает, на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период. Вместо выражения “темп инфляции” часто используют термин “уровень инфляции” или просто говорят “инфляция”, подразумевая именно ее темп за данный промежуток времени.

• Для того чтобы в условиях инфляции стоимость первоначального капитала при его наращении на самом деле росла, исходную процентную ставку увеличивают – происходит ее индексация.

• При инфляции различают следующие виды процентных ставок. Номинальная процентная ставка – это исходная базовая (как правило, годовая) процентная ставка, указываемая в договорах. Доходность, выражаемая этой ставкой, не скорректирована на инфляцию. Номинальная ставка говорит об абсолютном увеличении денежных средств инвестора. Реальная процентная ставка показывает доходность с учетом инфляции, характеризующейся снижением покупательной способности денег. Реальная ставка говорит о приросте покупательной способности средств инвестора. Реальная процентная ставка в условиях инфляции всегда меньше номинальной и может быть даже отрицательной. Положительная процентная ставка – это любая ставка, при которой будет происходить реальное увеличение стоимости капитала при данном индексе инфляции. Иногда любую процентную ставку, превышающую номинальную, называют брутто-ставкой процента. Но, как правило, брутто-ставка является положительной процентной ставкой.

• Дефляция представляет собой процесс, характеризующийся снижением общего уровня цен в экономике.

Вопросы для обсуждения

1. Что представляет собой инфляция?
2. Каким образом могут проявляться инфляционные процессы?
3. Что называется индексом цен и что он показывает? В каких единицах измеряется? Как еще называется индекс цен?
4. Что такое индекс потребительских цен?
5. Как определяется и что характеризует темп инфляции?
6. Какая существует связь между индексом цен и темпом инфляции за рассматриваемый период?
7. Всегда ли повышение цены товара является результатом только инфляционных процессов?
8. Могут ли при высоком уровне инфляции цены на некоторые товары оставаться стабильными или даже падать?
9. Возможна ли инфляция при отсутствии денег?
10. Если текущий темп инфляции отличается от ожидаемого, то в каком случае оказывается в выигрыше кредитор, а в каком – должник?
11. Если известны индексы инфляции за каждый из нескольких периодов, расположенных последовательно друг за другом, то каким образом определить индекс инфляции сразу за эти несколько периодов?
12. Как связан среднемесячный темп инфляции с годовым индексом инфляции?
13. В первом году инфляция составила 200%, в следующем году индекс инфляции был равен 2. Во сколько раз выросли цены за эти два года?
14. Можно ли утверждать, что при среднемесячном темпе инфляции в 2% годовой темп инфляции будет 24%?
15. Как определяется изменение реальной покупательной способности денег за некоторый период при известном индексе инфляции за этот период?
16. При каком соотношении между множителем наращения и индексом инфляции будет происходить реальное наращение капитала?
17. Что понимается под эрозией капитала?
18. Какая должна быть в условиях инфляции простая процентная ставка по кредитам, чтобы взятая сумма с точки зрения ее покупательной способности оставалась постоянной?

9. Какая ставка называется положительной процентной ставкой?
10. Для каких целей в условиях инфляции осуществляют индексацию ставки?
11. Каким образом в условиях инфляции можно индексировать банковские вклады?
12. Почему в условиях инфляции необходимо различать номинальную и реальную процентные ставки?
13. Можно ли сказать, что номинальная процентная ставка представляет собой выраженное в процентах увеличение денежной суммы, которую получает кредитор от заемщика?
14. Можно ли сказать, что реальная процентная ставка представляет собой выраженное в процентах увеличение покупательной способности, которое получает кредитор от заемщика?
15. Может ли реальная процентная ставка быть отрицательной?
16. Может ли 1000% годовых быть отрицательной процентной ставкой?
17. Перечислите виды процентных ставок, которые различают в условиях инфляции.
18. Является ли эффективной финансовая сделка при большой инфляции?
19. Чем характеризуется процесс дефляции?
20. Как изменится за два года индекс потребительских цен, если в первый год дефляция составила 10%, а во втором году инфляция равнялась 10%?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.8.1. *За три месяца стоимость потребительской корзины возросла с 634 руб. до 692 руб. Определите: а) индекс потребительских цен за три месяца; б) среднемесячный индекс потребительских цен; в) темп инфляции за три месяца; г) среднемесячный темп инфляции.*

Решение. а) Полагая $P_1 = 634$ руб., $P_2 = 692$ руб., по формуле (39) находим индекс потребительских цен за 3 месяца ($t = 0{,}25$ года):

$$I_p^{(0,25)} = \frac{692}{634} = 1{,}0915.$$

Следовательно, за рассматриваемый период цены на некоторый постоянный потребительский набор товаров выросли в 1,0915 раза, или на 9,15%.

б) Обозначим через $I_p^{(\frac{1}{12})}$ среднемесячный индекс потребительских цен (индекс инфляции). Тогда по формуле (42) при $k=3$ получим $I_p^{(0,25)} = \left(I_p^{(\frac{1}{12})} \right)^3$, откуда

$$I_p^{(\frac{1}{12})} = \sqrt[3]{I_p^{(0,25)}} = \sqrt[3]{1{,}0915} = 1{,}0296\,.$$

в) Темп инфляции за три месяца находим из формулы (41):

$$h_{0,25} = I_p^{(0,25)} - 1 = 1{,}0915 - 1 = 0{,}0915\,,$$

т.е. темп инфляции, выраженный в процентах, показывает, на сколько процентов выросли цены. Такой же результат получается и по формуле (40):

$$h_{0,25} = \frac{692-634}{634} = 0{,}0915\,.$$

г) Аналогичным образом, как и в предыдущем пункте, воспользуемся формулой (41) при $t=\frac{1}{12}$:

$$h_{\frac{1}{12}} = I_p^{(\frac{1}{12})} - 1 = 1{,}0296 - 1 = 0{,}0296\,.$$

Конечно, $h_{\frac{1}{12}}$ можно найти и преобразуя формулу (42). Так как $I_p^{(0,25)} = (1+h_{\frac{1}{12}})^3$, то

$$h_{\frac{1}{12}} = \sqrt[3]{I_p^{(0,25)}} - 1 = \sqrt[3]{1{,}0915} - 1 = 0{,}0296\,.$$

Пример 1.8.2. В течение полугода каждые два месяца цены росли соответственно на 12, 9 и 14%. Определите индекс и темп инфляции: а) за полгода; б) в среднем за месяц; в) в среднем за квартал.

Решение. а) Поскольку индексы цен за каждые два месяца последовательно равны 1,12; 1,09 и 1,14, то индекс цен (индекс инфляции) $I_p^{(0,5)}$ за полгода (0,5 части года) найдем по формуле (42):

$$I_p^{(0,5)} = 1{,}12 \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}14 = 1{,}3917,$$

откуда находим темп инфляции за этот же период:

$$h_{0,5} = 1{,}3917 - 1 = 0{,}3917, \text{ т.е. } h_{0,5} = 39{,}17\%.$$

б) Поскольку $I_p^{(0,5)} = \left(I_p^{(\frac{1}{12})}\right)^6$, то среднемесячный индекс инфляции составит:

$$I_p^{(\frac{1}{12})} = \sqrt[6]{I_p^{(0,5)}} = \sqrt[6]{1{,}3917} = 1{,}0566,$$

и поэтому среднемесячный темп инфляции $h_{\frac{1}{12}} = 1{,}0566 - 1 = 0{,}0566$, т.е. $h_{\frac{1}{12}} = 5{,}66\%$.

в) Индекс инфляции в среднем за квартал (0,25 части года) можно найти либо по формуле (42):

$$I_p^{(0,25)} = \left(I_p^{(\frac{1}{12})}\right)^3 = (1{,}0566)^3 = 1{,}1797,$$

либо, учитывая, что квартал составляет полгода,

$$I_p^{(0,25)} = \sqrt{I_p^{(0,5)}} = \sqrt{1{,}3917} = 1{,}1797,$$

и поэтому $h_{0,25} = 17{,}97\%$.

Пример 1.8.3. В 1993 г. инфляция в Сербии и Черногории составила 313 миллионов процентов [Мицкевич, с.24]. За какое время деньги теряли половину своей покупательной способности, если год полагать равным 360 дням?

Решение. Известно, что при индексе инфляции за период n, равном $I_p^{(n)}$, сумма P через это время n по своей покупательной способности в ценах текущего дня составит величину $\overline{P}=\dfrac{P}{I_p^{(n)}}$. В условии примера речь идет о темпе инфляции за год, и поэтому для годового индекса инфляции имеем $I_p^{(1)}=3130001$, а следовательно, ежедневный (за $1/_{360}$ года) индекс инфляции равен величине $I_p^{(1/360)}=3130001^{1/360}$. Таким образом, надо определить такое количество дней t, чтобы выполнялось равенство $3130001^{\frac{t}{360}}=2$. Логарифмируя обе части этого равенства, получим:

$$\frac{t}{360}\cdot\ln 3130001=\ln 2,$$

откуда:

$$t=\frac{360\cdot\ln 2}{\ln 3130001}=\frac{360\cdot 0{,}69315}{14{,}95654}\approx 16{,}68 \text{ дня, т.е. примерно 17 дней.}$$

Очевидно, что если считать в году 365 дней, то:

$$t=\frac{365\cdot\ln 2}{\ln 3130001}=\frac{365\cdot 0{,}69315}{14{,}95654}=16{,}92 \text{ дня,}$$

т.е. также примерно 17 дней.

Таким образом, в частности, практически через месяц (через 34 дня) сумма P по своей покупательной способности в ценах текущего дня составит величину $\overline{P}=\dfrac{P}{4}$, т.е. потеряет три четверти своей покупательной способности.

Пример 1.8.4. Определите реальную процентную ставку за год, если номинальная простая процентная ставка равна 42% годовых при годовом темпе инфляции в 20%. Какова должна быть номинальная процентная ставка, чтобы при такой инфляции обеспечить реальную доходность 42% годовых?

Решение. Полагая в формуле (46) $n=1$, $r=0{,}42$, $I_p^{(n)}=1{,}2$, получим:

$$r_{real}=\frac{1+0{,}42}{1{,}2}-1=0{,}1833,$$

т.е. доходность с учетом инфляции при начислении простых процентов составляет: $r_{real}=18{,}33\%$ годовых.

Чтобы иметь реальную доходность 42% в условиях инфляции, необходимо установить процентную ставку, большую, чем 42%. Значение такой ставки находим по формуле (45):

$$\bar{r}=(1+0{,}42)\cdot 1{,}2-1=0{,}704, \text{ или } 70{,}4\% \text{ годовых.}$$

Естественно, можно было воспользоваться и формулой (44), полагая $h_n=0{,}2$:

$$\bar{r}=0{,}42+0{,}42\cdot 0{,}2+0{,}2=0{,}704.$$

Пример 1.8.5. Клиент положил на депозит 16 тыс. руб. на полгода под простую процентную ставку 46% годовых. Определите реальную (по своей покупательной способности) сумму, которую получит через полгода клиент, если среднемесячный темп инфляции составлял 3%. Чему равна реальная доходность такой финансовой операции для клиента в виде годовой простой процентной ставки? При какой процентной ставке сумма на депозите реально остается постоянной?

Решение. По формуле (42) находим индекс инфляции за полгода:

$$I_p^{(0,5)}=(1+0{,}03)^6=1{,}1941.$$

По формуле (43) находим наращенную сумму с учетом ее обесценения:

$$\bar{F}=\frac{16\cdot(1+0{,}5\cdot 0{,}46)}{1{,}1941}=16{,}481 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, по своей покупательной способности 16 тыс. руб. увеличатся за полгода всего на 481 руб. Следовательно, из-за инфляции реальная доходность помещения денег на депозит в виде годовой процентной ставки по формуле (23) составит:

$$r_{real} = \frac{0{,}481}{16 \cdot 0{,}5} = 0{,}0601,$$

т.е. всего 6,01%, а не 46%. Такой же результат получим, и воспользовавшись формулой (46), в которой $n = 0{,}5$, $r = 0{,}46$, $I_p^{(n)} = 1{,}1941$:

$$r_{real} = \frac{1}{0{,}5}\left(\frac{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}46}{1{,}1941} - 1\right) = 0{,}0601.$$

Сумма на депозите с учетом инфляции не изменится за полгода, если множитель наращения будет равен индексу инфляции, т.е. $1 + nr = I_p^{(n)}$. Поэтому:

$$r = \frac{I_p^{(n)} - 1}{n} = \frac{h_n}{n},$$

т.е. для нашего примера:

$$r = \frac{1{,}1941 - 1}{0{,}5} = 0{,}3882.$$

Итак, процентная ставка 38,82% годовых будет просто компенсировать негативное действие инфляции за полгода, и только при ставках, больших 38,82% (так называемых положительных процентных ставках) будет происходить (при наращении) реальное увеличение капитала.

Конечно, при сохранении темпа инфляции 3% в месяц и процентной ставке 38,82% годовых сумма на депозите за год уменьшится. Чтобы она не изменилась за год с учетом инфляции, процентная ставка должна быть больше, чем 38,82%. Действительно, поскольку годовой индекс инфляции составит:

$$I_p^{(1)} = (1 + 0{,}03)^{12} = 1{,}4258,$$

то, применяя последнюю формулу при $n = 1$, получим:

$$r = 1{,}4258 - 1 = 0{,}4258 = 42{,}58\%.$$

Пример 1.8.6. Предприниматель получил в банке кредит 80 тыс. руб. на год. Какую процентную ставку по кредиту должен установить банк, чтобы обеспечить реальную доходность этой финансовой операции в 28% годовых при ожидаемом годовом темпе инфляции 20%? Какую сумму должен будет вернуть предприниматель?

Решение. Так как для годового темпа инфляции имеем $h_1 = 0{,}2$, то по формуле (44) находим искомое значение процентной ставки:

$$\bar{r} = 0{,}28 + 0{,}28 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}536.$$

Следовательно, процентная ставка должна быть равной 53,6% годовых, и в соответствии с ней предприниматель через год должен будет возвратить сумму:

$$F = 80(1 + 0{,}536) = 122{,}88 \text{ тыс. руб.}$$

Очевидно, что процентная ставка, только компенсирующая действие инфляции, равна 20% годовых.

Пример 1.8.7. На сумму 8 тыс. руб. в течение трех кварталов начислялись простые проценты по следующим процентным ставкам: в первом квартале – 40% годовых, во втором – 45% годовых, в третьем – 50% годовых. Среднемесячные темпы инфляции за кварталы оказались равными соответственно 3, 1,5 и 2%. Определите наращенную сумму с учетом инфляции и реальную доходность владельца счета в виде годовой процентной ставки.

Решение. Определим вначале наращенную сумму без учета инфляции по формуле (15), полагая $P = 8$ тыс. руб., $n_1 = n_2 = n_3 = 0{,}25$ года, $i_1 = 0{,}4$, $i_2 = 0{,}45$, $i_3 = 0{,}5$:

$$F = 8 \cdot (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}45 + 0{,}25 \cdot 0{,}5) = 10{,}7 \text{ тыс. руб.}$$

Индекс инфляции за три квартала (0,75 года) составит величину:

$$I_p^{(0,75)} = (1 + 0{,}03)^3 \cdot (1 + 0{,}015)^3 \cdot (1 + 0{,}02)^3 = 1{,}2126.$$

Теперь можно найти наращенную сумму с учетом инфляции:

$$\bar{F} = \frac{10{,}7}{1{,}2126} = 8{,}824 \text{ тыс. руб.}$$

Реальный доход владельца счета равен:

$$\bar{F} - P = 8{,}824 - 8 = 0{,}824 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, реальную доходность от помещения денег в рост определяем по формуле:

$$r = \frac{0{,}824}{8 \cdot 0{,}75} = 0{,}1373 \text{, т.е. } 13{,}73\% \text{ годовых.}$$

Очевидно, что в данном примере множитель наращения с учетом инфляции равен величине:

$$\frac{1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}25 \cdot 0{,}45 + 0{,}25 \cdot 0{,}5}{(1+0{,}03)^3 \cdot (1+0{,}015)^3 \cdot (1+0{,}02)^3} = 1{,}103 .$$

Пример 1.8.8. Банк выдает кредит по простой процентной ставке 44% годовых, при этом удерживая комиссионные в размере 3,5% от суммы кредита. Определите действительную доходность для банка такой кредитной операции в виде простой годовой процентной ставки, если кредит выдается: а) на 4 месяца; б) на год. Банк начисляет обыкновенные проценты на исходную сумму кредита, и ежемесячный темп инфляции составляет 2%.

Решение. а) Обозначим величину кредита через P, тогда банк удерживает в свою пользу комиссионные в размере $0{,}035P$ и поэтому выдает сумму $P - 0{,}035P = 0{,}965P$. За 4 месяца ($1/3$ года) с учетом инфляции величина кредита вместе с начисленными процентами составит:

$$\frac{P(1 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}44)}{(1+0{,}02)^4} = 1{,}0593P .$$

Следовательно, общий доход банка равен $1{,}0593P - 0{,}965P = 0{,}0943P$. Таким образом, действительная доходность кредитной операции для банка в виде годовой процентной ставки составит:

$$r = \frac{0{,}0943P}{0{,}965P \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}2932 ,$$

т.е. $r = 29{,}32\%$ годовых.

б) Проводя аналогичные вышеприведенным рассуждения, находим, что в этом случае общий доход банка равен:

$$\frac{P(1+0{,}44)}{(1+0{,}02)^{12}} - 0{,}965P = 1{,}1354P - 0{,}965P = 0{,}1704P ,$$

и, следовательно, доходность составит:

$$r = \frac{0{,}1704P}{0{,}965P} = 0{,}1766\text{, или } 17{,}66\% \text{ годовых.}$$

В данном случае доходность меньше, чем в предыдущем пункте, так как за год деньги обесцениваются в большей степени, чем за 4 месяца, да и комиссионные в величину доходности доставляют в три раза меньший относительный вклад за год, чем за 4 месяца.

Пример 1.8.9. Вексель учитывается в банке за три месяца до срока его погашения. Какую простую учетную ставку должен применить банк, чтобы при ежемесячном темпе инфляции в 4,5% обеспечить реальную доходность операции учета в виде простой процентной ставки 40% годовых?

Решение. По формуле (42) определяем индекс инфляции за 3 месяца (0,25 года):

$$I_p^{(0{,}25)} = (1 + 0{,}045)^3 = 1{,}1412.$$

Изложим два подхода к решению примера. Согласно первому подходу вначале определяем по формуле (45) процентную ставку, обеспечивающую при данной инфляции реальную доходность 40% годовых:

$$\bar{r} = \frac{(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) \cdot 1{,}1412 - 1}{0{,}25} = 1{,}0213\text{, т.е. } 102{,}13\% \text{ годовых.}$$

Поскольку реальная доходность операции учета должна соответствовать реальной доходности, доставляемой реальной процентной ставкой 40% годовых, то искомая учетная ставка находится по формуле (26), где $n = 0{,}25$ и $r = 1{,}0213$. Таким образом:

$$\bar{d} = \frac{1{,}0213}{1 + 0{,}25 \cdot 1{,}0213} = 0{,}8136\text{, т.е. } 81{,}36\% \text{ годовых.}$$

При другом подходе вначале находим по формуле (26) значение реальной простой учетной ставки, соответствующее значению реальной процентной ставки 40%:

$$d = \frac{0{,}4}{1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4} = 0{,}36364 = 36{,}364\%.$$

Затем по формуле (47) находим учетную ставку, обеспечивающую в условиях существующей инфляции реальную доходность согласно учетной ставке 36,364%:

$$\bar{d} = \frac{1}{0{,}25}\left(1 - \frac{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}36364}{1{,}1412}\right) = 0{,}8136\,.$$

Получили тот же результат.

Пример 1.8.10. Под какую простую процентную ставку в условиях начисления обыкновенных процентов необходимо поместить имеющуюся денежную сумму, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась на 20% за 10 месяцев с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12% и ежемесячный темп инфляции равен 3%? Если наращение осуществляется по простой учетной ставке, то какая она должна быть?

Решение. Определяем по формуле (42) индекс инфляции за 10 месяцев ($\frac{5}{6}$ года):

$$I_p^{(\frac{5}{6})} = (1 + 0{,}03)^{10} = 1{,}3439\,.$$

Пусть P – величина денежной суммы и r – искомая процентная ставка. Тогда начисленные проценты без учета инфляции находим по формуле (12):

$$I = P \cdot \frac{5}{6} \cdot r = 0{,}8333Pr\,.$$

С этой величины в счет уплаты налога проценты пойдет сумма $0{,}12I$ и, следовательно, после уплаты величина наращенной суммы составит:

$$P + 0{,}88I = P(1 + 0{,}7333r)\,,$$

а с учетом инфляции:

$$\frac{P(1 + 0{,}7333r)}{1{,}3439}\,.$$

Полученная сумма должна быть больше исходной на 20%, т.е. в 1,2 раза:

$$\frac{P(1 + 0{,}7333r)}{1{,}3439} = 1{,}2P\,.$$

Сокращая обе части уравнения на P и решая уравнение относительно r, получим:

$$r = \frac{1{,}2 \cdot 1{,}3439 - 1}{0{,}7333} = 0{,}8355\text{, т.е. } r = 83{,}55\% \text{ годовых.}$$

Если наращение осуществляется по простой учетной ставке d, то:

$$I = \frac{P\frac{5}{6}d}{1 - \frac{5}{6}d} = \frac{0{,}8333Pd}{1 - 0{,}8333d}.$$

После уплаты налога величина наращенной суммы составит:

$$P + 0{,}88I = P(1 + \frac{0{,}7333d}{1 - 0{,}8333d}).$$

Полученная сумма с учетом инфляции должна быть больше исходной в 1,2 раза:

$$P(1 + \frac{0{,}7333d}{1 - 0{,}8333d}) \cdot \frac{1}{1{,}3439} = 1{,}2P.$$

Сокращая обе части уравнения на P и решая уравнение относительно d, получим $d = 0{,}4926$, или $d = 49{,}26\%$ годовых.

Заметим, что такой же результат получим сразу, определяя по формуле (26) учетную ставку, эквивалентную простой процентной ставке $r = 83{,}55\%$ при $n = 5/6$:

$$d = \frac{0{,}8355}{1 + \frac{5}{6} \cdot 0{,}8355} = 0{,}4926.$$

Задачи

1.8.1. За полгода стоимость потребительской корзины возросла с 645 руб. до 788 руб. Определите индекс и темп инфляции: а) за полгода; б) среднемесячные; в) в среднем за два месяца.

1.8.2. Среднемесячный темп инфляции в течение года составлял 4%. Определите индекс и темп инфляции: а) за квартал; б) за полгода; в) за год.

1.8.3. В течение года каждый квартал цены росли соответственно на 10, 15, 8 и 12%. Определите индекс и темп инфляции: а) за год; б) в среднем за месяц; в) в среднем за квартал.

1.8.4. На сумму в 10 тыс. руб. в течение трех месяцев начислялись простые проценты по ставке 30% годовых. За каждый месяц цены росли соответственно на 7, 5 и 4%. Найдите наращенную сумму с учетом инфляции и величину годовой положительной процентной ставки.

1.8.5. В стране годовой индекс инфляции составил 900%. Определите среднемесячный и средний ежедневный темпы инфляции. За какое время деньги теряли половину своей покупательной способности, если год полагать равным 360 дням?

1.8.6. В некоторой стране годовая гиперинфляция составила 80 миллионов процентов. За какое время деньги теряли четвертую часть своей покупательной способности, если год считать равным 360 дням?

1.8.7. Доход от финансовой операции, проведенной в течение полугода, составил 30 тыс. руб., причем было вложено в операцию 120 тыс. руб. Среднемесячный темп инфляции в это время составлял 1%. Определите реальную норму прибыли финансовой операции с учетом инфляции.

1.8.8. В результате инвестирования в некоторый проект 35 тыс. руб. через 3 года получено 70 тыс. руб. Темпы инфляции по годам соответственно составили 30, 15 и 20%. Определите реальную норму прибыли от инвестирования с учетом инфляции. Какова норма прибыли при отсутствии инфляции?

1.8.9. В течение трех лет предприятие имело следующие показатели относительно вложенного капитала, при условии, что вся прибыль реинвестируется: 1-й год – 80% прибыли, 2-й год – 10% убытков, 3-й год – 60% прибыли. Какова общая прибыль на вложенный капитал (в процентах) с учетом среднегодового темпа инфляции в 20%?

1.8.10. В результате инвестирования первоначальный капитал за первые два квартала вырос в 1,5 раза, за третий квартал общий капитал вырос в 1,3 раза и за четвертый квартал вся сумма увеличилась в 1,1 раза. Определите, на сколько процентов реально увеличилась первоначальная сумма по своей покупательной способности, если среднемесячный темп инфляции составлял 2%.

1.8.11. Индексы роста вклада за четыре квартала, следующие друг за другом, составили 1,16; 1,09; 1,12 и 1,22. При какой среднемесячной инфляции вклад за это время реально (по своей покупательной способности): а) увеличится на 10%; б) не изменится?

1.8.12. Господин N купил дом в январе 1986 г. за 18 тыс. руб. и продал его в январе 1991 г. за 250 тыс. руб. Инфляция по годам, с 1986 по 1990 г. включительно, составляла соответственно 15, 20, 40, 60, 200%. Выиграл или проиграл господин N и на сколько процентов?

1.8.13. В финансовом соглашении были предусмотрены следующие процентные ставки на год: за первый квартал – 26% годовых; за второй квартал – 30% годовых; за третий и четвертый квартал – 35% годовых. Темпы инфляции за кварталы оказались равными соответственно 8, 5, 6 и 3%. Определите множитель наращения за год с учетом инфляции, если в течение года начисляются простые проценты.

1.8.14. Простая процентная ставка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 30% годовых, через полгода была увеличена до 35%, а еще через квартал – до 40% годовых. Определите реальную величину (по своей покупательной способности) процентов, начисленных за год на вклад 20 тыс. руб., если темп инфляции каждый квартал составлял 6%

1.8.15. На сумму 15 тыс. руб. в течение четырех кварталов начислялись простые проценты по следующим процентным ставкам: в первом квартале – 38% годовых, во втором – 44% годовых, в третьем – 50% годовых и в четвертом – 54% годовых. Среднемесячные темпы инфляции за кварталы оказались равными соответственно 1, 2, 1,5 и 0,5%. Определите наращенную сумму с учетом инфляции и реальную доходность владельца счета в виде годовой процентной ставки.

1.8.16. Господин N получил в банке ссуду на два года под процентную ставку 36% годовых. В первый год индекс цен составил 1,3; во второй – 1,2. Определите, во сколько раз реальная сумма долга (по своей покупательной способности) к концу срока ссуды будет больше выданной банком суммы, если банк начислял простые проценты. Каков будет ответ при отсутствии инфляции?

1.8.17. Банк выдал ссуду на 75 дней в размере 700 тыс. руб. под простую процентную ставку 40% годовых. Рассчитайте реальный доход банка с учетом инфляции, если темп инфляции за это время составил 8% и при начислении простых процентов считается, что в году: а) 360 дней; б) 365 дней.

1.8.18. Имеется два варианта вложения капитала на 2 года. Согласно первому варианту исходный капитал за первый год увеличится на 40%, а за второй год вся сумма увеличится на 30%. Для второго варианта рост капитала составит каждый год 35% от суммы предыдущего года. Сколько процентов составит реальная прибыль по каждому варианту при ожидаемом ежегодном темпе инфляции 20%?

1.8.19. Определите реальную процентную ставку за год, если номинальная простая процентная ставка равна 30% годовых при годовом темпе инфляции в 16%. Какова должна быть номинальная процентная ставка, чтобы при такой инфляции обеспечить реальную доходность 30% годовых?

1.8.20. Определите реальную простую процентную ставку, если номинальная годовая процентная ставка равна 36% годовых и годовой индекс инфляции составил 1,26. Чему должна быть равна величина положительной процентной ставки? Чему должна быть равна величина положительной процентной ставки, обеспечивающая реальную доходность в 36% годовых?

1.8.21. Определите реальную простую учетную ставку, если номинальная годовая учетная ставка равна 30% годовых и годовой индекс инфляции составил 1,2. Чему должна быть равна величина учетной ставки, обеспечивающая реальную доходность, определяемую простой учетной ставкой в 30% годовых?

1.8.22. Предприниматель получил в банке кредит на сумму 60 тыс. руб. на год. Какую процентную ставку по кредиту должен установить банк, чтобы обеспечить реальную доходность этой финансовой операции в 15% годовых при ожидаемом годовом темпе инфляции 30%? Какую сумму должен будет вернуть предприниматель?

1.8.23. Предприниматель получил в банке кредит на сумму 50 тыс. руб. на 9 месяцев. При ожидаемом среднемесячном темпе инфляции 3% банк хочет обеспечить реальную доходность такой финансовой операции в 20% годовых. Какая простая процентная ставка по кредиту должна быть установлена? Какова будет величина погашаемой суммы?

1.8.24. Выдан кредит в размере 100 тыс. руб. с 19 февраля по 6 ноября того же года под простую процентную ставку при условии начисления: а) обыкновенных процентов с точным числом дней; б) точных процентов с точным числом дней. Ожидается, что индекс цен к моменту погашения кредита составит 1,4. Какую процентную ставку по кредиту должен установить банк, чтобы обеспечить реальную доходность этой финансовой операции в 25% годовых? Какова будет величина погашаемой суммы? Выполните расчеты, полагая год невисокосным.

1.8.25. Предприниматель получил ссуду с 15 февраля по 14 ноября того же года под простую процентную ставку 70% годовых. Во сколько раз вырос реальный долг (по своей покупательной способности) при начислении обыкновенных процентов: а) с точным числом дней; б) с приближенным числом дней, если за срок ссуды темп инфляции составил 42,6% и год високосный?

1.8.26. Господин N, владея 30 тыс. руб., хочет получить, положив деньги на депозит, через год не менее 35 тыс. руб. с точки зрения их покупательной способности. Имеет ли смысл ему обратиться в банк, применяющий простую процентную ставку 42% годовых, если прогнозируемый темп инфляции в году равен 15%?

1.8.27. Вкладчик намеревается поместить в банк 9 тыс. руб. на 240 дней на условиях начисления простых обыкновенных процентов. Какова должна быть процентная ставка, обеспечивающая накопление 10 тыс. руб. (рассматриваемых с точки зрения сохранения их покупательной способности), если предполагаемый ежемесячный темп инфляции равен 3%?

1.8.28. Банк выдал кредит на 6 месяцев по простой процентной ставке 42% годовых, при этом удержав комиссионные в размере 3% от суммы кредита. Определите действительную доходность для банка такой кредитной операции в виде годовой процентной ставки, если простые обыкновенные проценты начислялись на исходную сумму кредита и ежемесячный темп инфляции составлял 2%.

1.8.29. Под какую простую годовую процентную ставку в условиях начисления обыкновенных процентов необходимо поместить имеющуюся денежную сумму, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась в 1,25 раза за 9 месяцев с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12% и ежемесячный темп инфляции равен 2%? Если наращение осуществляется по простой учетной ставке, то какая она должна быть?

1.8.30. Простая процентная ставка по вкладам до востребования, составляющая в начале года 30% годовых, через каждые два месяца увеличивалась на 2,5%. Определите реальную величину (по своей покупательной способности) наращенной за год суммы с учетом уплаты налога на проценты, если величина вклада – 20 тыс. руб., среднемесячный темп инфляции – 2% и ставка налога на проценты равна 12%.

1.8.31. В 1993 г. в России можно было поместить деньги на рублевый депозит под 500% годовых или на долларовый депозит под 35% годовых. Инфляция тогда составляла примерно 900%. Выясните, какой из депозитов был предпочтительнее, если курс продажи долларов в начале года был 450 руб., а в конце – 1250 руб. за 1 доллар.

1.8.32. Банк выдает клиенту кредит на 3 месяца, в течение которых, по оценкам экспертов, ежемесячный индекс инфляции составит 1,015. Начисление процентов осуществляется по простой учетной ставке. Найдите значение учетной ставки, компенсирующей потери от инфляции, если банк желает обеспечить реальную доходность, определяемую простой учетной ставкой 22% годовых. Какова должна быть учетная ставка, обеспечивающая в условиях инфляции реальную доходность, определяемую простой процентной ставкой в 22% годовых?

1.8.33. При учете векселей в условиях инфляции должна быть обеспечена реальная доходность, определяемая простой учетной ставкой, равной 30% годовых. Какую простую учетную ставку в этом случае нужно применить, если ожидаемый темп инфляции составляет 4% в месяц и вексель предъявлен для учета за 2 месяца до срока его погашения?

1.8.34. Вексель учитывается в банке за 4 месяца до срока его погашения. Какую простую учетную ставку должен применить банк, чтобы при ежемесячном темпе инфляции 3,5% обеспечить реальную доходность операции учета в виде простой процентной ставки 42% годовых?

1.9. Замена и консолидация платежей

Основные положения

• На практике постоянно возникают ситуации, вынуждающие участников сделки к изменению условий ранее заключенного финансового соглашения. В частности, это касается и платежей. Например, изменение сроков платежей (обычно на более отдаленные, а иногда и в сторону уменьшения, т.е. досрочное погашение задолженности), объединение нескольких платежей в один (консолидация платежей) с установлением срока его погашения и т.п.

• В результате любых изменений ни один из участников не должен терпеть убыток, поэтому в такого рода ситуациях руководствуются принципом финансовой эквивалентности, устанавливающим неизменность финансовых отношений участников до и после изменения финансового соглашения.

• На практике при изменении условий выплат денежных сумм принцип финансовой эквивалентности реализуется путем составления уравнения эквивалентности, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени. Для краткосрочных контрактов процесс приведения, как правило, осуществляется на основе простых ставок.

• Для каждой конкретной ситуации получается свое уравнение эквивалентности, а в некоторых простых случаях можно обойтись и без него.

• Два контракта считаются эквивалентными, если приведенные стоимости потоков платежей по этим контрактам одинаковы. Однако при использовании приведенных значений платежей, осуществленных на основе простых ставок, необходимо согласовать дату (ее называют базовой), на которую производят приведение, ведь от изменения базовой даты в случае простых процентов меняются (иногда в меньшей, а иногда в большей степени) значения новых искомых характеристик.

Вопросы для обсуждения

1. Что означает консолидация платежей?
2. Приведите примеры изменения финансового соглашения в результате изменения условий, касающихся выплат денежных сумм?
3. Что такое принцип финансовой эквивалентности?
4. Каким образом на практике реализуется принцип финансовой эквивалентности?
5. На основе каких ставок, как правило, осуществляется процесс приведения для краткосрочных контрактов?
6. Верно ли положение о том, что при сравнении платежей их приведение к одному моменту времени может осуществляться как путем дисконтирования, так и путем наращения?
7. При замене старого срока платежа новым в каком случае новый платеж будет больше прежнего платежа, а в каком – меньше?
8. При замене старого платежа новым в каком случае срок его выплаты будет больше прежнего срока платежа, а в каком – меньше?
9. Всегда ли можно некоторый платеж, изменяя срок его выплаты, заменить любым по величине платежом?
10. Можно ли трактовать процесс наращения (в частности, простыми процентами) как один из случаев замены одного платежа другим?
11. Каким образом можно связать между собой замену одного платежа другим и процесс дисконтирования?
12. Какие контракты считаются эквивалентными?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 1.9.1. Согласно новому финансовому соглашению платеж 80 тыс. руб. со сроком уплаты 6 месяцев заменяется платежом со сроком уплаты: а) 3 месяца; б) 9 месяцев. Найдите величину нового платежа, если используется простая процентная ставка 40% годовых.

Решение. Пусть $P_1 = 80$ тыс. руб., $r = 0{,}4$. Считая, что год содержит 360 дней и каждый месяц – 30 дней, полагаем $n_1 = 0{,}5$ года.

а) Полагая $n_0 = 0{,}25$ года и учитывая, что $n_0 < n_1$, по формуле (49) получим:

$$P_0 = \frac{80}{1 + (0{,}5 - 0{,}25) \cdot 0{,}4} = 72{,}727 \text{ тыс. руб.}$$

Этот же результат можно получить, и не пользуясь формулой (49), а составив для данной конкретной ситуации уравнение эквивалентности, руководствуясь принципом финансовой эквивалентности. В соответствии с этим принципом величина платежа P_0 должна быть такой, что, получив через 3 месяца ($n_0 = 0{,}25$ года) P_0 и инвестировав эту сумму под простую процентную ставку $r = 0{,}4$, кредитор через время $n_1 - n_0$ мог бы получить сумму $P_1 = 80$ тыс. руб. Таким образом, получим уравнение:

$$P_1 = P_0(1 + (n_1 - n_0)r),$$

в котором неизвестной величиной будет P_0.

Обратим внимание на следующий факт. Если не применять принцип финансовой эквивалентности, а просто воспользоваться равенством приведенных стоимостей (на начальный момент времени) этих платежей, т.е. соотношением

$$\frac{P_0}{1 + n_0 r} = \frac{P_1}{1 + n_1 r},$$

то платеж P_0 будет равен:

$$P_0 = P_1 \frac{1 + n_0 r}{1 + n_1 r} = 80 \cdot \frac{1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4}{1 + 0{,}5 \cdot 0{,}4} = 73{,}333 \text{ тыс. руб.}$$

Эта сумма больше, чем 72,727 тыс. руб. Инвестировав 73,333 тыс. руб. под 40% годовых, кредитор через 3 месяца ($n_1 - n_0 = 0{,}2$ года) получил бы $73{,}333(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}4) = 80{,}666$ тыс. руб., т.е. на 666 руб. больше, чем было предусмотрено первым финансовым соглашением.

б) Поскольку в этом случае $n_0 = 0{,}75$ и $n_0 > n_1$, то по формуле (49) получим:

$$P_0 = 80(1 + (0{,}75 - 0{,}5) \cdot 0{,}4) = 88 \text{ тыс. руб.}$$

Согласно принципу финансовой эквивалентности в этом случае величина платежа P_0 должна быть такой, что, получив через 6 месяцев ($n_1 = 0{,}5$ года) сумму $P_1 = 80$ тыс. руб. и инвестировав эту сумму под простую процентную ставку $r = 0{,}4$, кредитор через время $n_0 - n_1$ мог бы получить сумму P_0. Следовательно, P_0 находится из уравнения $P_0 = P_1(1+(n_0 - n_1)r)$, совпадающего по виду с примененной формулой.

Если же просто воспользоваться равенством приведенных стоимостей, то

$$P_0 = 80 \cdot \frac{1+0{,}75 \cdot 0{,}4}{1+0{,}5 \cdot 0{,}4} = 86{,}667 \text{ тыс. руб.},$$

что меньше, чем 88 тыс. руб. Т.е. кредитору не имеет смысла менять условия соглашения, так как по первому контракту он может получить больше.

Пример 1.9.2. Найдите величину нового срока, если платеж в 20 тыс. руб. с уплатой через 250 дней предполагается заменить платежом в 18 тыс. руб. Используется простая процентная ставка 35% годовых, и расчетное число дней в году равно 360.

Решение. Очевидно, что так как 18 тыс. руб. меньше 20 тыс. руб., то новый срок n_0 должен быть меньше 250 дней. Полагая $P_1 = 20$ тыс. руб., $n_1 = 250/360$ года, $P_0 = 18$ тыс. руб., $r = 0{,}35$, по формуле (50) для случая $P_0 < P_1$ получим:

$$n_0 = \frac{250}{360} - \frac{1}{0{,}35}\left(\frac{20}{18} - 1\right) = 0{,}377 \text{ года, или } n_0 \approx 135 \text{ дней.}$$

Проверим этот результат. Пусть через 135 дней кредитор получит 18 тыс. руб., тогда, инвестировав эту сумму на 115 дней (0,319 года) под простую процентную ставку 35% годовых, он получит $18(1+0{,}319 \cdot 0{,}35) = 20{,}0097 \approx 20$ тыс. руб. Таким образом, с изменением финансового соглашения кредитор убытка не понесет, поскольку через общий срок, равный 250 дням (135 + + 115), он получит 20 тыс. руб., как и в первоначальном варианте контракта.

Обратим внимание, что платеж в 20 тыс. руб. нельзя заменить любым платежом P_0, меньшим этой суммы. По смыслу P_0 не может быть меньше приведенной к начальному моменту величины капитала P_1, т.е. $P_0 \geq \frac{P_1}{1+n_1 r}$ (что и указано в формуле (50)). В условиях разобранного примера: $P_0 \geq \frac{20}{1+\frac{250}{360}\cdot 0{,}35} =$ $= 16{,}089$ тыс. руб.

Пример 1.9.3. Платежи в 6, 4 и 10 тыс. руб. должны быть погашены соответственно через 90, 165 и 270 дней. Кредитор и должник согласились заменить три платежа одним через 120 дней. Найдите величину консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 38% годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.

Решение. При решении задач такого типа пользуются уравнением эквивалентности, согласно которому сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к той же дате. Причем приведение осуществляется путем дисконтирования к более ранней дате или путем наращения величины соответствующего платежа, если эта дата относится к будущему.

В данном случае платежи в 6, 4 и 10 тыс. руб. заменяются единым платежом P_0, величину которого обычно определяют путем приведения всех платежей к дате погашения платежа P_0.

Так как срок погашения платежа в 6 тыс. руб. меньше 120 дней, то процесс приведения для этого платежа будет осуществляться в виде процесса наращения в течение 30 дней (120 – 90) по простой процентной ставке 38% годовых.

Так как срок погашения платежа в 4 тыс. руб. больше 120 дней, то процесс приведения для этого платежа будет осуществляться в виде процесса дисконтирования по простой процентной ставке 38% годовых за 45 дней (165 – 120). По той же причине сумма 10 тыс. руб. дисконтируется за 150 дней (270 – 120).

Складывая приведенные суммы платежей, получим величину консолидированного платежа P_0:

$$P_0 = 6\left(1+\frac{30}{360}\cdot 0{,}38\right)+\frac{4}{1+\frac{45}{360}\cdot 0{,}38}+\frac{10}{1+\frac{150}{360}\cdot 0{,}38} = 18{,}642 \text{ тыс. руб.}$$

Если бы за дату приведения выбрали, например, время выплаты платежа в 6 тыс. руб., то, рассуждая, как и выше, получили бы такое уравнение:

$$\frac{P_0}{1+\frac{30}{360}\cdot 0{,}38} = 6 + \frac{4}{1+\frac{75}{360}\cdot 0{,}38} + \frac{10}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}38},$$

откуда $P_0 = 18{,}683$ тыс. руб.

При выборе в качестве даты приведения момент отсчета всех сроков получим уравнение:

$$\frac{P_0}{1+\frac{120}{360}\cdot 0{,}38} = \frac{6}{1+\frac{90}{360}\cdot 0{,}38} + \frac{4}{1+\frac{165}{360}\cdot 0{,}38} + \frac{10}{1+\frac{270}{360}\cdot 0{,}38},$$

из которого находим, что $P_0 = 18{,}780$ тыс. руб.

Отличие результатов из-за выбора даты приведения обусловлено правилами наращения и дисконтирования по простым процентам. Поэтому при изменении финансового соглашения необходимо оговорить дату, на которую будет осуществляться приведение всех сумм.

Если же рассматривать в общем виде задачу замены платежей $P_1, P_2, \ldots, P_m$, выплачиваемых соответственно через время $n_1, n_2, \ldots, n_m$, одним платежом P_0 с выплатой через время n_0, то, рассуждая, как и выше, можно получить путем приведения всех платежей к дате выплаты платежа P_0 уравнение эквивалентности, в правой части которого платежу P_i будет соответствовать слагаемое $P_i(1+(n_0-n_i)r)$, если $n_0 \geq n_i$, платежу P_j будет соответствовать слагаемое $\frac{P_j}{1+(n_j-n_0)r}$, если $n_0 < n_j$. Таким образом, уравнение имеет вид:

$$P_0 = \sum_i P_i(1+(n_0-n_i)r) + \sum_j P_j(1+(n_j-n_0)r)^{-1},$$

где в первой сумме происходит суммирование по тем i, для которых выполнено $n_0 \geq n_i$, а во второй сумме – по тем j, для которых $n_0 < n_j$.

Пример 1.9.4. Платежи в 3 тыс. руб., 5 тыс. руб. и 7 тыс. руб. должны быть внесены через соответственно 70, 130 и 180 дней. Было достигнуто соглашение заменить три платежа одним, равным им сумме. Определите срок уплаты консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 32% годовых в условиях начисления обыкновенных процентов.

Решение. На практике для определения срока n_0 консолидированного платежа дисконтируют все величины платежей на начальный момент и затем приравнивают приведенную стоимость консолидированного платежа к сумме приведенных стоимостей исходных платежей. Решая полученное уравнение относительно n_0, находим искомый срок.

Итак, находим вначале дисконтированные стоимости исходных платежей:

$$\frac{3}{1+\frac{70}{360}\cdot 0{,}32}=2{,}824 \text{ тыс. руб.}, \quad \frac{5}{1+\frac{130}{360}\cdot 0{,}32}=4{,}482 \text{ тыс. руб.},$$

$$\frac{7}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}32}=6{,}034 \text{ тыс. руб.}$$

Поскольку приведенная стоимость консолидированного платежа равна $\frac{15}{1+n_0\cdot 0{,}32}$ тыс. руб., то приходим к уравнению:

$$\frac{15}{1+n_0\cdot 0{,}32}=2{,}824+4{,}482+6{,}034,$$

решая которое, находим $n_0=0{,}389$ года, или $n_0=140$ дням.

Можно было и сразу воспользоваться формулой (51), полагая $P_1=3$ тыс. руб., $P_2=5$ тыс. руб., $P_3=7$ тыс. руб., $P_0=15$ тыс. руб., $n_1=70/360$ года, $n_2=130/360$ года, $n_3=180/360$ года, $r=0{,}32$:

$$n_0=\frac{1}{0{,}32}\left(\frac{15}{\frac{3}{1+\frac{70}{360}\cdot 0{,}32}+\frac{5}{1+\frac{130}{360}\cdot 0{,}32}+\frac{7}{1+\frac{180}{360}\cdot 0{,}32}}-1\right)=0{,}389 \text{ года.}$$

Обратим внимание, что пользоваться формулой (51) можно только в том случае, когда справедливо неравенство $P_0 \ge \sum_{k=1}^{m} \frac{P_k}{1+n_k r}$. В противном случае эта формула даст отрицательные значения срока n_0.

Если $P_0 = \sum_{k=1}^{m} P_k$, $n_0 r < 1$ и $n_k r < 1$ для всех k, то вместо формулы (51) можно воспользоваться ее приближенным вариантом – формулой определения среднего срока (31). В изложенном примере указанные условия выполнены, поэтому (считая сразу в днях):

$$n_0 = \frac{3 \cdot 70 + 5 \cdot 130 + 7 \cdot 180}{3+5+7} = 141{,}33 \text{ дня},$$

т.е. полученный результат отличается от ранее определенного на один день.

Пример 1.9.5. Согласно контракту предприниматель должен выплатить кредитору 10 тыс. руб. через год, 40 тыс. руб. – через 3 года и 30 тыс. руб. – через 5 лет. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс. руб. через 2 года и 40 тыс. руб. – через 4 года. Являются ли эти контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 34% годовых?

Решение. Два контракта считаются эквивалентными, если приведенные стоимости потоков платежей по этим контрактам одинаковы. В качестве даты приведения обычно принимают дату, от которой измеряются все сроки. В данном случае – это момент заключения контракта.

Сумма приведенных стоимостей платежей по первому контракту составит:

$$\frac{10}{1+0{,}34} + \frac{40}{1+3 \cdot 0{,}34} + \frac{30}{1+5 \cdot 0{,}34} = 38{,}376 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичным образом для второго контракта получим:

$$\frac{30}{1+2 \cdot 0{,}34} + \frac{40}{1+4 \cdot 0{,}34} = 34{,}806 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, первый контракт для кредитора выгоднее.

Пример 1.9.6. Имеется обязательство выплатить суммы 16 тыс. руб. и 24 тыс. руб. соответственно 12 апреля и 1 сентября. Стороны решили пересмотреть порядок выплат: 10 тыс. руб. выплачиваются 20 мая, 8 тыс. руб. – 10 июля и остаток долга погашается 1 августа. Определить величину третьего платежа, если пересчет осуществляется по простой процентной ставке, равной 40% годовых, по способу 365/365. Все операции производятся в пределах одного невисокосного года.

Решение. За дату приведения примем 12 апреля – время выплаты 16 тыс. руб. Для лучшего понимания вида уравнения эквивалентности в данном случае укажем явным образом порядковые номера в году представленных в контракте дат: 12 апреля – 102; 1 сентября – 244; 20 мая – 140; 10 июля – 191; 1 августа – 213. Обозначая остаток долга через P, запишем уравнение эквивалентности:

$$16+\frac{24}{1+\frac{244-102}{365}\cdot 0,4}=\frac{10}{1+\frac{140-102}{365}\cdot 0,4}+\frac{8}{1+\frac{191-102}{365}\cdot 0,4}+\frac{P}{1+\frac{213-102}{365}\cdot 0,4},$$

решая которое относительно P, найдем $P=22{,}297$ тыс. руб.

Пример 1.9.7. Требуется заменить вексель на сумму 18 тыс. руб. со сроком погашения через 60 дней векселем со сроком погашения через 25 дней. В расчетах применяется простая учетная ставка 30% годовых и считается, что в году 360 дней.

Решение. Полагая $P_1=18$ тыс. руб., $n_1=60/360$ года, $n_0=25/360$ года, $d=0{,}3$ и учитывая, что $n_0<n_1$, по формуле (52) получим:

$$P_0=18(1-(\frac{60}{360}-\frac{25}{360})\cdot 0{,}3)=17{,}475 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 1.9.8. Определите величину нового срока при замене платежа 40 тыс. руб. со сроком уплаты 75 дней платежом 46 тыс. руб., если расчеты осуществляются с помощью простой учетной ставки 32% годовых на базе финансового года, равного 360 дням.

Решение. Пусть $P_1 = 40$ тыс. руб., $n_1 = 75/360$ года, $P_0 = 46$ тыс. руб., $d = 0{,}32$. Учитывая, что $P_0 > P_1$, по формуле (53) получим:

$$n_0 = \frac{75}{360} + \frac{1}{0{,}32}(1 - \frac{40}{46}) = 0{,}616 \text{ года, т.е. } n_0 = 222 \text{ дня.}$$

Пример 1.9.9. Владелец векселей на сумму 3,5 тыс. руб., 9 тыс. руб. и 6 тыс. руб. со сроками погашения соответственно 14 июня, 20 августа и 5 октября согласился с предложением должника об объединении трех векселей в один со сроком погашения 10 сентября того же года. Какую сумму необходимо проставить в консолидированном векселе, если используется простая учетная ставка и способ 365/360?

Решение. Используя учетную ставку 30% годовых, осуществим приведение всех сумм на 10 сентября – дату погашения консолидированного векселя.

Так как срок погашения первого векселя меньше даты приведения, то на сумму 3,5 тыс. руб. происходит наращение простыми процентами по учетной ставке в течение 88 (253 – 165) дней. По той же причине осуществляется наращение в течение 21 (253 – 232) дня на сумму 9 тыс. руб. Вексель на сумму 6 тыс. руб. учитывается за 25 (278 – 253) дней.

Складывая приведенные суммы, получим величину P_0 консолидированного векселя:

$$P_0 = \frac{3{,}5}{1 - \frac{88}{360} \cdot 0{,}3} + \frac{9}{1 - \frac{21}{360} \cdot 0{,}3} + 6(1 - \frac{25}{360} \cdot 0{,}3) = 18{,}812 \text{ тыс. руб.}$$

Вообще, рассматривая задачу консолидации платежей $P_1, P_2, \ldots, P_m$, выплачиваемых соответственно через время $n_1, n_2, \ldots, n_m$, с применением учетной ставки d и выбирая за дату приведения момент уплаты консолидированного платежа P_0, с помощью рассуждений, как и при решении примера, можно получить следующее уравнение эквивалентности:

$$P_0 = \sum_i P_i(1 + (n_0 - n_i)d)^{-1} + \sum_j P_j(1 + (n_j - n_0)d),$$

где в первой сумме происходит суммирование по тем i, для которых выполнено $n_0 \geq n_i$, а во второй сумме – по тем j, для которых $n_0 < n_j$.

Пример 1.9.10. В соответствии с контрактом предприниматель должен выплатить кредитору суммы в размерах 12, 20 и 50 тыс. руб. через 90, 120 и 210 дней после 15 марта. Однако было принято совместное решение погасить все суммы единым платежом в 72 тыс. руб. Найдите дату уплаты консолидированного платежа, если используется простая учетная ставка 34% годовых на базе финансового года, равного 360 дням.

Решение. Для пояснения существа дела покажем вначале, как в данном случае можно составить уравнение эквивалентности для определения срока консолидированного платежа. Как и при использовании простой процентной ставки, в этой ситуации для определения срока n_0 консолидированного платежа осуществляют дисконтирование всех сумм по простой учетной ставке на начальный момент (в примере – 15 марта) и затем приравнивают приведенную стоимость консолидированного платежа к сумме приведенных стоимостей исходных платежей. Решая полученное уравнение относительно n_0, находят искомый срок.

Итак, находим вначале дисконтированные стоимости исходных платежей:

$$12(1-\frac{90}{360}\cdot 0{,}34)=10{,}98 \text{ тыс. руб.},$$

$$20(1-\frac{120}{360}\cdot 0{,}34)=17{,}733 \text{ тыс. руб.},$$

$$50(1-\frac{210}{360}\cdot 0{,}34)=40{,}083 \text{ тыс. руб.}$$

Так как приведенная стоимость консолидированного платежа равна $72(1-n_0\cdot 0{,}34)$ тыс. руб., то уравнение примет вид:

$$72(1-n_0\cdot 0{,}34)=10{,}98+17{,}733+40{,}083,$$

решая которое, находим $n_0=0{,}131$ года, или $n_0=47$ дней. Отсчитывая от 15 марта 47 дней, получим 1 мая – дату уплаты консолидированного платежа.

Можно и сразу воспользоваться формулой (54), полагая $P_1 = 12$ тыс. руб., $P_2 = 20$ тыс. руб., $P_3 = 50$ тыс. руб., $P_0 = 72$ тыс. руб., $n_1 = 90/360$ года, $n_2 = 120/360$ года, $n_3 = 210/360$ года, $d = 0{,}34$:

$$n_0 = \frac{1}{0{,}34}\left(1 - \frac{12(1 - \frac{90}{360}\cdot 0{,}34) + 20(1 - \frac{120}{360}\cdot 0{,}34) + 50(1 - \frac{210}{360}\cdot 0{,}34)}{72}\right) =$$

$$= 0{,}131 \text{ года.}$$

В заключение отметим, что условие этого примера можно было записать и в таком виде: требуется заменить три векселя на суммы 12, 20 и 50 тыс. руб. со сроками погашения через 90, 120 и 210 дней одним векселем на сумму 72 тыс. руб. Тогда необходимо было бы найти срок погашения нового векселя. Кстати, согласно формуле (54), новый вексель не может быть выписан на сумму, меньшую 68,796 тыс. руб.

Задачи

1.9.1. Платеж в 4 тыс. руб. со сроком уплаты 3 месяца необходимо заменить платежом со сроком уплаты: а) 2 месяца; б) 5 месяцев. Определите величину нового платежа, если используется простая процентная ставка 36% годовых.

1.9.2. Найдите величину нового срока, если платеж в 5 тыс. руб. со сроком уплаты 6 месяцев предполагается заменить платежом в 4,8 тыс. руб. и используется простая процентная ставка 34% годовых.

1.9.3. Требуется заменить вексель на сумму 50 тыс. руб. со сроком погашения через 90 дней векселем со сроком погашения: а) через 120 дней; б) через 60 дней. В расчетах применяется простая учетная ставка 30% годовых и в году 360 дней.

1.9.4. Найдите величину нового срока, если платеж в 10 тыс. руб. со сроком уплаты 75 дней предполагается заменить платежом в 12 тыс. руб. В расчетах применяется простая учетная ставка 28% годовых и в году 365 дней.

1.9.5. Изучаются варианты замены платежа 100 тыс. руб. со сроком уплаты 4 месяца новым платежом. В каких границах может изменяться величина нового платежа, если используется простая процентная ставка 36% годовых? Как изменится ответ, если используется простая учетная ставка 36% годовых?

1.9.6. Платежи в 8 тыс. руб., 5 тыс. руб., 10 тыс. руб. и 7 тыс. руб. должны быть погашены соответственно через 60, 150, 120 и 200 дней. Кредитор и должник согласились заменить четыре платежа одним через 140 дней. Найдите величину консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 40% годовых и в расчет принимаются обыкновенные проценты.(За дату приведения принять момент выплаты консолидированного платежа.)

1.9.7. Клиент получил в банке кредит на сумму 12 тыс. руб. под 30% годовых. В соответствии с финансовым контрактом клиент обязался погасить кредит тремя платежами с процентами: 6, 2 и 4 тыс. руб. соответственно через 90 , 120 и 180 дней. Однако через некоторое время по обоюдному согласию сторон было решено погасить кредит одним платежом через 150 дней. Найдите величину консолидированного платежа, если начисляются простые обыкновенные проценты. (За дату приведения принять момент выплаты консолидированного платежа.)

1.9.8. Платежи в 5 тыс. руб. и 7 тыс. руб. должны быть погашены соответственно через 60 и 105 дней. Кредитор и должник согласились заменить два платежа одним в размере 11,5 тыс. руб. Найдите срок оплаты консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 32% годовых и начисляются обыкновенные проценты. Для сравнения платежей в качестве даты приведения выбрать день, от которого отмеряются все сроки. Как изменится результат, если в качестве даты приведения выбрать день уплаты платежа в 7 тыс. руб.?

1.9.9. Платежи в 4 тыс. руб., 12 тыс. руб. и 9 тыс. руб. должны быть внесены через соответственно 80, 150 и 210 дней. Было достигнуто соглашение заменить три платежа одним, равным их сумме. Определите срок уплаты консолидированного платежа, если используется простая процентная ставка 30% годовых в условиях начисления обыкновенных процентов. В качестве даты приведения выбрать день, от которого измеряются все сроки.

1.9.10. В соответствии с контрактом предприниматель в течение двух лет в конце каждого квартала должен выплачивать по 5 тыс. руб. Через год, сделав четыре платежа, предприниматель решил сразу погасить оставшийся долг. Какую сумму он должен заплатить в условиях начисления процентов по простой процентной ставке 30% годовых?

1.9.11. По условиям контракта господин N в течение четырех лет каждые полгода должен выплачивать другому лицу по 12 тыс. руб. Через два года, сделав четыре платежа, господин N предложил через полгода выплатить весь оставшийся долг. Какая сумма должна быть выплачена, если расчеты осуществляются по простой процентной ставке 36% годовых?

1.9.12. Платеж 20 тыс. руб. со сроком уплаты 100 дней заменяется двумя платежами со сроками 30 дней и 60 дней, причем первый платеж равен 12 тыс. руб. Какова величина второго платежа, если расчеты осуществляются по простой процентной ставке 25% годовых и начисляются обыкновенные проценты? Для сравнения платежей в качестве даты приведения выбрать день, от которого измеряются все сроки. Как изменится результат, если в качестве даты приведения выбрать день уплаты первоначального платежа?

1.9.13. Платеж 16 тыс. руб. со сроком 45 дней заменяется на четыре равных платежа со сроками 10, 30, 60 и 80 дней. Какова величина этих платежей, если в расчетах используется простая процентная ставка 36% годовых и начисляются обыкновенные проценты? Для сравнения платежей в качестве даты приведения выбрать день, от которого измеряются все сроки. Как изменится результат, если в качестве даты приведения выбрать день уплаты первоначального платежа?

1.9.14. По условиям контракта сумма в 40 тыс. руб. должна быть выплачена через 8 месяцев. Однако принято согласованное решение о новом порядке выплат через 4, 6 и 10 месяцев, причем первая сумма равна 10 тыс. руб., а две другие одинаковы по величине. Найдите эти суммы, если используется простая учетная ставка 20% годовых и начисляются обыкновенные проценты? Для сравнения платежей в качестве даты приведения выбрать день, от которого измеряются все сроки. Как изменится результат, если в качестве даты приведения выбрать день уплаты первоначального платежа?

1.9.15. Владелец векселей (кредитор) со сроками уплаты 12 июля (2 тыс. руб.) и 20 сентября (5 тыс. руб.) согласился с предложением должника об объединении двух векселей в один со сроком погашения 1 августа того же года. Какую сумму необходимо проставить в консолидированном векселе, если используется простая учетная ставка 32% годовых и способ 365/360 (обыкновенный процент с точным числом дней)? В качестве даты приведения принять 1 августа.

1.9.16. Владелец векселя на сумму 12 тыс. руб. со сроком уплаты 14 мая согласился заменить его на три векселя с одинаковыми суммами и сроками погашения 10 марта, 1 июня и 10 августа того же года. Определите сумму, которую необходимо проставить в каждом из новых векселей, если используется простая учетная ставка 25% годовых и способ 365/360. Для сравнения сумм в качестве даты приведения выбрать 14 мая.

1.9.17. По финансовому соглашению фирма должна выплатить одному кредитору суммы в размерах 1, 5 и 4 тыс. руб. через 20, 45 и 90 дней после 1 июня. Однако позже было принято совместное решение погасить все суммы единым платежом в 10,1 тыс. руб. Найдите дату уплаты консолидированного платежа, если используется простая учетная ставка 30% годовых и считают, что в году 360 дней. В качестве даты приведения принять 1 июня.

1.9.18. По условию контракта суммы в 15, 5 и 10 тыс. руб. должны быть выплачены в течение года соответственно 15 апреля, 8 июня и 20 сентября. Стороны решили пересмотреть порядок выплат: 12 тыс. руб. выплачивается 25 мая, 4 тыс. руб. – 15 июля и остаток долга погашается 1 августа. Определите величину третьего платежа, если пересчет осуществляется по простой процентной ставке, равной 38% годовых, по способу 365/365 (точный процент с точным числом дней) и год високосный. Для сравнения платежей в качестве базовой даты принять: а) 15 апреля; б) 20 сентября.

1.9.19. По финансовому соглашению предприниматель должен выплатить банку в течение года суммы в 20, 10 и 30 тыс. руб. соответственно 1 марта, 15 июля и 18 октября. По обоюдному согласию решено осуществить три одинаковых платежа в новые сроки: 10 апреля, 1 июня и 1 сентября. Какова величина этих платежей, если пересчет осуществляется по простой процентной ставке 26% годовых способом 365/365 и год невисокосный. Для сравнения платежей в качестве базовой даты принять: а) 1 марта; б) 18 октября.

1.9.20. Согласно контракту предприниматель должен выплатить кредитору 5 тыс. руб. через 1 год, 25 тыс. руб. – через 3 года и 20 тыс. руб. – через 4 года. Предприниматель предложил выплатить 20 тыс. руб. через 2 года и 25 тыс. руб. – через 3 года. Являются ли эти контракты эквивалентными, если в расчетах используется простая процентная ставка 30% годовых? В случае неэквивалентности контрактов укажите, какой из них выгоднее для предпринимателя. Для сравнения платежей в качестве даты приведения принять момент заключения первого контракта.

1.9.21. Имеется обязательство выплачивать долг в течение четырех лет каждые полгода платежами в 15 тыс. руб. Какова должна быть величина платежей при выплате этого долга равными ежегодными платежами, если в расчетах используется простая процентная ставка 28% годовых? Для сравнения платежей в качестве даты приведения принять момент заключения первого контракта.

Глава 2
СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1. Сложная процентная ставка

Основные положения

• Полагают, что инвестиция сделана на условиях сложного процента, если очередной доход за период исчисляется не с исходной величины инвестированного капитала (как для простых процентов), а с общей суммы, включающей также и ранее начисленные, и не востребованные инвестором проценты. В этом случае происходит капитализация процентов, т.е. присоединение начисленных процентов к их базе, и, следовательно, база, с которой начисляются проценты, все время возрастает.

• Использование в расчетах сложного процента в случае многократного его начисления более логично, поскольку в этом случае капитал, генерирующий доходы, постоянно возрастает.

• Формула наращения по сложным процентам является одной из базовых формул в финансовых вычислениях, поэтому для удобства пользования значения множителя наращения табулированы для различных значений процентной ставки и числа периодов начисления.

• Для кредитора более выгодной является схема простых процентов, если срок ссуды менее одного года (проценты начисляются однократно в конце периода); более выгодной является схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год (проценты начисляются ежегодно); обе схемы дают одинаковые результаты при продолжительности периода 1 год и однократном начислении процентов.

• При заключении финансового соглашения на время, не равное целому числу лет, проценты, как правило, начисляются либо по схеме сложных процентов, либо по смешанной схеме (используется схема сложных процентов для целого числа лет и схема простых процентов – для дробной части года). Наращенная сумма будет больше при использовании смешанной схемы. Аналогичные способы начисления процентов применяются и в том случае, когда базовый период начисления процентов отличен от года (например, квартал, месяц и т.п.).

• В случае нецелого числа лет кроме схемы сложных процентов и смешанной схемы возможны и другие методы начисления процентов.

• В практических расчетах для наглядной и быстрой оценки эффективности предлагаемой ставки наращения при реализации схемы сложных процентов пользуются приблизительным расчетом времени, необходимого для удвоения инвестированной суммы, известным как *"правило 72-х"*. Это правило хорошо срабатывает для небольших значений процентной ставки.

• С увеличением частоты начисления сложных процентов по номинальной процентной ставке растет величина наращенной суммы.

• При проведении сравнительного анализа эффективности финансовых контрактов используется эффективная годовая процентная ставка – это годовая ставка сложных процентов, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и начисление процентов несколько раз в год по номинальной ставке, деленной на число периодов начисления. Номинальная годовая процентная ставка может существенно отличаться от соответствующей ей эффективной годовой процентной ставки.

• В финансовых соглашениях не имеет значения, какую из ставок указывать – эффективную или номинальную, поскольку использование как одной, так и другой дает одну и ту же (с любой точностью приближения) наращенную сумму.

• Для анализа эффективности разнообразных финансовых контрактов эффективную процентную ставку определяют и как сложную ставку, обеспечивающую переход от начальной суммы к наращенной при однократном начислении процентов за базовый период (например, за год), т.е. не используя явным образом номинальную ставку.

• Математическим дисконтированием (дисконтированием по сложной процентной ставке) называется задача нахождения такой величины первоначального капитала, которая через заданное количество времени при наращении по сложной процентной ставке обеспечит получение планируемой суммы. Значения множителя дисконтирования (его также называют дисконтным множителем) табулированы для различных значений процентной ставки и числа периодов дисконтирования.

• Определяя процентную ставку в множителе дисконтирования, обычно исходят из так называемого безопасного (или гарантированного) уровня доходности финансовых инвестиций, который обеспечивается государственным банком по вкладам или при операциях с ценными бумагами. При этом может даваться надбавка за риск, причем, чем более рисковым считается рассматриваемый проект или финансовый контракт, тем больше размер премии за риск.

• При использовании сложной процентной ставки будущие поступления, являющиеся разновременными суммами, можно оценивать с позиции любого момента времени.

Вопросы для обсуждения

1. Как происходит начисление сложных процентов на капитал в течение всего срока?
2. Какой вид имеет множитель наращения при начислении процентов по сложной процентной ставке?
3. Какой можно привести экономический смысл множителя наращения сложных процентов при использовании процентной ставки?
4. Почему представляется естественным использование в расчетах именно сложных процентов в случае многократного их начисления?
5. Что называется капитализацией процентов?
6. Как связаны между собой наращение по сложной процентной ставке и проценты *"со 100"*?
7. Каким образом должны соответствовать друг другу длина периода начисления и процентная ставка?
8. Как пользоваться таблицей значений множителя наращения при начислении сложных процентов?
9. Как соотносятся величины наращенных сумм при начислениях по схеме простых и по схеме сложных процентов?

10. Как соотносятся величины наращенных сумм при начислениях процентов по сложной процентной ставке и по простой учетной ставке, когда эти ставки равны?
11. Какие два основных способа начисления процентов, связанных со сложными процентами, вы знаете? Какой из них выгоднее для кредитора? Возможны ли еще какие-либо способы?
12. Какой из всех возможных способов начисления процентов, связанных со сложными процентами, доставляет наибольшую наращенную сумму, а какой – наименьшую?
13. За какой период происходит удвоение первоначальной суммы в результате наращения по сложной процентной ставке?
14. В чем заключается *"правило 72-х"*? Какие аналогичные правила еще можно указать?
15. Какая годовая процентная ставка называется номинальной?
16. Верно ли, что начисление сложных процентов по процентной ставке 12% годовых не эквивалентно начислению сложных процентов по процентной ставке 1% в месяц? А при начислении простых процентов?
17. Что происходит с наращенной суммой, если растет частота начисления сложных процентов по процентной ставке? Чем эта ситуация отличается от случая простых процентов?
18. Могут ли номинальные процентные ставки, предусмотренные в финансовых контрактах, служить в качестве показателей для сравнения этих контрактов?
19. Какая ставка называется эффективной годовой процентной ставкой? От каких параметров она зависит?
20. Как ведет себя эффективная годовая процентная ставка с увеличением внутригодовых начислений?
21. Как пояснить с финансовой точки зрения соотношение между эффективной и номинальной процентными ставками?
22. В каком случае эффективная годовая процентная ставка совпадает с номинальной?
23. Что происходит с величиной номинальной процентной ставки при определении ее через эффективную годовую процентную ставку, когда число начислений процентов в году растет?
24. Какие номинальные процентные ставки называются эквивалентными?
25. Каким образом можно определить эффективную процентную ставку, не используя явным образом номинальную ставку?

26. Почему номинальная ставка процента по кредитам так называемых коротких денег (на одну-две недели) ниже ставки центрального банка?

27. Приведите формулу дисконтирования по сложной процентной ставке.

28. Каков экономический смысл множителя дисконтирования при математическом дисконтировании?

29. Как пользоваться таблицей значений множителя дисконтирования при дисконтировании по сложной процентной ставке?

30. Как можно связать между собой дисконтирование по сложной процентной ставке и проценты *"на 100"*?

31. Из каких соображений может определяться процентная ставка в дисконтном множителе при математическом дисконтировании?

32. Как соотносятся величины дисконтированных сумм при дисконтировании по сложной процентной ставке и по простой учетной ставке, когда эти ставки равны?

33. С позиции какого момента времени можно оценить будущие поступления, являющиеся разновременными суммами, при использовании сложной процентной ставки?

34. Почему с увеличением интервала времени модель приведения разновременных сумм к одному моменту становится более грубой? Какие факторы не учтены в модели?

35. Как соотносятся между собой результаты математического дисконтирования по простой и сложной процентным ставкам?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 2.1.1. Сумма 20 тыс. руб. инвестируется под процентную ставку 25% годовых: а) на 6 лет; б) на 9 лет. Найдите наращенные суммы при условии ежегодного начисления сложных и простых процентов.

Решение. а) Полагая $n=6$, $P=20$ тыс. руб., $r=0{,}25$, при наращении сложными процентами по формуле (55) получим:

$$F_6 = 20(1+0{,}25)^6 = 20\cdot 3{,}8147 = 76{,}294 \text{ тыс. руб.}$$

Множитель наращения в формуле (55) всегда можно вычислить непосредственно по формуле, однако при решении этого примера можно воспользоваться и таблицей 1 значений этого множителя из приложения 3[1]. В данном случае на пересечении строки, соответствующей числу периодов $n = 6$, и столбца для $r = 25\%$ находим, что значение множителя наращения составляет: $FM1(25\%,6) = 3{,}8147$[2].

Если бы наращение осуществлялось простыми процентами, то по формуле (9):

$$F = 20(1 + 6 \cdot 0{,}25) = 50 \text{ тыс. руб.}$$

б) Поскольку в этом случае $n = 9$, то при наращении сложными и простыми процентами соответственно получим:

$$F_9 = 20(1 + 0{,}25)^9 = 20 \cdot 7{,}4506 = 149{,}012 \text{ тыс. руб.},$$

$$F = 20(1 + 9 \cdot 0{,}25) = 65 \text{ тыс. руб.}$$

В обоих случаях наращение сложными процентами доставляет бóльшую по величине сумму, чем наращение простыми процентами. С увеличением числа периодов начисления разница между этими наращенными суммами все больше растет. Заметим, однако, что если бы проценты начислялись за время, меньшее года, то наращение простыми процентами доставило бы бóльшую сумму, чем сложными.

Пример 2.1.2. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 1 млн руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 30%, периоды наращения различны: 30 дней, 90 дней, 180 дней, 1 год, 3 года, 10 лет, 20 лет, 50 лет. Полагать год равным 360 дней. Обсудите полученные результаты.

---

[1] Таблицы значений множителя наращения (и прочие финансовые таблицы) приведены с разной степенью общности во многих книгах, связанных с финансовыми вычислениями. См., например, работы таких авторов, как Е.М. Четыркин, Я.С. Мелкумов, Г.П. Башарин и др.

[2] Заметим, что приводимые в данной работе обозначения множителя наращения и других факторных множителей являются условными. В англоязычной и переводной литературе широко распространены обозначения, представляющие собой аббревиатуры англоязычных наименований соответствующих множителей.

Решение. Применяя при $P=1$ и $r=0{,}3$ для простых процентов формулу (9), а для сложных – формулу (55), получим следующие результаты, представленные для наглядности в табличном виде:

(млн руб.)

Схема начисления	30 дней (n=1/12)	90 дней (n=1/4)	180 дней (n=1/2)	1 год (n=1)	3 года (n=3)	10 лет (n=10)	20 лет (n=10)	50 лет (n=10)
Простые проценты	1,025	1,075	1,15	1,3	1,9	4	7	16
Сложные проценты	1,0221	1,0678	1,1402	1,3	2,1970	13,7858	109,0496	497929,2230

Таким образом, если денежные средства размещены в банке на срок менее одного года, то более выгодна схема простых процентов. Так, в частности, при сроке в 180 дней наращенная сумма составит: при использовании схемы простых процентов – 1,15 млн руб.; при использовании схемы сложных процентов – 1,1402 млн руб., т.е. получили разницу между суммами в 9,8 тыс. руб. Если срок размещения денежных средств превышает один год, ситуация меняется диаметрально – более выгодна схема сложных процентов, причем наращение в этом случае идет очень быстрыми темпами. Так, при ставке в 30% годовых при использовании схемы простых процентов за 3 года еще не происходит удвоение исходной суммы, а при использовании схемы сложных процентов за 3 года исходная сумма увеличивается почти в 2,2 раза. Еще большую разницу между наращенными суммами мы видим через 10 лет и тем более через 20 и 50 лет.

Пример 2.1.3. В банке получена ссуда в размере 40 тыс. руб. на 8 лет на следующих условиях: для первых трех лет процентная ставка равна 28% годовых, на следующий год устанавливается маржа в размере 1%, и на последующие годы маржа равна 1,5%. Найдите сумму, которая должна быть возвращена банку по окончании срока ссуды при ежегодных начислениях сложных процентов.

Решение. Поскольку имеем дело с переменной процентной ставкой, то, полагая в формуле (56) $P=40$, $m=3$, $n=8$, $n_1=3$, $n_2=1$, $n_3=4$, $i_1=0{,}28$, $i_2=0{,}29$, $i_3=0{,}305$, получим:

$$F_8=40(1+0{,}28)^3(1+0{,}29)(1+0{,}305)^4=313{,}850 \text{ тыс. руб.}$$

Такая же величина наращенной суммы получается, если в течение 8 лет ежегодно начисляются сложные проценты по процентной ставке $\bar{i}=\sqrt[8]{(1+0{,}28)^3(1+0{,}29)(1+0{,}305)^4}-1=0{,}2937$, т.е. $\bar{i}=29{,}37\%$ годовых. С целью проверки найдем наращенную сумму:

$$40(1+0{,}2937)^8=313{,}855 \text{ тыс. руб.},$$

т.е. с точностью до единиц рублей получили величину F_8. Если взять более точное значение $\bar{i}$, например $\bar{i}=29{,}3697\%$, то результат проверки составит 313,850 тыс. руб.

Пример 2.1.4. Предприниматель получил в банке ссуду в размере 50 тыс. руб. на 39 месяцев под процентную ставку 27% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предприниматель должен будет вернуть банку по истечении срока при использовании схемы сложных процентов и при использовании смешанной схемы? Возможны ли другие методы начисления процентов?

Решение. При использовании схемы сложных процентов воспользуемся формулой (55). Так как период начисления равен одному году, то $n=3{,}25$ (как правило, при измерении срока в месяцах считают, что месяц равен $1/12$ года, т.е. 3 месяца составляют 0,25 года). Далее $P=50$ тыс. руб., $r=0{,}27$, следовательно:

$$F_{3,25}=50(1+0{,}27)^{3,25}=108{,}726 \text{ тыс. руб.}$$

Если использовать смешанную схему, то при $w=3$, $f=0{,}25$ по формуле (57) получим:

$$F_{3,25}=50(1+0{,}27)^3(1+0{,}25\cdot 0{,}27)=109{,}332 \text{ тыс. руб.}$$

т.е. итоговая сумма больше, чем при начислении только сложными процентами.

В случае нецелого числа лет кроме схемы сложных процентов и смешанной схемы (формулы (55) и (57)) возможны и другие методы начисления процентов.

Можно использовать схему сложных процентов для целого числа лет, взяв это число с избытком, и затем полученную сумму учесть *"на 100"* из простых процентов за лишнее время, добавленное для достижения целого числа лет. Таким образом, если $n = w + f$ $(0 < f < 1)$, то добавляем время $1 - f$ и получаем целое число лет $w + 1$. Наращенная сумма находится по формуле:

$$F'_n = \frac{P(1+r)^{w+1}}{1+(1-f)r}.$$

Если же сумму $P(1+r)^{w+1}$ учесть простыми процентами "*со 100*" за лишнее время, то наращенная сумма определяется формулой:

$$F''_n = P(1+r)^{w+1}(1-(1-f)r).$$

Можно использовать схему сложных процентов для целого числа лет и затем полученную сумму нарастить простыми процентами "*во 100*" за дробную часть года, т.е. применить формулу:

$$F'''_n = \frac{P(1+r)^w}{1-fr}.$$

Если обозначить наращенные суммы, найденные по схеме сложных процентов и по смешанной схеме соответственно через $F_n^{(c)}$ и $F_n^{(cs)}$, то справедлива следующая цепочка неравенств:

$$F'''_n > F_n^{(cs)} > F_n^{(c)} > F'_n > F''_n.$$

Поскольку согласно условию примера $w + 1 = 3 + 1 = 4$, $1 - f = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$, то, применяя последовательно три последние формулы, получим:

$$F'_{3,25} = \frac{50(1+0{,}27)^4}{1+0{,}75\cdot 0{,}27} = 108{,}168 \text{ тыс. руб.};$$

$$F''_{3,25} = 50(1+0{,}27)^4(1-0{,}75\cdot 0{,}27) = 103{,}733 \text{ тыс. руб.};$$

$$F'''_{3,25} = \frac{50(1+0{,}27)^3}{1-0{,}25\cdot 0{,}27} = 109{,}833 \text{ тыс. руб.}$$

Очевидно, полученные значения наращенных сумм удовлетворяют приведенным выше неравенствам.

Пример 2.1.5. Клиент помещает в банк 40 тыс. руб. на 33 месяца под процентную ставку 26% годовых на условиях единовременного возврата основной суммы долга и начисленных сложных процентов. Проанализируйте, какую сумму предстоит вернуть банку при различных вариантах и схемах начисления процентов: а) полугодовое; б) квартальное.

Решение. а) В случае полугодового начисления процентов продолжительность общего действия контракта не равна целому числу периодов начисления (т.е. не равна целому числу полугодий, поскольку 33 месяца (2,75 года) не делятся нацело на 6). Поэтому нужно воспользоваться формулами (58) и (59), когда параметры формул имеют следующие значения: $P = 40$, $n = 2{,}75$, $m = 2$, $\overline{w} = 5$ (количество целых полугодий в 33 месяцах), $\bar{f} = 0{,}5$ (поскольку 3 месяца от 6 месяцев составляют половину или же можно формально найти таким образом $\bar{f} = m \cdot n - \overline{w} = 2 \cdot 2{,}75 - 5 = 5{,}5 - 5 = 0{,}5$), $r^{(2)} = 0{,}26$.

• При реализации схемы сложных процентов:

$$F_{2,75} = 40\left(1 + \frac{0{,}26}{2}\right)^{2 \cdot 2{,}75} = 78{,}341 \text{ тыс. руб.}$$

• При реализации смешанной схемы:

$$F_{2,25} = 40\left(1 + \frac{0{,}26}{2}\right)^{5}(1 + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}26}{2}) = 78{,}488 \text{ тыс. руб.}$$

Отметим, что в математике целую часть числа a принято обозначать через $[a]$. Используя это обозначение, величину $\overline{w}$ определяем таким образом: $\overline{w} = [m \cdot n] = [2 \cdot 2{,}75] = [5{,}5] = 5$.

б) В случае квартального начисления процентов $m = 4$, $r^{(4)} = 0{,}26$, $\overline{w} = [4 \cdot 2{,}75] = [11] = 11$, $\bar{f} = 0$, т.е. срок помещения капитала равен целому числу кварталов. Поэтому формулы (58) и (59) дают один и тот же результат:

$$F_{2,75} = 40\left(1 + \frac{0{,}26}{4}\right)^{11} = 79{,}966 \text{ тыс. руб.}$$

Естественно, в этом случае мы фактически пользуемся формулой (55), в которой $n = 11$, $r = 0{,}26/4 = 0{,}065$. В связи с этим заметим, что, используя обозначение множителя наращения в формуле (55): $FM1(r,n)=(1+r)^n$, формулу (58) можно записать в виде:

$$F_n = P \cdot FM1(\frac{r^{(m)}}{m}, mn).$$

Следовательно, в ряде случаев значения множителя $\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}$ можно найти по таблице значений множителя $FM1(r,n)$, полагая в качестве r и n соответственно $\frac{r^{(m)}}{m}$ и mn (конечно, если таблица достаточно подробна и позволяет сделать это).

Пример 2.1.6. Предлагается оформить вклад под следующие процентные ставки: 110% годовых или 22% за квартал, причем в обоих случаях используется смешанная схема начисления процентов. Какой вариант выгоднее, если срок хранения вклада составляет: а) 9 месяцев; б) один год? До какого срока выгоднее иметь 110% годовых, а когда выгоднее ежеквартальное начисление по 22%? Финансовый год принять равным 360 дней (месяц – 30 дней).

Решение. а) Обозначим величину вклада через P. Вначале рассмотрим вариант 110% годовых. Так как срок хранения (9 месяцев) меньше периода начисления (1 год), то согласно смешанной схеме начисляются простые проценты и можно воспользоваться, например, формулой (9), где $r=1{,}1$, $n=9/12=0{,}75$:

$$F_1 = P(1+0{,}75 \cdot 1{,}1) = 1{,}825P.$$

Если начисляются проценты из расчета 22% за квартал, то, поскольку 9 месяцев равны трем периодам начисления, используем формулу (55), где $r=0{,}22$, $n=3$:

$$F_2 = P(1+0{,}22)^3 = 1{,}816P.$$

Так как $F_1 > F_2$, то первый вариант выгоднее.

б) Когда срок хранения вклада равен одному году, рассуждая, как и в предыдущем случае, получим соответственно по первому (110%) и второму (22%) вариантам:

$$F_1 = P(1+1{,}1) = 2{,}1P,$$

$$F_2 = P(1+0{,}22)^4 = 2{,}215P\,,$$

т.е. выгоднее второй вариант.

Выясним, начиная с какого момента выгоднее начисление 22% за квартал. Из только что изложенного решения следует, что этот "пограничный" срок хранения больше 9 месяцев, но меньше года, т.е. искомый срок равен $n = 0{,}75 + f$ года, где $0 < f < 0{,}25$. –

Для первого варианта по формуле (9) получим:

$$F = P(1+(0{,}75+f)\cdot 1{,}1) = 1{,}825P + 1{,}1fP\,.$$

Для второго варианта можно применить формулу (57), где $r = 0{,}22$, $w = 3$, и , используя уже введенное обозначение f из искомого срока хранения, в качестве f из формулы (57) надо взять $4f$ (так как квартал в 4 раза меньше года). В результате получим:

$$F = P(1+0{,}22)^3(1+4f\cdot 0{,}22) = 1{,}816P + 1{,}598fP\,.$$

Приравнивая найденные наращенные суммы и сокращая обе части равѐнства на P, получим уравнение с одним неизвестным f:

$$1{,}825 + 1{,}1f = 1{,}816 + 1{,}598f\,,$$

решая которое находим $f = 0{,}018$ года, или 6,48 дня, т.е. приблизительно 7 дней.

Прибавляя к 9 месяцам (270 дней) 7 дней, получим величину искомого срока – 277 дней.

Таким образом, в условиях примера до 277 дней выгоднее иметь 110% годовых, а после становится выгоднее начисление по 22% за квартал.

Пример 2.1.7. Некоторая сумма инвестируется под процентную ставку 30% годовых. Определите время, необходимое для увеличения первоначальной суммы: а) в 4 раза; б) в 2 раза при начислении в конце года сложных и простых процентов.

Решение. а) Если начисляются сложные проценты, то можно воспользоваться формулой (60), где $F_n = 4P$, $m = 1$, $r^{(m)} = r^{(1)} = 0{,}3$:

$$n = \frac{\ln 4}{\ln(1+0{,}3)} = 5{,}284 \text{ года.}$$

При начислении простых процентов найдем в общем виде время, необходимое для увеличения первоначальной суммы в k раз (кстати, формула (60) получается аналогично). Так как множитель наращения равен k, то для простых процентов из равенства $1+nr=k$ получаем: $n=\frac{k-1}{r}$. Полагая $k=4$, $r=0{,}3$, получим: $n=\frac{4-1}{0{,}3}=10$ лет.

Таким образом, для увеличения первоначальной суммы в 4 раза при начислении сложных процентов требуется времени гораздо меньше (почти в 1,9 раза), чем при начислении простых процентов.

б) Для случая простых процентов находим:

$$n=\frac{1}{r}=\frac{1}{0{,}3}=3{,}333 \text{ года},$$

т.е. необходимый срок удвоения первоначальной суммы при начислении простых процентов равен обратной величине процентной ставки, используемой при наращении.

Для случая сложных процентов формула (60) согласно условию задачи примет вид (так как $F_n=2P$, $m=1$, $r^{(1)}=r$): $n=\frac{\ln 2}{\ln(1+r)}$. Таким образом,

$$n=\frac{\ln 2}{\ln(1+0{,}3)}=2{,}642 \text{ года.}$$

В практических расчетах для наглядной и быстрой оценки эффективности предлагаемой ставки наращения при реализации схемы сложных процентов пользуются приблизительным расчетом времени, необходимого для удвоения инвестированной суммы, известным как *"правило 72-х"*. Это правило заключается в следующем: если r – процентная ставка, выраженная в процентах, то $n=72/r$ представляет собой число периодов, за которое исходная сумма приблизительно удвоится. Это правило хорошо срабатывает для небольших значений r. Так, если годовая ставка r = 12%, то применение *"правила 72-х"* дает значение $n=6$ годам (а по формуле (60) получим $n=6{,}116$ года). Если же годовая ставка r = 30% (как в примере), то по правилу n = 2,4 года (а по формуле (60) получили $n = 2{,}642$ года). Следует также обратить внимание на то обстоятельство, что, хотя в большинстве финансовых расчетов процентная ставка берется в десятичных дробях, в формуле алгоритма *"правила 72-х"* ставка взята в процентах.

Существуют и другие правила, с помощью которых быстро рассчитывают срок удвоения первоначального капитала для конкретной ставки. В литературе можно встретить *"правило 70"*: $n = \frac{70}{r}$ и аналогичное *"правило 71"*. Отметим также *"правило 69"*: $n = \frac{69}{r} + 0{,}35$, в соответствии с которым для ставки $r = 30\%$ получим $n = \frac{69}{30} + 0{,}35 = 2{,}65$ года, т.е. достаточно близкое к полученному по точной формуле значению $n = 2{,}642$ года.

Пример 2.1.8. Вкладчик хотел бы за 7 лет утроить сумму, помещаемую в банк на депозит. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка при начислении сложных процентов: а) каждые полгода; б) каждый месяц?

Решение. а) Так как $n = 7$, $F_7 = 3P$, $m = 2$, то по формуле (61):

$$r^{(2)} = 2\left(3^{\frac{1}{2 \cdot 7}} - 1\right) = 0{,}1633,$$

т.е. номинальная процентная ставка должна быть не менее 16,33% годовых.

б) В этом случае $m = 12$ и поэтому:

$$r^{(12)} = 12\left(3^{\frac{1}{12 \cdot 7}} - 1\right) = 0{,}1580.$$

Естественно, эта ставка меньше, чем $r^{(2)}$, поскольку при одной и той же исходной сумме сложные проценты начисляются в 6 раз чаще. Аналогичное неравенство справедливо и в общем случае, а именно: пусть $r^{(m)}$ и $r^{(l)}$ – эквивалентные номинальные годовые процентные ставки и $m > l$, тогда $r^{(m)} < r^{(l)}$.

Пример 2.1.9. Предприниматель может получить ссуду: а) на условиях ежемесячного начисления сложных процентов из расчета 32% годовых; б) на условиях ежеквартального начисления сложных процентов из расчета 34% годовых. Какой вариант более предпочтителен для предпринимателя?

Решение. Относительные расходы предпринимателя по обслуживанию ссуды могут быть определены с помощью расчета по формуле (63) эффективной годовой процентной ставки – чем она выше, тем выше уровень расходов.

а) Полагая для этого варианта $m = 12$, $r^{(m)} = 0{,}32$, получим:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}32}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}3714.$$

б) Поскольку здесь $m = 4$, $r^{(m)} = 0{,}34$, то:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{0{,}34}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}3859.$$

Таким образом, первый вариант является более предпочтительным для предпринимателя. Необходимо отметить, что принятие решения не зависит от величины кредита, поскольку критерием является относительный показатель – эффективная ставка, а она, как следует из формулы (63), зависит лишь от номинальной ставки и количества начислений.

Пример 2.1.10. Определите номинальную процентную ставку, если эффективная годовая процентная ставка равна 40% и сложные проценты начисляются: а) каждые полгода; б) ежемесячно; в) ежедневно.

Решение. Полагаем $r_{ef} = 0{,}4$ и пользуемся формулой (62).

а) Так как $m = 2$, то

$$r^{(2)} = 2[(1 + 0{,}4)^{\frac{1}{2}} - 1] = 0{,}3664, \text{ или } 36{,}64\%.$$

б) Поскольку в этом случае $m = 12$, то

$$r^{(12)} = 12[(1 + 0{,}4)^{\frac{1}{12}} - 1] = 0{,}3412, \text{ или } 34{,}12\%.$$

в) Считая в году 360 дней, при $m = 360$ получим:

$$r^{(360)} = 360[(1 + 0{,}4)^{\frac{1}{360}} - 1] = 0{,}3366, \text{ или } 33{,}66\%.$$

Если взять в году 365 дней, то, оставляя после запятой 4 знака, получим тот же результат: $r^{(365)} = 33{,}66\%$, так как при ежедневном начислении различие между номинальными ставками можно обнаружить при высокой точности вычислений (в данном случае $r^{(360)} = 0{,}3366295$, $r^{(365)} = 0{,}3366273$).

Заметим, что найденные номинальные ставки $r^{(2)}$, $r^{(12)}$ и $r^{(360)}$ эквивалентны, так как они найдены с помощью одной и той же эффективной ставки. Таким образом, ежегодное начисление сложных процентов по ставке 40% годовых дает тот же результат, что и начисление сложных процентов каждые полгода по ставке 36,64%, или ежемесячно по ставке 34,12%, или ежедневно по ставке 33,66%. Отметим, что $r^{(2)} > r^{(12)} > r^{(360)}$, т.е. величина номинальной процентной ставки убывает, когда количество начислений сложных процентов в году увеличивается.

Пример 2.1.11. В долг на 28 месяцев предоставлена сумма в 50 тыс. руб. с условием возврата 85 тыс. руб. Найдите эффективную ставку в этой финансовой сделке.

Решение. Выражая 28 месяцев в годах, получим 7/3 года. Подставляя в формулу (64) $P = 50$ тыс. руб., $F_n = 85$ тыс. руб., $n = \frac{7}{3}$, находим:

$$r_{ef} = \left(\frac{85}{50}\right)^{\frac{3}{7}} - 1 = 0{,}2553, \text{ или } 25{,}53\% .$$

Проверим полученный ответ. Пусть в банк помещен вклад в размере 50 тыс. руб. на 7/3 года под процентную ставку 25,53% годовых и начисляются сложные проценты. Тогда наращенная сумма будет равна:

$$F_{7/3} = 50(1 + 0{,}2553)^{\frac{7}{3}} \approx 84{,}9926 \approx 85 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.1.12. Из какого капитала можно получить 45 тыс. руб. через 6 лет наращением сложными процентами по процентной ставке 36%, если наращение осуществлять: а) ежегодно; б) ежеквартально?

Решение. Полагаем $n = 6$, $F_6 = 45$ тыс. руб.

а) При ежегодном наращении пользуемся формулой (65) при $r = 0{,}36$:

$$P = \frac{45}{(1+0{,}36)^6} = 7{,}112 \text{ тыс. руб.}$$

б) При ежеквартальном наращении пользуемся формулой (66) при $m = 4$ и $r^{(m)} = 0{,}36$:

$$P = \frac{45}{\left(1+\frac{0{,}36}{4}\right)^{4\cdot 6}} = 5{,}688 \text{ тыс. руб.}$$

Если использовать обозначение множителя дисконтирования $FM2(r,n)$, формулу (66) можно записать в виде:

$$P = F_n \cdot FM2\left(\frac{r^{(m)}}{m}, mn\right).$$

Поэтому в ряде случаев значения множителя $\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mn}$ можно найти по таблице 2 значений множителя $FM2(r,n)$ из приложения 3, полагая в качестве r и n соответственно $\frac{r^{(m)}}{m}$ и mn (конечно, если таблица достаточно подробна и позволяет сделать это). В частности, для случая б) имеем $\frac{r^{(4)}}{4} = \frac{36\%}{4} = 9\%$ и число периодов $mn = 4 \cdot 6 = 24$. Воспользовавшись таблицей 2 приложения 3, получим: $P = 45 \cdot 0{,}1264 = 5{,}688$ тыс. руб.

Пример 2.1.13. Оцените, что лучше: получить 16 тыс. руб. через 2 года или 50 тыс. руб. – через 6 лет, если можно поместить деньги на депозит под сложную процентную ставку 35% годовых?

Решение. Можно доказать, что для случая сложных процентов и постоянной процентной ставки справедливо утверждение: если одна сумма больше другой в некоторый момент времени, то это неравенство справедливо и для любого момента времени. Поэтому будущие поступления, являющиеся разновременными суммами, для случая сложных процентов можно оценивать с позиции произвольно выбранного момента времени. Напомним, что в ситуации простых процентов эти утверждения не всегда имеют место.

Так как с позиции текущего момента (формула (65)):

$$P_1 = \frac{16}{(1+0{,}35)^2} = 8{,}780 \text{ тыс. руб.}, \ P_2 = \frac{50}{(1+0{,}35)^6} = 8{,}260 \text{ тыс. руб.},$$

то выгоднее получить 16 тыс. руб. через 2 года.

Конечно, можно было проводить все сравнения с позиции будущего: через 6 лет. Тогда определяем наращенную сумму за 4 года капитала в размере 16 тыс. руб.: $F_4 = 16(1+0{,}35)^4 = 53{,}144$ тыс. руб. и, сравнивая с 50 тыс. руб., приходим к тому же выводу (кстати, выполнив меньшее количество вычислений).

Пример 2.1.14. Определите современную ценность 20 тыс. руб., если: а) эта сумма будет получена через 4 года 9 месяцев; б) эта сумма была получена 2 года 6 месяцев назад; в) эта сумма получена в настоящий момент времени. Учесть возможность помещения денег на депозит под сложную процентную ставку 30% годовых.

Решение. а) Для того чтобы оценить современную ценность суммы денег, необходимо осуществить приведение этой суммы на настоящий момент времени, учитывая возможность инвестирования денег под сложную процентную ставку 30%, т.е. необходимо определить приведенную стоимость 20 тыс. руб. В данном случае современная ценность 20 тыс. руб. равна такой сумме, которая при начислении сложных процентов по ставке 30% станет равной 20 тыс. руб. через 4 года 9 месяцев. Полагая в формуле (65) $n = 4{,}75$, $F_{4,75} = 20$ тыс. руб., $r = 0{,}3$, получим:

$$P = \frac{20}{(1+0{,}3)^{4,75}} = 5{,}752 \text{ тыс. руб.}$$

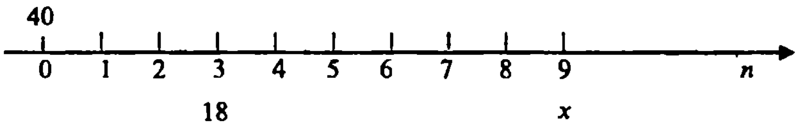
б) В этом случае современная ценность 20 тыс. руб. равна такой сумме, которая получится при наращении сложных процентов на 20 тыс. руб. в течение 2 лет 6 месяцев по ставке 30%. Воспользовавшись формулой (55) при $n = 2{,}5$, $P = 20$, $r = 0{,}3$, получим:

$$F_{2,5} = 20(1+0{,}3)^{2,5} = 38{,}538 \text{ тыс. руб.}$$

в) Поскольку в этой ситуации 20 тыс. руб. получены в настоящий момент времени, то их современная ценность составляет 20 тыс. руб.

Пример 2.1.15. Господин N поместил в банк 40 тыс. руб. на условиях начисления каждые полгода сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 34%. Через полтора года господин N снял со счета 18 тыс. руб., а через 3 года после этого закрыл счет. Определите сумму, полученную господином N при закрытии счета.

Решение. Обозначим через x величину суммы, полученной при закрытии счета. Для наглядности изобразим ситуацию, описанную в задаче, на оси времени, причем одно деление оси времени будет соответствовать одному периоду начисления процентов, т.е. одному полугодию. Сумму, помещенную в банк, изобразим над осью времени, а все изъятия – под осью:



Полагая $P = 40$ тыс. руб., $n = 1{,}5$, $m = 2$, $r^{(2)} = 0{,}34$, по формуле (58) получим сумму на счете через полтора года:

$$F_{1,5} = 40\left(1 + \frac{0{,}34}{2}\right)^{2 \cdot 1{,}5} \text{ тыс. руб.}$$

Поскольку в это время 18 тыс. руб. изымаются, то дальнейшее наращение осуществляется на сумму $[40\left(1 + \frac{0{,}34}{2}\right)^{2 \cdot 1{,}5} - 18]$ тыс. руб., и, таким образом, через 3 года ($n = 3$) при закрытии счета господин N получит:

$$x = [40\left(1 + \frac{0{,}34}{2}\right)^{2 \cdot 1{,}5} - 18] \cdot \left(1 + \frac{0{,}34}{2}\right)^{2 \cdot 3} = 40(1 + 0{,}17)^9 - 18(1 + 0{,}17)^6 =$$

$$= 118{,}162 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что такое же равенство для нахождения x можно получить, и используя понятие приведенной стоимости, что позволяет единообразно решать многие задачи. Для изложения нового подхода к решению сформулируем задачу в общем виде. Пусть в банк в конце некоторых периодов начисления сложных процентов помещаются на счет и изымаются со счета некоторые суммы. Найдем приведенные к одному моменту стоимости всех сумм и остатка на счете. Тогда справедливо следующее уравнение эквивалентности: сумма приведенных стоимостей всех вкладов равна сумме приведенных стоимостей всех изъятий и приведенной стоимости остатка на счете.

Воспользуемся таким уравнением эквивалентности для решения рассматриваемого примера. Выберем в качестве момента приведения начальный момент времени. В этом случае уравнение эквивалентности примет вид:

$$40 = \frac{18}{\left(1+\frac{0,34}{2}\right)^{2\cdot 1,5}} + \frac{x}{\left(1+\frac{0,34}{2}\right)^{2\cdot 4,5}}.$$

После умножения обеих частей уравнения на множитель $\left(1+\frac{0,34}{2}\right)^{2\cdot 4,5} = (1+0,17)^9$ и переноса всех известных слагаемых в одну часть равенства, а x – в другую, получим:

$$x = 40(1+0,17)^9 - 18(1+0,17)^6,$$

т.е. пришли к такому же выражению для определения x, как и ранее.

В качестве момента приведения можно было выбрать любой момент времени. Так, если взять 4 года 6 месяцев, то уравнение эквивалентности примет вид:

$$40\left(1+\frac{0,34}{2}\right)^{2\cdot 4,5} = 18\left(1+\frac{0,34}{2}\right)^{2\cdot 3} + x,$$

т.е. опять получаем то же самое выражение для определения x.

Пример 2.1.16. На вашем счете в банке лежит сумма в 60 тыс. руб. Банк начисляет сложные проценты по процентной ставке 32% годовых. Вам предлагают войти всем вашим капиталом в организацию венчурного предприятия. Представленные экономические расчеты показывают, что через 4 года ваш капитал возрастет в 3,5 раза. Стоит ли принимать это предложение? Как может повлиять на выбор решения учет фактора риска?

Решение. Оценка данной ситуации может быть сделана либо с позиции будущего, либо с позиции настоящего. В первом случае анализ основан на сравнении двух сумм, получаемых от вложения в рисковое предприятие и в банковское учреждение с гарантированным доходом. Первая сумма равна $60 \cdot 3{,}5 = 210$ тыс. руб., вторая находится по формуле (55):

$$F_4 = 60(1 + 0{,}32)^4 = 182{,}157 \text{ тыс. руб.}$$

Приведенный расчет свидетельствует об экономической выгоде сделанного вам предложения. Однако при принятии окончательного решения необходимо по возможности учесть фактор риска.

Второй вариант анализа основан на дисконтированных оценках с использованием формул (65) и (66). В этом случае процентная ставка в множителе дисконтирования устанавливается инвестором и равна тому относительному размеру дохода, который инвестор хочет или может получить на инвестируемый им капитал.

Определяя процентную ставку в дисконтном множителе, обычно исходят из так называемого безопасного или гарантированного уровня доходности финансовых инвестиций, который обеспечивается государственным банком по вкладам или при операциях с ценными бумагами. При этом может даваться надбавка за риск, причем, чем более рисковым считается рассматриваемый проект или финансовый контракт, тем больше размер премии за риск. Иными словами, процентная ставка r, используемая в дисконтном множителе, будет в этом случае иметь следующий вид:

$$r = r_f + r_r,$$

где r_f – безрисковая доходность; r_r – премия за риск.

Допустим, что финансовый консультант рекомендует оценить риск участия в венчурном предприятии путем введения премии в размере 8%. Таким образом, используемая в множителе дисконтирования ставка будет равна 40%. Тогда по формуле (65) можно рассчитать приведенную стоимость ожидаемого поступления при участии в венчурном предприятии:

$$P = \frac{210}{(1 + 0{,}4)^4} = 210 \cdot 0{,}2603 = 54{,}663 \text{ тыс. руб.}$$

При таких исходных посылках предложение об участии в венчурном предприятии становится невыгодным. Однако следует иметь в виду, что такой вывод сделан в результате оценки риска путем введения премии в размере 8%. Если же, например, считать достаточной премию в размере 4%, то по формуле (65) получим:

$$P = \frac{210}{(1+0{,}36)^4} = 210 \cdot 0{,}2923 = 61{,}383 \text{ тыс. руб.},$$

т.е. предложение об участии в венчурном предприятии становится выгодным.

Пример 2.1.17. Банк начисляет ежеквартально сложные проценты на вклады по номинальной годовой процентной ставке 32%. Определите в виде простой годовой процентной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении: а) на 9 месяцев; б) на год.

Решение. а) Стоимость привлеченных средств можно найти по формуле (23), где через P обозначена использованная сумма средств; через $F - P$ – проценты, выплаченные за использование суммы P в течение времени n, а F определяется с помощью формулы (58), где $n = 0{,}75$, $m = 4$, $r^{(4)} = 0{,}32$. Итак,

$$F - P = P\left(1 + \frac{0{,}32}{4}\right)^{4 \cdot 0{,}75} - P = 0{,}2597P,$$

$$r = \frac{0{,}2597P}{P \cdot 0{,}75} = 0{,}3463, \text{ или } 34{,}63\% \text{ годовых.}$$

Конечно, можно было и сразу применить формулу (81): $r = \dfrac{\left(1 + \dfrac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} - 1}{n}$, устанавливающую эквивалентность простой ставки r и сложной ставки $r^{(m)}$:

$$r = \frac{\left(1 + \dfrac{0{,}32}{4}\right)^{4 \cdot 0{,}75} - 1}{0{,}75} = 0{,}3463.$$

По существу в изложенном предыдущем решении приведена схема вывода этой формулы.

б) Полагая $n=1$, воспользуемся сразу формулой (81) или, что то же самое в этом случае, формулой (63):

$$r=\left(1+\frac{0{,}32}{4}\right)^4-1=0{,}3605=36{,}05\%.$$

Таким образом, относительная стоимость привлеченных средств в этом случае равна эффективной ставке.

Пример 2.1.18. Предприниматель получил в банке кредит на 5 лет по процентной ставке 28% годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 1,4% от величины кредита. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки, если банк начисляет ежегодно сложные проценты на исходную сумму кредита. Как изменится доходность при выдаче кредита на 3 года и на 8 лет?

Решение. Обозначим через P величину кредита, тогда величина удержанных комиссионных составит $0{,}014P$, и, следовательно, предпринимателю будет выдана сумма $P-0{,}014P=0{,}986P$. За 5 лет исходная сумма вместе с начисленными процентами составит: $F_5=P(1+0{,}28)^5$. Теперь по формуле (64) можно определить доходность финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки:

$$r_{ef}=\left(\frac{P(1+0{,}28)^5}{0{,}986P}\right)^{\frac{1}{5}}-1=\frac{1+0{,}28}{\sqrt[5]{0{,}986}}-1=0{,}2836,$$

т.е. $r_{ef}=28{,}36\%$, что больше объявленных банком 28% годовых. Таким образом, удержание комиссионных увеличивает доходность финансовой операции для кредитора (банка).

При выдаче кредита на 3 года наращенная сумма составит $F_3=P(1+0{,}28)^3$, и, следовательно, доходность для банка будет равна:

$$r_{ef}=\left(\frac{P(1+0{,}28)^3}{0{,}986P}\right)^{\frac{1}{3}}-1=\frac{1+0{,}28}{\sqrt[3]{0{,}986}}-1=0{,}2860,$$

т.е. больше, чем при выдаче кредита на 5 лет.

Аналогичным образом при сроке кредита 8 лет получим:

$$r_{ef} = \left(\frac{P(1+0{,}28)^8}{0{,}986P} \right)^{\frac{1}{8}} - 1 = \frac{1+0{,}28}{\sqrt[8]{0{,}986}} - 1 = 0{,}2823,$$

т.е. меньше, чем при выдаче кредита на 5 лет.

Основываясь на рассмотренном примере, можно сделать вывод, что при удержании комиссионных увеличение срока кредита уменьшает доходность финансовой сделки для кредитора. Конечно, если комиссионные не взимаются, то при любом сроке кредита при ежегодном начислении сложных процентов доходность такой финансовой сделки в виде годовой эффективной процентной ставки будет постоянной и равна 28%.

Пример 2.1.19. Выдана ссуда под процентную ставку 35% годовых, при этом сразу были взысканы комиссионные в размере 3% от величины ссуды. Определите доходность такой сделки в виде годовой эффективной процентной ставки, если кредитор начисляет простые проценты на исходную величину ссуды и срок ссуды: а) 3 года; б) 6 лет.

Решение. а) Если P – величина ссуды, то удержанные комиссионные составят $0{,}03P$, и поэтому заемщику будет выдана сумма $P - 0{,}03P = 0{,}97P$. Через 3 года заемщик должен возвратить сумму $F_3 = P(1+3 \cdot 0{,}35) = 2{,}05P$. Следовательно, по формуле (64) доходность сделки для кредитора составит:

$$r_{ef} = \left(\frac{2{,}05P}{0{,}97P} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2{,}05}{0{,}97}} - 1 = 0{,}2833, \text{ или } 28{,}33\%.$$

Если бы комиссионные не взыскивались, то

$$r_{ef} = \left(\frac{2{,}05P}{P} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 = \sqrt[3]{2{,}05} - 1 = 0{,}2703, \text{ или } 27{,}03\%.$$

Как и следовало ожидать, удержание комиссионных увеличивает доходность сделки для кредитора.

б) При выдаче ссуды на 6 лет наращенная сумма составит $F_6 = P(1+6 \cdot 0{,}35) = 3{,}1P$ и поэтому:

$$r_{ef}=\left(\frac{3,1P}{0,97P}\right)^{\frac{1}{6}}-1=\sqrt[6]{\frac{3,1}{0,97}}-1=0,2137,\text{ или } 21,37\%.$$

Таким образом, увеличение срока ссуды уменьшает доходность сделки для кредитора.

Пример 2.1.20. Вы имеете возможность поместить свои свободные денежные средства в долларах США на полтора года в одном банке на валютном депозите под процентную ставку 16% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов или в другом банке эту же сумму поместить на рублевом депозите под процентную ставку 20% годовых с полугодовым начислением сложных процентов. Как вам лучше поступить, если курс покупки долларов на начало срока – 19 руб. 10 коп., а ожидаемый курс продажи через полтора года – 22 руб. 80 коп.?

Решение. Обозначим имеющееся количество долларов через P. Помещая их на валютный депозит, через полтора года можно получить (согласно формуле (58)):

$$P\left(1+\frac{0,16}{12}\right)^{12\cdot 1,5}=1,2692P \text{ долл. США.}$$

Если же имеющиеся P долларов обменять на рубли, то в соответствии с курсом покупки можно получить $19,1P$ руб. Через полтора года наращенная сумма на рублевом депозите составит:

$$19,1P\left(1+\frac{0,2}{2}\right)^{2\cdot 1,5}=25,4221P \text{ руб.,}$$

что при конвертации по ожидаемому курсу продажи даст: $\frac{25,4221P}{22,8}=1,1150P$ долл. США. Сравнивая эту величину с наращенной суммой на валютном депозите, делаем вывод, что лучше поместить доллары на валютный депозит.

Пример 2.1.21. На вклад 200 тыс. руб. по истечении 5 лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 28% исходя из ежеквартальной схемы начисления. Определите наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока и ставка налога на проценты равна 15%.

Решение. Полагая $P = 200$ тыс. руб., $n = 5$, $m = 4$, $r^{(4)} = 0,28$, по формуле (58) находим наращенную сумму до уплаты налога:

$$F_5 = 200\left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^{4\cdot 5} = 773,937 \text{ тыс. руб.}$$

Сумма налога на проценты составит:

$$Q = (773,937 - 200)\cdot 0,15 = 86,091 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, после уплаты налога наращенная сумма станет равной величине:

$$\hat{F}_5 = F_5 - Q = 773,937 - 86,091 = 687,846 \text{ тыс. руб.}$$

Это значение можно получить и по формуле (101), где $a = \left(1 + \frac{0,28}{4}\right)^4 = 1,3108$.

Пример 2.1.22. На вклад в 200 тыс. руб. в течение 5 лет раз в год начислялись сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 28% исходя из ежеквартальной схемы начисления. Определите итоговую наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы и ставка налога на проценты равна 15%. Чему равна величина налога за каждый год?

Решение. Используя обозначения предыдущего примера, итоговую наращенную сумму после уплаты налога на проценты находим по формуле (102):

$$\hat{F}_5 = 200\,[1,3108 - (1,3108 - 1)\cdot 0,15]^5 = 645,765 \text{ тыс. руб.}$$

Для определения величины налога за каждый год воспользуемся рекуррентным соотношением, следующим из формулы (103): $Q^{(k)} = [a - (a-1)q]Q^{(k-1)}$, где $k = 2,3,\ldots,n$. Таким образом,

$$Q^{(1)} = 200\cdot(1,3108 - 1)\cdot 0,15 = 9,324 \text{ тыс. руб.,}$$

$$Q^{(2)} = 9,324\cdot 1,2642 = 11,787 \text{ тыс. руб.,}$$

$$Q^{(3)} = 11,787\cdot 1,2642 = 14,901 \text{ тыс. руб.,}$$

$$Q^{(4)} = 14,901\cdot 1,2642 = 18,838 \text{ тыс. руб.,}$$

$$Q^{(5)} = 18,838\cdot 1,2642 = 23,815 \text{ тыс. руб.}$$

2.1.1. Депозит в 40 тыс. руб. положен в банк на 5 лет под процентную ставку 28% годовых. Найдите наращенную сумму, если ежегодно начисляются сложные проценты. Составьте схему возрастания капитала по годам.

2.1.2. Сумма 24 тыс. руб. инвестируется под процентную ставку 30% годовых: а) на 4 года; б) на 10 лет. Найдите наращенные суммы при условии ежегодного начисления сложных и простых процентов.

2.1.3. Сделайте сравнительный анализ графиков изменения наращения капитала при реализации схем простых и сложных процентов.

2.1.4. Предприниматель получил в банке ссуду в размере 30 тыс. руб. сроком на 7 лет на следующих условиях: для первых двух лет процентная ставка равна 22% годовых, на следующие три года устанавливается маржа в размере 0,5% и на последующие годы маржа равна 0,8%. Найдите сумму, которую предприниматель должен вернуть в банк по окончании срока ссуды при ежегодном начислении сложных процентов.

2.1.5. Банк предоставил ссуду в размере 250 тыс. руб. на 33 месяца под процентную ставку 34% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Какую сумму предстоит вернуть банку по истечении срока при использовании схемы сложных процентов и при использовании смешанной схемы? Какая схема менее выгодна для банка?

2.1.6. Предприниматель взял в банке кредит в размере 90 тыс. руб. под сложную процентную ставку 36% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Через 2 года и 7 месяцев кредит был погашен суммой 201,421 тыс. руб. Какую из двух основных схем начисления процентов использовал банк?

2.1.7. Вы делаете вклад в банк в размере 14 тыс. руб. сроком на 5 лет. Банк начисляет 32% годовых. Какая сумма будет на счете к концу срока, если начисление процентов производится по схеме сложных и простых процентов: а) ежегодно; б) каждые полгода?

2.1.8. Рассчитайте наращенную сумму с исходной суммы в 1 тыс. руб. при размещении ее в банке на условиях начисления простых и сложных процентов, если годовая процентная ставка равна 24%, периоды наращения различны: 30 дней, 150 дней, 210 дней, 1 год, 4 года, 10 лет, 20 лет. Полагать год равным 360 дней. Обсудите полученные результаты.

2.1.9. В банк вложены деньги в сумме 8 тыс. руб. на полтора года под 32% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Приведите схему возрастания капитала в конце каждого периода. Как изменится итоговая наращенная сумма при ежемесячном начислении сложных процентов? Какой вывод можно сделать о частоте начисления сложных процентов?

2.1.10 Клиент поместил в банк 100 тыс. руб. на 5 лет под процентную ставку 36% годовых. Определите наращенную за это время сумму при начислении сложных процентов: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежеквартально; г) ежемесячно; д) еженедельно; е) ежедневно. Полагать в году 360 дней.

2.1.11. Банк предоставил ссуду в размере 150 тыс. руб. на 39 месяцев под процентную ставку 30% годовых на условиях единовременного возврата основной суммы долга и начисленных сложных процентов. Проанализируйте, какую сумму предстоит вернуть банку при различных вариантах и схемах начисления процентов: а) годовое; б) полугодовое; в) квартальное.

2.1.12. Определите время, за которое происходит удвоение первоначальной суммы при начислении простых и сложных процентов, если процентная ставка равна: а) 5%; б) 10%; в) 15%; г) 25%; д) 50%; е) 75%; ж) 100%.

2.1.13. На вклад в конце каждого полугодия начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 20%. За какой срок первоначальный капитал увеличится в четыре раза? Как изменится результат, если сложные проценты начисляются ежемесячно?

2.1.14. За какой срок исходная сумма 20 тыс. руб. возрастет до 60 тыс. руб., если сложные проценты по процентной ставке 28% годовых начисляются: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?

2.1.15. Вы имеете 10 тыс. руб. и хотели бы удвоить эту сумму через пять лет. Каково минимально приемлемое значение сложной процентной ставки при ежегодном начислении процентов? Сравните результат, полученный по точной формуле, с результатом, полученным с помощью "*правила 72-х*".

2.1.16. Вкладчик хотел бы за 4 года удвоить сумму, помещаемую в банк на депозит. Какую годовую номинальную процентную ставку должен предложить банк при начислении сложных процентов ежеквартально?

2.1.17. Господин N хочет поместить в банк 8 тыс. руб., чтобы через 3 года получить 12 тыс. руб. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка при начислении сложных процентов: а) каждые полгода; б) каждый квартал?

2.1.18. Какие условия предоставления кредита при начислении сложных процентов по процентной ставке более выгодны банку: а) 29% годовых, начисление ежеквартальное; б) 30% годовых, начисление полугодовое?

2.1.19. Вы имеете возможность получить кредит либо на условиях 32% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов, либо на условиях 33% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Какой вариант предпочтительнее, если выплата процентов будет сделана единовременно вместе с погашением кредита?

2.1.20. Рассчитайте эффективную годовую процентную ставку при различной частоте начисления сложных процентов, если номинальная процентная ставка равна 20% годовых. Сравните между собой полученные результаты.

2.1.21. В долг на 3 года 6 месяцев предоставлена сумма 8 тыс. руб. с условием возврата 20 тыс. руб. Найдите эффективную процентную ставку в этой финансовой сделке.

2.1.22. Предприниматель инвестировал 60 тыс. руб. и получил через 140 дней 75 тыс. руб. Определите доходность этой операции в виде эффективной процентной ставки на базе: а) 360 дней; б) 365 дней.

2.1.23. Определите номинальную годовую процентную ставку, если эффективная ставка равна 30% и сложные проценты начисляются: а) ежеквартально; б) ежемесячно.

2.1.24. Каковы будут эквивалентные номинальные годовые процентные ставки с начислением сложных процентов по полугодиям и ежемесячно, если соответствующая им эффективная ставка равна 26%?

2.1.25. Из какого капитала можно получить 15 тыс. руб. через 4 года наращением сложными процентами по процентной ставке 24% годовых, если наращение осуществлять: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежемесячно? Чему равен дисконт?

2.1.26. Наращенная к концу седьмого года сумма составит 240 тыс. руб. Найдите ее современное значение, если начисляются сложные проценты: а) по полугодиям по процентной ставке 30% годовых; б) ежеквартально по процентной ставке 40% годовых.

2.1.27. Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 30% годовых, чтобы накопить 50 тыс. руб.: а) за 6 лет при ежегодном начислении процентов; б) за 4 года при ежемесячном начислении процентов?

2.1.28. Определите современную ценность 40 тыс. руб., если: а) эта сумма будет получена через 5 лет 3 месяца; б) эта сумма была получена 3 года 6 месяцев назад; в) эта сумма получена в настоящий момент времени. Учесть возможность помещения денег на депозит под сложную процентную ставку 36% годовых.

2.1.29. Банк начисляет ежеквартально сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 32%. Определите современную ценность 15 тыс. руб., если: а) эта сумма была помещена на депозит в банке 3 года 2 месяца назад; б) эта сумма будет помещена на депозит в банке через 10 месяцев.

2.1.30. Свободные денежные средства помещены в банк под сложную процентную ставку 40% годовых на условиях ежегодного начисления процентов. Через 3 года и 10 месяцев счет был закрыт и получена сумма в размере 36,587 тыс. руб. Определите величину наращенной суммы, которая была бы получена при закрытии счета через 2 года и 3 месяца, если банк начисляет проценты по смешанной схеме.

2.1.31. На вашем счете в банке 8 тыс. руб. Банк платит 22% годовых. Вам предлагают принять участие всем вашим капиталом в некоторой финансовой сделке. Представленные экономические расчеты показывают, что в случае согласия через пять лет ваш капитал возрастет в 2,9 раза. Стоит ли принимать это предложение? Оцените ситуацию с позиции будущего и с позиции настоящего. Как может повлиять на выбор решения учет фактора риска?

2.1.32. Какая сумма предпочтительнее при сложной процентной ставке 29% годовых: 100 тыс. руб. сегодня или 700 тыс. руб. через 8 лет?

2.1.33. Что выгоднее: получить 4,6 тыс. руб. через 4 года или 5,2 тыс. руб. через 5 лет, если можно поместить деньги на депозит под сложную процентную ставку 16% годовых? Оцените ситуацию с позиции будущего и с позиции настоящего.

2.1.34. Определите, под какую сложную процентную ставку можно поместить деньги на депозит, если 10 тыс. руб. сейчас будут эквивалентны 37,129 тыс. руб. через 5 лет. Как изменится ответ, если банк начисляет сложные проценты ежеквартально?

2.1.35. За взятые в долг деньги под сложную процентную ставку 35% годовых должник обязан уплатить кредитору 30 тыс. руб. 1 июля 1997 г. Какую сумму необходимо уплатить должнику, если он вернет долг: а) 1 января 1997 г.; б) 1 января 1998 г.; в) 1 июля 1999 г.?

2.1.36. Клиент поместил в банк 25 тыс. руб. на условиях начисления сложных процентов по процентной ставке 30% годовых. Через 1 год 9 месяцев клиент снял со счета 8 тыс. руб., еще через 3 года положил на свой счет 4 тыс. руб., а после этого через 2 года 3 месяца он закрыл счет. Определите сумму, полученную клиентом при закрытии счета.

2.1.37. Господин N поместил в банк 30 тыс. руб. на условиях начисления каждый квартал сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 32%. Через 3 года 3 месяца господин N снял со счета 12 тыс. руб., еще через 1 год 6 месяцев положил на свой счет 8 тыс. руб., а после этого через 15 месяцев он закрыл счет. Определите сумму, полученную господином N при закрытии счета.

2.1.38. Фирме нужно накопить 2 млн долл., чтобы через 10 лет приобрести здание под офис. Наиболее безопасным способом накопления является приобретение безрисковых государственных ценных бумаг, генерирующих годовой доход по ставке 8% при полугодовом начислении процентов. Каким должен быть первоначальный вклад фирмы?

2.1.39. У вас есть возможность выбора между получением 30 тыс. руб. через год или 72 тыс. руб. через 6 лет. Каков ваш выбор, если есть возможность поместить деньги в банк под сложную процентную ставку: а) 12%; б) 20%? А если нет возможности инвестирования куда-либо денег или вы не хотите воспользоваться такой возможностью?

2.1.40. Вкладчик положил в банк два года назад 16 тыс. руб. на условиях начисления каждый квартал сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 28%. Полгода назад вкладчик снял со счета 12 тыс. руб., а через 3 года после этого он положил 10 тыс. руб. Еще через полтора года вкладчик положил такую сумму, что на его счете еще через полгода оказалось 80 тыс. руб. Определите, какую сумму вкладчик положил последний раз.

2.1.41. Вкладчик открыл счет в банке, положив некоторую сумму денег. Такую же по величине сумму он добавлял на свой счет еще три раза: через 1 год 6 месяцев, 2 года 6 месяцев и 4 года после открытия счета. Через 5 лет на счете вкладчика было 60 тыс. руб. Какую сумму вносил вкладчик каждый раз, если банк начисляет сложные проценты каждые полгода по годовой номинальной процентной ставке 30%?

2.1.42. Предприниматель взял в банке кредит на сумму 200 тыс. руб. на условиях начисления сложных процентов по процентной ставке 25% годовых. Через 2 года он вернул банку 120 тыс. руб., но еще через год взял кредит в сумме 60 тыс. руб. Через 3 года после этого предприниматель вернул полностью полученные кредиты. Какую сумму предприниматель при этом выплатил банку?

2.1.43. Определите, какую сумму необходимо поместить в банк, начисляющий ежеквартально сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 36%, чтобы иметь возможность снять через 9 месяцев 10 тыс. руб. и еще 20 тыс. руб. через 18 месяцев после этого.

2.1.44. Предприниматель приобрел оборудование стоимостью 400 тыс. руб. в кредит под сложную процентную ставку 20% годовых. Через 2 года 6 месяцев он уплатил 250 тыс. руб., а еще через год полностью погасил долг. Определите, какую сумму предприниматель при этом выплатил.

2.1.45. Господин N приобрел автомобиль стоимостью 140 тыс. руб. в кредит под сложную процентную ставку 30% годовых. Он выплатил в момент покупки 80 тыс. руб., а остальной долг обязался выплатить в течение двух лет равными уплатами по полугодиям (первая уплата – через полгода с момента покупки). Чему равна каждая уплата?

2.1.46. Строительная фирма продает квартиры стоимостью 450 тыс. руб. в кредит под сложную процентную ставку 25% годовых. Эта же фирма учредила банк, аккумулирующий средства на строительство квартир и выплачивающий по помещенным в него деньгам сложные проценты по процентной ставке 25% годовых. Господин N внес в этот банк некоторую сумму за 3 года до приобретения квартиры, такую же сумму – в момент приобретения квартиры, еще 70 тыс. руб. – через 2 года и 120 тыс. руб. – через 3 года с момента приобретения квартиры, погасив тем самым свой долг полностью. Определите, какие суммы господин N вносил в банк до и в момент приобретения квартиры.

2.1.47. Строительная фирма продает квартиры стоимостью 520 тыс. руб. в кредит под сложную процентную ставку 20% годовых. Эта же фирма учредила банк, аккумулирующий средства на строительство квартир и выплачивающий по помещенным в него деньгам сложные проценты по процентной ставке 20% годовых. Господин N внес в этот банк 100 тыс. руб. за год до получения квартиры и еще 150 тыс. руб. – через 2 года после получения квартиры. Еще через год после этого он внес некоторую сумму, а еще через год погасил долг, внеся 300 тыс. руб. Определите, какую сумму господин N внес в банк через год после получения квартиры.

2.1.48. Банк начисляет ежемесячно сложные проценты на вклады по номинальной годовой процентной ставке 30%. Определите в виде простой годовой процентной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении: а) на 1 месяц; б) на 8 месяцев; в) на год.

2.1.49. Вкладчик помещает в банк 20 тыс. руб. на 3 года под номинальную процентную ставку 36% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. В конце каждого года господин N расходует третью часть наращенной к этому моменту суммы. Определите величину наращенной суммы в конце третьего года после осуществления всех расходов.

2.1.50. Господин N помещает в банк 30 тыс. руб. на 4 года под номинальную процентную ставку 38% годовых с полугодовым начислением сложных процентов. В конце каждого года господин N расходует часть наращенной к этому моменту суммы: в конце первого года – четвертую часть, в конце второго года – третью часть, в конце третьего и четвертого – соответственно вторую и четвертую части. Определите величину наращенной суммы в конце четвертого года после осуществления всех расходов. Изменится ли ответ, если расходуемые части наращенных сумм будут образовывать такой порядок: $1/3$, $1/4$, $1/4$, $1/2$?

2.1.51. Клиент поместил в банк некоторую сумму под сложную процентную ставку 30% годовых. В конце каждого года клиент расходует четвертую часть наращенной к этому моменту суммы. Через сколько лет наращенная сумма составит 85% от первоначальной величины помещенных денежных средств?

2.1.52. Господин N поместил в банк на 6 лет свободные денежные средства под сложную процентную ставку 40% годовых. Какую часть наращенной суммы в конце каждого года (включая последний) господин N должен расходовать, чтобы в конце шестого года наращенная сумма составила по величине половину помещенных вначале денежных средств?

2.1.53. На сумму 15 тыс. руб. в течение четырех лет ежегодно начисляются простые проценты по процентной ставке 40% годовых, а на все начисленные проценты ежегодно осуществляется наращение сложных процентов по процентной ставке 30% годовых. Определите величину наращенной суммы в конце четвертого года.

2.1.54. Определяется приведенная стоимость некоторой денежной суммы при двух сложных годовых процентных ставках: 30 и 40%. Найдите срок, за который необходимо осуществить дисконтирование, чтобы разность между полученными приведенными стоимостями была наибольшей.

2.1.55. Предприниматель получил в банке кредит на 6 лет по процентной ставке 28% годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2% от величины кредита. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки, если банк начисляет ежеквартально сложные проценты на исходную сумму кредита. Изменится ли доходность при выдаче кредита на 3 года?

2.1.56. В банке получен кредит на 5 лет по процентной ставке 24% годовых, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 1% от величины кредита. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки, если банк начисляет сложные проценты на исходную сумму кредита: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

2.1.57. Выдана ссуда под процентную ставку 32% годовых, при этом сразу были взысканы комиссионные в размере 2,5% от величины ссуды. Определите доходность такой сделки в виде годовой эффективной процентной ставки, если кредитор начисляет простые проценты на исходную величину ссуды и срок ссуды: а) 4 года; б) 8 лет. Как изменится доходность, если комиссионные не будут удерживаться?

2.1.58. Банк выдает ссуду на 3 года под годовую номинальную процентную ставку 24%, причем сложные проценты начисляются ежеквартально на исходную сумму ссуды. Определите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки, если: а) комиссионные не удерживаются; б) удерживаются комиссионные в размере 2% от величины ссуды; в) удерживаются комиссионные в размере 2% от величины ссуды и ее срок увеличивается до 5 лет.

2.1.59. Выдается ссуда по процентной ставке 35% годовых, при этом взимаются комиссионные в размере 1,5% от величины ссуды. Сложные проценты начисляются ежемесячно на исходную величину ссуды. На какой срок должна быть выдана ссуда, чтобы доходность такой сделки для кредитора в виде годовой эффективной процентной ставки составляла 45%?

2.1.60. При выдаче кредита на 7 лет по процентной ставке 30% годовых были удержаны комиссионные. Сложные проценты начислялись ежегодно на исходную величину кредита. Сколько процентов составили комиссионные от величины кредита, если доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки получилась равной 31,2% годовых?

2.1.61. Вексель учитывается банком за 3 месяца до его погашения по простой учетной ставке 24% годовых. Определите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной процентной ставки, если: а) комиссионные не удерживаются; б) удерживаются комиссионные в размере 2,5% от суммы, выплачиваемой за вексель; в) удерживаются комиссионные в размере 2,5% от суммы, выплачиваемой за вексель, и вексель учитывается за 6 месяцев до его погашения.

2.1.62. Предлагается оформить вклад под следующие процентные ставки: 200% годовых или 35% за квартал, причем в обоих случаях используется смешанная схема начисления процентов. Какой вариант выгоднее, если срок хранения вклада составляет: а) 6 месяцев; б) один год? До какого срока выгоднее иметь 200% годовых, а когда выгоднее ежеквартальное начисление по 35%? Финансовый год принять равным 360 дней (месяц – 30 дней).

2.1.63. Инвестор собирается разместить эффективно свои свободные денежные средства. Если он вложит средства в ценные бумаги трастовой компании, то должен будет заплатить налог с полученной прибыли в размере 8%. Если же он положит деньги в банк, то начисленные проценты не будут облагаться налогом. Определите наиболее прибыльную схему вложения капитала с 1 января по 31 марта, если налоги платятся в конце каждого квартала и услуги на финансовом рынке предлагают две фирмы: трастовая компания – на условиях начисления сложных процентов по процентной ставке 5% за месяц по вкладу, составляющему целое число месяцев, но не менее месяца; банк – с ежемесячным начислением сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 48% годовых при таких же ограничениях на срок вклада.

2.1.64. Вкладчик может свои свободные денежные средства в долларах на один год поместить в одном банке на валютном депозите под процентную ставку 13% годовых с полугодовым начислением сложных процентов или в другом банке эту же сумму поместить на рублевом депозите под процентную ставку 16% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Как ему лучше поступить, если курс покупки долларов на начало срока – 19 руб. 80 коп., а ожидаемый курс продажи через год – 21 руб. 50 коп.?

2.1.65. Господин N намеревается обменять имеющиеся у него немецкие марки и поместить полученную сумму на рублевом депозите сроком на 3 года под процентную ставку 24% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов, после чего наращенную сумму опять конвертировать в немецкие марки. При каком ожидаемом курсе продажи не имеет смысла такая финансовая операция, если курс покупки немецких марок на начало срока составляет 10 руб. 64 коп. и на валютном депозите денежную сумму можно поместить под процентную ставку 18% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов?

2.1.66. Некоторая сумма в долларах США обменивается на рубли, после чего помещается на рублевый депозит на 2 года 6 месяцев под процентную ставку 30% годовых с ежегодным начислением сложных процентов. Полученная наращенная сумма опять конвертируется в доллары США. Определите доходность такой финансовой операции в виде годовой эффективной процентной ставки, если курс покупки долларов на начало срока – 18 руб. 20 коп., а курс продажи через 2 года 6 месяцев – 22 руб. 14 коп. и начисление процентов осуществлялось: а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме.

2.1.67. На вклад 100 тыс. руб. по истечении 4 лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 32% исходя из полугодовой схемы начисления. Определите наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока и ставка налога на проценты равна 15%.

2.1.68. На вклад 150 тыс. руб. в течение 6 лет раз в год начислялись сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 26% исходя из полугодовой схемы начисления. Определите итоговую наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы и ставка налога на проценты равна 12%. Чему равна величина налога за каждый год?

2.1.69. На депозит была помещена сумма 80 тыс. руб. на 2 года 6 месяцев, по истечении которых были начислены сложные проценты по годовой процентной ставке 30%. Определите наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12%, налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока и наращение осуществлялось: а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме.

2.1.70. Инвестор собирается вложить 40 тыс. руб. с целью получения после уплаты налога на проценты 100 тыс. руб. на следующих условиях: по истечении оговоренного в контракте срока на инвестируемую сумму будут начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 30% исходя из ежемесячной схемы начисления. Определите срок, необходимый для накопления требуемой суммы, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока. Какой будет срок, если налог на проценты не надо уплачивать?

2.1.71. Инвестор собирается вложить 20 тыс. руб. с целью получения после уплаты налога на проценты 70 тыс. руб. на следующих условиях: в течение оговоренного в контракте срока раз в год на инвестируемую сумму будут начисляться сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 32% исходя из ежемесячной схемы начисления. Определите срок, необходимый для накопления требуемой суммы, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы. Какой будет срок, если налог на проценты не надо уплачивать?

2.1.72. На вклад по истечении 5 лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 34% исходя из ежеквартальной схемы начисления, причем один раз в конце срока был выплачен налог на все полученные проценты. Определите годовую эффективную процентную ставку в этой финансовой сделке, если ставка налога на проценты равна 15%.

2.1.73. Предприниматель инвестировал 120 тыс. руб. на 6 лет, по истечении которых были начислены сложные проценты по переменной годовой процентной ставке, причем для первых трех лет годовая процентная ставка равнялась 22%, на следующие два года устанавливалось 28% и на последний год – 30%. Определите наращенную сумму после уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока.

2.1.74. Предприниматель инвестировал 200 тыс. руб. на 4 года, в течение которых раз в год начислялись сложные проценты по переменной годовой процентной ставке, причем для первых двух лет годовая процентная ставка равнялась 30%, на следующий год устанавливалось 34% и на последний год – 36%. Определите итоговую наращенную сумму после уплаты налога на все проценты, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы.

2.1.75. Вклад 160 тыс. руб. был размещен в банке на 2 года и 8 месяцев, по истечении которых на этот вклад были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 30% и вклад был востребован. После уплаты налога на проценты вкладчик стал обладателем суммы в размере 299,808 тыс. руб. Какую схему начисления процентов использовал банк, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока?

2.2. Сложная учетная ставка

Основные положения

• Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется в ситуации предварительного начисления сложного процента, т.е. когда сложный процент (например, за кредит или за продажу некоторого финансового документа до срока его погашения) начисляется в момент заключения финансового соглашения. В этом случае в начале каждого периода начисления проценты начисляются не на одну и ту же величину (как при дисконтировании по простой учетной ставке), а каждый раз на новую, полученную в результате дисконтирования, осуществленного в предыдущем периоде.

• Для лица, осуществляющего предварительное (антисипативное) начисление процентов, а следовательно, и дисконтирование, более выгодным является дисконтирование по сложной учетной ставке, если срок учета менее одного года; более выгодным является дисконтирование по простой учетной ставке, если срок учета превышает один год; дисконтирование в обоих случаях дает один и тот же результат, если срок учета равен одному году.

• Если срок, за который осуществляется дисконтирование, не равен целому числу лет, то при определении стоимости учтенного капитала, как правило, используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (применяется сложная учетная ставка для целого числа лет и простая учетная ставка – для дробной части года). Стоимость учтенного капитала будет больше при использовании смешанной схемы. Аналогичные способы дисконтирования применяются и в том случае, когда дисконтирование производится не один, а несколько раз в году.

• С ростом в году числа операций дисконтирования по номинальной учетной ставке величина учтенного капитала возрастает.

• Эффективная годовая учетная ставка обеспечивает тот же результат, что и дисконтирование несколько раз в году по номинальной учетной ставке, деленной на число периодов дисконтирования.

• Эффективная учетная ставка определяется и как ставка, обеспечивающая переход от исходной суммы к учтенной при однократном дисконтировании за базовый период (например, за год), т.е. не используется явным образом номинальная учетная ставка.

Вопросы для обсуждения

1. В каких случаях может осуществляться дисконтирование по сложной учетной ставке?
2. Опишите подробно, как осуществляется дисконтирование по сложной годовой учетной ставке при продаже некоторого долгового обязательства за три года до срока погашения.
3. Какой вид имеет множитель дисконтирования при дисконтировании по сложной учетной ставке?
4. Как связаны между собой дисконтирование по сложной учетной ставке и проценты *"со 100"*?
5. Как соотносятся величины дисконтированных сумм при дисконтировании по простой и по сложной учетным ставкам?
6. Как соотносятся величины дисконтированных сумм при дисконтировании по сложной учетной и по сложной процентной ставкам?
7. Как соотносятся величины дисконтированных сумм при дисконтировании по простой процентной и по сложной учетной ставкам?
8. Какие два основных способа дисконтирования, связанные со сложной учетной ставкой, вы знаете? Какой из них выгоднее для лица, осуществляющего учет?
9. Может ли учет по сложной учетной ставке привести к недопустимым на практике величинам?
10. Какая годовая учетная ставка называется номинальной?
11. Что происходит с величиной учтенного капитала, если растет число осуществлений операции дисконтирования по сложной учетной ставке?
12. Какая ставка называется эффективной годовой учетной ставкой? От каких параметров она зависит?
13. Как ведет себя эффективная годовая учетная ставка с увеличением числа периодов дисконтирования в году?

14. Как пояснить с финансовой точки зрения соотношение между эффективной и номинальной учетными ставками?
15. В каком случае эффективная годовая учетная ставка совпадает с номинальной?
16. Что происходит с величиной номинальной учетной ставки при определении ее через эффективную годовую учетную ставку, когда число операций дисконтирования в году растет?
17. Какие номинальные учетные ставки называются эквивалентными?
18. Приведите формулу наращения по сложной учетной ставке.
19. Как можно связать между собой наращение по сложной учетной ставке и проценты *"во 100"*?
20. Какая из ставок, сложная учетная или такая же по величине сложная процентная, обеспечивает более быстрый рост капитала при наращении?
21. Как соотносятся между собой результаты наращения по простой процентной и сложной учетным ставкам?
22. Что можно сказать о декурсивном и антисипативном способах начисления сложных процентов, когда период начисления уменьшается?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 2.2.1. Найдите величину дисконта, если долговое обязательство на выплату 40 тыс. руб. учтено за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке: а) 20% годовых; б) 25% годовых.

Решение. а) Полагая $n = 3$, $F_3 = 40$ тыс. руб., $d = 0{,}2$, по формуле (67) получим:

$$P = 40(1-0{,}2)^3 = 20{,}48 \text{ тыс. руб.}$$

Поэтому дисконт составит:

$$D_d = 40 - 20{,}48 = 19{,}52 \text{ тыс. руб.}$$

б) Так как в этом случае $d = 0{,}25$, то

$$P = 40(1-0{,}25)^3 = 16{,}875 \text{ тыс. руб.}, \ D_d = 40 - 16{,}875 = 23{,}125 \text{ тыс. руб.}$$

Видно, что с ростом учетной ставки уменьшается дисконтированная величина выплаты по долговому обязательству и, следовательно, увеличивается величина дисконта.

Пример 2.2.2. Вексель на сумму 70 тыс. руб. со сроком погашения через 4 года учтен за 32 месяца по сложной учетной ставке 24% годовых. Определите суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета векселя.

Решение. При применении только сложной учетной ставки воспользуемся формулой (67). Так как дисконтирование производится один раз в год, то $n = 32/12 = 8/3$. Далее $F_n = 70$ тыс. руб., $d = 0{,}24$, поэтому:

$$P = 70(1 - 0{,}24)^{\frac{8}{3}} = 33{,}672 \text{ тыс. руб.}$$

Если же использовать при учете смешанную схему, то при $w = 2$, $f = 2/3$ по формуле (68) получим:

$$P = 70(1 - 0{,}24)^2(1 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}24) = 33{,}963 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, предъявитель векселя получит больше при использовании смешанной схемы.

Пример 2.2.3. Рассчитайте дисконтированную сумму при учете 1 млн руб. по простой и сложной учетным ставкам, если годовая учетная ставка равна 18% годовых и учет происходит за 30 дней, 90 дней, 180 дней, 1 год, 2 года, 3 года, 5 лет. Полагать каждый год равным 360 дней.

Решение. Применяя при $F = F_n = 1$ млн руб. и $d = 0{,}18$ для простой учетной ставки формулу (19), а для сложной – формулу (67), получим следующие результаты, представленные для наглядности в табличном виде:

(млн руб.)

Способ дисконтирования	30 дней (n=1/12)	90 дней (n=1/4)	180 дней (n=1/2)	1 год (n=1)	2 года (n=2)	3 года (n=3)	5 лет (n=5)
Простая учетная ставка	0,985	0,955	0,91	0,82	0,64	0,46	0,1
Сложная учетная ставка	0,9836	0,9516	0,9055	0,82	0,6724	0,5514	0,3707

Таким образом, если вексель на сумму 1 млн руб. учитывается, когда до срока погашения остается меньше года, то для векселедержателя более выгоден учет по простой учетной ставке. Так, при учете за 90 дней до срока погашения векселедержатель получит: при использовании простой ставки – 955 тыс. руб.; при использовании сложной учетной ставки – 951,6 тыс. руб., т.е. разница между суммами составляет 3,4 тыс. руб. Если же учет векселя осуществляется, когда до срока погашения остается больше года, то для векселедержателя более выгоден учет по сложной учетной ставке.

Заметим, что дисконтирование по простой учетной ставке за срок более чем 5,56 года, приводит к не допустимым на практике величинам (будем получать отрицательные значения дисконтированных сумм). Однако учет по сложной учетной ставке всегда дает положительные дисконтированные величины. Например, при учете за 15 лет получим: $P = 1 \cdot (1 - 0{,}18)^{15} = 0{,}0510$ млн руб.

Пример 2.2.4. Долговое обязательство на выплату 46 тыс. руб. учтено за 4 года до срока погашения. Определите полученную сумму, если производилось: а) полугодовое; б) поквартальное; в) помесячное дисконтирование по номинальной учетной ставке 24% годовых.

Решение. Во всех случаях полагаем $n = 4$, $F_n = F_2 = 46$ тыс. руб. и пользуемся формулой (69).

а) Так как $m = 2$, $d^{(m)} = d^{(2)} = 0{,}24$, то:

$$P = 46\left(1 - \frac{0{,}24}{2}\right)^{2 \cdot 4} = 16{,}543 \text{ тыс. руб.}$$

б) Поскольку $m = 4$, $d^{(m)} = d^{(4)} = 0{,}24$, то:

$$P = 46\left(1 - \frac{0{,}24}{4}\right)^{4 \cdot 4} = 17{,}092 \text{ тыс. руб.}$$

в) В этом случае $m = 12$, $d^{(m)} = d^{(12)} = 0{,}24$, поэтому:

$$P = 46\left(1 - \frac{0{,}24}{12}\right)^{12 \cdot 4} = 17{,}443 \text{ тыс. руб.}$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что с ростом числа осуществлений операции дисконтирования в году величина учтенного капитала возрастает.

Пример 2.2.5. Определите, какую сумму получит владелец векселя на 30 тыс. руб. со сроком погашения через 25 месяцев, если он учтет вексель сразу при его выдаче по номинальной учетной ставке $d^{(4)} = 20\%$ годовых. Сравните два способа дисконтирования.

Решение. Полагаем $n = 25/12$, $m = 4$, $F_n = F_{25/12} = 30$ тыс. руб. Если использовать формулу (69), то

$$P = 30\left(1 - \frac{0,2}{4}\right)^{4\cdot\frac{25}{12}} = 19,565 \text{ тыс. руб.}$$

Пусть дисконтирование осуществляется по смешанной схеме по формуле (70). Поскольку $\bar{w} = [4\cdot\frac{25}{12}] = [\frac{25}{3}] = 8$, $\bar{f} = \frac{25}{3} - 8 = \frac{1}{3}$, то

$$P = 30\left(1 - \frac{0,2}{4}\right)^{8}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{0,2}{4}\right) = 19,571 \text{ тыс. руб.}$$

Очевидно, для векселедержателя выгоднее смешанная схема.

Пример 2.2.6. За долговое обязательство в 80 тыс. руб. банком было выплачено 62 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась: а) годовая сложная учетная ставка 28%, б) годовая простая учетная ставка 28%?

Решение. а) Полагая в формуле (71) $P = 62$ тыс. руб., $F_n = 80$ тыс. руб., $m = 1$, $d^{(1)} = 0,28$, получим:

$$n = \frac{\ln\frac{62}{80}}{\ln(1 - 0,28)} = 0,776 \text{ года.}$$

Считая, что в году 360 дней, находим $n = 360\cdot 0,776 = 279,36$ дня. Округляя полученный срок до целого числа дней, делаем вывод, что долговое обязательство было учтено за 280 дней до срока погашения.

б) В случае простой учетной ставки воспользуемся формулой (22), где $F = 80$ тыс. руб., $d = 0{,}28$:

$$n = \frac{80 - 62}{80 \cdot 0{,}28} = 0{,}804 \text{ года, или } 289{,}44 \text{ дня.}$$

Таким образом, $n = 290$ дней.

Пример 2.2.7. Вексель был учтен за 2,5 года до срока погашения, при этом владелец векселя получил четверть от написанной на векселе суммы. По какой годовой номинальной учетной ставке был учтен этот вексель, если производилось: а) поквартальное дисконтирование; б) помесячное дисконтирование?

Решение. а) Применяя формулу (72), в которой $P = 0{,}25F_n$, $n = 2{,}5$, $m = 4$, получим:

$$d^{(4)} = 4(1 - 0{,}25^{\frac{1}{4 \cdot 2{,}5}}) = 0{,}5178, \text{ т.е. } d^{(4)} = 51{,}78\%.$$

б) Если $m = 12$, то

$$d^{(12)} = 12(1 - 0{,}25^{\frac{1}{12 \cdot 2{,}5}}) = 0{,}5419, \text{ т.е. } d^{(12)} = 54{,}19\%.$$

Таким образом, чем большее количество раз в году производится дисконтирование, тем больше величина годовой номинальной учетной ставки.

Пример 2.2.8. Рассчитайте эффективную годовую учетную ставку при различной частоте начисления дисконта и номинальной учетной ставке, равной 18% годовых.

Решение. Используя формулу (74), вычислим для некоторых значений m эффективную годовую учетную ставку и результаты запишем в табличном виде:

m	1	2	4	12	24	365
d_{ef}	0,18	0,1719	0,1682	0,1659	0,1653	0,1648

Из таблицы следует, что d_{ef} уменьшается с ростом m (так как второе слагаемое в правой части равенства (74) увеличивается). Вообще можно показать, что при $m > 1$ справедливо неравенство $d_{ef} < d^{(m)}$, которое нетрудно пояснить и из финансовых соображений.

Пример 2.2.9. Определите номинальную учетную ставку, если годовая эффективная учетная ставка равна 30% и дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется: а) каждые полгода; б) ежемесячно; в) ежеквартально.

Решение. Полагаем $d_{ef} = 0{,}3$ и пользуемся формулой (73).

а) Так как $m = 2$, то

$$d^{(2)} = 2[1-(1-0{,}3)^{\frac{1}{2}}] = 0{,}3267, \text{ или } 32{,}67\%.$$

б) Поскольку в этом случае $m = 12$, то

$$d^{(12)} = 12[1-(1-0{,}3)^{\frac{1}{12}}] = 0{,}3514, \text{ или } 35{,}14\%.$$

в) Считая в году 360 дней, при $m = 360$ получим:

$$d^{(360)} = 360[1-(1-0{,}3)^{\frac{1}{360}}] = 0{,}3565, \text{ или } 35{,}65\%.$$

Найденные номинальные ставки $d^{(2)}$, $d^{(12)}$ и $d^{(360)}$ эквивалентны, так как они получены в соответствии с одной и той же эффективной ставкой. Поэтому осуществление дисконтирования раз в год по сложной учетной ставке 30% годовых дает такой же результат, как осуществление дисконтирования 2 раза в год по ставке 32,67% годовых, или 12 раз в год по ставке 35,14% годовых, или каждый день (360 раз в год) по ставке 35,65% годовых. Отметим, что $d^{(2)} < d^{(12)} < d^{(360)}$, т.е. величина номинальной учетной ставки растет, когда количество осуществлений дисконтирования в году увеличивается. Аналогичное неравенство справедливо и в общем случае, а именно: пусть $d^{(m)}$ и $d^{(l)}$ – эквивалентные номинальные годовые учетные ставки и $m > l$, тогда $d^{(m)} > d^{(l)}$.

Пример 2.2.10. Вексель на сумму 12 тыс. руб. со сроком погашения через 3 года 6 месяцев был сразу же учтен в банке, и предъявитель векселя получил 5 тыс. руб. Найдите эффективную годовую учетную ставку в этой финансовой операции.

Решение. Подставляя в формулу (75) $n = 3{,}5$, $P = 5$, $F_{3,5} = 12$, находим:

$$d_{ef} = 1-\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{3,5}} = 0{,}2213, \text{ или } 22{,}13\%.$$

Пример 2.2.11. По условиям финансового соглашения на сумму 90 тыс. руб., помещенную в банк на 5 лет, начисляются проценты по сложной учетной ставке 24% годовых. Определите наращенную сумму, если начисление процентов производится: а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Сравните полученные величины с результатами наращения сложными процентами по процентной ставке 24% годовых.

Решение. Будем пользоваться формулой (77), где $P = 90$ тыс. руб., $n = 5$, $d^{(2)} = d^{(4)} = d^{(12)} = 0{,}24$. Полагая последовательно $m = 2$, $m = 4$, $m = 12$, получим:

$$\text{а) } F_5 = \frac{90}{\left(1 - \frac{0{,}24}{2}\right)^{2 \cdot 5}} = 323{,}159 \text{ тыс. руб.;}$$

$$\text{б) } F_5 = \frac{90}{\left(1 - \frac{0{,}24}{4}\right)^{4 \cdot 5}} = 310{,}231 \text{ тыс. руб.;}$$

$$\text{в) } F_5 = \frac{90}{\left(1 - \frac{0{,}24}{12}\right)^{12 \cdot 5}} = 302{,}467 \text{ тыс. руб.}$$

Полезно заметить, что во всех случаях можно было воспользоваться и формулой (76), полагая число периодов равным соответственно 10, 20 и 60, а учетные ставки – 12% (24% : 2), 6% (24% : 4) и 2% (24% : 12).

Если бы наращение сложными процентами осуществлялось с помощью процентной ставки, то для вариантов а), б), в) получили бы по формуле (58) следующие значения наращенных сумм:

$$\text{а) } F_5 = 90\left(1 + \frac{0{,}24}{2}\right)^{2 \cdot 5} = 279{,}522 \text{ тыс. руб.;}$$

$$\text{б) } F_5 = 90\left(1 + \frac{0{,}24}{4}\right)^{4 \cdot 5} = 288{,}639 \text{ тыс. руб.;}$$

$$\text{в) } F_5 = 90\left(1 + \frac{0{,}24}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 295{,}293 \text{ тыс. руб.,}$$

т.е., как уже отмечалось, с увеличением числа начислений процентов за год по сложной процентной ставке величина наращенной суммы возрастает. В противоположность этому с увеличением числа начислений процентов за год по сложной учетной ставке величина наращенной суммы убывает. Видно, что, чем больше число наращений в течение года, тем меньше разница между итоговыми суммами, полученными декурсивным и антисипативным способами начисления процентов. Это и объяснимо, поскольку, чем меньше период начисления, тем меньше отличие между понятиями предварительный и последующий. Так, если $m = 365$ (каждый день идет начисление сложных процентов), то применение номинальной учетной ставки 24% годовых дает 298,928 тыс. руб., а такой же величины процентной ставки – 298,693 тыс. руб., и разница между этими суммами равна уже 235 руб., в то время как, например, при $m = 4$ соответствующая разница составляет 21 592 руб.

Пример 2.2.12. Вклад в размере 20 тыс. руб. помещен в банк сроком на 5 лет, причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке: в первые два года – 16%, в последующие два года – 19% и в оставшийся год – 23%. Найдите наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же наращенную сумму?

Решение. Наращенную сумму за первые два года определяем по формуле (76), где $F_n = 20$, $n = 2$, $d = 0{,}16$: $\dfrac{20}{(1-0{,}16)^2}$ тыс. руб. Наращенную сумму за следующие два года определяем также по формуле (76), где $F_n = \dfrac{20}{(1-0{,}16)^2}$, $n = 2$, $d = 0{,}19$: $\dfrac{20}{(1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2}$ тыс. руб. Аналогичным образом поступая с последним годом, когда $d = 0{,}23$, находим, что через 5 лет наращенная сумма составит:

$$P = \frac{20}{(1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)} = 56{,}106 \text{ тыс. руб.}$$

Годовую (постоянную) учетную ставку $\bar{d}$, обеспечивающую такой же результат, как и плавающая ставка, можно найти из равенства $(1-\bar{d})^5 = (1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)$, разрешая его относительно $\bar{d}$:

$$\bar{d} = 1 - \sqrt[5]{(1-0{,}16)^2(1-0{,}19)^2(1-0{,}23)} = 0{,}1864, \text{ или } 18{,}64\%.$$

Пример 2.2.13. Банк выдал кредит сроком на 1 месяц под 3% за месяц, удержав проценты при выдаче кредита. Определите доходность такой финансовой сделки для банка в виде годовой эффективной процентной ставки и поясните, как такого рода сделку можно соотнести с начислением сложных процентов по учетной ставке.

Решение. Обозначим через F величину кредита, тогда заемщику выдается сумма $F - 0{,}03F = 0{,}97F$. Теперь можно воспользоваться формулой (64), где $P = 0{,}97F$, $F_n = F$ и $n = 1/12$:

$$r_{ef} = \left(\frac{F}{0{,}97F}\right)^{\frac{1}{1/12}} - 1 = \left(\frac{1}{0{,}97}\right)^{12} - 1 = 0{,}4412, \text{ или } 44{,}12\%.$$

Записывая формулу для вычисления r_{ef} в виде:

$$r_{ef} = \left(\frac{1}{1-0{,}03}\right)^{12} - 1,$$

делаем вывод, что начисление процентов один раз за год по процентной ставке 44,12% обеспечивает такой же результат, как и начисление ежемесячно процентов по годовой номинальной учетной ставке $d^{(12)} = 3\% \cdot 12 = 36\%$.

Таким образом, выдача банком кредита с одновременным удержанием начисленных процентов по существу означает, что на выданную сумму будут начисляться сложные проценты по учетной ставке.

Пример 2.2.14. Согласно финансовому соглашению банк начисляет по полугодиям проценты на вклады по сложной учетной ставке 28% годовых. Определите в виде простой годовой процентной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении: а) на 3 месяца; б) на год.

Решение. а) Стоимость привлеченных средств найдем по формуле (23), где через P обозначена использованная сумма средств; через $F-P$ – проценты, выплаченные за использование суммы P в течение времени n, а F определяется с помощью формулы (77), где $n=0{,}25$, $m=2$, $d^{(2)}=0{,}28$. Итак,

$$F-P=\frac{P}{\left(1-\frac{0{,}28}{2}\right)^{2\cdot 0{,}25}}-P=0{,}0783P,$$

$$r=\frac{0{,}0783P}{P\cdot 0{,}25}=0{,}3132, \text{ или } 31{,}32\% \text{ годовых.}$$

Естественно, можно было и сразу применить формулу (85): $r=\frac{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mn}-1}{n}$, устанавливающую эквивалентность простой ставки r и сложной учетной ставки $d^{(m)}$:

$$r=\frac{\left(1-\frac{0{,}28}{2}\right)^{-2\cdot 0{,}25}-1}{0{,}25}=0{,}3132.$$

б) Полагая $n=1$, воспользуемся сразу формулой (85) эквивалентности простой процентной и сложной учетной ставок:

$$r=\left(1-\frac{0{,}28}{2}\right)^{-2}-1=0{,}3521=35{,}21\%.$$

Заметим, что если найти простую учетную ставку, эквивалентную простой процентной ставке $r=35{,}21\%$, то она в точности будет равна годовой эффективной учетной ставке, соответствующей номинальной учетной ставке $d^{(2)}=28\%$. Действительно, по формуле (26):

$$d=\frac{0{,}3521}{1+0{,}3521}=0{,}2604,$$

а по формуле (74) получаем то же значение:

$$d_{ef}=1-\left(1-\frac{0{,}28}{2}\right)^{2}=0{,}2604.$$

Пример 2.2.15. Вексель учитывается в банке за 3 года до его погашения по сложной учетной ставке 26% годовых. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной учетной ставки, если банк удерживает комиссионные в размере 2% от суммы, выплачиваемой за вексель. Как изменится такого рода доходность при учете за 2 года и за 6 лет до срока погашения?

Решение. Пусть за 3 года до срока погашения предъявлен вексель на некоторую сумму F_3. Так как сумма, выплачиваемая за вексель, составит: $F_3(1-0{,}26)^3 = 0{,}4052F_3$, то величину удерживаемых комиссионных определяем, взяв 2% от этой суммы: $0{,}4052F_3 \cdot 0{,}02 = 0{,}0081F_3$. Следовательно, векселедержатель получит сумму: $P = 0{,}4052F_3 - 0{,}0081F_3 = 0{,}3971F_3$. Теперь по формуле (75) можно определить доходность финансовой операции для банка в виде эффективной учетной ставки:

$$d_{ef} = 1-\left(\frac{0{,}3971F_3}{F_3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1-\sqrt[3]{0{,}3971} = 0{,}2650,$$

т.е. $d_{ef} = 26{,}50\%$, что больше объявленных банком 26% годовых. Таким образом, удержание комиссионных увеличивает доходность финансовой операции для банка.

При предъявлении векселя за 2 года до срока сумма, выплачиваемая за вексель, составит: $F_2(1-0{,}26)^2 = 0{,}5476F_2$, и поэтому после удержания комиссионных векселедержатель получит сумму:

$$P = 0{,}5476F_2 - 0{,}5476F_2 \cdot 0{,}02 = 0{,}5366F_2,$$

и, следовательно, доходность для банка составит:

$$d_{ef} = 1-\left(\frac{0{,}5366F_2}{F_2}\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}2675,$$

т.е. больше, чем при учете за 3 года.

Аналогичным образом при учете за 6 лет получим:

$$P = F_6(1-0{,}26)^6 - F_6(1-0{,}26)^6 \cdot 0{,}02 = 0{,}1609F_6,$$

$$d_{ef} = 1 - \left(\frac{0{,}1609F_6}{F_6}\right)^{\frac{1}{6}} = 0{,}2625,$$

т.е. меньше, чем при учете за 3 года.

Основываясь на рассмотренном примере, можно сделать вывод, что при удержании комиссионных увеличение срока, за который происходит учет по сложной учетной ставке, уменьшает доходность в виде эффективной учетной ставки для банка. Конечно, если комиссионные не взимаются, то при учете за любое время до срока погашения по сложной учетной ставке доходность такой финансовой сделки в виде годовой эффективной учетной ставки будет постоянна и равна 26%.

Пример 2.2.16. Предприятие приобрело универсальный станок за 320 тыс. руб. Срок службы станка – 8 лет, после чего он реализуется по остаточной стоимости 50 тыс. руб. Используя способ фиксированного процента, составьте таблицу уменьшения стоимости станка по годам.

Решение. В соответствии со способом фиксированного процента стоимость имущества снижается к концу каждого года на одно и то же число процентов d от его стоимости на начало года. Обозначим через P первоначальную стоимость станка, P_n – остаточную стоимость станка через n лет и получим формулу для определения стоимости станка на конец k-го года.

В конце первого года первоначальная стоимость станка P будет уменьшена на величину Pd и станет равна $P - Pd = P(1-d)$. В конце второго года стоимость $P(1-d)$ будет уменьшена на величину $P(1-d)d$ и станет равна $P(1-d) - P(1-d)d = P(1-d)^2$. Продолжая аналогичным образом рассуждения, найдем, что в конце k-го года стоимость станка будет равна $P(1-d)^k$ (т.е. сумма P учитывается за k лет по сложной учетной ставке d).

Поскольку в конце n-го года остаточная стоимость станка равна P_n, то получим равенство $P_n = P(1-d)^n$, из которого можно определить фиксированный процент d снижения стоимости станка: $d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P_n}{P}}$ (очевидно, эта формула не случайно напоминает формулу (75) определения эффективной годовой учетной ставки). В данном случае срок службы станка составляет $n = 8$ лет, $P = 320$ тыс. руб., $P_n = P_8 = 50$ тыс. руб., поэтому:

$$d = 1 - \sqrt[8]{\frac{50}{320}} = 0{,}2071, \text{ или } 20{,}71\%.$$

Далее последовательно находим амортизационные отчисления за год и стоимость станка на конец этого года:

а) в конце первого года:

$$Pd = 320 \cdot 0{,}2071 = 66{,}272 \text{ тыс. руб.},$$

$$P - Pd = 320 - 66{,}272 = 253{,}728 \text{ тыс. руб.};$$

б) в конце второго года:

$$P(1-d)d = 253{,}728 \cdot 0{,}2071 = 52{,}547 \text{ тыс. руб.},$$

$$P(1-d)^2 = 253{,}728 - 52{,}547 = 201{,}181 \text{ тыс. руб.}$$

Продолжая аналогичным образом, получим таблицу:

Год службы	Амортизационные отчисления за год, тыс. руб.	Стоимость на конец года, тыс. руб.
0	0	320
1	66,272	253,728
2	52,547	201,181
3	41,665	159,516
4	33,036	126,48
5	26,194	100,286
6	20,769	79,517
7	16,468	63,049
8	13,057	49,992

Небольшое отличие остаточной стоимости от 50 тыс. руб. (получили 49,992 тыс. руб.) связано с погрешностью приближенных вычислений.

Задачи

2.2.1. Вексель на сумму 100 тыс. руб. учитывается за 4 года до срока погашения. Составьте схему учета векселя по годам, если при этом используется сложная учетная ставка 20% годовых. Какую сумму получит предъявитель векселя?

2.2.2. Долговое обязательство на выплату 12 тыс. руб. со сроком погашения через 5 лет учтено за 3 года до срока с дисконтом по сложной учетной ставке 14% годовых. Найдите величину дисконта. Как изменится величина дисконта, если долговое обязательство учтено сразу после его выдачи?

2.2.3. Сделайте сравнительный анализ графиков, отражающих дисконтирование по простой и по сложной учетным ставкам.

2.2.4. Определите дисконтированную сумму при учете 1 тыс. руб. по простой и сложной учетным ставкам, если годовая учетная ставка равна 18% и учет происходит за 30 дней, 210 дней, 1 год, 3 года, 5 лет, 20 лет. Полагать год равным 360 дней. Обсудите полученные результаты.

2.2.5. Вексель на сумму 50 тыс. руб. со сроком погашения через 3 года учтен за 26 месяцев по сложной учетной ставке 20% годовых. Определите суммы, которые получит предъявитель векселя при различных способах учета векселя (при применении только сложной учетной ставки и при применении смешанной схемы).

2.2.6. В банк 10 июня предъявлен для учета вексель на сумму 15 тыс. руб. со сроком погашения 10 сентября того же года. Банк учитывает вексель по сложной учетной ставке 20% годовых, считая год равным 360 дням и проводя приблизительный подсчет дней. Определите сумму, которую получит векселедержатель от банка, и комиссионные, удерживаемые банком в свою пользу за предоставленную услугу. Как изменятся результаты, если срок погашения векселя – 10 сентября следующего года?

2.2.7. За 3 года 9 месяцев до срока погашения в банк предъявлен вексель на сумму 80 тыс. руб. Банк согласился учесть вексель по сложной учетной ставке 24% годовых при осуществлении дисконтирования раз в год и выплатил предъявителю векселя 28,797 тыс. руб. Какую из двух схем дисконтирования (только по сложной учетной ставке или смешанную) использовал банк?

2.2.8. Вексель на сумму 30 тыс. руб. учтен за 15 месяцев до срока погашения по номинальной учетной ставке 16% годовых, причем производилось поквартальное дисконтирование. Составьте схему учета по кварталам. Какую сумму получит векселедержатель?

2.2.9. Долговое обязательство на выплату 200 тыс. руб. со сроком погашения через 6 лет учтено за три года до срока. Определите полученную сумму, если производилось: а) полугодовое; б) поквартальное; в) помесячное дисконтирование по номинальной учетной ставке 18% годовых.

2.2.10. Определите современное значение суммы в 30 тыс. руб., если она будет выплачена через 4 года 9 месяцев и дисконтирование производится по полугодиям по номинальной годовой учетной ставке 20%.

2.2.11. Определите, какую сумму получит владелец векселя на 40 тыс. руб. со сроком погашения через 26 месяцев, если он учтет вексель сразу при его выдаче по номинальной учетной ставке 24% годовых при осуществлении операции дисконтирования 4 раза в год. Сравните два способа дисконтирования (при применении только сложной учетной ставки и при применении смешанной схемы).

2.2.12. За долговое обязательство 50 тыс. руб. банком было выплачено 40 тыс. руб. За какое время до срока погашения было учтено это обязательство, если банком использовалась: а) годовая сложная учетная ставка 22%; б) годовая простая учетная ставка 22%? Полагать в году 360 дней.

2.2.13. Вексель был учтен за 21 месяц до срока погашения, при этом владелец векселя получил 0,8 от написанной на векселе суммы. По какой сложной годовой учетной ставке был учтен этот вексель?

2.2.14. За учтенный вексель была выплачена половина от написанной на векселе суммы. За какое время до срока погашения был учтен вексель при дисконтировании по простой и по сложной учетным ставкам, если годовая учетная ставка равна: а) 5%; б) 10%; в) 25%; г) 50%; д) 80%?

2.2.15. Вы имеете вексель на сумму 15 тыс. руб. и хотели бы при его учете по сложной учетной ставке за 2 года до срока погашения получить две трети этой суммы. Какая должна быть годовая номинальная учетная ставка при дисконтировании поквартально? Как изменится ответ, если дисконтирование осуществляется раз в год?

2.2.16. Долговое обязательство было учтено по номинальной учетной ставке 32% годовых, причем проводилось полугодовое дисконтирование. За какое время до срока погашения было учтено обязательство, если его дисконтированная сумма составила треть от суммы, которую нужно выплатить по этому обязательству?

2.2.17.За какое время до срока погашения был учтен вексель на сумму 50 тыс. руб., если предъявитель векселя получил 30 тыс. руб. и дисконтирование по номинальной учетной ставке 24% годовых производилось: а) поквартально; б) помесячно?

2.2.18. Долговое обязательство было учтено за 2 года до срока погашения, при этом его владелец получил половину от написанной в нем суммы. По какой годовой номинальной учетной ставке было учтено это обязательство, если производилось: а) полугодовое дисконтирование; б) поквартальное дисконтирование?

2.2.19. Какие условия учета при дисконтировании по сложной учетной ставке более выгодны банку: а) 32% годовых, полугодовое дисконтирование; б) 33% годовых, поквартальное дисконтирование?

2.2.20. Вы имеете возможность учесть вексель либо по сложной учетной ставке 28% годовых с поквартальным дисконтированием, либо по сложной учетной ставке 29% годовых с помесячным дисконтированием. Какой вариант предпочтительнее?

2.2.21. Рассчитайте эффективную годовую учетную ставку при различной частоте начисления дисконта и номинальной учетной ставке, равной 24% годовых. Сравните между собой полученные результаты.

2.2.22. Долговое обязательство, равное 15 тыс. руб., со сроком погашения через 3 года было сразу же учтено в банке, и владелец обязательства получил 10 тыс. руб. Найдите эффективную годовую учетную ставку в этой сделке.

2.2.23. Долговое обязательство на сумму 16 тыс. руб. было учтено за 170 дней до срока погашения, и владелец обязательства получил 14 тыс. руб. Определите доходность этой операции в виде эффективной учетной ставки на базе: а) 360 дней; б) 365 дней.

2.2.24. Определите номинальную учетную ставку, если эффективная годовая учетная ставка равна 22% и дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется: а) поквартально; б) помесячно.

2.2.25. На какую сумму должен быть выписан вексель, чтобы при его учете за 3 года до срока погашения по сложной учетной ставке 28% годовых можно было получить 18 тыс. руб., если дисконтирование производится: а) по полугодиям; б) помесячно? Чему равен дисконт?

2.2.26. За 4 года до срока погашения учтено долговое обязательство, и его владелец получил 5 тыс. руб. Определите сумму, написанную в долговом обязательстве, если учет осуществлялся по сложной учетной ставке и дисконтирование производилось: а) по полугодиям по учетной ставке 40% годовых; б) помесячно по учетной ставке 30% годовых.

2.2.27. Какая сумма должна быть написана на векселе, чтобы при его учете по сложной учетной ставке 30% годовых было получено 20 тыс. руб., если учет осуществляется: а) за 5 лет до срока погашения при дисконтировании раз в год; б) за 3 года до срока погашения при поквартальном дисконтировании?

2.2.28. В банке за 3 года 8 месяцев до срока погашения был учтен вексель по сложной учетной ставке 35% годовых, и векселедержатель получил сумму в размере 8,422 тыс. руб. Определите, какую сумму получил бы в этом банке владелец векселя при его учете за 2 года 5 месяцев до срока погашения, если банк использует при дисконтировании смешанную схему.

2.2.29. Определите, время, за которое происходит удвоение первоначальной суммы при начислении простых и сложных процентов, если используемая учетная ставка равна: а) 5%; б) 10%; в) 15%; г) 25%; д) 50%; е) 75%.

2.2.30. По условиям финансового контракта на депозит 30 тыс. руб., положенный в банк на 4 года, начисляются проценты по сложной учетной ставке 12% годовых. Определите наращенную сумму, если начисление процентов производится: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Сравните полученные величины с результатами наращения сложными процентами по процентной ставке 12% годовых.

2.2.31. Что выгоднее: получить 23,5 тыс. руб. через 5 лет или 30,5 тыс. руб. через 6 лет, если можно поместить деньги в банк под сложную учетную ставку 32% годовых? Оцените ситуацию с позиции будущего и с позиции настоящего.

2.2.32. Сроком на 6 лет выпущена облигация номиналом 1000 руб., причем предусмотрен следующий порядок начисления сложных процентов по плавающей годовой учетной ставке:

в первые три года – 12% годовых, в последующие два года – 16% годовых и в оставшийся год – 18% годовых. Найдите наращенную сумму. При использовании какой постоянной сложной учетной ставки можно получить такую же наращенную сумму?

2.2.33. Банк выдал кредит сроком на 1 квартал под 8% за квартал, удержав проценты при выдаче кредита. Определите доходность такой финансовой сделки для банка в виде годовой эффективной процентной ставки и поясните, как такого рода сделку можно соотнести с начислением сложных процентов по учетной ставке.

2.2.34. Согласно финансовому соглашению банк начисляет ежеквартально проценты на вклады по сложной учетной ставке 20% годовых. Определите в виде простой годовой процентной ставки стоимость привлеченных средств для банка при их размещении: а) на 3 месяца; б) на 9 месяцев; в) на год.

2.2.35. Вексель учитывается в банке за 2 года до его погашения по сложной учетной ставке 32% годовых. Найдите доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной учетной ставки, если банк производит поквартальное дисконтирование и удерживает комиссионные в размере 3% от суммы, выплачиваемой за вексель.

2.2.36. Вексель учитывается в банке за 2 года 6 месяцев до срока погашения по сложной учетной ставке 28% годовых, причем дисконтирование проводилось поквартально. При взимании комиссионных с суммы, выплачиваемой за вексель, доходность такой финансовой операции для банка в виде эффективной учетной ставки получилась 29%. Сколько процентов составили комиссионные от суммы, выплачиваемой за вексель?

2.2.37. Вексель учитывается в банке по сложной учетной ставке 30% годовых, при этом дисконтирование производится помесячно и банком взимаются комиссионные в размере 1,5% от суммы, выплачиваемой за вексель. За какое время (в днях) до срока погашения должен учитываться вексель, чтобы доходность такой сделки для банка в виде годовой эффективной учетной ставки составила 38%? Полагать в году 365 дней.

2.2.38. Некоторая сумма в долларах США обменивается на рубли, после чего помещается на рублевый депозит на 2 года 9 месяцев под учетную ставку 25% годовых с ежегодным начислением сложных процентов. Полученная наращенная сумма опять конвертируется в доллары США. Определите доходность такой финансовой операции в виде годовой эффективной учетной ставки, если курс покупки долларов на начало срока – 18 руб. 42 коп., а курс продажи через 2 года 9 месяцев – 22 руб. 30 коп. и начисление процентов осуществлялось: а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме.

2.2.39. На валютном (долларовом) депозите наращение осуществляется ежеквартально сложными процентами по годовой процентной ставке 24%. На рублевом депозите наращение осуществляется ежеквартально сложными процентами по годовой учетной ставке 24%. Курс покупки составляет 20 руб. 15 коп. за 1 долл. США. Какой должен быть курс продажи валюты, чтобы доходность в виде годовой эффективной процентной ставки за два года финансовой операции "конвертирование – наращение – конвертирование" была больше доходности при непосредственном инвестировании валютных средств?

2.2.40. На вклад 40 тыс. руб. по истечении 3 лет были начислены сложные проценты по годовой номинальной учетной ставке 28% исходя из ежеквартальной схемы начисления. После уплаты налога на проценты величина наращенной суммы составила 88,891 тыс. руб. Определите ставку налога на проценты, если налог на все полученные проценты был выплачен один раз в конце срока.

2.2.41. На вклад 50 тыс. руб. в течение 4 лет раз в год начислялись сложные проценты по годовой номинальной учетной ставке 28% исходя из полугодовой схемы начисления. После уплаты налога на все начисленные проценты величина итоговой наращенной суммы составила 151,979 тыс. руб. Определите ставку налога на проценты, если налог на проценты уплачивался каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы.

2.2.42. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под годовую номинальную процентную ставку 30% с однократным начислением в конце срока сложных процентов исходя из ежемесячной схемы начисления, чтобы наращенная сумма была в 2,4 раза больше первоначальной суммы с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока? Как изменится ответ при осуществлении наращения по сложной учетной ставке 30% годовых?

2.2.43. Фирма приобрела оборудование за 950 тыс. руб. Срок службы оборудования – 10 лет, после чего фирма намеревается реализовать изношенное оборудование за 100 тыс. руб. Используя способ фиксированного процента, составьте таблицу уменьшения стоимости оборудования по годам.

2.3. Непрерывная ставка

Основные положения

• При анализе сложных финансовых проблем в банковской практике нередко возникает задача начисления сложных процентов за очень малые промежутки времени. В частности, такая задача особенно актуальна, когда финансовые операции осуществляются и регистрируются с помощью электронных методов. В такого рода ситуациях говорят о непрерывном начислении процентов и их непрерывной капитализации.

• Предел годовой номинальной процентной ставки, когда число начислений сложных процентов стремится к бесконечности, а эффективная ставка постоянна, называется силой роста или интенсивностью наращения за год при непрерывном начислении процентов. Силу роста также еще называют непрерывной ставкой и, чтобы отличать ее от обычной (дискретной), вводят специальное обозначение – δ.

• При непрерывном начислении процентов исчезает различие между антисипативным и декурсивным способами начисления, так как в такой ситуации начало и конец периода перестают отличаться.

• При использовании непрерывной ставки будущие поступления, являющиеся разновременными суммами, можно оценивать с позиции любого момента времени.

Вопросы для обсуждения

1. Как пояснить переход к непрерывным процентам?
2. Чем отличаются дискретные проценты от непрерывных?
3. Какая постоянная используется при непрерывном начислении процентов?
4. Какая ставка называется силой роста?
5. Чему равен множитель наращения при непрерывном начислении процентов?
6. Можно ли сказать, что сила роста показывает скорость относительного роста накапливаемой суммы?
7. Какое существует соотношение между силой роста и годовой процентной ставкой?

8. Какое существует соотношение между силой роста и годовой учетной ставкой?
9. Укажите приближенные соотношения, связывающие силу роста и годовую процентную ставку.
10. Укажите приближенные соотношения, связывающие силу роста и годовую учетную ставку.
11. В каких случаях сила роста практически совпадает с процентной и учетной годовыми ставками?
12. Почему исчезает различие между антисипативным и декурсивным способами начисления процентов, если использовать непрерывное начисление?
13. Что такое сила учета и как она связана с силой роста?
14. В каких случаях целесообразно использовать непрерывное начисление процентов?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 2.3.1. Рассчитайте накопленную сумму для различных вариантов начисления сложных процентов за один год (равный 360 дням), если исходная сумма P = 1000 руб. и номинальная годовая процентная ставка $r^{(m)}$ = 30%. Рассмотрите случаи, когда проценты начисляются один раз, по полугодиям, ежеквартально, ежемесячно, ежечасно, ежеминутно, ежесекундно и непрерывно. Для каждого случая определите эффективную годовую процентную ставку.

Решение. Результаты, полученные для всех вариантов, приведем в виде таблицы, причем в четвертом столбце вычислены разности между наращениями с данным числом начисления процентов и базовым, а в пятом столбце указаны разности между наращенными суммами двух соседних строчек.

P	Частота начисления	F_1	Наращение		r_{ef}
			базовое	цепное	
1000	Ежегодное (m = 1)	1300	–	–	0,3
1000	Полугодовое (m = 2)	1322,5	22,5	22,5	0,3225
1000	Ежеквартальное (m = 4)	1335,47	35,47	12,97	0,33547
1000	Ежемесячное (m = 12)	1344,89	44,89	9,42	0,34489
1000	Ежедневное (m = 360)	1349,69	49,69	4,8	0,34969

P	Частота начисления	F_1	Наращение		r_{ef}
			базовое	цепное	
1000	Ежечасное ($m = 8640$)	1349,85	49,85	0,16	0,34985
1000	Ежеминутное ($m = 518400$)	1349,86	49,86	0,01	0,34986
1000	Ежесекундное ($m = 31104000$)	1349,86	49,86	0	0,34986
1000	Непрерывное ($m = \infty$)	1349,86	49,86	0	0,34986

Накопленную сумму и эффективную процентную ставку во всех случаях, кроме последнего, находим соответственно по формулам (58) и (63). При непрерывном начислении процентов получим:

$$F_1 = Pe^{\delta} = 1000 \cdot e^{0,3} = 1349,86 \text{ руб.},$$

$$r_{ef} = e^{\delta} - 1 = 1,34986 - 1 = 0,34986.$$

Как и следовало ожидать, приведенные расчеты подтверждают наличие прямой зависимости между частотой начисления процентов и накопленной суммой; пятый столбец таблицы показывает, что с увеличением частоты начисления темп прироста накопленной суммы уменьшается. Если считать с точностью до копеек (что и имеет смысл при практических расчетах и как сделано при заполнении таблицы), то замечаем, что начисление сложных процентов каждую минуту (или за меньший период) доставляет ту же сумму, что и непрерывное начисление процентов. Даже начисление каждый час дает наращенную сумму лишь на 1 копейку меньше.

Эффективная процентная ставка с ростом частоты начисления сложных процентов растет и в пределе достигает величины 34,986%.

Пример 2.3.2. На сумму 6 тыс. руб. в течение 5 лет начисляются непрерывные проценты. Определите наращенную сумму, если сила роста равна: а) 7%; б) 27%.

Решение. а) Полагая $P = 6$ тыс. руб., $n = 5$, $\delta = 0,07$, по формуле (78) получим:

$$F_5 = 6e^{0,07 \cdot 5} = 8,514 \text{ тыс. руб.}$$

Если в данном случае применить формулу (55), т.е. осуществлять начисление обычных сложных процентов по процентной ставке $r = 0{,}07$, то получим сумму:

$$F_5 = 6(1+0{,}07)^5 = 8{,}415 \text{ тыс. руб.},$$

которая отличается от предыдущей всего на 99 руб., хотя наращение происходит достаточно долго – 5 лет. Такой результат объясняется небольшой величиной ставки. Ясно, что при более частом начислении сложных процентов эта разница будет еще меньше.

б) Так как в этом случае $\delta = 0{,}27$, то

$$F_5 = 6e^{0{,}27 \cdot 5} = 23{,}145 \text{ тыс. руб.}$$

Если же воспользоваться формулой (55) при $r = 0{,}27$, то получим:

$$F_5 = 6(1+0{,}27)^5 = 19{,}823 \text{ тыс. руб.},$$

т.е. имеем значительную разницу (3,322 тыс. руб.) между найденными суммами.

Пример 2.3.3. Какую сумму необходимо поместить на банковский депозит, чтобы при непрерывном начислении процентов по ставке 25% получить 30 тыс. руб. через: а) 4 года; б) 9 лет?

Решение. а) Для определения искомой суммы воспользуемся формулой (78). Полагая $n = 4$, $F_n = F_4 = 30$ тыс. руб., $\delta = 0{,}25$, из этой формулы получим:

$$P = 30e^{-0{,}25 \cdot 4} = 30e^{-1} = 11{,}036 \text{ тыс. руб.}$$

б) Поскольку $n = 9$, то

$$P = 30e^{-0{,}25 \cdot 9} = 30e^{-2{,}25} = 3{,}162 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.3.4. За какой срок сумма 10 тыс. руб. достигнет величины 25 тыс. руб. при непрерывном начислении процентов и силе роста 28% за год?

Решение. Полагая в формуле (79) $F_n = 25$ тыс. руб., $P = 10$ тыс. руб., $\delta = 0{,}28$, находим:

$$n = \frac{\ln \frac{25}{10}}{0{,}28} = 3{,}272 \text{ года.}$$

Если бы начислялись сложные проценты, например, по годовой номинальной процентной ставке $r^{(2)} = 0{,}28$, то по формуле (60):

$$n = \frac{\ln\frac{25}{10}}{2\ln(1+\frac{0{,}28}{2})} = 3{,}497 \text{ года},$$

т.е., естественно, получили больший срок, чем при непрерывном начислении процентов.

Пример 2.3.5. Банк выдает ссуду на 7 лет под сложную процентную ставку 36% годовых с начислением процентов каждые полгода. Какую непрерывную ставку должен установить банк, чтобы за 7 лет получить тот же доход?

Решение. Пусть P – величина ссуды, тогда при использовании процентной ставки банк получит через 7 лет (согласно формуле (58)):

$$F_7 = P\left(1+\frac{0{,}36}{2}\right)^{2\cdot 7} = 1{,}18^{14} P.$$

Теперь для определения силы роста можно воспользоваться формулой (80):

$$\delta = \frac{\ln 1{,}18^{14}}{7} = 2\ln 1{,}18 = 0{,}3310 = 33{,}10\%.$$

Конечно, этот пример можно было решить, и воспользовавшись сразу формулой (97), связывающей эквивалентные силу роста и сложную процентную ставку.

Пример 2.3.6. Банк предоставил кредит на 4 года под непрерывную ставку 30% за год. Определите доходность такой финансовой операции для банка в виде: а) простой годовой процентной ставки; б) годовой эффективной процентной ставки.

Решение. а) Если P – величина кредита, то через $n = 4$ года наращенная сумма, которую заемщик должен будет возвратить, составит:

$$F_4 = Pe^{0{,}3\cdot 4} = Pe^{1{,}2}.$$

Поэтому доходность в виде простой годовой процентной ставки составит (по формуле (23)):

$$r = \frac{Pe^{1,2} - P}{P \cdot 4} = \frac{e^{1,2} - 1}{4} = 0{,}58 = 58\%.$$

Обратим внимание, что в данном случае по существу была применена формула (93).

б) При определении r_{ef} воспользуемся формулой (64):

$$r_{ef} = \left(\frac{Pe^{1,2}}{P}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = e^{0,3} - 1 = 0{,}3499 = 34{,}99\%.$$

Заметим, что годовая эффективная процентная ставка r_{ef} и сила роста δ связаны соотношением: $r_{ef} = e^{\delta} - 1$, которым мы фактически и воспользовались при решении примера.

Пример 2.3.7. Предприниматель получил в банке ссуду на 6 лет по непрерывной ставке 25% за год, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2% от величины ссуды. Определите доходность такой финансовой операции для банка в виде: а) простой годовой процентной ставки; б) годовой эффективной процентной ставки, если непрерывные проценты начисляются на исходную величину ссуды.

Решение. а) Обозначим через P величину ссуды, тогда величина удержанных комиссионных составит $0{,}02P$ и господину N будет выдана сумма $P - 0{,}02P = 0{,}98P$. Через 6 лет господин N должен будет вернуть (согласно формуле (78)) сумму, равную $Pe^{0,25 \cdot 6} = Pe^{1,5}$. Банк вычисляет доходность сделки исходя из условия: наращенная по простой процентной ставке r на реально выданную ссуду сумма $0{,}98P(1 + 6r)$ должна быть равна возвращаемой господином N через 6 лет сумме $Pe^{1,5}$. Таким образом, доходность сделки r определяется из уравнения: $0{,}98P(1 + 6r) = Pe^{1,5}$. Откуда:

$$r = \frac{e^{1,5} - 0{,}98}{0{,}98 \cdot 6} = 0{,}5955 = 59{,}55\%.$$

По существу воспользовались формулой (23).

б) В этом случае наращенная по эффективной процентной ставке r_{ef} на реально выданную ссуду сумма составит $0,98P(1+r_{ef})^6$ и, следовательно, получим уравнение: $0,98P(1+r_{ef})^6 = Pe^{1,5}$, откуда:

$$r_{ef} = \frac{e^{0,25}}{\sqrt[6]{0,98}} - 1 = 0,2884 = 28,84\%.$$

Пример 2.3.8. На вклад 16 тыс. руб. начисляются непрерывные проценты. Определите наращенную сумму за 6 лет, если интенсивность наращения изменяется следующим образом: в первые два года она равна 20%, в следующие три года – 24% и в последний год – 26%. Какую постоянную силу роста необходимо взять, чтобы за 6 лет получить такую же наращенную сумму?

Решение. Пусть $P = 16$ тыс. руб. По формуле (78) за первые два года при силе роста $\delta = 0,2$ наращенная сумма составит:

$$F_2 = 16e^{0,2 \cdot 2} = 16e^{0,4} \text{ тыс. руб.}$$

Далее наращение суммы F_2 непрерывными процентами за три года при $\delta = 0,24$ обеспечит величину:

$$F_{2+3} = F_5 = F_2 e^{0,24 \cdot 3} = 16e^{0,4}e^{0,72} = 16e^{1,12} \text{ тыс. руб.}$$

И наконец, за последний год получим при $\delta = 0,26$:

$$F_{5+1} = F_6 = F_5 e^{0,26} = 16e^{1,12}e^{0,26} = 16e^{1,38} = 63,598 \text{ тыс. руб.}$$

Такую же наращенную сумму за 6 лет можно получить, если в качестве постоянной силы роста взять

$$\bar{\delta} = \frac{1,38}{6} = 0,23.$$

Заметим, что $\bar{\delta}$ представляет собой взвешенную сумму исходных непрерывных ставок, где весом для каждой ставки является доля времени (от общего срока 6 лет), в течение которого использовалась данная ставка. Действительно:

$$\bar{\delta} = \frac{2}{6} \cdot 0,2 + \frac{3}{6} \cdot 0,24 + \frac{1}{6} \cdot 0,25 = 0,23.$$

Пример 2.3.9. Господин N намеревается обменять имеющиеся у него немецкие марки и поместить полученную сумму на рублевом депозите сроком на 2 года под ставку 21% годовых с непрерывным начислением процентов, после чего наращенную сумму опять конвертировать в немецкие марки. При каком ожидаемом курсе продажи не имеет смысла такая финансовая операция, если курс покупки немецких марок на начало срока составляет 10 руб. 64 коп. и на валютном депозите денежную сумму можно поместить под процентную ставку 18% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов?

Решение. Обозначим через P имеющуюся первоначальную сумму немецких марок, через K – ожидаемый курс продажи немецких марок через 2 года, при котором нет смысла в двойном конвертировании. Неизвестную величину K находим, приравнивая наращенные суммы на валютном и на рублевом депозитах с учетом конвертации:

$$P\left(1+\frac{0{,}18}{4}\right)^{4\cdot 2}=\frac{P\cdot 10{,}64\cdot e^{0{,}21\cdot 2}}{K},$$

отсюда $K=\dfrac{16{,}1937}{1{,}4221}=11{,}39$ руб. Если ожидаемый курс продажи будет менее 11 руб. 39 коп., то финансовая операция, связанная с двойной конвертацией, целесообразна.

Пример 2.3.10. Сумма 15 тыс. руб. была помещена в банк на некоторый срок, по истечении которого на эту сумму были начислены непрерывные проценты с силой роста 30% за год. После уплаты налога на проценты величина наращенной суммы составила 36,2 тыс. руб. Определите срок, за который было осуществлено наращение, если ставка налога на проценты равна 12% и налог на все полученные проценты был выплачен один раз в конце срока.

Решение. Воспользуемся соотношением (101), разрешая его относительно n:

$$n=\frac{\ln\left[\dfrac{1}{1-q}\left(\dfrac{\hat{F}_n}{P}-q\right)\right]}{\ln a}.$$

Так как в этом случае $P = 15$ тыс. руб., $\hat{F}_n = 36{,}2$ тыс. руб., $q = 0{,}12$, $a = e^{0{,}3}$ и $\ln a = 0{,}3$, то

$$n = \frac{\ln\left[\frac{1}{1-0{,}12}\left(\frac{36{,}2}{15} - 0{,}12\right)\right]}{0{,}3} = 3{,}193 \text{ года.}$$

С целью проверки применим непосредственно формулу (101):

$$\hat{F}_n = 15[e^{0{,}3 \cdot 3{,}193}(1-0{,}12)+0{,}12] = 36{,}202 \approx 36{,}2 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.3.11. Сумма 15 тыс. руб. была помещена в банк на некоторый срок, в течение которого на сумму начислялись непрерывные проценты с силой роста 30% за год. После уплаты налога на все начисленные проценты величина итоговой наращенной суммы составила 36,2 тыс. руб. Определите срок, в течение которого осуществлялось наращение, если ставка налога на проценты равна 12% и налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы.

Решение. Выражая из равенства (102) n, в обозначениях предыдущего примера находим:

$$n = \frac{\ln\frac{\hat{F}_n}{P}}{\ln[a-(a-1)q]} = \frac{\ln\frac{36{,}2}{15}}{\ln[e^{0{,}3} - (e^{0{,}3}-1)0{,}12]} = 3{,}282 \text{ года,}$$

т.е. получен больший по величине срок, чем в предыдущем случае.

Задачи

2.3.1. На сумму 12 тыс. руб. в течение 6 лет начисляются непрерывные проценты. Определите наращенную сумму, если сила роста равна: а) 6%; б) 16%; в) 26%.

2.3.2. Рассчитайте наращенную сумму для различных вариантов начисления процентов за один год (равный 360 дням) по сложной учетной ставке, если исходная сумма равна 1000 руб. и номинальная годовая учетная ставка составляет 20%. Рассмотрите случаи, когда проценты начисляются один раз в год, по полугодиям, ежеквартально, ежемесячно, ежечасно, ежеминутно, ежесекундно и непрерывно. Для каждого случая определите эффективную годовую учетную ставку.

2.3.3. Клиент поместил в банк 40 тыс. руб. на 2 года. Какая сумма будет на счете клиента, если банк начисляет сложные проценты: а) по номинальной процентной ставке 30% годовых с полугодовым начислением процентов; б) по номинальной учетной ставке 30% годовых с ежеквартальным начислением процентов; в) по непрерывной ставке с силой роста 30% за год?

2.3.4. Какую сумму необходимо поместить на банковский депозит, чтобы через 5 лет получить 80 тыс. руб., если происходит непрерывное начисление процентов по ставке 22%?

2.3.5. Известно, что современная стоимость 10 тыс. руб., которые один клиент должен получить по банковскому депозиту через 2 года, равна удвоенной современной стоимости 6 тыс. руб., которые должен получить другой клиент по банковскому депозиту через 4 года. В обоих случаях используются непрерывные проценты и одна и та же непрерывная ставка. Чему равна эта ставка?

2.3.6. За какой срок сумма 50 тыс. руб. достигнет величины 90 тыс. руб. при непрерывном начислении процентов и силе роста 34%? Как изменится ответ при начислении сложных процентов ежеквартально по номинальной процентной ставке 34% годовых?

2.3.7. Заемщик должен уплатить кредитору по векселю следующие суммы: 15 тыс. руб. на 1 января 1999 г.; 20 тыс. руб. на 1 января 1998 г.; 30 тыс. руб. на 1 октября 1998 г. Определите приведенную стоимость долга на моменты: а) 1 января 1995 г.; б) 1 июля 1997 г., если используется непрерывное начисление процентов с силой роста 12% за год.

2.3.8. Банк выдает ссуду на 9 лет под сложную процентную ставку 32% годовых с начислением процентов каждый квартал. Какую непрерывную ставку должен установить банк, чтобы за 9 лет получить тот же доход? Изменится ли полученный результат, если срок ссуды будет 3 года?

2.3.9. Банк предоставил кредит на 6 лет под непрерывную ставку 27% за год. Определите доходность такой финансовой операции для банка в виде: а) простой годовой процентной ставки; б) годовой эффективной процентной ставки.

2.3.10. Предоставлена ссуда на 5 лет под непрерывную ставку. Определите величину этой ставки, если доходность сделки для кредитора в виде годовой эффективной процентной ставки составила 38%. Зависит ли величина искомой непрерывной ставки от срока ссуды?

2.3.11. Предприниматель может получить ссуду либо на условиях ежеквартального начисления сложных процентов по процентной ставке 36% годовых, либо на условиях непрерывного начисления процентов с интенсивностью 34% за год. Какой вариант предпочтительнее для предпринимателя?

2.3.12. Вкладчик хотел бы за 6 лет увеличить в 2,5 раза сумму, помещаемую в банк на депозит. Какова должна быть сила роста, если банк начисляет непрерывные проценты? Какова должна быть сила роста, чтобы обеспечить увеличение помещаемой суммы в 4 раза?

2.3.13. Оцените, что лучше: получить 20 тыс. руб. через 3 года или 68 тыс. руб. через 7,5 года, если можно поместить деньги на депозит под непрерывную ставку 28% за год?

2.3.14. Под какую непрерывную ставку можно поместить деньги на депозит, если 10 тыс. руб. сейчас эквивалентны 30 тыс. руб. через 4 года? Какая сложная процентная ставка с начислением процентов по полугодиям решает эту задачу?

2.3.15. Определите время, за которое происходит удвоение первоначальной суммы при начислении непрерывных процентов, если сила роста равна: а) 5%; б) 25%; в) 50%; г) 100%.

2.3.16. Определите современную ценность 60 тыс. руб., если: а) эта сумма будет получена через 2 года 6 месяцев; б) эта сумма была получена 4 года 6 месяцев назад; в) эта сумма получена в настоящий момент времени. Учесть возможность помещения денег на депозит под непрерывную процентную ставку 30%.

2.3.17. Банк начисляет непрерывные проценты с силой роста 27%. Определите современную ценность 20 тыс. руб., если: а) эта сумма была помещена на депозит в банке 3 года 4 месяца назад; б) эта сумма будет помещена на депозит в банке через 2 года 9 месяцев.

2.3.18. Некоторый капитал помещен в банк под непрерывную ставку 30%. Через 2 года и 3 месяца счет был закрыт и получена сумма 189,755 тыс. руб. Определите величину наращенной суммы, которая была бы получена через полтора года.

2.3.19. Господин N поместил в банк 10 тыс. руб. на условиях начисления непрерывных процентов с силой роста 28%. Через 15 месяцев господин N снял со счета 4 тыс. руб., еще через 2 года положил на свой счет 3 тыс. руб., а после этого через 2 года 6 месяцев он закрыл счет. Определите сумму, полученную господином N при закрытии счета.

2.3.20. Вкладчик положил в банк 8 тыс. руб. на условиях начисления непрерывных процентов с силой роста 26%. Через полтора года вкладчик снял со счета 5 тыс. руб., а через 2 года после этого он положил 7 тыс. руб. Еще через 2 года 6 месяцев вкладчик положил такую сумму, что на его счете еще через год оказалось 60 тыс. руб. Определите, какую сумму вкладчик положил последний раз.

2.3.21. Вкладчик открыл счет в банке, положив некоторую сумму денег. Такую же по величине сумму он добавлял на свой счет еще три раза: через 1 год 6 месяцев, 2 года 6 месяцев и 4 года после открытия счета. Через 5 лет на счете вкладчика было 80 тыс. руб. Какую сумму вносил вкладчик каждый раз, если банк начисляет непрерывные проценты с силой роста 30%?

2.3.22. Предприниматель взял в банке кредит на сумму 150 тыс. руб. на условиях начисления непрерывных процентов с силой роста 30%. Через полтора года он вернул банку 60 тыс. руб., но еще через полгода взял кредит в сумме 50 тыс. руб. Через 2 года после этого предприниматель вернул полностью полученные кредиты. Какую сумму предприниматель при этом выплатил банку?

2.3.23. Определите, какую сумму необходимо поместить в банк, начисляющий непрерывные проценты с силой роста 24%, чтобы иметь возможность снять через 2 года 15 тыс. руб. и еще 20 тыс. руб. через 3 года после этого, полностью исчерпав счет.

2.3.24. Предприниматель приобрел оборудование стоимостью 300 тыс. руб. в кредит под непрерывную ставку 22% годовых. Через 2 года он уплатил 180 тыс. руб., а еще через полтора года полностью погасил долг. Определите, какую сумму предприниматель при этом выплатил.

2.3.25. За взятые в долг деньги под непрерывную ставку 25% годовых должник обязан уплатить кредитору 40 тыс. руб. 1 июля 1997 г. Какую сумму необходимо уплатить должнику, если он вернет долг: а) 1 января 1997 г.; б) 1 января 1998 г.; в) 1 июля 1999 г.?

2.3.26. Предприниматель получил в банке ссуду на 7 лет по непрерывной ставке 28% за год, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 1,5% от величины ссуды. Определите доходность такой финансовой операции для банка в виде: а) простой годовой процентной ставки; б) годовой эффективной процентной ставки, если непрерывные проценты начисляются на исходную величину ссуды.

2.3.27. Выдается ссуда по непрерывной ставке 22% годовых, при этом взимаются комиссионные в размере 1% от величины ссуды. Непрерывные проценты начисляются на исходную величину ссуды. На какой срок должна быть выдана ссуда, чтобы доходность такой сделки для кредитора в виде годовой эффективной процентной ставки составляла 28%?

2.3.28. При выдаче кредита на 3 года по непрерывной ставке 24% годовых были удержаны комиссионные. Непрерывные проценты начислялись на исходную величину кредита. Сколько процентов составили комиссионные от величины кредита, если доходность такой финансовой операции для кредитора в виде эффективной процентной ставки получилась равной 30% годовых?

2.3.29. На вклад 6 тыс. руб. начисляются непрерывные проценты. Найдите наращенную сумму за 8 лет, если интенсивность наращения изменяется следующим образом: в первые три года она равна 12%, в следующие два года – 14% и в каждый оставшийся год увеличивается на 3%. Какую постоянную силу роста необходимо взять, чтобы за 8 лет получить такую же наращенную сумму?

2.3.30. Сумма 25 тыс. руб. помещена в банк под непрерывную ставку с силой роста 20% за год. В конце каждого года 3% от наращенной к этому моменту суммы расходуется. Определите величину наращенной суммы в конце десятого года после осуществления всех расходов.

2.3.31. На сумму 10 тыс. руб. в течение 3 лет начисляются непрерывные проценты с силой роста 34% за год, причем в конце каждого года расходуется часть наращенной к этому моменту суммы: в конце первого года – $1/2$, в конце второго года – $1/4$, в конце третьего – $1/5$. Определите величину наращенной суммы в конце третьего года после осуществления всех расходов.

2.3.32. Господин N обменивает 2000 долл. на рубли и полученную сумму помещает на 15 месяцев на рублевый депозит под непрерывную ставку 24%. Определите наращенную сумму в долларах, если курс покупки долларов на начало срока составляет 19 руб. 60 коп., курс продажи в конце срока – 21 руб. 30 коп.

2.3.33. Господин N намеревается обменять имеющиеся у него доллары США и поместить полученную сумму на рублевом депозите сроком на 1 год 6 месяцев под ставку 22% годовых с непрерывным начислением процентов, после чего наращенную сумму опять конвертировать в доллары США. При каком ожидаемом курсе продажи не имеет смысла такая финансовая операция, если курс покупки долларов на начало срока составляет 19 руб. 54 коп. и на валютном депозите денежную сумму можно поместить под процентную ставку 16% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов?

2.3.34. Как лучше поступить с имеющейся в наличии некоторой суммой немецких марок: поместить на один год на валютный депозит под процентную ставку 18% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов или поместить на рублевый депозит под ставку 20% с непрерывным начислением процентов? Курс покупки немецких марок на начало срока составляет 10 руб. 40 коп., ожидаемый курс продажи через год – 11 руб. 20 коп.

2.3.35. Сумма 50 тыс. руб. была помещена в банк на некоторый срок, по истечении которого на сумму были начислены сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 30% исходя из: а) ежегодной схемы начисления; б) ежеквартальной схемы начисления; в) непрерывной схемы начисления. После уплаты налога на проценты величина наращенной суммы составила 124,88 тыс. руб. Определите срок, за который было осуществлено наращение, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на все полученные проценты был выплачен один раз в конце срока.

2.3.36. Некоторый капитал был помещен в банк на 3 года 6 месяцев, по истечении которых на этот капитал были начислены непрерывные проценты с силой роста 24% за год и счет был закрыт. После уплаты налога на проценты наращенный капитал стал равен 129,504 тыс. руб. Определите величину первоначального капитала, если налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока и ставка налога на проценты равна 12%.

2.3.37. Некоторый капитал был помещен в банк на 2 года 6 месяцев на условиях начисления раз в год непрерывных процентов с силой роста 30% за год, и в конце срока счет был закрыт. После уплаты налога на все начисленные проценты итоговый наращенный капитал стал равен 76,688 тыс. руб. Определите величину первоначального капитала, если налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы и ставка налога на проценты равна 15%.

2.3.38. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под непрерывную процентную ставку 32% с однократным начислением в конце срока непрерывных процентов, чтобы эта сумма увеличилась в 3 раза с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 15% и налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока?

2.3.39. На какой срок необходимо поместить имеющуюся денежную сумму на условиях начисления раз в год непрерывных процентов с силой роста 34% за год, чтобы эта сумма увеличилась в 4 раза с учетом уплаты налога на проценты, если налог на проценты уплачивается каждый год путем выделения средств из накапливаемой суммы и ставка налога на проценты равна 12%?

2.4. Эквивалентность ставок

Основные положения

• Один и тот же финансовый результат можно получить различными способами, используя различные ставки, методы наращения и дисконтирования.

• Две ставки называются эквивалентными, если при замене одной ставки на другую финансовые отношения сторон не меняются. Таким образом, участникам финансового соглашения безразлично, какая ставка будет фигурировать в контракте.

• При выводе равенств, связывающих эквивалентные ставки, используется следующая идея: если из первоначального капитала наращением за данное время необходимо получить некоторую сумму, то будут эквивалентными все ставки, обеспечивающие один и тот же множитель наращения. Поэтому приравнивая друг к другу множители наращения, получим соотношения между эквивалентными ставками. Точно так же при переходе от будущей стоимости к приведенной стоимости с помощью дисконтирования приравниваются множители дисконтирования.

• Эквивалентные ставки, подобно эффективным ставкам, позволяют сравнивать между собой финансовые контракты, условия которых различны.

• Формулы, связывающие эквивалентные простые и сложные ставки, зависят от продолжительности периода начисления. Формулы, связывающие эквивалентные сложные ставки, не зависят от продолжительности периода начисления.

• Переход от дискретных ставок к соответствующим эквивалентным непрерывным ставкам позволяет упростить анализ многих сложных финансовых задач. Осуществив необходимые математические выкладки, полученные результаты можно представить опять в любых удобных эквивалентных дискретных ставках, являющихся более привычными.

• Проблему эквивалентности ставок можно рассматривать и с более общих позиций, например эквивалентность одной ставки нескольким ставкам или эквивалентность двух наборов ставок и т.п.

Вопросы для обсуждения

1. Можно ли с помощью двух различных ставок получить один и тот же финансовый результат? Поясните на примере.
2. Можно ли сказать, что любая ставка характеризует доходность финансовой операции?
3. Какие ставки называют эквивалентными?
4. Почему участникам финансового соглашения безразлично, какая из эквивалентных ставок указывается в контракте?
5. Можно ли рассматривать определение эффективной ставки (процентной или учетной) как определение одной из эквивалентных ставок?
6. Какая идея используется при выводе равенств, связывающих эквивалентные ставки?
7. В каких случаях эквивалентность процентных ставок не зависит от продолжительности периода начисления?

8. В каких случаях эквивалентность процентных ставок зависит от продолжительности периода начисления?
9. Для каких целей переходят от дискретных ставок к соответствующим эквивалентным непрерывным ставкам?
10. Приведите пример ситуации, когда ставка эквивалентна двум ставкам.

Типовые примеры и методы их решения

Пример 2.4.1. Господин N собирается поместить на некоторый срок свободные денежные средства либо под сложную процентную ставку 30% годовых с ежеквартальным начислением процентов, либо под простую процентную ставку 48% годовых. Выясните, как выгоднее поступить при сроке: а) 3 года; б) 4 года?

Решение. а) Чтобы сделать правильный выбор, необходимо найти для данной сложной процентной ставки 30% эквивалентную простую процентную ставку и сравнить ее с предлагаемой простой процентной ставкой 48%. Используем формулу (81) при $n=3$, $m=4$, $r^{(4)}=0{,}3$:

$$r=\frac{\left(1+\frac{0{,}3}{4}\right)^{4\cdot 3}-1}{3}=0{,}4606.$$

Так как $r=46{,}06\%$ меньше 48%, то выгоднее на три года поместить капитал под простую процентную ставку 48%.

Конечно, можно было найти эквивалентную сложную процентную ставку для простой ставки 48% по формуле (82): $r^{(4)}=4(\sqrt[12]{1+3\cdot 0{,}48}-1)=0{,}3087$ и поскольку $r^{(4)}>30\%$, приходим, естественно, к такому же выводу.

б) Полагая $n=4$, $m=4$, $r^{(4)}=0{,}3$, по формуле (81) получим:

$$r=\frac{\left(1+\frac{0{,}3}{4}\right)^{4\cdot 4}-1}{4}=0{,}5452.$$

Так как $r=54{,}52\%$ превышает 48%, то выгоднее на 4 года поместить капитал под сложную ставку.

Пример 2.4.2. Долговое обязательство учтено в банке за 9 месяцев до срока погашения по номинальной годовой учетной ставке $d^{(4)} = 32\%$. По какой простой учетной ставке надо произвести учет этого обязательства, чтобы обеспечить банку тот же самый дисконт?

Решение. Полагая в формуле (83) $n = 0{,}75$, находим:

$$d = \frac{1 - \left(1 - \frac{0{,}32}{4}\right)^{4 \cdot 0{,}75}}{0{,}75} = 0{,}2951.$$

Таким образом, искомое значение простой учетной ставки составляет 29,51% годовых. С целью проверки можно воспользоваться формулой (84), где $d = 0{,}2591$:

$$d^{(4)} = 4(1 - \sqrt[3]{1 - 0{,}75 \cdot 0{,}2951}) = 0{,}32, \text{ или } 32\%.$$

Получив номинальную годовую учетную ставку, данную в условии примера, делаем вывод, что простая учетная ставка найдена верно.

Пример 2.4.3. Банком выдан кредит на три месяца под 27% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Определите величину простой учетной ставки, обеспечивающей такую же величину начисленных процентов.

Решение. По формуле (87) при $n = 0{,}25$, $r^{(12)} = 0{,}27$ находим требуемую величину простой учетной ставки:

$$d = \frac{1 - \left(1 + \frac{0{,}27}{12}\right)^{-12 \cdot 0{,}25}}{0{,}25} = 0{,}2583, \text{ или } 25{,}83\%.$$

Для проверки результата воспользуемся формулой (88):

$$r^{(12)} = 12\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2583}} - 1\right) = 0{,}27,$$

т.е. получили исходную сложную процентную ставку.

Пример 2.4.4. Определите сложную годовую учетную ставку с дисконтированием 2 раза в год, которая эквивалентна годовой номинальной процентной ставке 24%: а) с ежеквартальным начислением сложных процентов; б) с полугодовым начислением сложных процентов.

Решение. а) Применяем формулу (92) при $m=2,\ l=4,\ r^{(4)}=0{,}24$:

$$d^{(2)}=2\cdot[1-\left(1+\frac{0{,}24}{4}\right)^{-\frac{4}{2}}]=0{,}22.$$

Проверим полученный ответ по формуле (91), где уже $m=4,\ l=2$:

$$r^{(4)}=4[\left(1-\frac{0{,}22}{2}\right)^{-\frac{2}{4}}-1]\approx 0{,}23999\approx 0{,}24.$$

б) Из формулы (92) при $m=l=2$, $r^{(2)}=0{,}24$ получим:

$$d^{(2)}=2\cdot[1-\left(1+\frac{0{,}24}{2}\right)^{-1}]=0{,}2143=21{,}43\%.$$

Заметим, что при $m=l$ из формул (91) и (92) получим соответственно равенства:

$$\frac{r^{(m)}}{m}=\frac{\frac{d^{(m)}}{m}}{1-\frac{d^{(m)}}{m}} \quad \text{и} \quad \frac{d^{(m)}}{m}=\frac{\frac{r^{(m)}}{m}}{1+\frac{r^{(m)}}{m}},$$

которые по существу являются иной записью равенств (3).

Пример 2.4.5. Определите величину силы роста при начислении непрерывных процентов в течение двух лет, которая эквивалентна: а) простой процентной ставке 26% годовых; б) сложной процентной ставке 26% годовых с ежемесячным начислением процентов.

Решение. а) Полагая в формуле (94) $n=2$, $r=0{,}26$, находим:

$$\delta=\frac{\ln(1+2\cdot 0{,}26)}{2}=0{,}2094, \text{ или } 20{,}94\%.$$

Проверку полученного ответа можно осуществить по формуле (93):

$$r = \frac{e^{0,2094 \cdot 2} - 1}{2} \approx 0,26007 \approx 0,26.$$

Из формулы (94) следует, что с ростом срока n величина эквивалентной непрерывной ставки будет уменьшаться. Например, при $n = 10$ лет сила роста $\delta = 12,81\%$; при $n = 100$ лет – $\delta = 3,3\%$.

б) По формуле (97) при $m = 12$, $r^{(12)} = 0,26$:

$$\delta = 12 \ln(1 + \frac{0,26}{12}) = 0,2572 = 25,72\%.$$

Для проверки воспользуемся формулой (98):

$$r^{(12)} = 12(e^{\frac{0,2572}{12}} - 1) \approx 0,25998 \approx 0,26.$$

Заметим, что в отличие от предыдущего случая величина эквивалентной непрерывной ставки не зависит от величины срока, в течение которого происходит наращение.

Как видно из решения случая б), $\delta < r^{(12)}$. Вообще можно показать, что эквивалентные ставки $r^{(m)}$, $d^{(l)}$ и δ при любых m и l удовлетворяют неравенствам: $d^{(l)} < \delta < r^{(m)}$.

Пример 2.4.6. Банк предоставляет ссуду на 25 месяцев под 30% годовых с ежеквартальным начислением процентов по смешанной схеме. Определите эквивалентную годовую простую процентную ставку, обеспечивающую такой же доход банку от предоставления ссуды.

Решение. Покажем, что для данной ситуации нетрудно получить формулу в общем виде. Пусть в течение времени n используется сложная процентная ставка $r^{(m)}$, но при начислении процентов применяется смешанная схема. Тогда по формуле (59) множитель наращения имеет вид $(1 + \frac{r^{(m)}}{m})^{\bar{w}}(1 + \bar{f}\frac{r^{(m)}}{m})$, где $\bar{w} = [mn]$ (напомним, что квадратные скобки означают целую часть числа), $\bar{f} = mn - [mn]$, $n = \frac{\bar{w} + \bar{f}}{m}$. Множитель наращения при использовании простой процентной ставки согласно формуле (9) имеет вид $1+nr$. Приравнивая эти множители наращения, находим, что эквивалентная простая процентная ставка находится по формуле:

$$r=\frac{(1+\frac{r^{(m)}}{m})^{\bar{w}}(1+\bar{f}\frac{r^{(m)}}{m})-1}{n}.$$

В нашем случае $n=\frac{35}{12}$ года, $m=4$, $r^{(4)}=0{,}3$, $\bar{w}=[4\cdot\frac{35}{12}]=[\frac{35}{3}]=11$, $\bar{f}=\frac{35}{3}-11=\frac{2}{3}$, поэтому:

$$r=\frac{\left(1+\frac{0{,}3}{4}\right)^{11}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{0{,}3}{4}\right)-1}{35/12}=0{,}4548,$$

т.е. эквивалентная простая процентная ставка равна 45,48%.

Таким образом, из полученной выше формулы следует, что простая процентная ставка r эквивалентна по существу двум процентным ставкам: сложной ставке $r^{(m)}$, применяемой за время, равное целому числу подпериодов, и простой ставке $r^{(m)}$, применяемой за время, равное дробной части подпериода. При этом если дробная часть подпериода равна нулю ($\bar{f}=0$), то $\bar{w}=[mn]=mn$ и полученная выше формула совпадает с формулой (81), а если целое число подпериодов равно нулю ($\bar{w}=0$), то $\frac{\bar{f}}{m}=n$ и полученная формула примет вид $r=r^{(m)}$.

Если бы начислялись только сложные проценты, то воспользовались бы формулой (81):

$$r=\frac{\left(1+\frac{0{,}3}{4}\right)^{4\cdot\frac{35}{12}}-1}{35/12}=0{,}4543.$$

Пример 2.4.7. Банк принимает вклады до востребования под сложную процентную ставку 20% годовых при временно́й базе 365 дней. Какую простую годовую учетную ставку должен применить банк при учете векселя за 250 дней до срока его погашения, чтобы обеспечить себе такую же доходность, как и по вкладам до востребования? При учете используется временна́я база 360 дней.

Решение. Для определения эквивалентной простой годовой учетной ставки нельзя воспользоваться формулой (87), поскольку при ее выводе считалось, что временны́е базы ставок одинаковы. Однако необходимую для решения данного примера формулу нетрудно получить, приравнивая соответствующие множители наращения. Пусть T_d и T_r – временны́е базы соответственно учетной и процентной ставок, тогда из $(1-\frac{t}{T_d}\cdot d)^{-1}=(1+r^{(1)})^{\frac{t}{T_r}}$ получим:

$$d=\frac{T_d}{t}\cdot[1-(1+r^{(1)})^{-\frac{t}{T_r}}].$$

Таким образом, полагая $r^{(1)}=0{,}2$, $T_r=365$ дней, $T_d=360$ дней, $t=250$ дней, получим:

$$d=\frac{360}{250}\cdot[1-(1+0{,}2)^{-\frac{250}{365}}]=0{,}1690=16{,}90\%.$$

Кстати, если бы взяли одинаковую временну́ю базу, то при $T_d=T_r=360$ дней получили бы $d=17{,}13\%$, а при $T_d=T_r=365$ дней – $d=17{,}14\%$.

Задачи

2.4.1. Предлагается поместить капитал: а) на 5 лет; б) на 3 года либо под сложную процентную ставку 18% с ежемесячным начислением процентов, либо под простую процентную ставку 24% годовых. Выясните, как выгоднее поступить.

2.4.2. Банком выдан кредит на 9 месяцев под 26% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Определите величину простой учетной ставки, обеспечивающей такую же величину начисленных процентов.

2.4.3. Какой годовой процентной ставкой с ежегодным начислением сложных процентов можно заменить в контракте простую процентную ставку 34% годовых, чтобы финансовые последствия для сторон не изменились? Срок контракта – 450 дней, финансовый год равен 365 дней.

2.4.4. Наращение осуществляется по простой процентной ставке 24% годовых в течение полутора лет. Определите годовую номинальную процентную ставку с начислением сложных процентов 4 раза в год, которая обеспечивает такую же величину наращенной суммы.

2.4.5. Вексель учтен в банке за полгода до срока погашения по номинальной годовой учетной ставке $d^{(12)} = 27\%$. По какой простой учетной ставке надо произвести учет этого обязательства, чтобы обеспечить банку тот же самый дисконт?

2.4.6. Банк учитывает вексель за 45 дней до срока его оплаты по простой учетной ставке 18% годовых. Какую сложную учетную ставку должен установить банк, чтобы доход банка не изменился?

2.4.7. Определите сложную учетную ставку, эквивалентную годовой номинальной процентной ставке 24% с ежемесячным начислением сложных процентов.

2.4.8. Определите номинальную годовую процентную ставку с ежемесячным начислением сложных процентов, которая эквивалентна: а) номинальной годовой процентной ставке 28% с полугодовым начислением сложных процентов; б) номинальной годовой учетной ставке 28% с ежеквартальным начислением сложных процентов.

2.4.9. Чему равна номинальная годовая учетная ставка с дисконтированием 4 раза в год, эквивалентная номинальной годовой учетной ставке 34% с дисконтированием 12 раз в год?

2.4.10. Банк учитывает вексель по годовой номинальной процентной ставке $r^{(4)} = 22\%$. Какой величины должна быть сложная учетная ставка, используемая вместо процентной, чтобы доход банка не изменился?

2.4.11. Определите величину силы роста при начислении непрерывных процентов в течение года, которая эквивалентна процентной ставке 18% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов.

2.4.12. Банк выдает ссуду под сложную процентную ставку 20% годовых. Какую номинальную годовую процентную ставку должен установить банк, чтобы его доход не изменился, если начисление процентов происходит: а) по полугодиям; б) каждые два месяца; в) ежемесячно; г) непрерывно.

2.4.13. Банк учитывает долговое обязательство по сложной учетной ставке 18% годовых. По какой номинальной годовой учетной ставке $d^{(m)}$ банк должен учитывать долговое обязательство, чтобы доход банка не изменился, если: а) $m=4$; б) $m=6$; в) $m=12$?

2.4.14. Определите величину силы роста при начислении непрерывных процентов в течение трех лет, которая эквивалентна: а) простой процентной ставке 24% годовых; б) сложной процентной ставке 24% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

2.4.15. Банк предоставляет ссуду на 39 месяцев под 16% годовых с полугодовым начислением процентов по смешанной схеме. Определите эквивалентную простую процентную ставку. Как изменится результат в случае начисления только сложных процентов?

2.4.16. Вексель учтен в банке за 26 месяцев по номинальной учетной ставке $d^{(4)}=28\%$ годовых, причем дисконтирование осуществлялось по смешанной схеме. Определите эквивалентную простую учетную ставку.

2.4.17. Банк принимает вклады до востребования под сложную процентную ставку 28% годовых при временнóй базе 365 дней. Какую простую годовую учетную ставку должен применить банк при учете векселя за 190 дней до срока его погашения, чтобы обеспечить себе такую же доходность, как и по вкладам до востребования? При учете используется временнáя база 360 дней.

2.4.18. Банк учитывает вексель за 300 дней по сложной учетной ставке 24% годовых при временнóй базе 360 дней. Какая простая годовая процентная ставка должна быть применена при выдаче кредита, чтобы обеспечить получение банком такого же дохода? При выдаче кредита используется временнáя база 365 дней.

2.5. Инфляция и начисление сложных и непрерывных процентов

Основные положения

• Подобно тому как это делается при наращении простыми процентами, в условиях начисления сложных или непрерывных процентов для оценки наращенной суммы с учетом ее обесценения полученную величину делят на индекс инфляции за время осуществления наращения.

• Если множитель наращения равен индексу инфляции, то соответствующее наращение лишь нейтрализует действие инфляции.

• Как и в случае простых процентов, в случае сложных или непрерывных процентов при инфляции выделяют следующие виды процентных ставок: номинальную, реальную, положительную. Иногда ставку с поправкой на инфляцию называют брутто-ставкой.

• Для обеспечения реального роста стоимости первоначального капитала при инфляции необходимо исходную ставку увеличивать (индексировать). Выбор величины такой индексированной ставки определяется поставленными целями. Для обеспечения реальной доходности согласно исходному коэффициенту наращения необходимо так индексировать исходную ставку (увеличить на инфляционную премию), чтобы новый коэффициент наращения полностью компенсировал потери из-за инфляции.

• Формула Фишера определяет значение сложной годовой процентной ставки, обеспечивающей при известном годовом темпе инфляции реальную эффективность кредитной операции. Эта формула по существу показывает ту величину, называемую инфляционной премией, которую необходимо прибавить к исходной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. При малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке (эта ситуация типична для стран с развитой рыночной экономикой) пользуются и приближенным вариантом формулы Фишера.

Вопросы для обсуждения

1. Как оценить наращенную сумму с учетом ее обесценения в условиях инфляции?
2. Как можно определить множитель наращения какими-либо процентами в условиях инфляции?
3. Из каких соображений определяется та или иная положительная ставка?
4. Каким образом изменяется значение процентной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, если число начислений сложных процентов увеличивается?
5. Какая ставка называется брутто-ставкой?
6. Как обеспечить в условиях инфляции реальную доходность согласно исходному коэффициенту наращения?
7. Что определяет формула Фишера?
8. Какая величина в формуле Фишера называется инфляционной премией?
9. В каких случаях можно пользоваться приближенным вариантом формулы Фишера?
10. Кому выгоднее использовать в контракте приближенный вариант формулы Фишера: кредитору или заемщику?
11. Если за год ваш номинальный доход возрастет на 6%, а темп инфляции за тот же период составит 3%, то как приблизительно изменится ваш реальный доход?
12. Если за год ваш номинальный доход возрастет на 3%, а темп инфляции за тот же период составит 6%, то как приблизительно изменится ваш реальный доход?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 2.5.1. На вклад начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежемесячный темп инфляции составляет 3%?

Решение. а) Обозначим через $I_p^{(\frac{1}{12})}$ среднемесячный (т.е. за $\frac{1}{12}$ года) индекс инфляции, тогда $I_p^{(\frac{1}{12})} = 1{,}03$ и по формуле (42) при $k = 12$ находим индекс инфляции за год:

$$I_p^{(1)} = I_p^{(\frac{1}{12})} = \left(I_p^{(\frac{1}{12})}\right)^{12} = 1{,}03^{12} = 1{,}4258.$$

Пусть r – процентная ставка при ежегодном начислении сложных процентов, тогда в соответствии с формулой (104) значение ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, находится из равенства $1 + r = I_p^{(1)}$ (т.е. множитель наращения за год приравнивается к годовому индексу инфляции). Таким образом:

$$r = I_p^{(1)} - 1 = 1{,}4258 - 1 = 0{,}4258 = 42{,}58\%.$$

Следовательно, реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 42,58% годовых.

б) При ежеквартальном начислении сложных процентов для определения номинальной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, согласно формуле (104) пользуемся равенством $\left(1 + \frac{r^{(4)}}{4}\right)^4 = I_p^{(1)}$, откуда:

$$r^{(4)} = 4(\sqrt[4]{I_p^{(1)}} - 1) = 4(\sqrt[4]{1{,}4258} - 1) = 0{,}3709 = 37{,}09\%.$$

Таким образом, положительная процентная ставка при ежеквартальном начислении сложных процентов превышает 37,09% годовых.

в) В случае ежемесячного начисления процентов пользуемся равенством $\left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12} = I_p^{(1)}$, откуда:

$$r^{(4)} = 12(\sqrt[12]{I_p^{(1)}} - 1) = 12(1{,}03 - 1) = 0{,}36 = 36\%.$$

Итак, в данной ситуации реальное наращение капитала происходит при номинальной процентной ставке, большей чем 36% годовых. В этом случае ответ можно было дать сразу, поскольку для осуществления реального наращения капитала его относительный рост за месяц должен превышать темп инфляции за это же время. Следовательно, $\frac{r^{(12)}}{12} > 0{,}03$, поэтому $r^{(12)} > 0{,}36$.

Заметим, что величину сложной процентной ставки, лишь нейтрализующей действие инфляции, можно найти из формулы (105), при $r^{(m)} = 0$:

$$\bar{r}^{(m)} = m[\sqrt[mn]{I_p^{(n)}} - 1].$$

Полагая $n = 1$, ответы для случаев а), б), в) получим соответственно при $m = 1,\ 4,\ 12$.

Пример 2.5.2. Номинальная процентная ставка, лишь компенсирующая при наращении действие инфляции, составляет 52% годовых. Определите полугодовую инфляцию, если начисление сложных процентов осуществляется каждый квартал.

Решение. Приравняем годовой индекс инфляции $I_p^{(1)}$ к множителю наращения за год. Полагая $r^{(4)} = 0{,}52$, получим:

$$I_p^{(1)} = \left(1 + \frac{r^{(4)}}{4}\right)^4 = \left(1 + \frac{0{,}52}{4}\right)^4 = 1{,}6305.$$

Поэтому индекс инфляции за полгода (0,5 года) составит:

$$I_p^{(0,5)} = \sqrt{I_p^{(1)}} = \sqrt{1{,}6305} = 1{,}2769.$$

Следовательно, темп инфляции за полгода в среднем равен 27,69%.

Пример 2.5.3. На некоторую сумму в течение трех лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время за каждый год последовательно составит 15, 20 и 10%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма по своей покупательной способности не уменьшилась?

Решение. Поскольку индекс инфляции за первый год равен 1,15, за второй – 1,2 и за третий – 1,1, то индекс инфляции за 3 года составит:

$$I_p^{(3)} = 1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}518.$$

Пусть δ – сила роста за год, позволяющая первоначальной сумме только сохранить свою покупательную способность. Приравнивая индекс инфляции за три года к множителю наращения за это же время, получим $e^{3\delta} = I_p^{(3)}$, отсюда:

$$\delta = \frac{1}{3}\ln I_p^{(3)} = \frac{1}{3}\ln 1{,}518 = 0{,}1391.$$

Следовательно, сила роста (интенсивность наращения) должна превышать 13,91% за год.

Пример 2.5.4. На вклад в течение 15 месяцев начисляются проценты: а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 8%?

Решение. а) Так как темп инфляции за каждый квартал равен 8%, то индекс инфляции за каждый квартал (0,25 года) равен 1,08. Поэтому индекс инфляции за 15 месяцев (1,25 года, или 5 кварталов) составит:

$$I_p^{(1{,}25)} = 1{,}08^5 = 1{,}4693.$$

Обозначим через r искомую годовую процентную ставку и приравняем этот индекс инфляции к множителю наращения при использовании схемы сложных процентов:

$$(1+r)^{1{,}25} = 1{,}4693.$$

Отсюда:

$$r = 1{,}4693^{\frac{1}{1{,}25}} - 1 = 0{,}3605.$$

Таким образом, в этом случае ставка должна превышать 36,05% годовых.

При рассмотрении этого случая можно было рассуждать и таким образом. При инфляции 8% за каждый квартал годовой темп инфляции составит $1{,}08^4 - 1 = 0{,}3605 = 36{,}05\%$. Реальное же наращение капитала будет происходить, если годовая процентная ставка превышает годовой темп инфляции, т.е. $r > 36{,}05\%$.

б) Пусть теперь применяется смешанная схема. Приравнивая индекс инфляции за 1,25 года к множителю наращения, получим квадратное уравнение относительно r:

$$(1+r)(1+0{,}25r) = 1{,}4693.$$

Решая уравнение, определяем корни: $r_1 = -5{,}3508$, $r_2 = 0{,}3508$. Очевидно, что по смыслу первый корень не подходит. Следовательно, при использовании смешанной схемы ставка должна превышать 35,08% годовых. "Граничное" значение ставки в этом случае получили почти на 1% меньше, чем в предыдущем, что объясняется большей эффективностью смешанной схемы начисления по сравнению со схемой сложных процентов.

Обратим внимание, что для ответа на вопрос в данном случае необходимо фактически решить неравенство:

$$(1+r)(1+0{,}25r) > 1{,}4693.$$

Если применяется иного вида смешанная схема наращения, то для определения процентной ставки r получим другое уравнение. В частности, при использовании схемы сложных процентов для двух лет и затем при учете полученной суммы *"на 100"* за 0,75 года приходим к уравнению:

$$\frac{(1+r)^2}{1+0{,}75r} = 1{,}4693,$$

преобразуя которое получаем квадратное уравнение с корнями $r_1 = -1{,}2681$, $r_2 = 0{,}3701$. Отбрасывая первый корень, делаем вывод, что при данной схеме начисления процентов ставка должна превышать 37,01% годовых. Такой же результат получим, решая неравенство $\dfrac{(1+r)^2}{1+0{,}75r} > 1{,}4693$ и отбрасывая в полученном ответе отрицательную область.

Пример 2.5.5. На вклад 28 тыс. руб. ежеквартально начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 40%. Оцените сумму вклада через 21 месяц с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции – 2% в месяц. Какова должна быть величина номинальной положительной процентной ставки? Как изменится ситуация, если темп инфляции будет 3,5% в месяц?

Решение. По формуле (58) за $n=1{,}75$ года (21 месяц) сумма вклада составит:

$$F_{1,75}=28\cdot\left(1+\frac{0{,}4}{4}\right)^{4\cdot1{,}75}=54{,}564 \text{ тыс. руб.}$$

Индекс инфляции за 1,75 года при темпе инфляции 2% в месяц находим по формуле (42):

$$I_p^{(1,75)}=(1+0{,}02)^{21}=1{,}5157\,.$$

Применяя формулу (104), находим величину вклада с точки зрения ее покупательной способности:

$$\bar{\bar{F}}_{1,75}=\frac{F_{1,75}}{I_p^{(1,75)}}=\frac{54{,}564}{1{,}5157}=35{,}999 \text{ тыс. руб.}$$

Вычитая из этой величины первоначальную сумму вклада, найдем реальный доход владельца вклада:

$$\bar{\bar{F}}_{1,75}-P=35{,}999-28=7{,}999 \text{ тыс. руб.}$$

Положительная процентная ставка $r^{(4)}$ должна удовлетворять неравенству:

$$r^{(4)}>4\cdot(\sqrt[7]{I_p^{(1,75)}}-1)=4\cdot(\sqrt[7]{1{,}5157}-1)=0{,}2448\,.$$

Таким образом, при темпе инфляции 2% в месяц и ежеквартальном начислении сложных процентов реальное наращение капитала будет происходить только при процентной ставке, превышающей 24,48%. А поскольку номинальная процентная ставка удовлетворяет этому условию, то владелец вклада, несмотря на инфляцию, получает реальный доход.

Естественно, к такому же ответу можно было прийти, используя условие: относительный рост вклада за квартал должен превышать темп инфляции за это время, т.е. должно выполняться неравенство:

$$\frac{r^{(4)}}{4} > (1+0{,}02)^3 - 1,$$

решая которое находим $r^{(4)} > 0{,}2448$.

При темпе инфляции 3,5% в месяц: $I_p^{(1,75)} = (1+0{,}035)^{21} = 2{,}0594$, $\bar{F}_{1,75} = \frac{54{,}564}{2{,}0594} = 26{,}495$ тыс. руб. и реальный доход вкладчика составит 26,495 – 28 = – 1,505 тыс. руб., т.е. в этом случае вкладчик с точки зрения покупательной способности потерпит убытки. В данных условиях для положительной процентной ставки должно выполняться неравенство $r^{(4)} > 4 \cdot (\sqrt[7]{2{,}0594} - 1) = 0{,}4349$, т.е. $r^{(4)} > 43{,}49\%$. Следовательно, номинальная процентная ставка (40%) меньше положительной процентной ставки.

Пример 2.5.6. Кредит 120 тыс. руб. выдается сроком на 4 года при условии начисления сложных процентов. Какова должна быть процентная ставка по кредиту, чтобы реальная доходность кредитной операции составляла 18% годовых по ставке сложных процентов? Чему будет равна погашаемая сумма? Расчетный индекс цен за срок кредита принимается равным 2,3.

Решение. Полагая в формуле (105) $m = 1$, $r^{(m)} = 0{,}18$, $n = 4$, $I_p^{(n)} = 2{,}3$, находим:

$$\bar{r}^{(1)} = \bar{r} = (1+0{,}18)\sqrt[4]{2{,}3} - 1 = 0{,}4532,$$

т.е. ставка 45,32% годовых при ежегодном начислении сложных процентов и индексе цен, равном 2,3, обеспечивает реальную доходность в 18% годовых.

Погашаемую сумму находим по формуле (55) при $P = 120$ тыс. руб., $n = 4$, $r = 0{,}4532$:

$$F_4 = 120(1+0{,}4532)^4 = 535{,}159 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.5.7. На выданный кредит в 90 тыс. руб. в течение трех лет будут начисляться сложные проценты: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какую номинальную годовую процентную ставку необходимо установить, чтобы происходило реальное наращение капитала по номинальной процентной ставке 24% годовых, если ожидается темп инфляции 14% в год? Определите наращенную сумму, которую необходимо будет вернуть.

Решение. Во всех случаях при определении величины устанавливаемой процентной ставки можно воспользоваться формулой (105). Однако эта формула в силу соотношения $I_p^{(n)} = (1+h)^n$, справедливого для данного примера, приобретает более простой вид:

$$\bar{r}^{(m)} = m[(1+\frac{r^{(m)}}{m})\sqrt[m]{1+h} - 1].$$

а) Полагая $m = 2$, $r^{(2)} = 0{,}24$, $h = 0{,}14$, из последней формулы получим:

$$\bar{r}^{(2)} = 2[(1+\frac{0{,}24}{2})\sqrt{1+0{,}14} - 1] = 0{,}3917.$$

Следовательно, возвращаемая через 3 года сумма составит:

$$F_3 = 90 \cdot \left(1+\frac{0{,}3917}{2}\right)^{2\cdot 3} = 263{,}210 \text{ тыс. руб.}$$

б) В этом случае $m = 4$, $r^{(4)} = 0{,}24$, и поэтому величины устанавливаемой номинальной процентной ставки и возвращаемой суммы равны:

$$\bar{r}^{(4)} = 4[(1+\frac{0{,}24}{4})\sqrt[4]{1+0{,}14} - 1] = 0{,}3812,$$

$$F_3 = 90 \cdot \left(1+\frac{0{,}3812}{4}\right)^{4\cdot 3} = 268{,}312 \text{ тыс. руб.}$$

в) Полагая $m = 12$, $r^{(12)} = 0{,}24$, получим:

$$\bar{r}^{(12)} = 12[(1+\frac{0{,}24}{12})\sqrt[12]{1+0{,}14} - 1] = 0{,}3744,$$

$$F_3 = 90 \cdot \left(1+\frac{0{,}3744}{12}\right)^{12\cdot 3} = 272{,}011 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.5.8. На какой срок при годовом темпе инфляции 20% необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под: а) сложную процентную ставку 36% годовых; б) сложную учетную ставку 36% годовых; в) силу роста 36% за год, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась в 1,6 раза?

Решение. а) Обозначим через P величину денежной суммы, через r – годовую процентную ставку, через h – темп инфляции за год и воспользуемся формулой (104), принимающей в этом случае следующий вид:

$$\overline{F}_n = \frac{P(1+r)^n}{(1+h)^n}.$$

Полагая $r = 0{,}36$, $h = 0{,}2$, получим равенство:

$$\frac{P(1+0{,}36)^n}{(1+0{,}2)^n} = 1{,}6P,$$

из которого следует уравнение для определения искомого срока:

$$\frac{(1{,}36)^n}{(1{,}2)^n} = 1{,}6.$$

Логарифмируя это уравнение, получим:

$$n = \frac{\ln 1{,}6}{\ln 1{,}36 - \ln 1{,}2} = 3{,}755 \text{ года.}$$

б) Для сложной годовой учетной ставки d формула (104) принимает вид:

$$\overline{F}_n = \frac{P}{(1-d)^n(1+h)^n}.$$

При $d = 0{,}36$ приходим к уравнению:

$$\frac{1}{(1-0{,}36)^n(1+0{,}2)^n} = 1{,}6,$$

откуда:

$$n = -\frac{\ln 1{,}6}{\ln 0{,}64 + \ln 1{,}2} = 1{,}781 \text{ года.}$$

в) Обозначим через δ силу роста, тогда:

$$\overline{F}_n = \frac{Pe^{\delta n}}{(1+h)^n}.$$

Следовательно, при $\delta = 0{,}36$ получаем уравнение:

$$\frac{e^{0{,}36n}}{(1+0{,}2)^n} = 1{,}6,$$

из которого следует:

$$n = \frac{\ln 1{,}6}{0{,}36 - \ln 1{,}2} = 2{,}645 \text{ года.}$$

При решении этого примера можно было вначале вывести общую формулу для определения срока. Полагая в формуле (110) $I_p^{(n)} = (1+h)^n$, $\overline{F}_n = 1{,}6P$ и разрешая полученное уравнение относительно n, находим:

$$n = \frac{\ln 1{,}6}{\ln a - \ln(1+h)}.$$

Затем вместо a последовательно подставляем $1+r$, $1-d$ и e^{δ}.

Пример 2.5.9. Определите реальную силу роста за год в условиях начисления непрерывных процентов и при годовом темпе инфляции 40%, если исходная сила роста составляет 50% за год. Какова должна быть сила роста, чтобы при такой инфляции обеспечить реальную доходность согласно исходной непрерывной ставке 50%?

Решение. Полагая в формуле (110) $n = 1$, $I_p^{(n)} = 1{,}4$, $\delta = 0{,}5$, получим:

$$\delta_{real} = 0{,}5 - \ln 1{,}4 = 0{,}1635,$$

т.е. реальная интенсивность наращения при начислении непрерывных процентов составляет 16,35% за год.

Чтобы иметь доходность согласно силе роста 50% в условиях инфляции, необходимо установить непрерывную ставку большую, чем 50%. Значение такой ставки находим по формуле (109):

$$\bar{\delta} = 0{,}5 + \ln 1{,}4 = 0{,}8365 = 83{,}65\%.$$

Заметим, что даже при темпе инфляции 50% сила роста δ_{real} будет все еще положительной непрерывной ставкой. Действительно:

$$\delta_{real} = 0{,}5 - \ln 1{,}5 = 0{,}0945.$$

Пример 2.5.10. При выдаче кредита на несколько лет на условиях начисления сложных процентов банк желает обеспечить реальную доходность такой финансовой операции в 16% годовых по сложной ставке процентов. Какую процентную ставку по кредиту должен установить банк, если инфляция прогнозируется в среднем 10% в год?

Решение. Для определения искомой процентной ставки воспользуемся формулой Фишера (111) при $r = 0{,}16$ и $h = 0{,}1$:

$$\bar{r} = 0{,}16 + 0{,}1 + 0{,}16 \cdot 0{,}1 = 0{,}276 = 27{,}6\%.$$

При малом темпе инфляции и невысокой процентной ставке применяют и приближенную формулу: $\bar{r} \approx r + h$. В данном случае $\bar{r} \approx 0{,}16 + 0{,}1 = 0{,}26 = 26\%$ и разница в 1,6% при достаточно больших суммах ощутима. Конечно, для должника желательно использование приближенной формулы, а для банка, предоставляющего кредит, выгоднее применять точную формулу (111).

Полезно отметить, что при решении примера можно было воспользоваться формулой (105). Действительно, так как $m = 1$, $I_p^{(n)} = (1+h)^n$, то

$$\bar{r}^{(1)} = [(1 + r^{(1)})\sqrt[n]{(1+h)^n} - 1] = (1 + r^{(1)})(1+h) - 1 = r^{(1)} + h + r^{(1)}h,$$

т.е. формула Фишера является частным случаем формулы (105). При $n = 1$ формула (44) совпадает с формулой Фишера.

Пример 2.5.11. Определите реальную доходность в виде процентной ставки при помещении денежных средств на год под сложную процентную ставку 45% годовых, если предполагаемый уровень инфляции за год составит: а) 15%; б) 45%; в) 60%.

Решение. Воспользуемся формулой (106), которая в условиях примера примет вид ($m=1$, $n=1$, $I_p^{(1)}=1+h$):

$$r_{real}^{(1)}=\frac{1+r^{(1)}}{1+h}-1 \text{ или } r_{real}=\frac{1+r}{1+h}-1,$$

где $r_{real}=r_{real}^{(1)}$, $r=r^{(1)}$. Во всех случаях $r=0{,}45$.

а) При инфляции $h=0{,}15$ получим:

$$r_{real}=\frac{1+0{,}45}{1+0{,}15}-1=0{,}2609,$$

т.е. реальный доход от финансовой операции составит 26,09% от каждой единицы вложенных средств.

б) При $h=0{,}45$, как и следовало ожидать, $r_{real}=0$, т.е. ставка 45% лишь нейтрализует действие инфляции.

в) Полагая $h=0{,}6$, получим:

$$r_{real}=\frac{1+0{,}45}{1+0{,}6}-1=-0{,}0938.$$

Таким образом, при инфляции 60% данная финансовая операция будет приносить убыток, т.е. реально по своей покупательной способности помещенные денежные средства уменьшатся на 9,38%.

Обратим внимание, что при решении этого примера можно было воспользоваться и формулой (46). Очевидно, и формула Фишера позволяет ответить на вопросы примера. В частности, подставляя в нее значения процентной ставки и инфляции первого случая (в обозначениях формулы Фишера: $\bar{r}=0{,}45$, $h=0{,}15$), получим уравнение $0{,}45=r+0{,}15+0{,}15r$, откуда $r=\dfrac{0{,}45-0{,}15}{1{,}15}=0{,}2609=r_{real}$.

Пример 2.5.12. Банк предлагает клиентам поместить деньги на депозит на 3 года под процентную ставку 40% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов. Найдите реальную доходность такого предложения в виде годовой эффективной процентной ставки, если предполагаемый индекс цен за

3 года составит 2,1. Чему будет равна реальная доходность при полугодовом начислении сложных процентов?

Решение. Полагая $n=3$, $I_p^{(3)}=2{,}1$, $m=12$, $r^{(12)}=0{,}4$, по формуле (106) определяем реальную номинальную процентную ставку:

$$r_{real}^{(12)}=12[(1+\frac{0{,}4}{12})\frac{1}{\sqrt[12\cdot 3]{2{,}1}}-1]=0{,}1471.$$

Поэтому согласно формуле (63) реальная доходность в виде годовой эффективной процентной ставки составит:

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}1471}{12}\right)^{12}-1=0{,}1574,$$

т.е. 15,74% годовых. Если же инфляцию не учитывать, то

$$r_{ef}=\left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)^{12}-1=0{,}4821,$$

что существенно больше, чем реальная доходность.

Можно было решить пример и несколько иным способом. Вначалс, обозначая величину вклада через P, по формуле (104) при $a=\left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)^{12}$ определяем наращенную сумму с точки зрения ее покупательной способности:

$$\overline{F}_3=\frac{P\left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)^{36}}{2{,}1}=1{,}5504P.$$

Затем по формуле (64) находим доходность:

$$r_{ef}=\left(\frac{1{,}5504P}{P}\right)^{\frac{1}{3}}-1=0{,}1574.$$

Естественно, получили такой же ответ. Если при втором способе решения действия провести в общем виде, то полученная формула покажет, что на самом деле можно было сделать меньше вычислений. Действительно, поскольку $\bar{\bar{F}}_n = P\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}\frac{1}{I_p^{(n)}}$, то

$r_{ef} = \left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m}\frac{1}{\sqrt[n]{I_p^{(n)}}}-1$ и поэтому:

$$r_{ef} = \left(1+\frac{0{,}4}{12}\right)^{12}\frac{1}{\sqrt[3]{2{,}1}}-1 = 0{,}1574.$$

Воспользуемся последней формулой для нахождения реальной доходности предложения банка при полугодовом начислении сложных процентов:

$$r_{ef} = \left(1+\frac{r^{(2)}}{2}\right)^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{I_p^{(3)}}}-1 = \left(1+\frac{0{,}4}{2}\right)^{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2{,}1}}-1 = 0{,}1245.$$

Естественно, с уменьшением количества начислений сложных процентов уменьшается и доходность.

Пример 2.5.13. Вексель на сумму 45 тыс. руб. был учтен за 3 года до срока погашения, и предъявитель векселя получил 18 тыс. руб. Найдите реальную доходность этой финансовой операции в виде эффективной учетной ставки, если среднегодовой темп инфляции ожидается равным 14%.

Решение. Так как индекс цен за 3 года равен $I_p^{(3)} = (1+0{,}14)^3 = 1{,}4815$, то по своей покупательной способности 45 тыс. руб. через 3 года составят величину $\frac{45}{1{,}4815} = 30{,}375$ тыс. руб. Подставляя в формулу (75) $n = 3$, $P = 18$, $F_3 = 30{,}375$, находим:

$$d_{ef} = 1-\left(\frac{18}{30{,}375}\right)^{\frac{1}{3}} = 0{,}1601 = 16{,}01\%.$$

Можно было решить этот пример, определяя вначале реальную доходность в виде годовой эффективной процентной ставки:

$$r_{ef} = \left(\frac{30{,}375}{18}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0{,}1906.$$

А затем по формуле (26) при $n = 1$, $r = r_{ef}$ или по формуле (3) при $r_t = r_{ef}$ найти эквивалентную ставку d_{ef}:.

$$d_{ef} = \frac{r_{ef}}{1 + r_{ef}} = \frac{0{,}1906}{1 + 0{,}1906} = 0{,}1601.$$

Пример 2.5.14. Господин N получил в банке кредит на 4 года, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 1,5% от величины кредита. Определите действительную доходность для банка такой финансовой операции в виде годовой эффективной процентной ставки, если банк начисляет каждые полгода сложные проценты на исходную сумму кредита по номинальной процентной ставке 42% годовых и прогнозируемый ежегодный темп инфляции составляет 28%.

Решение. Обозначим через P величину кредита, тогда величина удержанных комиссионных составит $0{,}015P$, и, следовательно, господину N будет выдана сумма $P - 0{,}015P = 0{,}985P$. За 4 года с учетом инфляции величина кредита вместе с начисленными процентами составит (формулы (42) и (104)):

$$\overline{F}_4 = \frac{P\left(1 + \frac{0{,}42}{2}\right)^{2 \cdot 4}}{(1 + 0{,}28)^4} = 1{,}7118P.$$

Теперь доходность финансовой операции в виде эффективной процентной ставки находим по формуле (64):

$$r_{ef} = \left(\frac{1{,}7118P}{0{,}985P}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}1482 = 14{,}82\%.$$

В данном случае вычисления можно несколько сократить, если $\overline{F}_4$ не вычисляя сразу подставить в формулу для определения r_{ef}:

$$r_{ef} = \left(\frac{\overline{F}_4}{0{,}985P}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \left(\frac{1{,}21^8}{1{,}28^4 \cdot 0{,}985}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1{,}21^2}{1{,}28 \cdot \sqrt[4]{0{,}985}} - 1 = 0{,}1482.$$

Если инфляции нет, то

$$r_{ef} = \frac{1{,}21^2}{\sqrt[4]{0{,}985}} - 1 = 0{,}4696 = 46{,}96\%,$$

т.е. доходность, конечно, больше, чем при наличии инфляции.

Пример 2.5.15. Под какую годовую номинальную процентную ставку на условиях начисления ежемесячно сложных процентов необходимо поместить денежную сумму, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась за год на 25% с учетом уплаты налога на проценты, если ставка налога на проценты равна 12% и ежеквартальный темп инфляции равен 10%? Если наращение осуществляется по годовой номинальной учетной ставке с ежеквартальным начислением сложных процентов, то какой величины должна быть эта ставка?

Решение. Годовой индекс инфляции определяем по формуле (42):

$$I_p^{(1)} = (1 + 0{,}1)^4 = 1{,}4641.$$

Обозначим через P величину денежной суммы, через $r^{(12)}$ – искомую процентную ставку. Наращенная сумма без учета инфляции в соответствии с формулой (58) составит $F_1 = P\left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12}$ и, следовательно, начисленные проценты равны:

$$I = P\left[\left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12} - 1\right].$$

С этой величины в счет уплаты налога на проценты пойдет сумма $0{,}12I$, и поэтому после уплаты величина наращенной суммы составит:

$$P + 0{,}88I = P\left[1 + 0{,}88 \cdot \left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12} - 0{,}88\right] = P\left[0{,}12 + 0{,}88 \cdot \left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12}\right],$$

а с учетом инфляции:

$$P\left[0{,}12 + 0{,}88 \cdot \left(1 + \frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12}\right] \cdot \frac{1}{1{,}4641}.$$

Полученная сумма должна быть больше исходной на 25%, т.е. в 1,25 раза. Таким образом:

$$P[0{,}12+0{,}88\cdot\left(1+\frac{r^{(12)}}{12}\right)^{12}]\cdot\frac{1}{1{,}4641}=1{,}25P.$$

Сокращаем обе части уравнения на P и решаем уравнение относительно $r^{(12)}$. После ряда алгебраических преобразований получим:

$$r^{(12)}=12\left(\sqrt[12]{\frac{1{,}25\cdot1{,}4641-0{,}12}{0{,}88}}-1\right)=0{,}6831,$$

т.е. $r^{(12)}=68{,}31\%$ годовых.

Если наращение осуществляется по учетной ставке $d^{(4)}$, то, используя формулу (77), получим:

$$I=P[\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}-1].$$

После уплаты налога величина наращенной суммы составит:

$$P+0{,}88I=P[0{,}12+0{,}88\cdot\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}].$$

Поскольку полученная сумма по своей покупательной способности должна быть больше исходной в 1,25 раза, то

$$P[0{,}12+0{,}88\cdot\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-4}]\cdot\frac{1}{1{,}4641}=1{,}25P.$$

Сокращая обе части уравнения на P и решая уравнение относительно $d^{(4)}$, получим:

$$d^{(4)}=4\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1{,}25\cdot1{,}4641-0{,}12}{0{,}88}}}\right)=0{,}6121.$$

Заметим, что такой же результат получим, и определяя по формуле (92) учетную ставку $d^{(4)}$, эквивалентную процентной ставке $r^{(12)} = 68{,}31\%$ при $m = 4$, $l = 12$:

$$d^{(4)} = 4[1 - \left(1 + \frac{0{,}6831}{12}\right)^{-\frac{12}{4}}] = 0{,}6121.$$

Задачи

2.5.1. На вклад начисляются сложные проценты: а) каждые полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какова должна быть годовая номинальная процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если ежеквартальный темп инфляции составляет 15%?

2.5.2. Номинальная процентная ставка, лишь компенсирующая при наращении действие инфляции, составляет 48% годовых. Определите инфляцию за квартал, если начисление сложных процентов осуществляется каждый месяц.

2.5.3. На некоторую сумму в течение четырех лет будут начисляться непрерывные проценты. По прогнозам инфляция в это время за каждый год последовательно составит 8, 12, 16 и 6%. Какова должна быть сила роста за год, чтобы сумма по своей покупательной способности не уменьшилась?

2.5.4. Сила роста, лишь компенсирующая при непрерывном начислении процентов действие инфляции, составляет 18% за год. Определите инфляцию в среднем за месяц.

2.5.5. На вклад в течение 18 месяцев начисляются проценты: а) по схеме сложных процентов; б) по смешанной схеме. Какова должна быть годовая процентная ставка, при которой происходит реальное наращение капитала, если каждый квартал цены увеличиваются на 12%?

2.5.6. На вклад 80 тыс. руб. каждые полгода начисляются сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 34%. Оцените сумму вклада через 2,5 года с точки зрения покупательной способности, если ожидаемый темп инфляции – 1,5% в месяц. Какова должна быть величина номинальной положительной процентной ставки? Как изменится ситуация, если темп инфляции будет 3% в месяц?

2.5.7. В финансовом соглашении были предусмотрены следующие номинальные процентные ставки: за первый квартал – 30% годовых; за второй квартал – 36% годовых; за третий и четвертый кварталы – 39% годовых. Индексы инфляции за кварталы оказались равными соответственно 1,15; 1,1; 1,2 и 1,25. Определите множитель наращения за год с учетом инфляции, если в течение года ежемесячно начислялись сложные проценты.

2.5.8. Кредит в сумме 150 тыс. руб. выдается сроком на 5 лет при условии начисления сложных процентов. Какова должна быть процентная ставка по кредиту, чтобы реальная доходность кредитной операции составляла 20% годовых по ставке сложных процентов? Чему будет равна погашаемая сумма? На этот период прогнозируется рост цен в 2,6 раза.

2.5.9. На выданный кредит в размере 100 тыс. руб. в течение 4 лет будут начисляться сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно. Какую номинальную годовую процентную ставку необходимо установить, чтобы происходило реальное наращение капитала по номинальной процентной ставке 32% годовых, если ожидаемый темп инфляции – 18% в год? Определите наращенную сумму, которую необходимо будет вернуть.

2.5.10. Кредит в размере 180 тыс. руб. выдается сроком на 3 года при условии начисления непрерывных процентов. Какова должна быть непрерывная ставка по кредиту, чтобы реальная доходность кредитной операции в виде силы роста составляла 24% за год? Чему будет равна погашаемая сумма? Расчетный индекс цен за срок кредита принимается равным 1,9.

2.5.11. Предприниматель получил в банке ссуду на два года. В первый год индекс цен составил 1,4, во второй – 1,1. Во сколько раз реальная сумма долга (по своей покупательной способности) к концу срока будет больше выданной банком суммы, если банк начислял: а) ежемесячно сложные проценты по номинальной процентной ставке 40% годовых; б) ежеквартально сложные проценты по номинальной учетной ставке 40% годовых; в) непрерывные проценты с силой роста 40% за год?

2.5.12. При выдаче кредита на несколько лет на условиях начисления сложных процентов банк желает обеспечить реальную доходность такой финансовой операции в 22% годовых по сложной ставке процентов. Какую процентную ставку по кредиту должен установить банк, если инфляция прогнозируется в среднем 14% в год?

2.5.13. На какой срок при годовом темпе инфляции 15% необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под: а) сложную процентную ставку 30% годовых; б) сложную учетную ставку 30% годовых; в) силу роста 30% за год, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась в 1,4 раза?

2.5.14. На какой срок при годовом темпе инфляции 18% необходимо поместить имеющуюся денежную сумму под номинальную процентную ставку 44% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов, чтобы она реально (по своей покупательной способности) увеличилась в 1,5 раза?

2.5.15. Господин N, имея 50 тыс. руб., хочет получить, поместив деньги на депозит, через 4 года не менее 80 тыс. руб. с точки зрения их покупательной способности. Имеет ли смысл ему обращаться в банк, использующий номинальную процентную ставку 28% годовых на условиях начисления сложных процентов: а) ежегодно; б) ежемесячно? Прогнозируемый темп инфляции составит 15% в год.

2.5.16. Определите реальную доходность в виде процентной ставки при помещении денежных средств на год под сложную процентную ставку 36% годовых, если предполагаемый уровень инфляции за год составит: а) 20%; б) 36%; в) 55%.

2.5.17. Определите реальную номинальную годовую процентную ставку при годовом темпе инфляции 25%, если объявленная исходная номинальная процентная ставка составляет 30% годовых и сложные проценты начисляются ежемесячно. Какова должна быть номинальная годовая процентная ставка, чтобы при такой инфляции обеспечить реальную доходность согласно исходной номинальной процентной ставке 30% годовых?

2.5.18. Определите реальную номинальную годовую учетную ставку при годовом темпе инфляции 20%, если объявленная исходная номинальная учетная ставка составляет 36% годовых и сложные проценты начисляются ежеквартально. Какова должна быть номинальная годовая учетная ставка, чтобы при такой инфляции обеспечить реальную доходность согласно исходной номинальной учетной ставке 36% годовых?

2.5.19. Определите реальную силу роста за год в условиях начисления непрерывных процентов и при годовом темпе инфляции 30%, если исходная сила роста составляет 40% за год. Какова должна быть сила роста, чтобы при такой инфляции обеспечить реальную доходность согласно исходной непрерывной ставке 40%?

2.5.20. Банк предлагает клиентам поместить деньги на депозит на 2 года под процентную ставку 44% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов. Найдите реальную доходность такого предложения в виде годовой эффективной процентной ставки, если предполагаемый индекс цен за 2 года составит 1,6. Чему будет равна реальная доходность при ежемесячном начислении сложных процентов?

2.5.21. Банк предлагает клиентам поместить деньги на депозит на 2,5 года на условиях начисления непрерывных процентов с силой роста 38% за год. Найдите реальную доходность такого предложения в виде годовой эффективной процентной ставки, если предполагаемый индекс цен за 2,5 года составит 1,8.

2.5.22. Индексы роста вклада за 3 года, следующие друг за другом, составили 1,52; 1,41 и 1,64. Какова реальная доходность такого использования денежных средств в виде годовой эффективной процентной ставки при среднегодовой инфляции 30%?

2.5.23. На сумму 50 тыс. руб. в течение трех лет начислялись ежеквартально сложные проценты по следующим номинальным процентным ставкам: в первом году – 36% годовых, во втором – 40% годовых, в третьем – 44% годовых. Темпы инфляции по годам соответственно составили 20, 10 и 30%. Определите наращенную сумму с учетом инфляции и реальную доходность владельца счета в виде годовой эффективной процентной ставки.

2.5.24. На сумму 20 тыс. руб. в течение четырех кварталов начислялись непрерывные проценты со следующими значениями силы роста за год: в первом квартале – 35%, во втором – 42%, в третьем – 48% и в четвертом – 55%. Среднемесячные темпы инфляции за кварталы оказались равными соответственно 3, 1, 1,5 и 2%. Найдите наращенную сумму с учетом инфляции и реальную доходность владельца счета в виде годовой процентной ставки.

2.5.25. Вексель на сумму 60 тыс. руб. был учтен за 4 года до срока погашения, и предъявитель векселя получил 25 тыс. руб. Найдите реальную доходность этой финансовой операции в виде эффективной учетной ставки, если среднегодовой темп инфляции ожидается равным 15%.

2.5.26. Банк начисляет ежеквартально сложные проценты на вклады по номинальной годовой процентной ставке 42%. Определите в виде простой годовой процентной ставки реальную стоимость привлеченных средств для банка при их размещении на 15 месяцев, если среднемесячный темп инфляции равен 2%.

2.5.27. Предприниматель получил в банке кредит на 2 года, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 2% от величины кредита. Определите действительную доходность для банка такой финансовой операции в виде годовой эффективной процентной ставки, если банк начисляет ежемесячно сложные проценты на исходную сумму кредита по номинальной процентной ставке 45% годовых и прогнозируемый ежегодный темп инфляции составляет 30%.

2.5.28. Господин N получил в банке кредит на 5 лет, при этом банком были удержаны комиссионные в размере 1,5% от величины кредита. Какова действительная доходность для банка такой финансовой операции в виде годовой эффективной процентной ставки, если банк начисляет непрерывные проценты на исходную сумму кредита с силой роста 30% за год и ожидается ежегодный темп инфляции, равный 26%?

2.6. Замена платежей и сроков их выплат

Основные положения

• Как и в случае простых процентов, при любой замене платежей в условиях использования сложных процентов должен выполняться принцип финансовой эквивалентности, соблюдение которого обосновывается составлением соответствующего уравнения эквивалентности. Согласно этому уравнению сумма заменяемых платежей, приведенных к одному моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому соглашению, приведенных к тому же моменту времени.

• В отличие от случая простых процентов при использовании сложных процентов расчет приведенных стоимостей можно осуществлять на любой момент времени. От изменения момента приведения в случае сложных процентов значения новых искомых характеристик не меняются.

• При консолидации (объединении) платежей (в случаях и сложных, и простых процентов) возникают две задачи: либо определение величины консолидированного платежа при известном сроке, когда этот платеж должен быть сделан, либо определение срока известного консолидированного платежа.

• Два контракта считаются эквивалентными, если приведенные стоимости потоков платежей по этим контрактам одинаковы.

Вопросы для обсуждения

1. Что можно сказать о моменте приведения при составлении уравнения эквивалентности, решающего задачу замены платежей в случае использования сложных процентов? Верны ли аналогичные выводы для случая простых процентов?
2. Какие две задачи возникают при консолидации платежей?
3. Можно ли трактовать формулы наращения сложными и непрерывными процентами как один из случаев замены одного платежа другим?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 2.6.1. Платеж 10 тыс. руб. и со сроком уплаты через 4 года требуется заменить платежом со сроком уплаты через: а) 2 года; б) 9 лет. Определите величину нового платежа, если применяется сложная процентная ставка 30% годовых.

Решение. а) Поскольку применяется сложная процентная ставка, то в формуле (112) $a = 1 + r$ и сама формула принимает вид:

$$P_0 = P_1(1+r)^{n_0 - n_1}$$

Полагая $P_1 = 10$ тыс. руб., $n_1 = 4, n_0 = 2, r = 0{,}3$, получим:

$$P_0 = 10 \cdot (1+0{,}3)^{2-4} = \frac{10}{(1+0{,}3)^2} = 5{,}917 \text{ тыс. руб.}$$

б) Так как в этом случае $n_0 = 9$, то

$$P_0 = 10 \cdot (1+0{,}3)^{9-4} = 10 \cdot (1+0{,}3)^5 = 37{,}129 \text{ тыс. руб.}$$

Как и следовало ожидать, с увеличением срока растет и величина нового платежа.

Естественно, решать этот пример можно было, и не используя формулу замены платежей. Так, задание первого пункта можно было сформулировать таким образом: определите сумму, которую необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 30% годовых, чтобы через 2 года она стала равной 10 тыс. руб., после чего применить формулу (66). Аналогичные соображения можно высказать и по вопросу второго пункта примера.

Пример 2.6.2. Платеж 20 тыс. руб. со сроком уплаты через 8 лет предполагается заменить платежом со сроком уплаты через 5 лет. Определите величину нового платежа, если применяется: а) сложная процентная ставка 32% годовых; б) сложная учетная ставка 32% годовых; в) непрерывная ставка 32% за год.

Решение. а) В этом случае, как и в предыдущем примере, пользуемся формулой $P_0 = P_1(1+r)^{n_0-n_1}$, где $P_1 = 20$ тыс. руб., $n_1 = 8, n_0 = 5, r = 0{,}32$:

$$P_0 = 20\cdot(1+0{,}32)^{5-8} = \frac{20}{(1+0{,}32)^3} = 8{,}696 \text{ тыс. руб.}$$

б) Так как применяется сложная учетная ставка, то в формуле (112) $a = (1-d)^{-1}$ и сама формула принимает вид:

$$P_0 = P_1(1-d)^{n_1-n_0}.$$

Поскольку $d = 0{,}32$, то

$$P_0 = 20\cdot(1-0{,}32)^{8-5} = 20\cdot(1-0{,}32)^3 = 6{,}289 \text{ тыс. руб.}$$

в) В случае непрерывных процентов в формуле (112) $a = e^{\delta}$, следовательно,

$$P_0 = P_1 e^{\delta(n_0-n_1)}.$$

Полагая $\delta = 0{,}32$, получим:

$$P_0 = 20\cdot e^{-0{,}32\cdot 3} = 7{,}658 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что если в пунктах а) и б) увеличивать число начислений процентов в году, то величина нового платежа в случае а) будет уменьшаться, приближаясь к 7,658 тыс. руб., а в случае б) – увеличиваться, приближаясь также к 7,658 тыс. руб.

Пример 2.6.3. Определите величину нового срока, если платеж 15 тыс. руб. через 3 года заменяется платежом: а) 8 тыс. руб.; б) 21 тыс. руб. При расчетах учитывать возможность помещения денег под процентную ставку 28% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов.

Решение. Так как можно вложить деньги под сложную процентную ставку, то в формуле (113) $a=\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$ и формула принимает следующий вид:

$$n_0 = n_1 + \frac{\ln P_0 - \ln P_1}{m\ln\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)}.$$

а) Поскольку в рассматриваемом случае $P_1 = 15$ тыс. руб., $P_0 = 8$ тыс. руб., $n_1 = 3$, $m = 4$, $r^{(m)} = r^{(4)} = 0{,}28$, то согласно формуле:

$$n_0 = 3 + \frac{\ln 8 - \ln 15}{4\ln\left(1+\frac{0{,}28}{4}\right)} = 0{,}677 \text{ года.}$$

Таким образом, если в году 365 дней, то $n_0 = 247$ дней.

б) Полагая $P_0 = 21$ тыс. руб., получим:

$$n_0 = 3 + \frac{\ln 21 - \ln 15}{4\ln\left(1+\frac{0{,}28}{4}\right)} = 4{,}243 \text{ года.}$$

Таким образом, новый срок составит 4 года 89 дней. Естественно, с ростом величины нового платежа растет и его срок.

Заметим, что если в формуле (113) для сложной процентной ставки перенести n_1 в левую часть равенства и обозначить $P_1 = P$, $P_0 = F_n$, $n_0 - n_1 = n$, то получим формулу (60). Подобные суждения можно высказать и о связи формулы (113) (при соответствующих обозначениях) с формулами (71) и (79).

Пример 2.6.4. Согласно контракту господин N обязан уплатить кредитору суммы 20, 30 и 50 тыс. руб. соответственно через 1 год 6 месяцев, 2 и 4 года. Однако он хочет вернуть долг одним платежом через 3 года 6 месяцев. Найдите величину консолидированного платежа, если применяется сложная процентная ставка 36% годовых. Через какое время господин N должен выплатить весь долг, если консолидированный платеж будет равен сумме выплат по первоначальному контракту? Как изменятся результаты при ежеквартальном начислении сложных процентов?

Решение. Так как применяется сложная процентная ставка, то формула (114) при $a = 1 + r$ принимает вид:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{l} P_k (1+r)^{n_0 - n_k} .$$

Полагая $P_1 = 20$ тыс. руб., $P_2 = 30$ тыс. руб., $P_3 = 50$ тыс. руб., $n_1 = 1{,}5$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_0 = 3{,}5$, $r = 0{,}36$, находим величину консолидированного платежа:

$$P_0 = 20 \cdot (1+0{,}36)^{3{,}5-1{,}5} + 30 \cdot (1+0{,}36)^{3{,}5-2} + 50 \cdot (1+0{,}36)^{3{,}5-4} = \\ = 127{,}447 \text{ тыс. руб.}$$

Если же господин N решает выплатить весь долг суммой 20 + 30 + 50 = 100 тыс. руб., то для определения срока выплаты воспользуемся формулой (115), где $a = 1 + r$ и $P_0 = 100$ тыс. руб.:

$$n_0 = \frac{\ln 100 - \ln[20 \cdot (1{,}36)^{-1{,}5} + 30 \cdot (1{,}36)^{-2} + 50 \cdot (1{,}36)^{-4}]}{\ln 1{,}36} = 2{,}711 \text{ года.}$$

Обратим внимание, что срок n_0 можно найти, используя уже известную величину консолидированного платежа, а именно исходя из условия, что платеж в сумме 127,447 тыс. руб. через 3 года 6 месяцев заменяется платежом в сумме 100 тыс. руб. Тогда можно воспользоваться формулой (113):

$$n_0 = 3{,}5 + \frac{\ln 100 - \ln 127{,}447}{\ln(1+0{,}36)} = 2{,}711 \text{ года.}$$

Естественно, получили тот же результат.

Если же в расчетах используется годовая номинальная процентная ставка $r^{(m)}$, то $a = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$, и формула (114) принимает вид:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{l} P_k \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m(n_0 - n_k)}$$

Полагая $m = 4$, $r^{(4)} = 0{,}36$, определяем выплату через 3 года 6 месяцев:

$$P_0 = 20 \cdot \left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^{4(3{,}5-1{,}5)} + 30 \cdot \left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^{4(3{,}5-2)} +$$

$$+ 50 \cdot \left(1 + \frac{0{,}36}{4}\right)^{4(3{,}5-4)} = 132{,}248 \text{ тыс. руб.}$$

В случае выплаты всего долга в сумме 100 тыс. руб. для определения срока выплаты воспользуемся формулой (115), которая в этих условиях принимает вид:

$$n_0 = \frac{\ln P_0 - \ln \sum_{k=1}^{l} P_k \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{-m \cdot n_k}}{m \ln\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)},$$

и, следовательно, искомый срок будет равен:

$$n_0 = \frac{\ln 100 - \ln[20 \cdot (1{,}09)^{-6} + 30 \cdot (1{,}09)^{-8} + 50 \cdot (1{,}09)^{-16}]}{4 \ln 1{,}09} = 2{,}689 \text{ года.}$$

Конечно, этот же результат можно было получить и по формуле (113), полагая $P_0 = 100$ тыс. руб., $P_1 = 132{,}248$ тыс. руб., $n_1 = 3{,}5$:

$$n_0 = 3{,}5 + \frac{\ln 100 - \ln 132{,}248}{4 \ln 1{,}09} = 2{,}689 \text{ года.}$$

Пример 2.6.5. В соответствии с контрактом предприниматель обязан выплатить кредитору 12 тыс. руб. через 9 месяцев, после этого через 1 год – 15 тыс. руб. и еще через 1 год 6 месяцев – 18 тыс. руб. Предприниматель предлагает выплатить 30 тыс. руб. через 2 года и еще 20 тыс. руб. – через 2 года после первой выплаты. Являются ли эти контракты эквивалентными, если есть возможность помещения денег в банк под номинальную процентную ставку 32% годовых с начислением сложных процентов по полугодиям?

Решение. Как известно, два контракта считаются эквивалентными, если приведенные стоимости потоков платежей по этим контрактам одинаковы. В качестве даты приведения примем дату, от которой измеряются все сроки.

Поскольку сроки выплат по первому контракту соответственно равны 0,75 года (9 месяцев), 1,75 года (9 месяцев + 1 год), 3,25 года (9 месяцев + 1 год + 1,5 года), то сумма приведенных стоимостей потоков платежей по первому контракту составит:

$$\frac{12}{\left(1+\frac{0{,}32}{2}\right)^{2\cdot 0{,}75}}+\frac{15}{\left(1+\frac{0{,}32}{2}\right)^{2\cdot 1{,}75}}+\frac{18}{\left(1+\frac{0{,}32}{2}\right)^{2\cdot 3{,}25}}=25{,}387 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичным образом для второго контракта получим (записывая $1+\frac{0{,}32}{2}=1{,}16$):

$$\frac{30}{1{,}16^{2\cdot 2}}+\frac{20}{1{,}16^{2\cdot 4}}=22{,}669 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, контракты не эквивалентны: первый контракт для кредитора выгоднее.

Пример 2.6.6. Предприниматель купил у господина N грузовой автомобиль, заключив контракт, согласно которому предприниматель должен уплатить господину N 22 тыс. руб. через 9 месяцев, 40 тыс. руб. – через 3 года и 28 тыс. руб. – через 4 года 6 месяцев с момента покупки. Господин N хочет сразу же продать этот контракт банку. Какую сумму может заплатить банк господину N, если банк за предоставленный кредит начисляет: а) сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 30%; б) непрерывные проценты с силой роста 30%?

Решение. По существу необходимо решить задачу консолидации платежей: заменить платежи $P_1 = 22$ тыс. руб., $P_2 = 40$ тыс. руб., $P_3 = 28$ тыс. руб. со сроками соответственно $n_1 = 0,75$ года, $n_2 = 3$ года, $n_3 = 4,5$ года одним платежом P_0 со сроком $n_0 = 0$ (т.е. сразу осуществить выплату всего долга).

а) В этом случае пользуемся формулой (114) при $a = 1 + r$, где $r = 0,3$:

$$P_0 = \frac{22}{(1+0,3)^{0,75}} + \frac{40}{(1+0,3)^3} + \frac{28}{(1+0,3)^{4,5}} = 44,875 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, банк может заплатить за контракт не более 44,875 тыс. руб.

б) Так как здесь используется непрерывная ставка, то формула (114) при $a = e^{\delta}$ принимает вид:

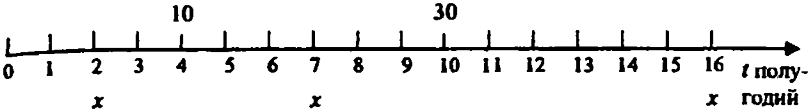
$$P_0 = \sum_{k=1}^{l} P_k e^{\delta(n_0 - n_k)}.$$

Полагая $\delta = 0,3$, определяем искомую сумму:

$$P_0 = 22 \cdot e^{0,3\cdot(-0,75)} + 40 \cdot e^{0,3\cdot(-3)} + 28 \cdot e^{0,3\cdot(-4,5)} = 41,089 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 2.6.7. Согласно финансовому соглашению господин N должен выплатить банку 10 тыс. руб. через 2 года и 30 тыс. руб. – через 5 лет с момента заключения соглашения. Господин N предлагает заменить это соглашение эквивалентным: осуществить выплаты тремя равными платежами, сделав первый платеж через 1 год, второй – через 3 года 6 месяцев и третий – через 8 лет. Какой величины должен быть каждый из этих платежей, если банк на предоставленный кредит начисляет каждые полгода сложные проценты по номинальной процентной ставке 36% годовых?

Решение. Обозначим через x величину каждого нового платежа. Схематично условие задачи можно изобразить на оси времени (одно деление равно полугодию, т.е. равно периоду начисления процентов) следующим образом: над осью помещаются платежи (в тыс. руб.) по первому контракту, а под осью – по новому контракту.



Приведем все платежи к моменту 0 и приравняем суммы приведенных платежей по первому и по новому контрактам:

$$\frac{10}{\left(1+\frac{0,36}{2}\right)^{2\cdot 2}}+\frac{30}{\left(1+\frac{0,36}{2}\right)^{2\cdot 5}}=\frac{x}{\left(1+\frac{0,36}{2}\right)^{2\cdot 1}}+\frac{x}{\left(1+\frac{0,36}{2}\right)^{2\cdot 3,5}}+\frac{x}{\left(1+\frac{0,36}{2}\right)^{2\cdot 8}}.$$

Отсюда следует:

$$x=\left(\frac{10}{1,18^4}+\frac{30}{1,18^{10}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1,18^2}+\frac{1}{1,18^7}+\frac{1}{1,18^{16}}\right)=12,010 \text{ тыс. руб.}$$

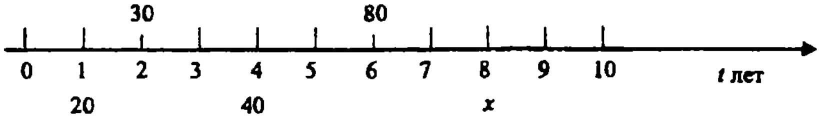
Обратим внимание, что такой же результат получим, выбрав в качестве момента приведения любой другой момент времени. Пусть, например, в качестве момента приведения выбрано начало шестого года (т.е. конец пятого года). В этом случае уравнение эквивалентности примет вид:

$$10\cdot 1,18^6+30=x\cdot 1,18^8+x\cdot 1,18^3+\frac{x}{1,18^6}.$$

Поделив обе части уравнения на $1,18^{10}$, получим такое же уравнение, что и раньше.

Пример 2.6.8. Имеется обязательство выплатить суммы 30 тыс. руб. и 80 тыс. руб. соответственно через 2 года и 6 лет. По обоюдному согласию стороны пересматривают порядок выплат: 20 тыс. руб. выплачивается через 1 год, 40 тыс. руб. – через 4 года, остаток долга погашается через 8 лет. Определите величину третьего платежа, если в расчетах используется сложная процентная ставка 28% годовых.

Решение. Обозначим через x величину остатка долга. Изобразим схематично условие задачи на оси времени (одно деление равно одному году): над осью помещаем платежи (в тыс. руб.) по первоначальному обязательству, а под осью – по пересмотренному обязательству.



Выбирая за дату приведения момент заключения финансового соглашения, запишем уравнение эквивалентности:

$$\frac{30}{(1+0{,}28)^2}+\frac{80}{(1+0{,}28)^6}=\frac{20}{1+0{,}28}+\frac{40}{(1+0{,}28)^4}+\frac{x}{(1+0{,}28)^8}.$$

Решая это уравнение относительно x, находим $x = 43{,}049$ тыс. руб.

Задачи

2.6.1. Платеж 18 тыс. руб. и со сроком уплаты через 5 лет требуется заменить платежом со сроком уплаты через: а) 3 года; б) 8 лет. Определите величину нового платежа, если применяется сложная процентная ставка 24% годовых с ежеквартальным начислением процентов.

2.6.2. Платеж 30 тыс. руб. со сроком уплаты через 7 лет предполагается заменить платежом со сроком уплаты через 3 года . Определите величину нового платежа, если применяется: а) сложная процентная ставка 40% годовых; б) сложная учетная ставка 40% годовых; б) непрерывная ставка 40% за год.

2.6.3. Определите величину нового срока, если платеж 12 тыс. руб. через 4 года заменяется платежом: а) 6 тыс. руб.; б) 16 тыс. руб. При расчетах учитывать возможность помещения денег под сложную процентную ставку 32% годовых.

2.6.4. Платеж 24 тыс. руб. со сроком уплаты через 5 лет предполагается заменить платежом 15 тыс. руб. Определите величину нового срока, если применяется: а) процентная ставка 34% годовых с полугодовым начислением сложных процентов; б) учетная ставка 34% годовых с полугодовым начислением сложных процентов; б) непрерывная ставка 34% за год.

2.6.5. Три платежа 8, 15 и 25 тыс. руб. со сроками выплат соответственно через 1 год, 2 года 6 месяцев и 3 года заменяются одним платежом, выплачиваемым через 2 года, при этом применяется сложная процентная ставка 32% годовых. Найдите величину консолидированного платежа. Какой будет срок выплаты, если консолидированный платеж будет равен сумме исходных платежей? Как изменятся результаты при ежемесячном начислении сложных процентов?

2.6.6. Платежи 10, 40, 20 и 35 тыс. руб. со сроками выплат соответственно через 1 год 6 месяцев, 3 года 6 месяцев, 4 и 5 лет заменяются одним платежом 70 тыс. руб. Определите срок консолидированного платежа, если в расчетах применяется: а) процентная ставка 28% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов; б) учетная ставка 28% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов; в) непрерывная ставка с силой роста 28% за год.

2.6.7. В соответствии с контрактом господин N обязан выплатить банку 16 тыс. руб. через полгода, после этого через 1 год – 12 тыс. руб. и еще через 2 года – 24 тыс. руб. Господин N предлагает выплатить 35 тыс. руб. через 3 года и еще 60 тыс. руб. – через 2 года после первой выплаты. Являются ли эти контракты эквивалентными, если банк на предоставленный кредит каждый квартал начисляет сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 36%? В случае неэквивалентности контрактов укажите, какой из них выгоднее для господина N.

2.6.8. В соответствии с контрактом предприниматель обязан выплатить кредитору 12 тыс. руб. через 9 месяцев, после этого через 1 год – 15 тыс. руб. и еще через 1 год 6 месяцев – 18 тыс. руб. Предприниматель предлагает выплатить долг равными платежами через 2 года и еще через 2 года после первой выплаты. Какой величины должна быть каждая выплата, чтобы эти контракты были эквивалентными, если есть возможность помещения денег в банк под номинальную процентную ставку 32% годовых с начислением сложных процентов по полугодиям?

2.6.9. Предприниматель купил у поставщика сырье, заключив контракт, согласно которому предприниматель должен уплатить поставщику 50 тыс. руб. через 3 месяца, 25 тыс. руб. – через 9 месяцев и 35 тыс. руб. – через 1 год 6 месяцев с момента покупки. Поставщику необходимы деньги, поэтому он хочет продать контракт финансовой компании. Компания купит контракт при условии начисления на свои деньги ежемесячно сложных процентов по номинальной процентной ставке 30% годовых. Какую сумму получит предприниматель от финансовой компании, если он продаст контракт: а) в момент его заключения; б) через 2 месяца после его заключения?

2.6.10. Согласно финансовому соглашению господин N должен выплатить банку 5 тыс. руб. через 1 год, 15 тыс. руб. – через 2 года 6 месяцев и 10 тыс. руб. – через 4 года с момента заключения соглашения. Господин N предлагает заменить это соглашение эквивалентным: осуществить выплаты четырьмя равными платежами, сделав первый платеж через полгода, второй – через 1 год 6 месяцев, третий – через 3 года и четвертый – через 5 лет. Какой величины должен быть каждый из этих платежей, если банк начисляет на предоставленный кредит по полугодиям сложные проценты по номинальной процентной ставке 28% годовых?

2.6.11. Имеется обязательство выплатить суммы 60 тыс. руб. и 90 тыс. руб. соответственно через 3 года и 5 лет. По обоюдному согласию стороны пересматривают порядок выплат: 15 тыс. руб. выплачиваются через 1 год 6 месяцев, 45 тыс. руб. – через 2 года, 50 тыс. руб. – через 6 лет, остаток долга погашается через 7 лет. Определите величину четвертого платежа, если на деньги начисляются ежеквартально сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 32%.

2.6.12. Платеж в 120 тыс. руб. со сроком уплаты через 5 лет заменяется на четыре равных платежа с выплатами соответственно через 2, 4, 6 и 9 лет. Какова величина этих платежей, если в расчетах применяется непрерывная ставка с силой роста 26%?

2.6.13. В соответствии с соглашением заемщик обязан выплачивать долг кредитору в конце каждого квартала в течение двух лет платежами 8 тыс. руб. Какова должна быть величина платежей при выплате этого долга равными полугодовыми платежами, если в расчетах используется годовая номинальная процентная ставка 32% с ежеквартальиым начислением сложных процентов?

2.6.14. По условиям контракта предприниматель в течение трех лет в конце каждого квартала должен выплачивать некоторой фирме по 30 тыс. руб. Через год, сделав четыре платежа, предприниматель предложил через квартал выплатить весь оставшийся долг. Какая сумма должна быть выплачена, если расчеты осуществляются по годовой номинальной процентной ставке 36% годовых с ежемесячным начислением сложных процентов?

2.6.15. Господин N продает дом. Первый покупатель предлагает ему 460 тыс. руб., причем половину суммы обещает заплатить сразу, а оставшуюся половину – через 4 года. Второй покупатель предлагает 450 тыс. руб., причем третью часть суммы обещает заплатить сразу, вторую треть суммы – через 3 года и последнюю треть – через 7 лет. При этом на остающийся долг второй покупатель обязуется начислять сложные проценты по процентной ставке 15% годовых и при выплате каждой суммы выплачивать и начисленные на нее проценты. Какой из покупателей предлагает более выгодные условия, если господин N может поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 30% годовых?

Глава 3
АННУИТЕТЫ

3.1. Постоянный аннуитет

Основные положения

• Одним из основных элементов финансового анализа является оценка денежного потока, генерируемого в течение ряда временны́х интервалов в результате реализации какого-либо проекта или функционирования того или иного вида активов. Обычно считается, что генерируемые в рамках одного временно́го интервала поступления имеют место либо в его начале, либо в его конце, т.е. они не распределены внутри интервала, а сконцентрированы на одной из его границ. В первом случае поток называется потоком пренумерандо или авансовым, во втором – потоком постнумерандо.

• Оценка денежного потока может выполняться в рамках решения двух задач: а) прямой, предполагающей суммарную оценку наращенного денежного потока; б) обратной, предполагающей суммарную оценку дисконтированного (приведенного) денежного потока.

• Ключевым моментом при оценке денежного потока является молчаливая предпосылка о том, что анализ ведется с позиции "разумного инвестора", т.е. инвестора, не просто накапливающего полученные денежные средства, а немедленно инвестирующего их с целью получения дополнительного дохода. Именно этим объясняется тот факт, что при оценке потоков в обоих случаях (и при наращении, и при дисконтировании) предполагается капитализация обычно по схеме сложных процентов.

• Аннуитет (финансовая рента) представляет собой частный случай денежного потока, а именно это однонаправленный денежный поток с равными временны́ми интервалами. Любой элемент такого денежного потока называется членом аннуитета (членом ренты), а величина постоянного временнóго интервала между двумя его последовательными элементами называется периодом аннуитета (периодом ренты).

• Если число равных временны́х интервалов ограниченно, аннуитет называется срочным. Если в течение каждого базового периода начисления процентов денежные поступления происходят p раз, то аннуитет часто называют p-срочным. Часто в качестве такого базового периода выступает календарный год.

• Аннуитет называется постоянным, если все денежные поступления равны между собой. В этом случае формулы для оценки будущей и приведенной стоимости аннуитета существенно упрощаются. Значения коэффициента наращения аннуитета, входящего в формулу определения будущей стоимости, табулированы для различных значений процентной ставки и сроков действия аннуитета. Также табулированы значения коэффициента дисконтирования аннуитета, входящего в формулу определения приведенной стоимости.

• Ситуацию, когда в течение базового периода начисления процентов денежные поступления происходят несколько раз, а проценты начисляются один раз в конце периода, можно рассматривать с двух точек зрения: на отдельные взносы, поступающие в течение периода, начисляются либо сложные, либо простые проценты.

• Аннуитет называется отсроченным, если начало его первого периода сдвинуто вправо по временнóй оси от момента времени, на который происходит анализ.

• Аннуитет называется бессрочным (или вечной рентой), если число его элементов неограниченно большое (в том числе достаточно большое). В западной практике к бессрочным относятся аннуитеты, рассчитанные на 50 и более лет. Бессрочный аннуитет также называют и вечной рентой.

Вопросы для обсуждения

1. Какой денежный поток называется потоком пренумерандо? Приведите пример.
2. Какой денежный поток называется потоком постнумерандо? Приведите пример.
3. Чем объясняется достаточно большое распространение на практике потока постнумерандо?

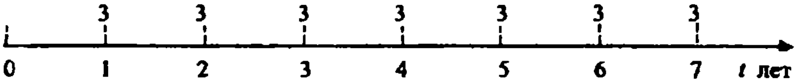
4. В рамках решения каких двух задач может выполняться оценка денежного потока?
5. Какая формула лежит в основе оценки наращенного денежного потока?
6. Какая формула лежит в основе определения общей величины приведенного денежного потока?
7. Почему при оценке денежного потока обычно предполагается капитализация по схеме сложных процентов?
8. Какой денежный поток называется аннуитетом?
9. Что называется членом аннуитета, периодом аннуитета?
10. Какой аннуитет называется срочным?
11. Какой аннуитет называется p-срочным?
12. Приведите пример срочного аннуитета постнумерандо.
13. Приведите пример срочного аннуитета пренумерандо.
14. Какой аннуитет называется постоянным?
15. Что называется коэффициентом наращения аннуитета?
16. Каков экономический смысл коэффициента наращения аннуитета?
17. Как изменяется коэффициент наращения аннуитета при изменении процентной ставки и срока действия аннуитета?
18. Как пользоваться таблицей значений коэффициента наращения аннуитета?
19. Какие свойства коэффициента наращения аннуитета вы можете привести? Дайте этим свойствам финансовую интерпретацию.
20. Какое существует соотношение между множителем наращения сложными процентами и коэффициентом наращения аннуитета? Каким образом, используя это соотношение, можно интерпретировать результат наращения сложными процентами?
21. Какие существуют подходы при рассмотрении ситуации, когда в течение базового периода начисления процентов денежные поступления происходят несколько раз, а проценты начисляются один раз в конце периода?
22. Что называется коэффициентом дисконтирования аннуитета?
23. Каков экономический смысл коэффициента дисконтирования аннуитета?
24. Как изменяется коэффициент дисконтирования аннуитета при изменении процентной ставки и срока действия аннуитета?
25. Как пользоваться таблицей значений коэффициента дисконтирования аннуитета?

26. Какие свойства коэффициента дисконтирования аннуитета вы можете привести? Дайте этим свойствам финансовую интерпретацию.
27. Какое существует соотношение между множителем дисконтирования при дисконтировании по сложной процентной ставке и коэффициентом дисконтирования аннуитета? Каким образом можно интерпретировать это соотношение?
28. Какой аннуитет называется отсроченным?
29. Как получить формулы определения будущей или приведенной стоимости аннуитета при начислении непрерывных процентов?
30. Каково соотношение между будущими стоимостями аналогичного вида аннуитетов пренумерандо и постнумерандо?
31. Какая из приведенных стоимостей аналогичного вида аннуитетов больше: пренумерандо или постнумерандо?
32. Какой аннуитет называется бессрочным?
33. Приведите пример бессрочного аннуитета (вечной ренты).
34. Почему определение будущей стоимости бессрочного аннуитета не имеет смысла?
35. Как пояснить с финансовой точки зрения, что поток даже с неограниченным числом платежей имеет все же конечную приведенную стоимость?
36. Какая существует связь между приведенной стоимостью срочного аннуитета и приведенными стоимостями бессрочных аннуитетов?
37. В каких случаях для определения приближительно приведенной стоимости срочного аннуитета можно воспользоваться формулой для определения приведенной стоимости бессрочного аннуитета?

Типовые примеры и методы их решения

Пример 3.1.1. Клиент в конце каждого года вкладывает 3 тыс. руб. в банк, выплачивающий сложные проценты по процентной ставке 25% годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через 7 лет. Если эта сумма получается в результате однократного помещения денег в банк в начале первого года, то какой величины должен быть взнос? Как изменятся найденные величины, если деньги вкладываются в начале каждого года?

Решение. Первый вариант помещения денег является постоянным аннуитетом постнумерандо, член которого равен 3 тыс. руб., срок – 7 лет, и период равен одному году. Изобразим схематично эту ситуацию на оси времени (одно деление равно одному году), помещая над осью члены аннуитета.



Для определения суммы на счете через 7 лет (т.е. будущей стоимости аннуитета) можно воспользоваться общей формулой (116), полагая $r = 0{,}25$, $C_1 = C_2 = ... = C_7 = 3$. Однако удобнее пользоваться уже преобразованным вариантом этой формулы для постоянного аннуитета, а именно формулой (120), из которой при $A = 3$ тыс. руб., $n = 7$ получим:

$$FV_{pst}^{a} = 3 \cdot FM3(25\%,7) = 3 \cdot 15{,}0735 = 45{,}221 \text{ тыс. руб.}$$

Значение коэффициента наращения аннуитета $FM3(25\%,7)$ можно либо взять из табл. 3 приложения 3, либо вычислить непосредственно по формуле, определяющей этот коэффициент.

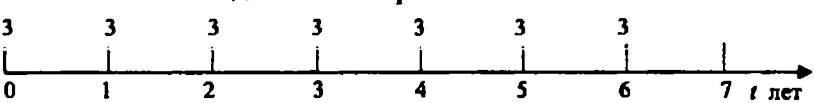
Для определения величины взноса (в начале первого года), который при наращении сложными процентами через 7 лет станет равным 45,221 тыс. руб., можно воспользоваться формулой нахождения приведенной стоимости аннуитета. Применяя формулу (121), находим:

$$PV_{pst}^{a} = 3 \cdot FM4(25\%,7) = 3 \cdot 3{,}1611 = 9{,}483 \text{ тыс. руб.}$$

Естественно, можно было воспользоваться уже ранее найденной будущей стоимостью FV_{pst}^{a} и формулой (65):

$$PV_{pst}^{a} = FV_{pst}^{a} \cdot FM2(25\%,7) = 45{,}221 \cdot 0{,}2097 = 9{,}483 \text{ тыс. руб.}$$

Если же деньги вкладываются в начале каждого года, то имеем дело с постоянным аннуитетом пренумерандо, который схематично выглядит таким образом:



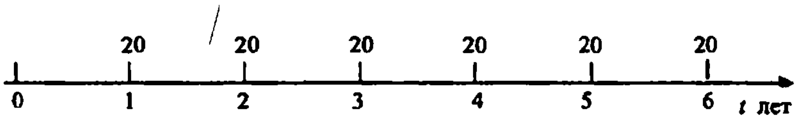
Для определения будущей и приведенной стоимости этого аннуитета пренумерандо можно воспользоваться полученными результатами и формулами (118) и (119) или соответственно формулами (126) и (127) при $m = p = 1$:

$$FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a} \cdot (1 + 0{,}25) = 45{,}221 \cdot 1{,}25 = 56{,}526 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot (1 + 0{,}25) = 9{,}483 \cdot 1{,}25 = 11{,}854 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.1.2. Вам предлагают сдать в аренду участок на шесть лет, выбрав один из двух вариантов оплаты аренды: а) 20 тыс. руб. – в конце каждого года; б) 240 тыс. руб. – в конце шестилетнего периода. Какой вариант более предпочтителен, если банк предлагает 30% годовых по вкладам? При какой оплате в конце каждого года оба варианта практически эквивалентны?

Решение. Первый вариант оплаты представляет собой аннуитет постнумерандо при $n = 6$ и $A = 20$ тыс. руб. Схематично этот вариант можно представить таким образом:



В этом случае имеется возможность ежегодного получения арендного платежа и инвестирования полученных сумм как минимум на условиях 30% годовых (например, вложение в банк). К концу шестилетнего периода накопленная сумма может быть рассчитана в соответствии с формулой (120), где $r = 30\%$:

$$FV_{pst}^{a} = 20 \cdot FM3(30\%, 6) = 20 \cdot 12{,}7560 = 255{,}12 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, расчет показывает, что вариант (а) более выгоден.

Конечно, оценку обоих вариантов можно было произвести и с позиции текущего момента. По формуле (121) находим приведенную стоимость денежного потока, получаемого при первом варианте оплаты аренды:

$$PV_{pst}^{a} = 20 \cdot FM4(30\%, 6) = 20 \cdot 2{,}6427 = 52{,}854 \text{ тыс. руб.}$$

По формуле (65) определяем приведенную стоимость $F_n = 240$ тыс. руб.:

$$P = 240 \cdot FM2(30\%,6) = 240 \cdot 0{,}2072 = 49{,}728 \text{ тыс. руб.}$$

Естественно, приходим к тому же выводу: вариант (а) более выгоден.

Для определения величины оплаты в конце каждого года, при которой оба варианта эквивалентны, воспользуемся равенством $A \cdot FM3(30\%,6) = 240$ тыс. руб., из которого находим:

$$A = \frac{240}{12{,}7560} = 18{,}815 \text{ тыс. руб.}$$

Такой же результат получим и из равенства $A \cdot FM4(30\%,6) = 49{,}728$ тыс. руб.

Пример 3.1.3. Предприниматель в результате инвестирования в некоторый проект будет в течение трех лет получать в конце каждого квартала 8 тыс. руб. Определите возможные суммы, которые может через три года получить предприниматель, если можно поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 24% годовых с начислением процентов: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

Решеиие. а) В этой ситуации возможны два варианта. Если начисляются только сложные проценты, то по формуле (122) при $A = 8$ тыс. руб., $n = 3$, $r = 24\%$, $m = 1$, $p = 4$ получим:

$$S_1 = 8 \cdot \frac{FM3(24\%,3)}{FM3(24\%,\frac{1}{4})} = 8 \cdot \frac{3{,}7776}{0{,}2302} = 131{,}281 \text{ тыс. руб.}$$

Так как, естественно, значения $FM3\,(24\%,\frac{1}{4})$ в таблице нет, то его вычисляем непосредственно по формуле $FM3(r,n) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ при $n = \frac{1}{4}$, $r = 0{,}24$:

$$FM3(24\%,\frac{1}{4}) = \frac{(1+0{,}24)^{\frac{1}{4}} - 1}{0{,}24} = 0{,}2302.$$

Если в течение года происходит начисление простых процентов, то по формуле (129) получаем:

$$S_1' = 8(4 + \frac{(4-1)0{,}24}{2}) \cdot FM3(24\%,3) = 33{,}88 \cdot 3{,}7776 = 131{,}763 \text{ тыс. руб.}$$

б) В данном случае можно воспользоваться формулой (120), считая базовым периодом начисления процентов квартал. Тогда $n = 3 \cdot 4 = 12$, $r = \frac{24\%}{4} = 6\%$ и

$$S_2 = 8 \cdot FM3(6\%,12) = 8 \cdot 16{,}8699 = 134{,}959 \text{ тыс. руб.}$$

в) В этом случае, пользуясь формулой (122) при $A = 8$ тыс. руб., $n = 3$, $r = 24\%$, $m = 12$, $p = 4$, имеем:

$$S_3 = 8 \cdot \frac{FM3(2\%,36)}{FM3(2\%,3)} = 8 \cdot \frac{51{,}9944}{3{,}0604} = 135{,}915 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, $S_1 < S_2 < S_3$ и $S_1 < S_1'$. Очевидно, что при решении этой задачи (в случае начисления только сложных процентов) можно было пользоваться только общей формулой (122), выбирая соответствующие значения параметров.

Заметим, что в ряде книг формулы оценки аннуитета имеют несколько отличный вид от соответствующих формул, приведенных в пособии, поскольку в них вместо величины A каждого денежного поступления взята за основу суммарная величина $\bar{A}$ денежных поступлений за базовый период начисления процентов (обычно за год). Таким образом, в формулах (122)–(124) и им подобных вместо множителя A появляется множитель $\frac{\bar{A}}{p}$.

Пример 3.1.4. Предприниматель, заключив на пять лет контракт с фирмой, будет получать от нее по 30 тыс. руб. в конце каждого полугодия. Эти платежи предприниматель будет помещать в банк на условиях начисления сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 32%. Определите приведенную стоимость суммы, которую получит предприниматель по данному контракту, если проценты начисляются: а) раз в полгода; б) ежеквартально; в) ежемесячно.

Решение. Воспользуемся во всех случаях только формулой (123), где $A = 30$ тыс. руб., $r = 32\%$, $n = 5$, $p = 2$.

а) В этом случае $m = 2$ и, следовательно, $mn = 2 \cdot 5 = 10$, $\frac{r}{m} = \frac{32\%}{2} = 16\%$, $\frac{m}{p} = \frac{2}{2} = 1$. Поэтому:

$$PV^a_{pst} = 30\frac{FM4(16\%,10)}{FM3(16\%,1)} = 30 \cdot FM4(16\%,10) = 30 \cdot 4{,}8332 =$$
$$= 144{,}996 \text{ тыс. руб.}$$

б) Так как теперь $m = 4$, то $mn = 4 \cdot 5 = 20$, $\frac{r}{m} = \frac{32\%}{4} = 8\%$, $\frac{m}{p} = \frac{4}{2} = 2$. Следовательно,

$$PV^a_{pst} = 30\frac{FM4(8\%,20)}{FM3(8\%,2)} = 30 \cdot \frac{9{,}8181}{2{,}08} = 141{,}607 \text{ тыс. руб.}$$

в) Поскольку $m = 12$, то $mn = 12 \cdot 5 = 60$, $\frac{r}{m} = \frac{32\%}{12} = \frac{8}{3}\%$, $\frac{m}{p} = \frac{12}{2} = 6$. Таблицами в этом случае воспользоваться нельзя, поэтому применяем непосредственно расчетные формулы. Так как $FM4(r,n) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, то

$$PV^a_{pst} = 30\frac{FM4(\frac{8}{3}\%,60)}{FM3(\frac{8}{3}\%,6)} = 30 \cdot \frac{1-(1+\frac{0{,}08}{3})^{-60}}{(1+\frac{0{,}08}{3})^6 - 1} = 30 \cdot \frac{0{,}7938}{0{,}1711} =$$
$$= 139{,}182 \text{ тыс. руб.}$$

Как и следовало ожидать, приведенная стоимость с ростом числа начислений уменьшается.

Пример 3.1.5. Какую сумму необходимо поместить в банк под номинальную процентную ставку 36% годовых, чтобы в течение 6 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 8 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежемесячно; в) непрерывно?

Решение. Для ответа на поставленный вопрос во всех случаях необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо при $A = 8$ тыс. руб., $n = 6$.

а) Полагая $r = 36\%$, по формуле (121) находим:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot FM4(36\%,6) = 8 \cdot 2{,}3388 = 18{,}710 \text{ тыс. руб.}$$

б) В этом случае, используя формулу (123) при $m = 12$, $p = 1$, получим:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot \frac{FM4(3\%,72)}{FM3(3\%,12)} = 8 \cdot \frac{29{,}3651}{14{,}1920} = 16{,}553 \text{ тыс. руб.}$$

Обратим внимание и на другой способ решения. Можно вначале найти эффективную годовую процентную ставку для $r^{(12)} = 0{,}36$ по формуле (63):

$$r_{ef} = (1 + \frac{0{,}36}{12})^{12} - 1 = 0{,}4258\,.$$

А затем применяем формулу (121) при $r = 0{,}4256$:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot FM4(42{,}58\%,6) = 8 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}4258)^{-6}}{0{,}4258} = 16{,}552 \text{ тыс. руб.}$$

С точностью до второго знака после запятой получили такой же ответ.

в) Полагая в формуле (132) $\delta = 0{,}36$, $p = 1$, находим:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot \frac{1 - e^{-0{,}36 \cdot 6}}{e^{0{,}36} - 1} = 8 \cdot \frac{0{,}8847}{0{,}4333} = 16{,}334 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.1.6. Какую сумму необходимо поместить в банк под номинальную процентную ставку 30% годовых, чтобы в течение 8 лет иметь возможность ежегодно получать 12 тыс. руб., снимая деньги равными долями каждые 3 месяца, и в конце восьмого года исчерпать счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) непрерывно?

Решение. При нахождении искомой суммы во всех случаях необходимо определить приведенную стоимость p-срочного аннуитета постнумерандо при $p = 4$, $A = 12/4 = 3$ тыс. руб., $n = 8$.

а) Полагая $r = 30\%$, $m = 1$, по формуле (123) находим:

$$PV^{a}_{pst} = 3 \cdot \frac{FM4(30\%,8)}{FM3(30\%,\frac{1}{4})} = 3 \cdot \frac{2,9247}{0,2260} = 38,823 \text{ тыс. руб.}$$

б) В этом случае $m = 2$ и, следовательно, $mn = 2 \cdot 8 = 16$, $\frac{r}{m} = \frac{30\%}{2} = 15\%$, $\frac{m}{p} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Поэтому по формуле (123):

$$PV^{a}_{pst} = 3 \cdot \frac{FM4(15\%,16)}{FM3(15\%,\frac{1}{2})} = 3 \cdot \frac{5,9542}{0,4825} = 37,021 \text{ тыс. руб.}$$

Естественно, получили меньшее значение, чем в предыдущем случае, поскольку начисление сложных процентов происходит чаще.

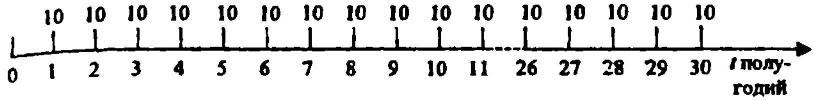
в) Так как начисление процентов происходит непрерывно, то полагаем $\delta = 0,3$ и пользуемся формулой (132):

$$PV^{a}_{pst} = 3 \cdot \frac{1 - e^{-0,3 \cdot 8}}{e^{\frac{0,3}{4}} - 1} = 3 \cdot \frac{0,9093}{0,0779} = 35,018 \text{ тыс. руб.}$$

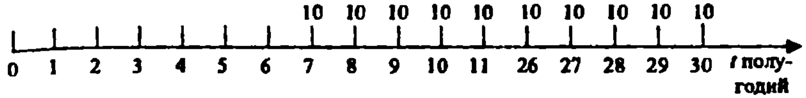
Пример 3.1.7. Банк предлагает ренту постнумерандо на 15 лет с полугодовой выплатой 10 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, и сложные проценты начисляются по полугодиям. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты начнут осуществляться: а) немедленно; б) через 3 года; в) через 4,5 года, а сложная процентная ставка равна 4, 10 и 24% годовых?

Решение. Для ответа на вопрос примера определим приведенную стоимость ренты во всех случаях, при этом будем считать, что число периодов $n = 15 \cdot 2 = 30$. Тогда ставка за период будет соответственно 2, 5 и 12%. Обозначим через h число периодов, через которое начинает поступать первый из потока платежей. Для наглядности условие задачи изобразим схематично (для всех трех ситуаций) на оси времени, когда одно деление равно полугодию (т.е. равно периоду начисления процентов), помещая над осью платежи (в тыс. руб.):

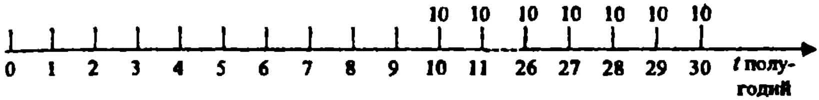
а) $h = 0$:



б) $h = 3 \cdot 2 = 6$:



в) $h = 4{,}5 \cdot 2 = 9$:



В случае а) пользуемся формулой (121), определяя $FM4(r,n)$ либо по таблице, либо непосредственно по расчетной формуле. Учитывая, что $A = 10$, например для $r = 2\%$, получаем:

$$PV^{a}_{pst} = 10 \cdot FM4(2\%,30) = 10 \cdot 22{,}3965 = 223{,}965 \text{ тыс. руб.}$$

В случае б) пользуемся формулой (125), полагая $h = 6$. Поскольку $v^h = FM2(r,h)$, то, например, для $r = 5\%$ по формуле (125):

$$PV^{a}_{pst} = 10 \cdot FM2(5\%,6) \cdot FM4(5\%,30) = 10 \cdot 0{,}7462 \cdot 15{,}3725 =$$
$$= 114{,}710 \text{ тыс. руб.}$$

В случае в) также пользуемся формулой (125), полагая $h = 9$. В частности, для $r = 12\%$:

$$PV^{a}_{pst} = 10 \cdot FM2(12\%,9) \cdot FM4(12\%,30) = 10 \cdot 0{,}3606 \cdot 8{,}0552 =$$
$$= 29{,}047 \text{ тыс. руб.}$$

Аналогичным образом определяются все остальные значения.

Результаты расчетов (в тыс. руб.) для наглядности представим в виде таблицы.

h	r		
	2%	5%	12%
0	223,965	153,725	80,552
6	198,881	114,710	40,808
9	187,414	99,091	29,047

Из таблицы видно, что с ростом процентной ставки и срока, после которого начнутся выплаты, приведенная стоимость уменьшается. В частности, если выплаты начнутся через 4,5 года (т.е. через 9 полугодий) и процентная ставка составит 24% годовых, то ренту можно приобрести за 29,047 тыс. руб. (или, конечно, дешевле).

В заключение отметим, что в формуле (125) h не обязательно должно быть целым числом. А вот если оно целое, как в условии примера, то формулу (125) можно привести к виду:

$$PV_{pst}^{a} = A \cdot FM4(r,n+h) - A \cdot FM4(r,h),$$

т.е. приведенная стоимость отсроченного аннуитета представляет собой разность приведенных стоимостей аннуитетов с платежами, начиная с первого периода. Например, для $h = 9$, $r = 12\%$ имеем:

$$PV_{pst}^{a} = 10 \cdot FM4(12\%,39) - 10 \cdot FM4(12\%,9) =$$
$$= 82{,}330 - 53{,}282 = 29{,}048 \text{ тыс. руб.}$$

Отличие на 1 руб. от значения, полученного по формуле (125) и равного 29,047 тыс. руб., объясняется погрешностью вычислений.

Очевидно, кстати, что при $h = 0$ из формулы (125) следует формула (121).

Пример 3.1.8. Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 350 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 60 тыс. руб. в банк под 28% годовых. Найдите срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) ежемесячно.

Решение. а) Поскольку имеем дело с аннуитетом постнумерандо, то при ответе на вопрос примера можно поступить двояко. Во-первых, из формулы (120) путем преобразований можно получить в общем виде формулу для расчета срока аннуитета, принимающую вид:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{FV_{pst}^{a}}{A} r + 1\right)}{\ln(1+r)},$$

и подставить в нее значения $FV_{pst}^{a} = 350$ тыс. руб., $A = 60$ тыс. руб., $r = 0{,}28$. Таким образом:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{350}{60} 0{,}28 + 1\right)}{\ln(1+0{,}28)} = 3{,}922 \text{ года.}$$

Во-вторых, пользуясь непосредственной формулой для расчета $FM3(r,n)$, можно в формулу (120) подставить все известные значения и решить полученное уравнение относительно n. Так как формула (120) имеет вид:

$$FV_{pst}^{a} = A\frac{(1+r)^{n} - 1}{r},$$

то, подставляя вместо параметров их значения, получим:

$$350 = 60\frac{(1+0{,}28)^{n} - 1}{0{,}28},$$

откуда следует $(1{,}28)^{n} = 2{,}6333$. Логарифмируя последнее равенство, находим:

$$n = \frac{\ln 2{,}6333}{\ln 1{,}28} = 3{,}922 \text{ года.}$$

Округлим срок до целого числа лет, т.е. пусть $n = 4$. Теперь, преобразуя формулу (120), определяем величину ежегодного взноса:

$$A = \frac{350}{FM3(28\%,4)} = 58{,}183 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, внося ежегодно по 58,183 тыс. руб., можно за 4 года создать фонд в размере 350 тыс. руб. Конечно, можно было сразу внести сумму $350 \cdot FM2(28\%,4) = 130{,}385$ тыс. руб., которая обеспечила бы через 4 года создание фонда необходимого размера. Однако одновременное изъятие из хозяйственного оборота 130,385 тыс. руб. менее целесообразно, чем ежегодные отчисления по 58,183 тыс. руб.

б) Найдем искомый срок, подставляя в формулу (122) значения всех известных параметров и учитывая, что в этом случае $p = 1$, $m = 2$. Получим равенство:

$$350 = 60\frac{\left(1+\frac{0{,}28}{2}\right)^{2n} - 1}{\left(1+\frac{0{,}28}{2}\right)^{2} - 1},$$

которое равносильно выражению $(1{,}14)^{2n} = 2{,}748$. Откуда получаем: $n = \dfrac{\ln 2{,}748}{2\ln 1{,}14} = 3{,}857$ года.

в) В этом случае $m = 12$, поэтому из формулы (122) следует:

$$350 = 60\frac{\left(1+\frac{0{,}28}{2}\right)^{12n} - 1}{\left(1+\frac{0{,}28}{2}\right)^{12} - 1}, \text{ откуда } n = \frac{\ln 23{,}271}{12\ln 1{,}14} = 2{,}002 \text{ года.}$$

Естественно, с увеличением числа начислений процентов искомый срок уменьшается.

Пример 3.1.9. Работник заключает с фирмой контракт, согласно которому в случае его постоянной работы на фирме до выхода на пенсию (в 65 лет) фирма обязуется перечислять в конце каждого года в течение 25 лет на счет работника в банке одинаковые суммы, которые обеспечат работнику после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в размере 8000 руб. в течение 18 лет. Какую сумму ежегодно должна перечислять фирма, если работнику 40 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 20%?

Решение. Выплаты работнику после выхода на пенсию представляют собой аннуитет постнумерандо с членом $A = 8000$ руб. и длительностью $n = 18$ лет. Полагая $r = 20\%$, по формуле (121) найдем приведенную стоимость этого аннуитета на момент выхода работника на пенсию:

$$PV^{a}_{pst} = 8000 \cdot FM4(20\%,18) = 8000 \cdot 4{,}8122 = 38497{,}6 \text{ руб.}$$

Полученная величина представляет собой необходимую будущую стоимость ежегодных вкладов фирмы на счет работника. Поэтому размер каждого вклада можно найти из формулы (120), полагая $FV^{a}_{pst} = 38497{,}6$ руб.:

$$A = \frac{38497{,}6}{FM3(20\%,25)} = \frac{38497{,}6}{471{,}9811} = 81{,}57 \text{ руб.}$$

Таким образом, каждый год фирме вполне достаточно перечислять на счет работника 81 руб. 57 коп.

Пример 3.1.10. Предприниматель получил на 5 лет ссуду в размере 400 тыс. руб., причем ежегодно он должен выплачивать кредитору проценты по ставке 20%. Одновременно с получением ссуды предприниматель (для ее погашения) создает страховой фонд, в который в конце каждого года будет делать одинаковые взносы, чтобы к моменту возврата долга накопить 400 тыс. руб. Определите суммарные ежегодные затраты предпринимателя, если на деньги, находящиеся в фонде, начисляются сложные проценты по ставке 24% годовых.

Решение. Обозначим через A ежегодный взнос в страховой фонд, через R – ежегодные суммарные затраты предпринимателя. Так как уплачиваемые на долг проценты составляют $400 \cdot 0{,}2 = 80$ тыс. руб., то $R = A + 80$. Величину A можно найти из формулы (120), полагая $FV^{a}_{pst} = 400$ тыс. руб., $n = 5$, $r = 24\%$:

$$400 = A \cdot FM3(24\%,5)\text{, откуда } A = \frac{400}{8{,}0484} = 49{,}699 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, $R = 49{,}689 + 80 = 129{,}699$ тыс. руб.

Пример 3.1.11. Предлагается инвестировать 200 тыс. руб. на 4 года при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 50 тыс. руб.). По истечении четырех лет выплачивается дополнительное вознаграждение в размере 80 тыс. руб. Принимать ли это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 18% годовых (сложных)?

Решение. Для принятия решения необходимо рассчитать и сравнить две суммы. При депонировании денег в банк к концу четырехлетнего периода на счете будет сумма:

$$F_4 = P \cdot FM1(18\%,4) = 200 \cdot 1{,}9388 = 387{,}76 \text{ тыс. руб.}$$

В отношении альтернативного варианта, предусматривающего возмещение вложенной суммы частями, предполагается, что ежегодные поступления в размере 50 тыс. руб. можно немедленно пускать в оборот, получая дополнительные доходы. Если нет других альтернатив по эффективному использованию этих сумм, их можно депонировать в банк. Денежный поток в этом случае можно представить двояко:

а) как срочный аннуитет постнумерандо с $A = 50$, $n = 4$, $r = 18\%$ и единовременное получение суммы в 80 тыс. руб.;

б) как срочный аннуитет пренумерандо с $A = 50$, $n = 3$, $r = 18\%$ и единовременное получение сумм в 50 и 80 тыс. руб.

В первом случае на основании формулы (120) имеем:

$$S = 50 \cdot FM3(18\%,4) + 80 = 50 \cdot 5{,}2154 + 80 = 340{,}77 \text{ тыс. руб.}$$

Во втором случае на основании формулы (126) имеем:

$$S = 50 \cdot FM3(18\%,3) \cdot 1{,}18 + 130 = 50 \cdot 3{,}5724 \cdot 1{,}18 + 130 =$$
$$= 340{,}77 \text{ тыс. руб.}$$

Естественно, что оба варианта привели к одинаковому ответу. Таким образом, общая сумма капитала к концу пятилетнего периода будет складываться из доходов от депонирования денег в банке (210,77 тыс. руб.), возврата доли от участия в проекте за последний год (50 тыс. руб.) и единовременного вознаграждения (80 тыс. руб.). Общая сумма составит, следовательно, 340,77 тыс. руб. Предложение экономически нецелесообразно.

Пример 3.1.12. Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 8 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 37 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 20% годовых?

Решение. Полагая в формуле (124) $A = 8$ тыс. руб., $r = 0{,}2$ и $p = m = 1$, находим, что истинная стоимость акции составляет $\frac{8}{0{,}2} = 40$ тыс. руб. Следовательно, акции можно приобретать.

Пример 3.1.13. Фирма собирается учредить фонд для ежегодной (в конце года) выплаты пособий своим работникам. Определите сумму, которую фирма должна поместить на депозит в банк, чтобы обеспечить получение неограниченно долго в конце каждого года 12 тыс. руб., если банк начисляет: а) ежегодно сложные проценты по ставке 28%; б) ежеквартально сложные проценты по ставке 28%; в) непрерывные проценты с силой роста 28%.

Решение. Денежный поток во всех случаях является бессрочным аннуитетом постнумерандо, причем $A = 12$ тыс. руб. Необходимо найти приведенную стоимость этого аннуитета.

а) Так как $r = 0{,}28$, то по формуле (124) при $p = m = 1$ получим:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{12}{0{,}28} = 42{,}857 \text{ тыс. руб.}$$

б) Полагая в формуле (124) $r = 0{,}28$, $m = 4$, $p = 1$, находим:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{12}{(1 + \frac{0{,}28}{4})^4 - 1} = 38{,}611 \text{ тыс. руб.}$$

в) Поскольку в этом случае $p = 1$, $\delta = 0{,}28$, то из формулы (133) следует:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = \frac{12}{e^{0{,}28} - 1} = 37{,}137 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.1.14. Вы имеете возможность инвестировать одинаковую сумму денег в один из двух проектов. Первый проект позволит получить бессрочную ренту постнумерандо с ежегодными выплатами в размере 20 тыс. руб. Второй проект в течение двух лет принесет соответственно 40 тыс. руб. и 100 тыс. руб. Какой из этих проектов лучше, если процентная ставка составляет 25% годовых? Можно ли так изменить процентную ставку, что ответ изменится на противоположный?

Решение. Для сравнения проектов определим приведенные стоимости потоков доходов, доставляемых проектами.

Полагая в формуле (124) $r = 0{,}25$ при $p = m = 1$, получим:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{20}{0{,}25} = 80 \text{ тыс. руб.}$$

Для оценки второго проекта пользуемся формулой (117) при $n = 2$, $C_1 = 40$ тыс. руб., $C_2 = 100$ тыс. руб. и $r = 25\%$:

$$PV_{pst}^{a} = 40 \cdot FM2(25\%,1) + 100 \cdot FM2(25\%,2) =$$
$$= 40 \cdot 0{,}8 + 100 \cdot 0{,}64 = 96 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, второй проект предпочтительнее.

Теперь выясним, существует ли такая годовая процентная ставка r, при которой первый проект предпочтительнее. Для этого надо решить неравенство:

$$\frac{20}{r} > \frac{40}{(1+r)} + \frac{100}{(1+r)^2}.$$

Совершая равносильные преобразования неравенства, получим $r^2 + 5r - 1 < 0$, откуда находим, что $-5{,}1926 < r < 0{,}1926$. Таким образом, процентная ставка должна быть меньше 19,26% годовых. С целью проверки полученного результата вычислим приведенные стоимости доходов, например, при ставке 17%. По формулам (124) и (117) соответственно получим:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{20}{0{,}17} = 117{,}647 \text{ тыс. руб.,}$$

$$PV_{pst}^{a} = 40 \cdot FM2(17\%,1) + 100 \cdot FM2(17\%,2) =$$
$$= 40 \cdot 0{,}8547 + 100 \cdot 0{,}7305 = 107{,}238 \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, при использовании ставки 17% первый проект предпочтительнее.

Пример 3.1.15. В банке получена ссуда на шесть лет в сумме 800 тыс. руб. под 25% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Требуется определить величину годового платежа и составить план погашения долга.

Решение. Обозначим через A величину искомого годового платежа. Поток этих платежей представляет собой аннуитет постнумерандо, для которого $PV_{pst}^{a} = 800\,000$ руб., $r = 25\%$, $n = 6$. Поэтому для нахождения величины A можно воспользоваться формулой (121), из которой следует:

$$A = \frac{PV_{pst}^{a}}{FM4(25\%,6)} = \frac{800\,000}{2{,}9514} = 271\,058 \text{ руб.}$$

Составим план погашения долга. Поскольку в течение первого года заемщик пользовался ссудой в размере 800000 руб., то платеж, который равен 271 058 руб. и будет сделан в конце этого года, состоит из следующих двух частей: процентов за год в сумме 200 000 руб. (25% от 800 000 руб.) и погашаемой части долга в сумме 271 058 – 200 000 = 71 058 руб. В следующем году расчет будет повторен при условии, что размер кредита, которым пользуется заемщик, составит уже меньшую сумму по сравнению с первым годом, а именно: 800 000 – 71 058 = 728 942 руб. Таким образом, проценты за год будут равны 182 236 руб. (25% от 728 942 руб.), а погашаемая часть долга будет равна 271 058 – – 182 236 = 88 822 руб. и т.д. Отсюда видно, что с течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает.

План погашения долга представим в виде таблицы:

(руб.)

Год	Остаток ссуды на начало года	Величина годового платежа	В том числе		Остаток ссуды на конец года
			проценты за год	погашенная часть долга	
1	800000	271058	200000	71058	728942
2	728942	271058	182236	88822	640120
3	640120	271058	160030	111028	529092
4	529092	271058	132273	138785	390307
5	390307	271058	97577	173481	216826
6	216826	271058	54232	216826	0

Заметим, что данные в ходе вычислений округлялись, поэтому величина процентов в последней строке найдена балансовым методом, т.е. вначале записываем погашенную часть долга

216 826 руб., а затем определяем величину процентов за год 271 058 – 216 826 = 54 232 руб. Если же непосредственно найти 25% от 216 826 руб., то получим 54 207 руб. Суммируя величины в пятом столбце, получим размер выданной ссуды: 800 000 руб.

Таблица позволяет ответить на целый ряд дополнительных вопросов, представляющих определенный интерес для прогнозирования денежных потоков. В частности, можно рассчитать общую сумму процентных платежей, величину процентного платежа в k -м периоде, долю кредита, погашенную в первые k лет, и т.п.

Полезно также отметить, что можно вывести рекуррентные равенства, позволяющие сформулировать следующие правила заполнения таблицы:

а) каждый последующий элемент четвертого столбца (проценты за год) получается путем умножения предыдущего элемента на $(1+r)$ и вычитания из полученного произведения Ar;

б) каждый последующий элемент пятого столбца (погашенная часть долга) получается путем умножения предыдущего элемента на $(1+r)$;

в) каждый последующий элемент шестого столбца (остаток ссуды на конец года) получается путем умножения предыдущего элемента на $(1+r)$ и вычитания из полученного произведения A.

Например, для третьего элемента четвертого, пятого и шестого столбцов таблицы соответственно имеем (учитывая приближенность вычислений):

$$182236 \cdot (1+0{,}25) - 271058 \cdot 0{,}25 = 160030;$$

$$88822 \cdot (1+0{,}25) = 111028;$$

$$640120 \cdot (1+0{,}25) - 271058 = 529092.$$

Пример 3.1.16. Предприниматель получил ссуду в сумме 300 тыс. руб. под 20% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. В соответствии с финансовым соглашением предприниматель будет возвращать долг равными суммами по 102 тыс. руб. в конце каждого года. Составьте план погашения долга.

Решение. Так как поток годовых платежей представляет собой аннуитет постнумерандо, то срок n погашения долга можно определить, преобразовав формулу (121):

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{PV_{pst}^a}{A} r)}{\ln(1+r)}.$$

Таким образом, при $PV_{pst}^a = 300$ тыс. руб., $A = 102$ тыс. руб., $r = 0{,}2$, находим:

$$n = -\frac{\ln(1 - \frac{300}{102} 0{,}2)}{\ln(1+0{,}2)} = 4{,}867 \text{ года.}$$

Получили нецелое количество лет. Поэтому первые четыре года величина годового платежа будет 102 тыс. руб., а в последнем (пятом) неполном году величина платежа будет меньше: она будет равна сумме остатка долга на начало пятого года и начисленных на этот остаток процентов.

Представим план погашения долга в виде таблицы:

(руб.)

Год	Остаток ссуды на начало года	Величина годового платежа	В том числе		Остаток ссуды на конец года
			проценты за год	погашенная часть долга	
1	300000	102000	60000	42000	258000
2	258000	102000	51600	50400	207600
3	207600	102000	41520	60480	147120
4	147120	102000	29424	72576	74544
5	74544	89453	14909	74544	0

Величина платежа в пятом году (89453 руб.) получена следующим образом. Поскольку остаток долга на начало пятого года равен 74544 руб., то начисленные проценты на него равны 14909 руб. (20% от 74544 руб.), и поэтому платеж составит 74544 + 14909 = 89453 руб.

Пример 3.1.17. Кредитор заключил контракт, согласно которому должник обязуется выплатить 60 тыс. руб. за 5 лет равными суммами в конце каждого года, причем на непогашенный остаток будут по полугодиям начисляться сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 24%. По какой цене кредитор может продать этот контракт банку, который на ссуженные деньги начисляет ежеквартально сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 28%?

Решение. Вначале определяем величину каждого платежа, который должен делать должник в соответствии с контрактом. Эти пять платежей образуют постоянный аннуитет постнумерандо, приведенная стоимость которого составляет 60 тыс. руб. Полагая $PV^a_{pst} = 60$ тыс. руб., $n = 5$, $m = 2$, $p = 1$ и $r = 24\%$, из формулы (123) находим величину платежа:

$$A = 60 \cdot \frac{FM3(12\%,2)}{FM4(12\%,10)} = 60 \cdot \frac{2{,}12}{5{,}6502} = 22{,}512 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, банку предлагается аннуитет сроком 5 лет и с членом А, равным 22,512 тыс. руб. Цена, по которой банк может приобрести этот аннуитет, определяется по формуле (123) при $m = 4$, $r = 28\%$:

$$PV^a_{pst} = 22{,}512 \cdot \frac{FM4(7\%,20)}{FM3(7\%,4)} = 22{,}512 \cdot \frac{10{,}5940}{4{,}4399} = 53{,}716 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи

3.1.1. Клиент в конце каждого года вкладывает 4 тыс. руб. в банк, выплачивающий сложные проценты по процентной ставке 30% годовых. Определите сумму, которая будет на счете клиента через: а) 3 года; б) 8 лет; в) 15 лет. Как изменятся найденные величины, если деньги вкладываются в начале каждого года?

3.1.2. Вам предлагают сдать в аренду участок на пять лет, выбрав один из двух вариантов оплаты аренды: а) 15 тыс. руб. – в конце каждого года; б) 130 тыс. руб. – в конце пятилетнего периода. Какой вариант более предпочтителен, если банк предлагает 24% годовых по вкладам? При какой оплате в конце каждого года оба варианта практически эквивалентны?

3.1.3. Предприниматель в результате инвестирования в некоторый проект будет в течение четырех лет получать в конце каждого полугодия 12 тыс. руб. Определите возможные суммы, которые через четыре года получит предприниматель, если можно поместить деньги в банк под сложную процентную ставку 24% годовых с начислением процентов: а) ежегодно; б) каждые полгода; в) ежеквартально?

3.1.4. В течение 6 лет каждые полгода в банк вносится по 10 тыс. руб. по схеме: а) постнумерандо; б) пренумерандо. Банк начисляет сложные проценты каждые полгода из расчета 20% годовых. Какая сумма будет на счете в конце срока?

3.1.5. Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета постнумерандо: а) класть на депозит 30 тыс. руб. каждые полгода при условии, что банк начисляет 18% годовых с полугодовым начислением сложных процентов; б) делать ежегодный вклад в размере 63 тыс. руб. на условиях 19% годовых при ежегодном начислении сложных процентов. Какая сумма будет на счете через 10 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен? Изменится ли ваш выбор, если процентная ставка во втором плане будет снижена до 18,5%?

3.1.6. Анализируются два варианта накопления средств по схеме аннуитета пренумерандо: а) класть на депозит сумму в размере 15 тыс. руб. каждый квартал при условии, что банк начисляет 20% годовых с ежеквартальным начислением сложных процентов; б) делать ежегодный вклад в размере 52 тыс. руб. на условиях 22% годовых при ежегодном начислении сложных процентов. Какая сумма будет на счете через 8 лет при реализации каждого плана? Какой план более предпочтителен? Изменится ли Ваш выбор, если процентная ставка во втором плане будет увеличена до 23%?

3.1.7. Страховая компания заключила договор с предприятием на три года, установив годовой страховой взнос в 6 тыс. руб. Страховые взносы помещаются в банк под сложную процентную ставку 25% годовых. Определите сумму, которую получит страховая компания по этому контракту, если взносы будут поступать: а) в конце каждого года; б) равными долями в конце каждого полугодия в размере 3 тыс. руб.; в) равными долями в конце каждого квартала в размере 1,5 тыс. руб. Учесть возможность использования и только сложных процентов, и смешанной схемы.

3.1.8. Страховая компания, заключив на 4 года договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по 15 тыс. руб. в конце каждого квартала. Эти взносы компания помещает в банк под годовую номинальную процентную ставку 36% годовых. Найдите приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если сложные проценты начисляются: а)ежеквартально; б) ежемесячно; в) непрерывно.

3.1.9. Для создания фонда фирма вкладывает ежегодно в банк по 24 тыс. руб. под годовую номинальную процентную ставку 32%. Определите сумму, которая будет накоплена в фонде через 8 лет, если: а) взносы делаются в конце года, а сложные проценты начисляются по полугодиям; б) взносы делаются равными долями в конце каждого месяца (т.е. по 2 тыс. руб.), а сложные проценты начисляются ежеквартально; в) взносы делаются равными долями в конце каждого квартала (т.е. по 6 тыс. руб.) и начисляются непрерывные проценты.

3.1.10. Стоит ли покупать за 5500 руб. ценную бумагу, генерирующую ежегодный доход в размере 1000 руб. в течение двадцати лет, если банк предлагает сложную процентную ставку 18% годовых?

3.1.11. Банк предлагает ренту постнумерандо на 10 лет с ежеквартальной выплатой 4 тыс. руб. Годовая процентная ставка в течение всего периода остается постоянной, и сложные проценты начисляются ежеквартально. По какой цене можно приобрести эту ренту, если выплаты начнут осуществляться: а) немедленно; б) через 4 года; в) через 5,5 года, а сложная процентная ставка равна 32% годовых?

3.1.12. Клиент хочет накопить на своем счете 80 тыс. руб., осуществляя в конце каждого года равные вклады в банк под сложную процентную ставку 30% годовых. Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы клиент мог накопить требуемую сумму за: а) 5 лет; б) 10 лет?

3.1.13. Предприниматель с целью покупки оборудования делает в конце каждого квартала равные вклады в банк под годовую номинальную процентную ставку 28%, причем сложные проценты начисляются по полугодиям. Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы предприниматель мог накопить 250 тыс. руб. за: а) 3 года; б) 8 лет при использовании только схемы сложных процентов?

3.1.14. На взносы в банк по 15 тыс. руб. в начале каждого полугодия в течение 8 лет начисляются ежеквартально сложные проценты по ставке 20% годовых. Какая сумма будет на счете в конце срока?

3.1.15. Ежегодно в начале года в банк делается очередной взнос в размере 14 тыс. руб. Банк устанавливает годовую номинальную процентную ставку 36%. Какая сумма будет на счете по истечении шести лет, если начисление сложных процентов происходит: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) ежемесячно?

3.1.16. На ежеквартальные взносы в банк в размере 10 тыс. руб. по схеме пренумерандо банк начисляет сложные проценты по номинальной процентной ставке 24% годовых: а) раз в год; б) раз в полгода. Какая сумма будет на счете через 3 года?

3.1.17. Предприятие намеревается создать за 5 лет фонд развития в размере 300 тыс. руб. Какую сумму предприятие должно ежегодно ассигновать на эту цель при условии помещения денег в банк в конце каждого года под процентную ставку 24% годовых с начислением сложных процентов: а) ежегодно; б) ежемесячно?

3.1.18. Клиент в течение 6 лет делает ежегодные вклады в банк по 12 тыс. руб. под сложную процентную ставку 24% годовых. Определите величину накопленной к концу срока суммы, если применяется только схема сложных процентов и: а) вклады делаются в начале каждого года; б) вклады делаются равными долями в начале каждого квартала (т.е. по четверти ежегодного вклада); в) вклады делаются равными долями в начале каждого месяца (т.е. по одной двенадцатой части ежегодного вклада).

3.1.19. Для создания за 5 лет фонда в размере 200 тыс. руб. фирма делает ежегодные равные взносы в банк под годовую номинальную процентную ставку 36%. Определите, какой величины взнос должна ежегодно делать фирма, если: а) взносы делаются в конце года, а сложные проценты начисляются ежемесячно; б) взносы делаются равными долями в конце каждого полугодия (т.е. по половине ежегодного взноса), а сложные проценты начисляются ежеквартально; в) взносы делаются равными долями в конце каждого квартала (т.е. по четверти ежегодного взноса) и начисляются непрерывные проценты.

3.1.20. Предприниматель получил на 6 лет ссуду в размере 500 тыс. руб., причем ежегодно он должен выплачивать кредитору проценты по ставке 15%. Одновременно с получением ссуды предприниматель (для ее погашения) создаст страховой фонд, в который в конце каждого года будет делать одинаковые взносы, чтобы к моменту возврата долга накопить 500 тыс. руб. Определите суммарные ежегодные затраты предпринимателя, если на деньги, находящиеся в фонде, начисляются ежеквартально сложные проценты по номинальной процентной ставке 20% годовых.

3.1.21. Некоторая фирма покупает нефтеносный участок, который, по оценке специалистов, будет в течение 15 лет приносить доход в 600 тыс. руб. ежегодно, после чего запасы нефти скорее всего истощатся. Ежегодно фирма желает получать проценты на вложенную сумму по ставке 24%. Одновременно фирма создает страховой фонд, в который в конце каждого года будет делать одинаковые взносы, чтобы к концу 15-го года накопить сумму, заплаченную за участок с запасами нефти. На деньги, вложенные в фонд, начисляются сложные проценты по ставке 20% годовых. За какую сумму фирма покупает участок?

3.1.22. Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 400 тыс. руб. С этой целью в конце каждого года фирма предполагает вносить по 80 тыс. руб. в банк под 32% годовых. Найдите срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) непрерывно.

3.1.23. Господин N с целью накопления на своем счете 180 тыс. руб. в начале каждого квартала будет вносить по 6 тыс. руб. в банк под номинальную процентную ставку 26% годовых. Определите необходимый для этого срок, если банк начисляет непрерывные проценты.

3.1.24. Работница заключает с предприятием контракт, согласно которому в случае ее постоянной работы на предприятии до выхода на пенсию (в 60 лет) предприятие обязуется перечислять в конце каждого года в течение 15 лет на счет работницы в банке одинаковые суммы, которые обеспечат ей после выхода на пенсию в конце каждого года дополнительные выплаты в 5000 руб. в течение 10 лет. Какую сумму ежегодно должно перечислять предприятие, если работнице 45 лет и предполагается, что банк гарантирует годовую процентную ставку 22%?

3.1.25. Предлагается инвестировать 300 тыс. руб. на 5 лет при условии возврата этой суммы частями (ежегодно по 60 тыс. руб.). По истечении 5 лет выплачивается дополнительное вознаграждение в размере 120 тыс. руб. Принимать ли это предложение, если можно депонировать деньги в банк из расчета 20% годовых (сложных)?

3.1.26. Предприниматель хочет открыть счет в банке, положив такую сумму, чтобы его сын, являющийся студентом первого курса, мог снимать с этого счета в конце каждого года по

3600 руб., исчерпав весь вклад к концу пятилетнего срока обучения. Какой величины должна быть сумма, если банк начисляет сложные проценты по ставке 30% годовых?

3.1.27. Клиент положил в банк 20 тыс. руб., намереваясь снимать со счета в конце каждого года 5,5 тыс. руб. Как долго клиент сможет снимать деньги со счета, если банк начисляет сложные проценты по ставке 24% годовых: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) непрерывно?

3.1.28. Какую сумму необходимо поместить в банк под номинальную процентную ставку 32% годовых, чтобы в течение 10 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 7 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) непрерывно?

3.1.29. Какую сумму необходимо поместить в банк под номинальную процентную ставку 24% годовых, чтобы в течение 9 лет иметь возможность ежегодно получать по 12 тыс. руб., снимая деньги равными долями каждые 2 месяца, и в конце девятого года исчерпать счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) непрерывно?

3.1.30. Участок сдан в аренду на 20 лет. Сумма годового платежа (схема постнумерандо) составляет 30 тыс. руб., причем каждые пять лет происходит индексация величины платежа на 10%. Рассчитайте текущую цену договора на момент его заключения, если сложная банковская процентная ставка равна 25% годовых.

3.1.31. У молодого человека 24 лет появилась возможность окончить годичный курс обучения стоимостью 12 тыс. руб. и занять более высокую должность. Насколько выше должна быть заработная плата в новой должности, чтобы молодой человек счел обучение целесообразным, если в настоящее время его годовая заработная плата составляет 21,6 тыс. руб. и он считает приемлемой для себя норму отдачи на вложения 16% годовых? В новой должности молодой человек собирается работать до выхода на пенсию, т.е. 40 лет. Как изменится ответ, если такую возможность обучения обдумывает мужчина 54 лет?

3.1.32. Перед выходом на пенсию господин N хочет обеспечить себе дополнительный ежегодный доход в сумме 6 тыс. руб. неограниченно долго. Какую сумму он должен поместить в банк, начисляющий сложные проценты по ставке 28% годовых?

3.1.33. Имеется бессрочный аннуитет постнумерандо с ежегодными выплатами по 1 тыс. руб. Требуется определить приведенную стоимость этого аннуитета при годовой процентной ставке: а) 5%; б) 10%; в) 100%. Как изменятся расчетные значения для аннуитета пренумерандо с такими же выплатами?

3.1.34. Определите текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с ежегодным поступлением 4,2 тыс. руб., если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 24% годовых, причем сложные проценты начисляются по полугодиям.

3.1.35. Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 4 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 18 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 21% годовых с начислением сложных процентов: а) ежегодно; б) ежеквартально?

3.1.36. Фермеру предлагают продать находящийся в его владении участок земли, на котором он выращивает в среднем 600 т картофеля в год. Цена одного килограмма картофеля (в долларах) из года в год одна и та же и равна 0,3 долл. Банковский процент по валютным вкладам устойчиво держится на уровне 15% годовых. Ниже какой цены фермеру не имеет смысла продавать землю, если затраты на выращивание, сбор и реализацию картофеля оцениваются в 60 тыс. долл. в год?

3.1.37. Если рационально использовать участок земли под сельскохозяйственные культуры, то он может приносить ежегодный доход (за вычетом всех издержек) до 190 тыс. руб. Однако на участке обнаружено месторождение нефти, разработка которого позволит в течение трех лет, начиная со следующего года, получать доход в размере соответственно 300, 700 и 500 тыс. руб. Для организации работ уже в этом году необходимы капиталовложения в размере 150 тыс. руб. После откачки нефти участок земли будет оцениваться в 40 тыс. руб. и станет непригодным для сельского хозяйства. Применяя сложную процентную ставку 20% годовых, сделайте вывод, как выгоднее использовать этот участок земли.

3.1.38. Фирма собирается учредить фонд для ежегодной (в конце года) выплаты пособий своим работникам. Определите сумму, которую фирма должна поместить на депозит в банк, чтобы обеспечить получение неограниченно долго в конце каждого года по 15 тыс. руб., если банк начисляет: а) ежегодно сложные проценты по ставке 30%; б) по полугодиям сложные проценты по ставке 30%; в) непрерывные проценты с силой роста 30%.

3.1.39. Какую сумму необходимо поместить в банк под номинальную процентную ставку 32% годовых, чтобы неограниченно долго иметь возможность ежегодно получать по 80 тыс. руб., снимая деньги равными долями каждые 3 месяца (т.е. по 20 тыс. руб.), если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) непрерывно?

3.1.40. У вас есть возможность инвестировать одинаковую сумму денег в один из двух проектов. Первый проект позволит получить бессрочную ренту постнумерандо с ежегодными выплатами 15 тыс. руб. Второй проект в течение двух лет принесет соответственно 30 и 80 тыс. руб. Какой из этих проектов лучше, если процентная ставка составляет 24% годовых? Можно ли так изменить процентную ставку, что ответ изменится на противоположный?

3.1.41. В банке получена ссуда на пять лет в сумме 600 тыс. руб. под 24% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Требуется определить величину годового платежа и составить план погашения долга.

3.1.42. Вы заняли на семь лет 36 тыс. руб. под 30%, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите, какая часть основной суммы кредита будет погашена за первые два года.

3.1.43. Предприниматель занял на шесть лет 45 тыс. руб. под 20%, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите величину процентов, которые будут уплачены предпринимателем в четвертом году.

3.1.44. Вы заняли на пять лет 80 тыс. руб. под 24%, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года. Определите общую сумму процентов к выплате.

3.1.45. Предприятие приобрело здание за 840 тыс. руб. на следующих условиях: а) 25% стоимости оплачиваются немедленно; б) оставшаяся часть погашается равными годовыми платежами в течение 10 лет с начислением 22% годовых на непогашенную часть кредита по схеме сложных процентов. Определите величину годового платежа.

3.1.46. Предприниматель получил ссуду в сумме 400 тыс. руб. под 25% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. В соответствии с финансовым соглашением предприниматель будет возвращать долг равными суммами по 150 тыс. руб. в конце каждого года. Составьте план погашения долга.

3.1.47. Предприниматель хочет приобрести оборудование стоимостью 240 тыс. руб. Долг можно возвратить в течение года равными суммами в конце каждого квартала, причем на непогашенный остаток начисляются сложные проценты из расчета 20% годовых. Определите величину квартального платежа и составьте план погашения долга.

3.1.48. Выдан кредит в сумме 80 тыс. руб. под 24% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Долг нужно возвращать ежемесячно в течение года равными суммами. Определите величину каждого платежа, если он происходит: а) в конце каждого месяца; б) в начале каждого месяца.

3.1.49. Кредитор предоставил ссуду в сумме 120 тыс. руб. под 25% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. В соответствии с финансовым соглашением должник будет возвращать долг равными суммами по 20 тыс. руб. в конце каждого месяца. Составьте план погашения долга.

3.1.50. Фермер приобрел в магазине трактор за 300 тыс. руб. в кредит. В соответствии с контрактом долг необходимо возвращать в течение года равными суммами в конце каждого месяца, причем на непогашенный остаток начисляются ежемесячно сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 24%. По какой цене контракт может быть приобретен банком, если он на ссуженные деньги начисляет ежемесячно сложные проценты по годовой номинальной процентной ставке 36%?

3.1.51. В банке получена ссуда на семь лет в сумме 600 тыс. руб. на условиях начисления сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого года, причем при изменении процентной ставки меняется и размер годового платежа. Составить план погашения долга, если годовая процентная ставка в первые три года составляет 20%, в следующие два года – 25% и в последние два года – 30%.

3.2. Непрерывный и переменный аннуитеты

Основные положения

• Если в течение каждого базового периода денежные поступления происходят очень часто, так что промежутки между последовательными поступлениями представляют собой бесконечно малые величины, то аннуитет считают непрерывным, т.е. денежные поступления происходят непрерывно с постоянной интенсивностью: одно и то же количество денежных единиц в единицу времени.

• Аннуитет называется переменным, если его члены различны по величине. Для оценки переменного аннуитета используют, вообще говоря, общие формулы оценки денежного потока.

• Если члены аннуитета изменяются в соответствии с некоторыми законами (в частности, образуют арифметическую или геометрическую прогрессию), то общие формулы для определения будущей или приведенной стоимости аннуитета можно упростить.

• Чтобы при оценке переменного аннуитета без явно выраженной зависимости между его членами пользоваться стандартными формулами, надо стараться представить этот аннуитет в виде суммы или разности постоянных аннуитетов.

Вопросы для обсуждения

1. Какой аннуитет называется непрерывным?
2. В каких случаях *p*-срочный аннуитет можно практически считать непрерывным? Приведите пример.
3. Каким образом можно получить формулы для оценки непрерывного аннуитета?
4. Имеет ли смысл говорить о непрерывном аннуитете как об аннуитете постнумерандо или пренумерандо?
5. Какой аннуитет называется переменным?
6. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным абсолютным изменением его членов. Какую зависимость образуют члены такого аннуитета?

7. Приведите пример переменного аннуитета с постоянным относительным изменением его членов. Какую зависимость образуют члены такого аннуитета?
8. Приведите пример переменного аннуитета, при оценке которого можно воспользоваться формулами оценки постоянного аннуитета.

Типовые примеры и методы их решения

Пример 3.2.1. В течение 4 лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 10 тыс. руб. Определите сумму, накопленную к концу четвертого года при использовании процентной ставки 15% годовых, если начисление сложных процентов осуществляется: а) ежегодно; б) ежемесячно.

Решение. а) Полагаем $n = 4$, $m = 1$, $r = 15\%$. Поскольку платежи поступают достаточно часто, будем считать, что они поступают непрерывным образом. Тогда можно воспользоваться формулой (134) при $\overline{A} = 10$ тыс. руб.:

$$FV^a = \frac{10 \cdot 0{,}15}{\ln(1 + 0{,}15)} 4{,}9934 = 53{,}592 \text{ тыс. руб.}$$

Сравним этот результат со значением, полученным по формуле (122), полагая, что в году 360 дней и дан аннуитет постнумерандо. Так как $p = 360, A = \frac{10}{360}$, получим:

$$FV^a_{pst} = \frac{10}{360} \frac{4{,}9934}{\dfrac{(1+0{,}15)^{\frac{1}{360}} - 1}{0{,}15}} = 53{,}581 \text{ тыс. руб.}$$

Видим, что полученные величины отличаются незначительно (всего на 11 руб.). Кстати, считая, что имеем дело с аннуитетом пренумерандо, по формуле (126) находим:

$$FV^a_{pre} = 53{,}581 \cdot (1 + 0{,}15)^{\frac{1}{360}} = 53{,}602 \text{ тыс. руб.}$$

Эта величина также мало отличается от 53,592 тыс. руб. (на 10 руб.). Значения же FV^a_{pst} и FV^a_{pre} незначительно отличаются друг от друга, поскольку при частом (в данном случае – ежедневном) поступлении денег разница между аннуитетами постнумерандо и пренумерандо начинает исчезать.

б) Так же как и в предыдущем случае, будем считать, что платежи поступают непрерывным образом. Поскольку при $m=12$ (и поэтому $\frac{r}{m}=\frac{0{,}15}{12}=0{,}0125$) табличным значением коэффициента наращения аннуитета воспользоваться нельзя, перед вычислением преобразуем немного формулу (134):

$$FV^a=\frac{\overline{A}r}{m^2\ln(1+\frac{r}{m})}FM3(\frac{r}{m},mn)=\frac{\overline{A}}{m\ln(1+\frac{r}{m})}[(1+\frac{r}{m})^{mn}-1].$$

Отсюда:

$$FV^a=\frac{10}{12\ln(1+0{,}0125)}[(1+0{,}0125)^{12\cdot4}-1]=54{,}696\text{ тыс. руб.}$$

Предполагая же, что в условии говорится о постоянном аннуитете постнумерандо или пренумерандо, соответственно по формулам (122) и (126) получим:

$$FV^a_{pst}=\frac{10}{360}\frac{(1+0{,}0125)^{12\cdot4}-1}{(1+0{,}0125)^{\frac{12}{360}}-1}=54{,}685\text{ тыс. руб.};$$

$$FV^a_{pre}=54{,}685\cdot(1+0{,}0125)^{\frac{12}{360}}=54{,}708\text{ тыс. руб.}$$

Видим, что вычисленные значения мало отличаются от 54,696 тыс. руб.

Пример 3.2.2. Фирма намеревается выпускать некоторую продукцию в течение трех лет, получая ежегодно выручку в размере 30 млн руб. Предполагается, что продукция в течение года будет продаваться более или менее равномерно. Оцените ожидаемые денежные поступления, если применяется непрерывная ставка 20% за год.

Решение. Поскольку в условии говорится о более или менее равномерном распределении продаж в течение года, то логично предполагать, что интенсивность потока выручки будет в какой-то мере постоянной величиной, равной 30 млн руб. в год. Считая, что денежные поступления происходят непрерывно, воспользуемся формулами (137) и (138), определяющими соответственно будущую и приведенную стоимости непрерывного аннуитета. Полагая $\bar{A} = 30$ млн руб., $n = 3$, $\delta = 0{,}2$, получим:

$$FV^{a(\delta)} = 30\frac{e^{0,2\cdot 3} - 1}{0{,}2} = 123{,}318 \text{ млн руб.};$$

$$PV^{a(\delta)} = 30\frac{1 - e^{-0,2\cdot 3}}{0{,}2} = 67{,}678 \text{ млн руб.}$$

Конечно, при определении $PV^{a(\delta)}$ можно было воспользоваться уже найденным значением $FV^{a(\delta)}$ и формулой (78), из которой следует:

$$PV^{a(\delta)} = FV^{a(\delta)} \cdot e^{-\delta n} = 123{,}318 \cdot e^{-0,6} = 67{,}678 \text{ млн руб.}$$

Пример 3.2.3. Финансовая компания в течение пяти лет в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам по 20 млн руб. ежегодно. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 30% за год и выплаты происходят постоянно и достаточно равномерно?

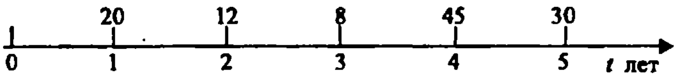
Решение. Полагая, что выплаты происходят непрерывно с постоянной интенсивностью (т.е. моделируя ситуацию с помощью непрерывного аннуитета), для нахождения необходимой суммы воспользуемся формулой (135) определения приведенной стоимости аннуитета. Так как $\bar{A} = 20$ млн руб., $n = 5$, $m = 1$ и $r = 30\%$, то:

$$PV^{a} = \frac{20 \cdot 0{,}3}{\ln(1 + 0{,}3)} FM4(30\%, 5) = \frac{20 \cdot 0{,}3}{\ln 1{,}3} 2{,}4356 = 55{,}700 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, обладая 55,7 млн руб., компания способна выполнить свои обязательства перед вкладчиками.

Пример 3.2.4. Имеется переменный аннуитет постнумерандо (тыс. руб.): 20, 12, 8, 45, 30. Рассчитайте: а) будущую стоимость аннуитета; б) приведенную стоимость аннуитета, если его период совпадает с базовым периодом начисления процентов по сложной процентной ставке 25% годовых, т.е. равен одному году. Как изменятся полученные оценки, если исходный поток представляет собой аннуитет пренумерандо?

Решение. а) Обозначим (в тыс. руб.) $C_1 = 20$, $C_2 = 12$, $C_3 = 8$, $C_4 = 45$, $C_5 = 30$ и $r = 0{,}25$. Изобразим схематично условие задачи на оси времени (одно деление равно одному году), помещая над осью члены аннуитета.



Для определения будущей стоимости аннуитета можно воспользоваться формулой (116). Для наглядности представим результаты расчетов в табличном виде.

(тыс. руб.)

Год	Денежный поток	Множитель наращения при r = 25%	Наращенный поток
1	20	2,4414	48,828
2	12	1,9531	23,4372
3	8	1,5625	12,5
4	45	1,25	56,25
5	30	1	30
	115		171,0152

Из таблицы видно, что на первое денежное поступление в размере 20 тыс. руб. начисляются сложные проценты за 4 года и оно в конце пятого года станет равным $20 \cdot 2{,}4414 = 48{,}828$ тыс. руб.; на второе денежное поступление в размере 12 тыс. руб. начисляются сложные проценты за 3 года и оно в конце пятого года станет равным $12 \cdot 1{,}9531 = 23{,}4372$ тыс. руб. и т.д. Будущая стоимость аннуитета равна сумме наращенных поступлений, т.е. $FV^a_{pst} = 171{,}0152$ тыс. руб.

б) Для определения приведенной стоимости аннуитета можно воспользоваться формулой (117). Как и в предыдущем случае, для наглядности представим результаты расчетов в табличном виде:

(тыс. руб.)

Год	Денежный поток	Дисконтный множитель при r = 25%	Приведенный поток
1	20	0,8	16
2	12	0,64	7,68
3	8	0,512	4,096
4	45	0,4096	18,432
5	30	0,3277	9,831
	115		56,039

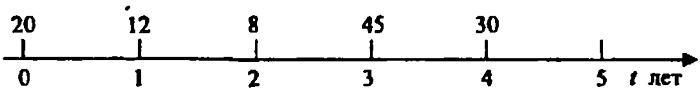
Таким образом, с позиции начала первого года приведенная стоимость 20 тыс. руб. составляет $20 \cdot 0{,}8 = 16$ тыс. руб., приведенная стоимость 12 тыс. руб. составляет $12 \cdot 0{,}64 = 7{,}68$ тыс. руб. и т.д. Суммируя приведенные стоимости всех денежных поступлений, получим приведенную стоимость аннуитета $PV_{pst}^{a} = 56{,}039$ тыс. руб.

Конечно, при рассмотрении этого случая можно было воспользоваться уже ранее найденной будущей стоимостью FV_{pst}^{a}, а именно:

$$PV_{pst}^{a} = FV_{pst}^{a} \cdot FM2(25\%,5) = 171{,}0152 \cdot 0{,}3277 = 56{,}0417 \text{ тыс. руб.}$$

Расхождение в 2 руб. 70 коп. (0,0027 тыс. руб.) является следствием погрешности вычислений.

Если же исходный поток является аннуитетом пренумерандо, то схематично условие задачи выглядит таким образом:



Для определения будущей и приведенной стоимости этого аннуитета пренумерандо можно воспользоваться полученными результатами и формулами (118) и (119):

$$FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a} \cdot (1+0{,}25) = 171{,}0152 \cdot 1{,}25 = 213{,}769 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot (1+0{,}25) = 56{,}039 \cdot 1{,}25 = 70{,}0488 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.2.5. Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 8 лет: а) в конце года; б) в начале года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 4 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,5 тыс. руб. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 20% годовых и сложные проценты начисляются один раз в конце года. Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,5 тыс. руб.?

Решение. а) Согласно условию имеем переменный аннуитет постнумерандо с постоянным абсолютным изменением его членов и, следовательно, для оценки аннуитета воспользуемся формулами (140) и (141). По условиям соглашения $A=4$ тыс. руб., $n=8$, $r=0{,}2$, и если суммы возрастают, то $z=0{,}5$ тыс. руб. Поэтому:

$$FV_{pst}^{a} = (4+\frac{0{,}5}{0{,}2}) \cdot FM3(20\%,8) - \frac{0{,}5 \cdot 8}{0{,}2} = 87{,}244 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV_{pst}^{a} = (4+\frac{0{,}5}{0{,}2}) \cdot FM4(20\%,8) - \frac{0{,}5 \cdot 8}{0{,}2 \cdot (1+0{,}2)^{8}} = 20{,}290 \text{ тыс. руб.}$$

С целью проверки воспользуемся формулой (65):

$$PV_{pst}^{a} = FV_{pst}^{a} \cdot FM2(20\%,8) = 87{,}244 \cdot 0{,}2326 = 20{,}293 \text{ тыс. руб.},$$

т.е. результаты вычислений совпадают с точностью до второго знака после запятой (отличие на 3 руб.).

Если суммы будут уменьшаться, то $z=-0{,}5$ и, следовательно,

$$FV_{pst}^{a} = (4-\frac{0{,}5}{0{,}2}) \cdot FM3(20\%,8) + \frac{0{,}5 \cdot 8}{0{,}2} = 44{,}749 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV_{pst}^{a} = (4 - \frac{0,5}{0,2}) \cdot FM4(20\%,8) + \frac{0,5 \cdot 8}{0,2 \cdot (1+0,2)^{8}} = 10,408 \text{ тыс. руб.}$$

Заметим, что при $z < 0$ члены аннуитета убывают и число этих членов (равное числу периодов n) должно удовлетворять неравенству $n < 1 - \frac{A}{z}$, иначе можно получить отрицательные платежи, что лишено смысла, т.е. должно выполняться условие $n < 1 + \frac{4}{0,5} = 9$. Таким образом, в данной ситуации (при $n = 8$) все платежи положительны.

б) Оценки аннуитета пренумерандо нетрудно получить, используя соотношения $FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a}(1+r)$, $PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a}(1+r)$. Если $z = 0,5$, то

$$FV_{pre}^{a} = 87,244 \cdot 1,2 = 104,693 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV_{pre}^{a} = 20,290 \cdot 1,2 = 24,348 \text{ тыс. руб.}$$

.Если же $z = -0,5$, то

$$FV_{pre}^{a} = 44,749 \cdot 1,2 = 53,699 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV_{pre}^{a} = 10,408 \cdot 1,2 = 12,490 \text{ тыс. руб.}$$

Нетрудно получить формулы оценки аннуитета, аналогичные формулам (140), (141), и для других ситуаций. Однако эти формулы приобретают несколько громоздкий вид. Например, если в переменном аннуитете постнумерандо с постоянным абсолютным изменением его членов начисление сложных процентов происходит m раз за период, то можно показать, что

$$FV_{pst}^{a} = \left[A + \frac{z}{\frac{r}{m} \cdot FM3(\frac{r}{m}, m)} \right] \cdot \frac{FM3(\frac{r}{m}, mn)}{FM3(\frac{r}{m}, m)} - \frac{zn}{\frac{r}{m} \cdot FM3(\frac{r}{m}, m)}.$$

Так, если в условиях примера начисление сложных процентов происходит в конце каждого квартала ($m = 4$), то $\frac{r}{m} = 0{,}05$ и для $z = 0{,}5$ получаем:

$$FV^a_{pst} = \left[4 + \frac{0{,}5}{0{,}05 \cdot FM3(5\%,4)}\right] \cdot \frac{FM3(5\%,32)}{FM3(5\%,4)} - \frac{0{,}5 \cdot 8}{0{,}05 \cdot FM3(5\%,4)} =$$
$$= 91{,}854 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.2.6. За 6 лет необходимо накопить 30 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 800 руб. и процентная ставка равна 25% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 2 тыс. руб.

Решение. Полагая в формуле (140) $FV^a_{pst} = 30$ тыс. руб., $z = 0{,}8$ тыс. руб., $n = 6$ и $r = 0{,}25$, получим уравнение:

$$30 = (A + \frac{0{,}8}{0{,}25}) \cdot 11{,}2588 - \frac{0{,}8 \cdot 6}{0{,}25},$$

из которого находим размер первого вклада:

$$A = \frac{30 + \frac{0{,}8 \cdot 6}{0{,}25}}{11{,}2588} - \frac{0{,}8}{0{,}25} = 1{,}170 \text{ тыс. руб.}$$

Если же известна величина первого вклада $A = 2$ тыс. руб. и неизвестна величина z абсолютного изменения денежных поступлений, то по формуле (140) получим:

$$30 = (2 + \frac{z}{0{,}25}) \cdot 11{,}2588 - \frac{z \cdot 6}{0{,}25},$$

откуда:

$$z = \frac{0{,}25(30 - 2 \cdot 11{,}2588)}{11{,}2588 - 6} = 0{,}356 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.2.7. По условиям контракта на счет в банке поступают в течение 7 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 4 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 10%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 28% годовых.

Решение. Поскольку ежегодно платежи увеличиваются в 1,1 раза (на 10%), то денежный поток представляет собой переменный аннуитет постнумерандо с постоянным относительным изменением его членов. Поэтому для оценки аннуитета воспользуемся формулами (143) и (144). Полагая $A = 4$ тыс. руб., $n = 7$, $r = 0{,}28$ и $q = 1{,}1$, получим:

$$FV^{a}_{pst} = 4 \cdot \frac{1{,}1^7 - (1+0{,}28)^7}{1{,}1-(1+0{,}28)} = 81{,}795 \text{ тыс. руб.};$$

$$PV^{a}_{pst} = \frac{4}{(1+0{,}28)^7} \cdot \frac{1{,}1^7 - (1+0{,}28)^7}{1{,}1-(1+0{,}28)} = 14{,}530 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.2.8. Компания за предыдущий год выплатила 2 тыс. руб. на акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 100 руб. ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 12 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 24% годовых. Изменится ли ситуация, если дивиденды по акциям будут расти на 8% ежегодно в течение неопределенно долгого времени?

Решение. Полагая $A = 2$ тыс. руб., $z = 0{,}1$ тыс. руб. и $r = 0{,}24$, по формуле (142) оценки бессрочного аннуитета найдем истинную стоимость акции:

$$PV^{a}_{pst} = (2 + \frac{0{,}1}{0{,}24}) \cdot \frac{1}{0{,}24} = 10{,}069 \text{ тыс. руб.}$$

Так как истинная стоимость акции меньше ее цены, то не имеет смысла приобретать акцию.

Пусть теперь дивиденды по акциям растут на 8% в год, т.е. увеличиваются ежегодно в 1,08 раза. В этом случае истинная стоимость акции по формуле (145) при $q = 1{,}08$ составит:

$$PV^{a}_{pst} = \frac{2}{1+0{,}24-1{,}08} = 12{,}5 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, истинная стоимость акции больше ее цены, следовательно, имеет смысл ее приобретение.

Пример 3.2.9. Сдан участок в аренду на десять лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые семь лет– по 20 тыс. руб., в оставшиеся три года – по 12 тыс. руб. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 22%.

Решение. Естественно, приведенная стоимость денежного потока должна оцениваться с позиции начала первого временнóго интервала. Решать данный пример можно различными способами в зависимости от того, какие аннуитеты будут выделены аналитиком. Во-первых, можно воспользоваться общей формулой (117). Представим еще три варианта решения.

а) Исходный поток можно представить как сумму двух аннуитетов: первый имеет $A = 12$ тыс. руб. и продолжается десять лет; второй имеет $A = 8$ тыс. руб. и продолжается первые семь лет. По формуле (121) можно оценить приведенную стоимость каждого аннуитета, а сумма этих оценок даст значение приведенной стоимости исходного денежного потока:

$$PV^{a}_{pst} = 12 \cdot FM4(22\%,10) + 8 \cdot FM4(22\%,7) =$$
$$= 12 \cdot 3{,}9232 + 8 \cdot 3{,}4155 = 74{,}402 \text{ тыс. руб.}$$

б) Исходный поток можно представить как разность двух аннуитетов: первый имеет $A = 20$ тыс. руб. и продолжается десять лет; второй имеет $A = 8$ и, начавшись в восьмом году, заканчивается в десятом. По формуле (121) можно оценить приведенную стоимость каждого аннуитета. Однако второй аннуитет в этом случае будет оценен с позиции начала восьмого года, поэтому полученную сумму необходимо дисконтировать с помощью формулы (65) к началу первого года. В этом случае оценки двух аннуитетов будут приведены к одному моменту времени, а их сумма даст оценку приведенной стоимости исходного денежного потока.

$$PV^{a}_{pst} = 20 \cdot FM4(22\%,10) - 8 \cdot FM4(22\%,3) \cdot FM2(22\%,7) =$$
$$= 20 \cdot 3{,}9232 - 8 \cdot 2{,}0422 \cdot 0{,}2486 = 74{,}402 \text{ тыс. руб.}$$

в) Исходный поток можно представить как сумму двух аннуитетов: первый имеет $A = 20$ тыс. руб. и продолжается семь лет; второй имеет $A = 12$ тыс. руб. и продолжается последние три года (т.е. является отсроченным аннуитетом). Поэтому по формулам (121) и (125) при $h = 7$, получим:

$$PV_{pst}^{a} = 20 \cdot FM4(22\%,7) + 12 \cdot FM4(22\%,3) \cdot FM2(22\%,7) =$$

$$= 20 \cdot 3{,}4155 + 12 \cdot 2{,}0422 \cdot 0{,}2486 = 74{,}402 \text{ тыс. руб.}$$

Задачи

3.2.1. В течение 7 лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 30 тыс. руб. Определите сумму, накопленную к концу седьмого года при использовании сложной процентной ставки 24% годовых, считая, что платежи поступают непрерывным образом.

3.2.2. В течение 3 лет на счет в банке ежедневно будут поступать одинаковые платежи, каждый год составляя в сумме 15 тыс. руб. Определите сумму, накопленную к концу третьего года при использовании процентной ставки 18% годовых, если начисление сложных процентов осуществляется: а) по полугодиям; б) ежемесячно. Рассмотрите схемы постнумерандо и пренумерандо, полагая в году 360 дней. Можно ли в качестве приближения считать, что имеем дело с непрерывным аннуитетом?

3.2.3. Некоторое месторождение полезных ископаемых будет разрабатываться в течение 8 лет, при этом ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения составят в среднем 300 млн руб. в год. Определите капитализированную (приведенную) стоимость ожидаемого дохода при использовании сложной процентной ставки 20% годовых и в предположении, что отгрузка и реализация продукции будут непрерывны и равномерны.

3.2.4. Финансовая компания в течение трех лет в соответствии со своими обязательствами должна выплачивать вкладчикам по 8 млн руб. ежегодно. Какой суммой должна располагать компания, чтобы иметь возможность выполнить обязательства, если норма доходности составляет 25% за год и выплаты происходят постоянно и достаточно равномерно?

3.2.5. Фирма намеревается выпускать некоторую продукцию в течение четырех лет, получая ежегодно выручку в размере 40 млн руб. Предполагается, что продукция в течение года будет продаваться более или менее равномерно. Оцените ожидаемые денежные поступления, если применяется: а) сложная процентная ставка 22% годовых; б) непрерывная ставка 22% за год.

3.2.6. Определите приведенную стоимость непрерывного бессрочного аннуитета с суммарной величиной денежных поступлений, равной 50 тыс. руб. ежегодно, если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 30% годовых, причем сложные проценты начисляются: а) ежеквартально; б) непрерывно.

3.2.7. Имеется переменный аннуитет постнумерандо (тыс. руб.): 14, 40, 25, 10. Рассчитайте: а) будущую стоимость аннуитета; б) приведенную стоимость аннуитета, если его период совпадает с базовым периодом начисления процентов по сложной процентной ставке 30% годовых, т.е. равен одному году. Как изменятся полученные оценки, если исходный поток представляет собой аннуитет пренумерандо?

3.2.8. Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 7 лет: а) в конце года; б) в начале года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 6 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,3 тыс. руб. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 22% годовых и сложные проценты начисляются один раз в конце года. Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,3 тыс. руб.?

3.2.9. За 10 лет необходимо накопить 50 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 400 руб. и процентная ставка равна 20% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года. Определите, на какую величину необходимо увеличивать каждый год денежное поступление, если первый вклад будет равен 1,5 тыс. руб.

3.2.10. Компания за предыдущий год выплатила 3,2 тыс. руб. на акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 200 руб. ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 15 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 25% годовых.

3.2.11. По условиям контракта на счет в банке поступают в течение 6 лет в конце года платежи. Первый платеж равен 5 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 12%. Оцените этот аннуитет, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты из расчета 20% годовых. Оцените аннуитет, если платежи поступают в начале года.

3.2.12. За 5 лет необходимо накопить 40 тыс. руб. Какой величины должен быть первый вклад, если предполагается каждый год увеличивать величину денежного поступления на 15% и процентная ставка равна 24% годовых? Денежные поступления и начисление сложных процентов осуществляются в конце года.

3.2.13. Компания за предыдущий год выплатила 1,5 тыс. руб. на акцию. Согласно прогнозам дивиденды по акциям этой компании будут расти на 6% ежегодно в течение неопределенно долгого времени. Сделайте вывод о целесообразности покупки акций компании по цене 14 тыс. руб., если можно поместить деньги на депозит под 18% годовых.

3.2.14. Сдан участок в аренду на 15 лет. Арендная плата будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые 10 лет – по 30 тыс. руб., в оставшиеся 5 лет – по 24 тыс. руб. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 20%. Приведите несколько вариантов решения.

3.2.15. Арендовано оборудование сроком на десять лет. Плата за эксплуатацию оборудования будет осуществляться ежегодно по схеме постнумерандо на следующих условиях: в первые 4 года – по 40 тыс. руб., в оставшиеся 6 лет – по 45 тыс. руб. Требуется оценить приведенную стоимость этого договора, если процентная ставка, используемая аналитиком, равна 23%. Приведите несколько вариантов решения.

3.3. Оценка аннуитета с периодом больше года

Основные положения

• На практике широко распространены аннуитеты, периоды которых не превосходят базовые периоды начисления процентов. В частности, если базовый период равен году, то период аннуитета не превышает одного года. Однако встречаются ситуации, связанные с аннуитетом, когда его период больше года.

• Формулы для оценки будущей и приведенной стоимости аннуитета, период которого больше базового периода начисления процентов, аналогичны формулам для оценки будущей и приведенной стоимости обычного аннуитета. Формулы для оценок аннуитета пренумерандо получаются из соответствующих формул для оценок аннуитета постнумерандо с использованием, как правило, того факта, что денежные поступления пренумерандо начинаются на период (аннуитета) раньше, чем постнумерандо.

Вопросы для обсуждения

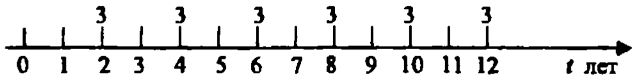
1. Приведите пример срочного аннуитета, период которого больше года, а начисление сложных процентов происходит раз в году.
2. Какой срочный аннуитет выгоднее: с платежами по 10 тыс. руб. каждые два года или по 5 тыс. руб. каждый год?
3. Каково соотношение между приведенными стоимостями аналогичного вида аннуитетов пренумерандо и постнумерандо, периоды которых больше базового периода начисления процентов?
4. Приведите формулу приведенной стоимости бессрочного аннуитета постнумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов.

Типовые примеры и методы их решения

Пример 3.3.1. Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 12 лет, согласно которому на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода будет поступать по 3 тыс. руб. Требуется определить наращенную сумму к концу действия контракта, если на поступающие суммы будут начисляться:

а) ежегодно сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 24%; б) ежеквартально сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 24%; в) непрерывные проценты с силой роста 24% за год.

Решение. Денежные поступления образуют постоянный аннуитет постнумерандо с $A = 3$ тыс. руб., сроком $n = 12$ лет и периодом $u = 2$ года. Следовательно, период аннуитета больше базового периода начисления процентов, равного году. Схематично это выглядит таким образом:



а) В этом случае $r = 24\%$, $m = 1$ и по формуле (146) получим:

$$FV^a_{pst} = 3 \cdot \frac{FM3(24\%,12)}{FM3(24\%,2)} = 3 \cdot \frac{50{,}8950}{2{,}24} = 68{,}163 \text{ тыс. руб.}$$

б) Поскольку в этом случае начисление процентов ежеквартальное, то $m = 4$ и по формуле (146) получим:

$$FV^a_{pst} = 3 \cdot \frac{FM3(6\%,48)}{FM3(6\%,8)} = 3 \cdot \frac{256{,}5645}{9{,}8975} = 77{,}766 \text{ тыс. руб.}$$

в) Полагая $\delta = 0{,}24$, по формуле (149) находим:

$$FV^a_{pst} = 3 \cdot \frac{e^{0{,}24 \cdot 12} - 1}{e^{0{,}24 \cdot 2} - 1} = 81{,}878 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.3.2. Определите сумму, которую необходимо поместить на счет в банке, чтобы в течение 15 лет в конце каждого трехлетнего периода иметь возможность снимать со счета 8 тыс. руб., причем к концу срока полностью выбрать все деньги со счета, если на находящиеся на счете денежные суммы будут начисляться: а) ежегодно сложные проценты по ставке 20%; б) каждые полгода сложные проценты по ставке 20%; в) непрерывные проценты с силой роста 20%.

Решение. Во всех случаях надо определить приведенную стоимость постоянного аннуитета с $A = 8$ тыс. руб., периодом $u = 3$ года и сроком $n = 15$ лет.

а) Так как $r = 20\%$, то, применяя формулу (147) при $m = 1$, получим:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot \frac{FM4(20\%,15)}{FM3(20\%,3)} = 8 \cdot \frac{4,6755}{3,64} = 10,276 \text{ тыс. руб.}$$

б) В этом случае $m = 2$, $r = 20\%$, и поэтому из формулы (147) следует, что:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot \frac{FM4(10\%,30)}{FM3(10\%,6)} = 8 \cdot \frac{9,4269}{7,7156} = 9,774 \text{ тыс. руб.}$$

в) Поскольку в этом случае начисляются непрерывные проценты с силой роста $\delta = 0,2$, то по формуле (150) получим:

$$PV_{pst}^{a} = 8 \cdot \frac{1 - e^{-0,2 \cdot 15}}{e^{0,2 \cdot 3} - 1} = 9,246 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.3.3. На счет в банке в начале каждого двухлетнего периода будет поступать по 8 тыс. руб. в течение 10 лет. Требуется определить: а) будущую стоимость аннуитета; б) приведенную стоимость аннуитета, если на поступающие суммы будут ежегодно начисляться декурсивные сложные проценты по ставке 22% годовых.

Решение. Согласно условию имеем аннуитет пренумерандо с членом $A = 14$ тыс. руб., периодом $u = 2$ года и сроком $n = 10$ лет. Сложная процентная ставка $r = 22\%$ годовых и число начислений процентов $m = 1$.

а) В соответствии с формулами (146) и (152) получим:

$$FV_{pre}^{a} = 14 \cdot \frac{FM3(22\%,10)}{FM3(22\%,2)} \cdot (1 + 0,22)^2 = 14 \cdot \frac{28,6574}{2,22} \cdot 1,22^2 =$$
$$= 268,987 \text{ тыс. руб.}$$

б) По формулам (147) и (153):

$$PV_{pre}^{a} = 14 \cdot \frac{FM4(22\%,10)}{FM3(22\%,2)} \cdot (1 + 0,22)^2 =$$
$$= 14 \cdot \frac{3,9232}{2,22} \cdot 1,22^2 = 36,824 \text{ тыс. руб.}$$

Пример 3.3.4. Предприниматель приобрел оборудование в кредит за 900 тыс. руб. под 25% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать долг нужно равными суммами в конце каждого второго года и выплатить весь долг за 10 лет. Требуется определить величину каждого платежа и составить план погашения долга.

Решение. Обозначим через A величину каждого искомого платежа. Поток этих платежей представляет собой аннуитет постнумерандо, для которого $PV_{pst}^{a} = 900000$ руб., $r = 25\%$, $n = 10$, $m = 1$, $u = 2$. Поэтому для нахождения величины A можно воспользоваться формулой (147), из которой следует:

$$A = \frac{PV_{pst}^{a} \cdot FM3(25\%,2)}{FM4(25\%,10)} = \frac{900000 \cdot 2{,}25}{3{,}5705} = 567147 \text{ руб.}$$

Теперь поясним составление плана погашения долга. Поскольку в течение первых двух лет предприниматель пользовался кредитом в размере 900000 руб., то платеж, который равен 567147 руб. и будет сделан в конце второго года, состоит из следующих двух частей: сложных процентов за два года в сумме 506250 руб. ($900000 \cdot [(1+0{,}25)^2 - 1]$ руб.) и погашаемой части долга в сумме 567147 – 506250 = 60897 руб. В следующем двухлетии расчет будет повторен при условии, что размер кредита, которым пользуется предприниматель, составит уже меньшую сумму по сравнению с первыми двумя годами, а именно: 900000 – 60897 = 839103 руб. Таким образом, сложные проценты за два года будут равны 471995 руб. ($839103 \cdot [(1+0{,}25)^2 - 1]$ руб.), а погашаемая часть долга будет равна $567147 - 471995 = 95152$ руб. и т.д. Ясно, что с течением времени сумма уплачиваемых процентов снижается, а доля платежа в счет погашения долга возрастает.

План погашения долга представим в виде таблицы.

(руб.)

Номер двухлетия	Остаток ссуды на начало двухлетия	Величина платежа	В том числе		Остаток ссуды на конец двухлетия
			проценты за два года	погашенная часть долга	
1	900000	567147	506250	60897	839103
2	839103	567147	471995	95152	743951
3	743951	567147	418472	148675	595276
4	595276	567147	334843	232304	362972
5	362972	567147	204175	362972	0

Поскольку данные в ходе вычислений округлялись, величина процентов в последней строке найдена балансовым методом, т.е. вначале записываем погашенную часть долга 362972 руб., а затем определяем величину процентов за два года: 567147 – – 362972 = 204175 руб. Если же непосредственно найти сложные проценты за два года от суммы в 362972 руб. исходя из процентной ставки 25%, то получим 204172 руб. Суммируя величины в пятом столбце, получим размер кредита: 900000 руб.

Задачи

3.3.1. Работник заключает с фирмой пенсионный контракт на 20 лет, согласно которому на счет работника в банке в конце каждого двухлетнего периода будет поступать по 1,5 тыс. руб. Требуется определить наращенную сумму к концу действия контракта, если на поступающие суммы будут ежегодно начисляться декурсивные сложные проценты по ставке 18% годовых.

3.3.2. Фирма решила образовать фонд для обеспечения будущих расходов. С этой целью в конце каждых трех лет фирма перечисляет в банк по 25 тыс. руб. Какая сумма будет на счете фирмы через 21 год, если на поступающие суммы будут начисляться: а) по полугодиям сложные проценты по номинальной годовой процентной ставке 20%; б) непрерывные проценты с силой роста 20% за год?

3.3.3. Определите сумму, которую необходимо поместить на счет в банке, чтобы в течение 16 лет в конце каждого двухлетнего периода иметь возможность снимать со счета 5 тыс. руб., причем к концу срока полностью выбрать все деньги со счета, если на находящиеся на счете денежные суммы будут начисляться: а) ежегодно сложные проценты по ставке 24%; б) каждый квартал сложные проценты по ставке 24%; в) непрерывные проценты с силой роста 24%.

3.3.4. На счет в банке в начале каждого трехлетнего периода будет поступать по 10 тыс. руб. Требуется определить наращенную сумму через 15 лет, если на поступающие суммы будут ежегодно начисляться декурсивные сложные проценты по ставке 23% годовых.

3.3.5. В течение 24 лет каждые четыре года в банк вносится по 40 тыс. руб. по схеме: а) постнумерандо; б) пренумерандо. Банк начисляет сложные проценты каждые полгода из расчета 16% годовых. Какая сумма будет на счете в конце срока?

3.3.6. Страховая компания, заключив на 8 лет договор с некоторой фирмой, получает от нее страховые взносы по 35 тыс. руб. в конце каждого двухлетнего периода. Эти взносы компания помещает в банк под годовую номинальную процентную ставку 20% годовых. Найдите приведенную стоимость суммы, которую получит страховая компания по данному контракту, если сложные проценты начисляются: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) непрерывно.

3.3.7. Предприятие в целях создания фонда хочет накопить на своем счете 300 тыс. руб., осуществляя в конце каждого третьего года равные вклады в банк под сложную процентную ставку 25% годовых. Какой величины должен быть каждый вклад, чтобы предприятие могло накопить требуемую сумму за: а) 9 лет; б) 18 лет?

3.3.8. Некоторая фирма хочет создать фонд в размере 350 тыс. руб. С этой целью в конце каждого двухлетнего периода фирма предполагает вносить по 20 тыс. руб. в банк под 28% годовых. Найдите срок, необходимый для создания фонда, если банк начисляет сложные проценты: а) ежегодно; б) ежеквартально; в) непрерывно.

3.3.9. Какую сумму необходимо поместить в банк под номинальную процентную ставку 30% годовых, чтобы в течение 20 лет иметь возможность в конце каждого двухлетнего периода снимать со счета по 10 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты: а) ежегодно; б) по полугодиям; в) непрерывно?

3.3.10. Имеется переменный аннуитет постнумерандо (тыс. руб.): 4, 2, 1, 8, 5. Рассчитайте: а) будущую стоимость аннуитета; б) приведенную стоимость аннуитета, если его период равен трем годам и начисление процентов осуществляется по сложной процентной ставке 25% годовых. Как изменятся полученные оценки, если исходный поток представляет собой аннуитет пренумерандо?

3.3.11. Получена ссуда на 15 лет в сумме 1 200 тыс. руб. под 20% годовых, начисляемых по схеме сложных процентов на непогашенный остаток. Возвращать нужно равными суммами в конце каждого трехлетнего периода. Требуется определить величину каждого платежа и составить план погашения долга.

3.3.12. Перед выходом на пенсию господин N хочет обеспечить себе дополнительно по прошествии каждых двух лет доход в сумме 8 тыс. руб. неограниченно долго. Какую сумму он должен поместить в банк, начисляющий сложные проценты по ставке 24% годовых?

3.3.13. Определите текущую (приведенную) стоимость бессрочного аннуитета постнумерандо с поступлением 4,2 тыс. руб. через каждые четыре года, если предлагаемый государственным банком процент по срочным вкладам равен 28% годовых, причем сложные проценты начисляются ежеквартально.

3.3.14. Кредитор заключил контракт, согласно которому должник обязуется выплатить 100 тыс. руб. за 8 лет равными суммами в конце каждого двухлетнего периода, причем на непогашенный остаток будут начисляться сложные проценты по процентной ставке 20% годовых. По какой цене кредитор может продать этот контракт банку, который на ссуженные деньги начисляет сложные проценты по процентной ставке 25% годовых?

РОЛЬ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ОБУЧЕНИИ БУХГАЛТЕРОВ И ФИНАНСИСТОВ

(вместо послесловия)

Управление бизнесом в рыночной экономике характеризуется многими особенностями; выделим некоторые из них. Во-первых, в общей совокупности ресурсов предприятия доминирующее значение приобретают финансовые ресурсы. Во-вторых, принятие управленческих решений финансового характера всегда осуществляется в условиях неопределенности. В-третьих, следствием реальной самостоятельности предприятий становится постоянная забота руководителей по поводу поиска источников финансирования и оптимизации инвестиционной политики. В-четвертых, устанавливая коммерческие отношения с каким-либо контрагентом, можно полагаться исключительно на собственную оценку его финансовой состоятельности.

В этих условиях обоснованность принимаемых управленческих решений, а многие из них, по сути, имеют финансовую природу, в значительной степени определяется качеством финансово-аналитических расчетов. О необходимости систематизации финансовых вычислений и повсеместном их внедрении через систему образования еще в дореволюционной России говорили многие теоретики бухгалтерского учета и финансов. Программа курса "Высшие финансовые вычисления", разработанная проф. Н.С. Лунским, очень высоко оценивалась современниками. Методики анализа баланса, предложенные А.П. Рудановским и Н.А. Блатовым, до настоящего времени не утратили своей актуальности.

По мере строительства планового социалистического хозяйства в СССР анализ баланса и финансовые вычисления сравнительно быстро были трансформированы в анализ хозяйственной деятельности – направление, "теоретически" обосновывавшее методики управления предприятием в условиях централизованного планирования; что касается блока финансовых дисциплин в целом, то его значимость была существенно принижена. Достаточно упомянуть о том, что курс финансовых вычислений был выхолощен и низведен с университетского уровня до уровня техникумов – вероятно считалось, что среднего специального образования достаточно для того, чтобы заниматься финансовыми операциями в СССР.

К сожалению, до сих пор еще встречаются рецидивы подобного подхода, проявляющиеся, прежде всего, в высказываниях либо некоторых "чистых" математиков, не нашедших своего места в собственной классической науке и пытающихся "прислониться" к прикладным экономическим разработкам путем бездумной их математизации, когда в угоду красоте математических выкладок выхолащивается экономическая природа изучаемого явления, либо отдельных специалистов, работающих в смежных с бухгалтерско-финансовым блоком дисциплинах (автоматизированные системы управления, математическое моделирование экономических процессов и т.п.). Выдвигаемый ими в качестве аргумента тезис как "заезженная пластинка" повторяет уже не раз слышанное: "в финансовых и коммерческих вычислениях пользуются простым инструментарием, доступным даже школьнику, а потому в университетах следует читать не финансовые вычисления, а финансовую математику".

Здесь возникают, по крайней мере, два вопроса: во-первых, об экономической обоснованности применения тех или иных математических методов и, во-вторых, о допустимой сложности математического аппарата.

Что касается первого вопроса, то в качестве примера, по крайней мере, не вполне оправданного применения математики в экономике можно привести известный в анализе хозяйственной деятельности интегральный метод факторного анализа. Его разработчики, безжалостно критикуя простой и наглядный метод цепных подстановок, говорят о том, что интегральный метод "обеспечивает более высокую точность". Не вдаваясь в комментарий относительно точности в рамках ретроспективного анализа, отмечу только, что обоснованность применения интегрального метода в экономике является исключительно условной, поскольку он требует непрерывности функции, описывающей факторную связь, и бесконечно малого изменения признаков, чего в экономических явлениях часто не может быть в принципе, поскольку многие показатели изменяются дискретно.

По второму вопросу хочется, прежде всего, напомнить, что любые самые сложные вычислительные операции сводятся к четырем элементарным арифметическим действиям. Кроме того, с позиции бухгалтеров и финансистов не абстрактная финансовая математика, а именно финансовые вычисления представляют практический интерес. Финансовые стохастические модели безусловно можно, а для некоторых узких специалистов и следует рассматривать в спецкурсах, что же касается базового математико-аналитического аппарата, к которому, с очевидностью, относятся методы, обсуждаемые в курсе финансовых вычислений, то им должен владеть любой экономист высшей квалификации.

Как мне представляется, научность и значимость любой университетской дисциплины в области прикладной экономики отнюдь не определяются одной лишь сложностью используемого в ней математического инструментария, а пробелы в базовом экономическом образовании, да и в математическом тоже, нигде не проявляются так явно, как в необоснованной математизации процесса принятия управленческого решения. Именно поэтому хочется подчеркнуть, что, обосновывая базовые методы финансовой аналитики, во главу угла нужно ставить экономическую, финансовую природу операции; что касается используемого математического аппарата, то он имеет лишь вспомогательное значение.

Несмотря на кажущуюся простоту расчетов методы финансовых вычислений исключительно важны именно в практической плоскости, и кроме того, они не приходят к специалисту автоматически вместе с дипломом о высшем или специальном образовании. Невозможно стать финансовым менеджером, лишь читая общетеоретические монографии, учебники и руководства, – нужна рутинная вычислительная практика, умение ориентироваться в методах, привлекаемых для получения ряда оценок, которые можно использовать как формализованное обоснование принимаемого решения в области кредитования и финансирования. Именно этому и посвящено данное пособие – решая задачи, можно, образно говоря, "набить руку" на исчислении подобных оценок.

Следует особо подчеркнуть, что изложение аналитического аппарата финансовых операций ни в коем случае нельзя отдавать на откуп "чистым" математикам. Сложность и обоснованность решений финансового характера определяются вовсе не сложностью привлекаемого аппарата; приоритет здесь имеет другое измерение – ответственность за возможные последствия. Так, непродуманно составленный договор о некоторой финансовой операции (ставка, частота и схема начисления, поправка на инфляцию и т.п.) может привести к существенным финансовым потерям независимо от того, какой сложности модель была использована, например, для прогнозирования денежного потока. Какими методами обосновано решение – это уже другой вопрос; ясно только одно: обоснование с помощью хитроумной математической модели далеко не всегда минимизирует негативные последствия. Предлагаемое пособие как раз и учит тому, как избежать подобных ошибок.

Повышение правовой, бухгалтерской и финансово-аналитической подготовки экономистов – одно из важнейших направлений совершенствования системы высшего экономического образования. Хочется надеяться, что со временем в нашей стране культура обоснования и оформления решений финансового характера повысится, а любой грамотный бизнесмен будет понимать, что, например в договоре, содержащем упоминание о процентных платежах, следует указывать не номинальную, а эффективную ставку. Печальный опыт российских финансовых пирамид, в частности, говорит и о том, что введение полноценного курса "Финансовые (и коммерческие) вычисления" в университетские программы в духе дореволюционной российской традиции представляется не только оправданным, но и жизненно необходимым.

В. Ковалев

Приложение 1

СВОДКА ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

Часто используемые в формулах обозначения: r (d) – годовая процентная (учетная) ставка (в десятичных дробях); $r^{(m)}$ ($d^{(m)}$) – номинальная годовая процентная (учетная) ставка (в десятичных дробях, индекс m указывает, сколько раз в течение года происходит наращение или дисконтирование); n, l – продолжительность финансовой операции в годах; t – продолжительность финансовой операции в днях; T – количество дней в году; P – первоначальный капитал; F – наращенный капитал; F_n – наращенный капитал за n лет.

• Процентная ставка: $r_t = \dfrac{FV - PV}{PV}$, (1)

где PV – предоставляемая в долг сумма,
FV – возвращаемая сумма.

• Учетная ставка: $d_t = \dfrac{FV - PV}{FV}$. (2)

• Соотношение между ставками: $r_t = \dfrac{d_t}{1 - d_t}$ или $d_t = \dfrac{r_t}{1 + r_t}$. (3)

• Дисконт-фактор: $v_t = \dfrac{PV}{FV}$. (4)

• Индекс роста капитала: $B_t = \dfrac{FV}{PV}$. (5)

• Формула вычисления процентов *"со 100"*: $Q' = Qr$. (6)

• Формула вычисления процентов *"на 100"*: $S' = \dfrac{Sr}{1 + r}$. (7)

• Формула вычисления процентов *"во 100"*: $K' = \dfrac{Kr}{1 - r}$. (8)

• Формула наращения простыми процентами: $F = P(1+nr)$. (9)

• Формула простых процентов в случае нецелого числа лет:

$$F = P(1+\frac{t}{T}r). \qquad (10)$$

Возможны три варианта начисления:

а) точный процент и точная продолжительность периода

(T = 365 или 366 дней, t – точное);

б) обыкновенный процент и точная продолжительность периода

(T = 360, t – точное);

в) обыкновенный процент и приблизительная продолжительность периода

(T = 360, t – приблизительное, когда считается, что в месяце 30 дней).

• Дивизор: $D' = \frac{T}{r}$. (11)

• Формулы для вычисления процентного платежа (при использовании простой ставки):

а) если известна величина капитала (P): $I = Ptr$; (12)

б) если известна величина капитала, увеличенного на процентный платеж ($P+I$):

$$I = \frac{(P+I)tr}{1+tr} \text{ или } I = \frac{(P+I)t}{D'+t}; \qquad (13)$$

в) если известна величина капитала, уменьшенного на процентный платеж ($P-I$):

$$I = \frac{(P-I)tr}{1-tr} \text{ или } I = \frac{(P-I)t}{D'-t}. \qquad (14)$$

• Формула наращения простыми процентами по переменной процентной ставке:

$$F = P(1+\sum_{k=1}^{m} n_k i_k), \qquad (15)$$

где на период n_k установлена процентная ставка i_k и таких периодов m.

• Формула определения простой процентной ставки, доставляющей при наращении такой же результат, как и несколько простых процентных ставок:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{m} n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} n_k}, \qquad (16)$$

где на период n_k установлена процентная ставка i_k и таких периодов m.

• Формула определения величины начисленных процентов за пользование кредитом с учетом уменьшения долга с течением времени:

$$I = Pr\frac{kn+1}{2k}, \qquad (17)$$

где k – число погасительных платежей в год, n – срок кредита.

• Формула приведенной стоимости (при использовании простой ставки): $P = \dfrac{F}{1+nr}$. (18)

• Формула дисконтирования по простой учетной ставке:

$$P = F(1-nd). \qquad (19)$$

• Формула наращения по простой учетной ставке: $F = \dfrac{P}{1-nd}$. (20)

• Формулы для определения срока ссуды (при использовании простой ставки):

$$n = \frac{F-P}{P \cdot r} \text{ или } t = \frac{F-P}{P \cdot r} \cdot T; \qquad (21)$$

$$n = \frac{F-P}{F \cdot d} \text{ или } t = \frac{F-P}{F \cdot d} \cdot T. \qquad (22)$$

• Формулы для определения простой ставки:

$$r = \frac{F-P}{P \cdot n} \text{ или } r = \frac{F-P}{P \cdot t} \cdot T \qquad (23)$$

$$d = \frac{F - P}{F \cdot n} \text{ или } d = \frac{F - P}{F \cdot t} \cdot T. \qquad (24)$$

• Эквивалентность простых ставок:

$$r = \frac{d}{1 - nd}; \qquad (25)$$

$$d = \frac{r}{1 + nr}. \qquad (26)$$

• Эквивалентность простых ставок при разных временны́х базах:

$$r = \frac{T_r d}{T_d - td}; \qquad (27)$$

$$d = \frac{T_d r}{T_r + tr}, \qquad (28)$$

где T_r, T_d – временны́е базы, равные количеству дней в году при использовании соответственно процентной и учетной ставок.

• Формулы для определения средних значений:

а) простой процентной ставки:

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{m} P_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k}, \qquad (29)$$

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{m} P_k n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k n_k}; \qquad (30)$$

б) срока:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^{m} P_k n_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k}, \tag{31}$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^{m} P_k n_k i_k}{\sum_{k=1}^{m} P_k i_k}, \tag{32}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_m$ – простые процентные ставки, под которые взяты соответственно суммы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ на сроки $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

• Формулы для определения средних значений:

а) простой учетной ставки:

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{m} F_k d_k}{\sum_{k=1}^{m} F_k}, \tag{33}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{k=1}^{m} F_k n_k d_k}{\sum_{k=1}^{m} F_k n_k}; \tag{34}$$

б) срока:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^{m} F_k n_k}{\sum_{k=1}^{m} F_k}, \tag{35}$$

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=1}^{m} F_k n_k d_k}{\sum_{k=1}^{m} F_k d_k}, \qquad (36)$$

где $d_1, d_2, ..., d_m$ – простые учетные ставки, по которым соответственно суммы $F_1, F_2, ..., F_m$ учитываются за сроки $n_1, n_2, ..., n_m$.

• Формула наращения простыми процентами с учетом уплаты налога:

$$F_q = P[1 + nr(1-q)], \qquad (37)$$

где q – ставка налога на проценты.

• Формула наращения по простой учетной ставке с учетом уплаты налога:

$$F_q = \frac{P}{1-nd}(1-ndq), \qquad (38)$$

где q – ставка налога на проценты.

• Индекс цен (индекс инфляции):

$$I_p^{(t)} = \frac{P_2}{P_1}, \qquad (39)$$

где P_1, P_2 – стоимости потребительской корзины в начале и в конце периода длительностью t.

• Темп инфляции:

$$h_t = \frac{P_2 - P_1}{P_1}, \qquad (40)$$

где P_1, P_2 – стоимости потребительской корзины в начале и в конце периода длительностью t.

• Соотношение между индексом инфляции и темпом инфляции:

$$I_p^{(t)} = 1 + h_t. \qquad (41)$$

• Формула определения индекса инфляции за период при известных индексах инфляции за составляющие его подпериоды:

$$I_p^{(t)} = \prod_{i=1}^{k} I_p^{(t_i)} = \prod_{i=1}^{k} (1 + h_{t_i}), \tag{42}$$

где $I_p^{(t_i)}$ (h_{t_i}) – индекс инфляции (темп инфляции) за подпериод t_i, подпериоды расположены последовательно друг за другом и $t = t_1 + t_2 + ... + t_k$.

• Формула наращения простыми процентами с учетом инфляции:

$$\overline{F} = \frac{P(1 + nr)}{I_p^{(n)}}, \tag{43}$$

где $I_p^{(n)}$ – индекс инфляции за период n.

• Формулы определения простой годовой процентной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной ставке r:

$$\overline{r} = r + r \cdot h_n + \frac{h_n}{n}, \tag{44}$$

$$\overline{r} = \frac{(1 + nr) \cdot I_p^{(n)} - 1}{n}, \tag{45}$$

где h_n – темп инфляции за период n,

$I_p^{(n)}$ – индекс инфляцин за период n.

• Формула определения реальной годовой процентной ставки при объявленной номинальной процентной ставке в условиях инфляции:

$$r_{real} = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + nr}{I_p^{(n)}} - 1\right). \tag{46}$$

• Формула определения простой годовой учетной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной ставке d:

$$\overline{d} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1 - nd}{I_p^{(n)}}\right). \tag{47}$$

• Формула определения реальной годовой учетной ставки при объявленной номинальной учетной ставке в условиях инфляции:

$$d_{real} = \frac{1-(1-nd)I_p^{(n)}}{n}. \tag{48}$$

• Формула для вычисления величины нового платежа при использовании простой процентной ставки:

$$P_0 = \begin{cases} P_1(1+(n_0-n_1)r), & \text{если } n_0 > n_1, \\ P_1, & \text{если } n_0 = n_1, \\ \dfrac{P_1}{1+(n_1-n_0)r}, & \text{если } n_0 < n_1, \end{cases} \tag{49}$$

где P_1 и n_1 – первоначальный платеж и срок его выплаты, n_0 – срок нового платежа.

• Формула для вычисления срока нового платежа при использовании простой процентной ставки:

$$n_0 = \begin{cases} n_1 + \dfrac{1}{r}(\dfrac{P_0}{P_1}-1), & \text{если } P_0 > P_1, \\ n_1, & \text{если } P_0 = P_1, \\ n_1 - \dfrac{1}{r}(\dfrac{P_1}{P_0}-1), & \text{если } \dfrac{P_1}{1+n_1 r} \le P_0 < P_1, \end{cases} \tag{50}$$

где P_1 и n_1 – первоначальный платеж и срок его выплаты;

P_0 – величина нового платежа.

• Формула определения срока консолидированного платежа при использовании простой процентной ставки:

$$n_0 = \frac{1}{r}\left(\frac{P_0}{\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k}{1+n_k r}}-1\right), \tag{51}$$

где платежи $P_1, P_2, \ldots, P_m$, уплачиваемые соответственно через время $n_1, n_2, \ldots, n_m$, заменяются одним платежом P_0.

• Формула для вычисления величины нового платежа при использовании простой учетной ставки:

$$P_0 = \begin{cases} \dfrac{P_1}{1-(n_0-n_1)d}, & \text{если } n_0 > n_1, \\ P_1, & \text{если } n_0 = n_1, \\ P_1(1-(n_1-n_0)d), & \text{если } n_0 < n_1, \end{cases} \tag{52}$$

где P_1 и n_1 – первоначальный платеж и срок его выплаты;

n_0 – срок нового платежа.

• Формула для вычисления срока нового платежа при использовании простой учетной ставки:

$$n_0 = \begin{cases} n_1 + \dfrac{1}{d}(1-\dfrac{P_1}{P_0}), & \text{если } P_0 > P_1, \\ n_1, & \text{если } P_0 = P_1, \\ n_1 - \dfrac{1}{d}(1-\dfrac{P_0}{P_1}), & \text{если } P_1(1-n_1 d) \le P_0 < P_1, \end{cases} \tag{53}$$

где P_1 и n_1 – первоначальный платеж и срок его выплаты;

P_0 – величина нового платежа.

• Формула определения срока консолидированного платежа при использовании простой учетной ставки:

$$n_0 = \frac{1}{d}\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} P_k(1-n_k d)}{P_0}\right), \tag{54}$$

где платежи $P_1, P_2, \dots, P_m$, уплачиваемые соответственно через время $n_1, n_2, \dots, n_m$, заменяются одним платежом P_0.

• Формула наращения сложными процентами:

$$F_n = P(1+r)^n = P \cdot FM1(r,n), \tag{55}$$

где n – число периодов начисления сложных процентов.

• Формула наращения сложными процентами по переменной процентной ставке:

$$F_n = P\prod_{k=1}^{m}(1+i_k)^{n_k}, \tag{56}$$

где n_k – количество периодов начисления сложных процентов по процентной ставке i_k,

n – общий срок наращения.

• Формула наращения по смешанной схеме:

$$F_n = P(1+r)^w(1+fr), \tag{57}$$

где w – целое число периодов начисления сложных процентов,

f – дробная часть периода, $n = w + f$.

• Формула наращения сложными процентами при начислении процентов несколько раз в год:

$$F_n = P\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \tag{58}$$

где n – число лет, m – количество начислений в год.

• Формула наращения по смешанной схеме при начислении процентов несколько раз в год:

$$F_n = P\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^{\bar{w}}\left(1+\bar{f}\frac{r^{(m)}}{m}\right), \tag{59}$$

где n – число лет,

$\bar{w}$ – целое число периодов начисления сложных процентов в n годах,

$\bar{f}$ – дробная часть периода, $n = \dfrac{\bar{w}+\bar{f}}{m}$.

• Формула для определения срока ссуды (при использовании сложной процентной ставки):

$$n = \frac{\ln\dfrac{F_n}{P}}{m\ln\left(1+\dfrac{r^{(m)}}{m}\right)}. \tag{60}$$

• Формулы для определения номинальной годовой процентной ставки:

$$r^{(m)} = m\left(\left(\frac{F_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right), \qquad (61)$$

$$r^{(m)} = m\left[(1 + r_{ef})^{\frac{1}{m}} - 1\right], \qquad (62)$$

где r_{ef} – эффективная годовая процентная ставка.

• Формулы определения эффективной годовой процентной ставки:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1, \qquad (63)$$

$$r_{ef} = \left(\frac{F_n}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (64)$$

• Формула приведенной стоимости (при использовании сложной ставки):

$$P = \frac{F_n}{(1+r)^n} = F_n \cdot FM2(r,n) \qquad (65)$$

• Формула приведенной стоимости (при m-кратном начислении процентов в год):

$$P = \frac{F_n}{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn}}. \qquad (66)$$

• Формула дисконтирования по сложной учетной ставке:

$$P = F_n(1-d)^n, \qquad (67)$$

где n - число периодов дисконтирования.

• Формула дисконтирования по смешанной схеме:

$$P = F_n(1-d)^w(1-fd), \qquad (68)$$

где w – целое число периодов дисконтирования по сложной учетной ставке,

f – дробная часть периода, $n = w + f$

• Формула дисконтирования по сложной учетной ставке, осуществляемого несколько раз в год:

$$P = F_n\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \tag{69}$$

где n – число лет,

m – количество осуществлений операции дисконтирования в год.

• Формула дисконтирования по смешанной схеме при дисконтировании несколько раз в год:

$$P = F_n\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{\bar{w}}\left(1-\bar{f}\frac{d^{(m)}}{m}\right), \tag{70}$$

где n – число лет,

$\bar{w}$ – целое число периодов дисконтирования в n годах,

$\bar{f}$ – дробная часть периода, $n = \dfrac{\bar{w}+\bar{f}}{m}$.

• Формула для определения срока ссуды (при использовании сложной учетной ставки):

$$n = \frac{\ln\dfrac{P}{F_n}}{m\ln\left(1-\dfrac{d^{(m)}}{m}\right)}. \tag{71}$$

• Формулы для определения номинальной годовой учетной ставки:

$$d^{(m)} = m(1-\left(\frac{P}{F_n}\right)^{\frac{1}{mn}}), \tag{72}$$

$$d^{(m)} = m[1-\left(1-d_{ef}\right)^{\frac{1}{m}}], \tag{73}$$

где d_{ef} – эффективная годовая учетная ставка.

• Формулы определеиия эффективной годовой учетной ставки:

$$d_{ef} = 1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}, \tag{74}$$

$$d_{ef} = 1 - \left(\frac{P}{F_n} \right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (75)$$

• Формула наращения сложными процентами по учетной ставке:

$$F_n = \frac{P}{(1-d)^n}, \qquad (76)$$

где n – число периодов начисления сложных процентов.

• Формула наращения сложными процентами по учетной ставке при начислении процентов несколько раз в год:

$$F_n = \frac{P}{\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}, \qquad (77)$$

где n – число лет,
m – количество начислений в год.

• Формула наращения непрерывными процентами:

$$F_n = P \cdot e^{\delta n}, \qquad (78)$$

где δ – сила роста.

• Формула для определения срока ссуды (при непрерывном начислении процентов):

$$n = \frac{\ln \frac{F_n}{P}}{\delta}. \qquad (79)$$

• Формула для определения силы роста:

$$\delta = \frac{\ln \frac{F_n}{P}}{n}. \qquad (80)$$

• Эквивалентность простых и сложных ставок:

$$r = \frac{\left(1 + \frac{r^{(m)}}{m}\right)^{mn} - 1}{n}, \qquad (81)$$

$$r^{(m)} = m(\sqrt[mn]{1+nr} - 1)\,, \qquad (82)$$

$$d = \frac{1 - \left(1 - \dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{n}\,, \qquad (83)$$

$$d^{(m)} = m(1 - \sqrt[mn]{1-nd})\,, \qquad (84)$$

$$r = \frac{\left(1 - \dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mn} - 1}{n}\,, \qquad (85)$$

$$d^{(m)} = m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[mn]{1+nr}}\right), \qquad (86)$$

$$d = \frac{1 - \left(1 + \dfrac{r^{(m)}}{m}\right)^{-mn}}{n}\,, \qquad (87)$$

$$r^{(m)} = m\left(\frac{1}{\sqrt[mn]{1-nd}} - 1\right), \qquad (88)$$

где r, d - простые ставки.

- Эквивалентность сложных ставок:

$$r^{(m)} = m\left[\left(1 + \frac{r^{(l)}}{l}\right)^{\frac{l}{m}} - 1\right], \qquad (89)$$

$$d^{(m)} = m\left[1 - \left(1 - \frac{d^{(l)}}{l}\right)^{\frac{l}{m}}\right], \qquad (90)$$

$$r^{(m)} = m\left[\left(1 - \frac{d^{(l)}}{l}\right)^{-\frac{l}{m}} - 1\right], \qquad (91)$$

$$d^{(m)} = m[1 - \left(1 + \frac{r^{(l)}}{l}\right)^{-\frac{l}{m}}]. \tag{92}$$

• Эквивалентность силы роста и простых ставок:

$$r = \frac{e^{\delta \cdot n} - 1}{n}, \tag{93}$$

$$\delta = \frac{\ln(1 + nr)}{n}, \tag{94}$$

$$d = \frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{n}, \tag{95}$$

$$\delta = -\frac{\ln(1 - nd)}{n}, \tag{96}$$

где r, d – простые ставки.

• Эквивалентность силы роста и сложных ставок:

$$\delta = m \ln(1 + \frac{r^{(m)}}{m}), \tag{97}$$

$$r^{(m)} = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1), \tag{98}$$

$$\delta = -m \ln(1 - \frac{d^{(m)}}{m}), \tag{99}$$

$$d^{(m)} = m(1 - e^{-\frac{\delta}{m}}). \tag{100}$$

• Формулы наращения сложными процентами с учетом уплаты налога:

а) если налог на все полученные проценты выплачивается один раз в конце срока:

$$\hat{F}_n = P[a^n(1 - q) + q]; \tag{101}$$

б) если налог на полученные проценты выплачивается каждый год:

$$\hat{F}_n = P[a-(a-1)q]^n, \tag{102}$$

где q – ставка налога на проценты, a – коэффициент наращения, равный

$$\text{либо } \left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^m, \text{ либо } \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}, \text{ либо } e^{\delta}.$$

• Формулы для вычисления величины налога за каждый год при наращении сложными процентами, если налог на полученные проценты выплачивается каждый год:

$$Q^{(k)} = P(a-1)[a-(a-1)q]^{k-1}q, \tag{103}$$

где k – номер года, за который взимается налог.

• Формула наращения сложными или непрерывными процентами с учетом инфляции:

$$\bar{F}_n = \frac{Pa^n}{I_p^{(n)}}, \tag{104}$$

где $I_p^{(n)}$ – индекс инфляции за период n, a равно

$$\text{либо } \left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^m, \text{ либо } \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}, \text{ либо } e^{\delta}.$$

• Формула определения номинальной годовой процентной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной номинальной годовой ставке $r^{(m)}$:

$$\tilde{r}^{(m)} = m\left[\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)\sqrt[mn]{I_p^{(n)}}-1\right]. \tag{105}$$

• Формула определения реальной номинальной годовой процентной ставки при объявленной исходной процентной ставке $r^{(m)}$ в условиях инфляции:

$$r_{real}^{(m)} = m\left[\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)\frac{1}{\sqrt[mn]{I_p^{(n)}}}-1\right]. \tag{106}$$

• Формула определения номинальной годовой учетной ставки, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной номинальной годовой ставке $d^{(m)}$:

$$\bar{d}^{(m)} = m[1-(1-\frac{d^{(m)}}{m})\frac{1}{\sqrt[mn]{I_p^{(n)}}}]. \qquad (107)$$

• Формула определения реальной номинальной годовой учетной ставки при объявленной исходной учетной ставке $d^{(m)}$ в условиях инфляции:

$$d_{real}^{(m)} = m[1-(1-\frac{d^{(m)}}{m})\sqrt[mn]{I_p^{(n)}}]. \qquad (108)$$

• Формула определения силы роста, обеспечивающей в условиях инфляции реальную доходность согласно первоначальной силе роста δ:

$$\bar{\delta} = \delta + \frac{1}{n}\ln I_p^{(n)}. \qquad (109)$$

• Формула определения реальной силы роста при объявленной исходной силе роста δ в условиях инфляции:

$$\delta_{real} = \delta - \frac{1}{n}\ln I_p^{(n)}. \qquad (110)$$

• Формула Фишера:

$$\bar{r} = r + h + rh, \qquad (111)$$

где h – годовой темп инфляции.

• Формула для вычисления величины нового платежа при использовании сложных ставок:

$$P_0 = P_1 a^{n_0 - n_1}, \qquad (112)$$

где P_1 и n_1 – первоначальный платеж и срок его выплаты,

n_0 – срок нового платежа, a равно либо $\left(1+\frac{r^{(m)}}{m}\right)^m$,

либо $\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}$, либо e^{δ}.

• Формула для вычисления срока нового платежа при использовании сложных ставок:

$$n_0 = n_1 + \frac{\ln P_0 - \ln P_1}{\ln a}, \qquad (113)$$

где P_1 и n_1 – первоначальный платеж и срок его выплаты;

P_0 – величина нового платежа.

• Формула для определения величины консолидированного платежа при использовании сложных ставок:

$$P_0 = \sum_{k=1}^{l} P_k a^{n_0 - n_k}, \qquad (114)$$

где $P_1, P_2, ..., P_l$ – платежи, выплачиваемые соответственно через время $n_1, n_2, ..., n_l$;

n_0 – срок консолидированного платежа.

• Формула для определения срока консолидированного платежа при использовании сложных ставок:

$$n_0 = \frac{\ln P_0 - \ln \sum_{k=1}^{l} P_k a^{-n_k}}{\ln a}, \qquad (115)$$

где $P_1, P_2, ..., P_l$ – платежи, выплачиваемые соответственно через время $n_1, n_2, ..., n_l$;

P_0 – величина консолидированного платежа.

• Будущая стоимость переменного аннуитета постнумерандо:

$$FV^a_{pst} = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+r)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot FM1(r, n-k). \qquad (116)$$

• Приведенная стоимость переменного аннуитета постнумерандо:

$$PV^a_{pst} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot FM2(r,k). \qquad (117)$$

• Будущая стоимость переменного аннуитета пренумерандо:

$$FV_{pre}^{a} = \sum_{k=1}^{n} C_k (1+r)^{n-k+1} = FV_{pst}^{a}(1+r). \qquad (118)$$

• Приведенная стоимость переменного аннуитета пренумерандо:

$$PV_{pre}^{a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^{k-1}} = PV_{pst}^{a}(1+r). \qquad (119)$$

• Будущая стоимость постоянного срочного аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst}^{a} = A \cdot \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{n-k} = A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = A \cdot FM3(r,n). \qquad (120)$$

• Приведенная стоимость постоянного срочного аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst}^{a} = A \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^k} = A \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = A \cdot FM4(r,n). \qquad (121)$$

• Оценка постоянного p-срочного аннуитета постнумерандо:

а) будущая стоимость аннуитета: $FV_{pst}^{a} = A \dfrac{FM3(\frac{r}{m}, mn)}{FM3(\frac{r}{m}, \frac{m}{p})}$; (122)

б) приведенная стоимость аннуитета: $PV_{pst}^{a} = A \dfrac{FM4(\frac{r}{m}, mn)}{FM3(\frac{r}{m}, \frac{m}{p})}$; (123)

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{A}{(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} - 1}, \qquad (124)$$

где A – величина каждого денежного поступления;
r – ставка за базовый период начисления процентов;
m – количество начислений сложных процентов в периоде;
p – количество денежных поступлений в периоде;
n – количество периодов.

• Приведенная стоимость постоянного отсроченного аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst}^{a} = A \cdot v^{h} FM4(r,n) = A \cdot FM2(r,h) \cdot FM4(r,n)\,, \qquad (125)$$

где $v = \dfrac{1}{1+r}$;

h – число периодов, через которое начинает поступать первый из потока платежей.

• Оценка постоянного p-срочного аннуитета пренумерандо:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a} \cdot (1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} = FV_{pst}^{a} \cdot FM1(\frac{r}{m},\frac{m}{p})\,; \qquad (126)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} \cdot (1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{p}} = PV_{pst}^{a} \cdot FM1(\frac{r}{m},\frac{m}{p})\,; \qquad (127)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a} + A\,; \qquad (128)$$

где FV_{pst}^{a}, PV_{pst}^{a} – будущая и приведенная стоимости соответствующих аннуитетов постнумерандо.

• Будущая стоимость постоянного p-срочного аннуитета постнумерандо с начислением простых процентов в течение периода:

$$FV_{pst}^{a} = A(p + \frac{(p-1)r}{2}) \cdot FM3(r,n)\,. \qquad (129)$$

• Будущая стоимость постоянного p-срочного аннуитета пренумерандо с начислением простых процентов в течение периода:

$$FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a} + Ar \cdot FM3(r,n)\,. \qquad (130)$$

• Оценка постоянного аннуитета постнумерандо в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета: $$FV_{pst}^{a(\delta)} = A\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}\,; \qquad (131)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}; \tag{132}$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A\frac{1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}, \tag{133}$$

где A – величина каждого денежного поступления;

δ – сила роста за базовый период начисления процентов;

p – количество денежных поступлений в периоде;

n – количество периодов.

• Оценка непрерывного аннуитета:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV^{a} = \frac{\overline{A}\,r}{m^{2}\ln(1+\frac{r}{m})}FM3(\frac{r}{m},mn); \tag{134}$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV^{a} = \frac{\overline{A}\,r}{m^{2}\ln(1+\frac{r}{m})}FM4(\frac{r}{m},mn); \tag{135}$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV^{a} = \frac{\overline{A}}{m\ln(1+\frac{r}{m})}, \tag{136}$$

где $\overline{A}$ – суммарная величина денежных поступлений за базовый период начисления процентов.

• Оценка непрерывного аннуитета в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV^{a(\delta)} = \overline{A}\frac{e^{\delta\cdot n}-1}{\delta}; \tag{137}$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV^{a(\delta)} = \overline{A}\frac{1 - e^{-\delta \cdot n}}{\delta}; \tag{138}$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV^{a(\delta)} = \frac{\overline{A}}{\delta}, \tag{139}$$

где $\overline{A}$ – суммарная величина денежных поступлений за базовый период начисления процентов;

δ – сила роста за базовый период начисления процентов.

• Оценка переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют арифметическую прогрессию:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV^{a}_{pst} = (A + \frac{z}{r}) \cdot FM3(r,n) - \frac{zn}{r}; \tag{140}$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV^{a}_{pst} = (A + \frac{z}{r}) \cdot FM4(r,n) - \frac{zn}{r(1+r)^{n}}; \tag{141}$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV^{a}_{pst} = (A + \frac{z}{r}) \cdot \frac{1}{r} \quad (z \geq 0), \tag{142}$$

где A – первый член прогрессии;

z – разность прогрессии.

• Оценка переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV^{a}_{pst} = A\frac{q^{n} - (1+r)^{n}}{q - (1+r)}; \tag{143}$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV^{a}_{pst} = \frac{A}{(1+r)^{n}} \frac{q^{n} - (1+r)^{n}}{q - (1+r)}; \tag{144}$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{A}{(1+r)-q} \; (1+r>q), \tag{145}$$

где A – первый член прогрессии;

q – знаменатель прогрессии.

• Оценка постоянного аннуитета постнумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^{a} = A\frac{FM3(\frac{r}{m},mn)}{FM3(\frac{r}{m},mu)}; \tag{146}$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^{a} = A\frac{FM4(\frac{r}{m},mn)}{FM3(\frac{r}{m},mu)}; \tag{147}$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a} = \frac{A}{(1+\frac{r}{m})^{mu}-1}, \tag{148}$$

где A – величина каждого денежного поступления;

r – ставка за базовый период начисления процентов;

m – количество начислений сложных процентов в периоде;

u – количество периодов, через которое осуществляются денежные поступления;

n – количество периодов.

• Оценка постоянного аннуитета постнумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов, в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pst}^{a(\delta)} = A\frac{e^{\delta n}-1}{e^{\delta u}-1}; \tag{149}$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A\frac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta u}-1}; \qquad (150)$$

в) приведенная стоимость бессрочного аннуитета:

$$PV_{pst}^{a(\delta)} = A\frac{1}{e^{\delta u}-1}, \qquad (151)$$

где A – величина каждого денежного поступления;
δ – сила роста за базовый период начисления процентов;
u – количество периодов, через которое осуществляются денежные поступления;
n – количество периодов.

• Оценка постоянного аннуитета пренумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a}\cdot(1+\frac{r}{m})^{mu} = FV_{pst}^{a}\cdot FM1(\frac{r}{m},mu); \qquad (152)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a}\cdot(1+\frac{r}{m})^{mu} = PV_{pst}^{a}\cdot FM1(\frac{r}{m},mu). \qquad (153)$$

• Оценка постоянного аннуитета пренумерандо, период которого больше базового периода начисления процентов, в случае начисления непрерывных процентов:

а) будущая стоимость аннуитета:

$$FV_{pre}^{a} = FV_{pst}^{a}\cdot e^{\delta\cdot u}; \qquad (154)$$

б) приведенная стоимость аннуитета:

$$PV_{pre}^{a} = PV_{pst}^{a}\cdot e^{\delta\cdot u}. \qquad (155)$$

Таблица 1

ПОРЯДКОВЫЕ НОМЕРА ДНЕЙ В ОБЫЧНОМ ГОДУ

День месяца	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365

ПОРЯДКОВЫЕ НОМЕРА ДНЕЙ В ВИСОКОСНОМ ГОДУ

День месяца	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

Таблица 1

МНОЖИТЕЛЬ НАРАЩЕНИЯ $FM1(r,n) = (1+r)^n$

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1.0100	1.0200	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900
2	1.0201	1.0404	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881
3	1.0303	1.0612	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910	1.2250	1.2597	1.2950
4	1.0406	1.0824	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625	1.3108	1.3605	1.4116
5	1.0510	1.1041	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382	1.4026	1.4693	1.5386
6	1.0615	1.1262	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185	1.5007	1.5869	1.6771
7	1.0721	1.1487	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036	1.6058	1.7138	1.8280
8	1.0829	1.1717	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182	1.8509	1.9926
9	1.0937	1.1951	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895	1.8385	1.9990	2.1719
10	1.1046	1.2190	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908	1.9672	2.1589	2.3674
11	1.1157	1.2434	1.3842	1.5395	1.7103	1.8983	2.1049	2.3316	2.5804
12	1.1268	1.2682	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122	2.2522	2.5182	2.8127
13	1.1381	1.2936	1.4685	1.6651	1.8856	2.1329	2.4098	2.7196	3.0658
14	1.1495	1.3195	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609	2.5785	2.9372	3.3417
15	1.1610	1.3459	1.5580	1.8009	2.0789	2.3966	2.7590	3.1722	3.6425
16	1.1726	1.3728	1.6047	1.8730	2.1829	2.5404	2.9522	3.4259	3.9703
17	1.1843	1.4002	1.6528	1.9479	2.2920	2.6928	3.1588	3.7000	4.3276
18	1.1961	1.4282	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543	3.3799	3.9960	4.7171
19	1.2081	1.4568	1.7535	2.1068	2.5270	3.0256	3.6165	4.3157	5.1417
20	1.2202	1.4859	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071	3.8697	4.6610	5.6044
21	1.2324	1.5157	1.8603	2.2788	2.7860	3.3996	4.1406	5.0338	6.1088
22	1.2447	1.5460	1.9161	2.3699	2.9253	3.6035	4.4304	5.4365	6.6586
23	1.2572	1.5769	1.9736	2.4647	3.0715	3.8197	4.7405	5.8715	7.2579

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
24	1.2697	1.6084	2.0328	2.5633	3.2251	4.0489	5.0724	6.3412	7.9111
25	1.2824	1.6406	2.0938	2.6658	3.3864	4.2919	5.4274	6.8485	8.6231
26	1.2953	1.6734	2.1566	2.7725	3.5557	4.5494	5.8074	7.3964	9.3992
27	1.3082	1.7069	2.2213	2.8834	3.7335	4.8223	6.2139	7.9881	10.2451
28	1.3213	1.7410	2.2879	2.9987	3.9201	5.1117	6.6488	8.6271	11.1671
29	1.3345	1.7758	2.3566	3.1187	4.1161	5.4184	7.1143	9.3173	12.1722
30	1.3478	1.8114	2.4273	3.2434	4.3219	5.7435	7.6123	10.0627	13.2677
31	1.3613	1.8476	2.5001	3.3731	4.5380	6.0881	8.1451	10.8677	14.4618
32	1.3749	1.8845	2.5751	3.5081	4.7649	6.4534	8.7153	11.7371	15.7633
33	1.3887	1.9222	2.6523	3.6484	5.0032	6.8406	9.3253	12.6760	17.1820
34	1.4026	1.9607	2.7319	3.7943	5.2533	7.2510	9.9781	13.6901	18.7284
35	1.4166	1.9999	2.8139	3.9461	5.5160	7.6861	10.6766	14.7853	20.4140
36	1.4308	2.0399	2.8983	4.1039	5.7918	8.1473	11.4239	15.9682	22.2512
37	1.4451	2.0807	2.9852	4.2681	6.0814	8.6361	12.2236	17.2456	24.2538
38	1.4595	2.1223	3.0748	4.4388	6.3855	9.1543	13.0793	18.6253	26.4367
39	1.4741	2.1647	3.1670	4.6164	6.7048	9.7035	13.9948	20.1153	28.8160
40	1.4889	2.2080	3.2620	4.8010	7.0400	10.2857	14.9745	21.7245	31.4094
41	1.5038	2.2522	3.3599	4.9931	7.3920	10.9029	16.0227	23.4625	34.2363
42	1.5188	2.2972	3.4607	5.1928	7.7616	11.5570	17.1443	25.3395	37.3175
43	1.5340	2.3432	3.5645	5.4005	8.1497	12.2505	18.3444	27.3666	40.6761
44	1.5493	2.3901	3.6715	5.6165	8.5572	12.9855	19.6285	29.5560	44.3370
45	1.5648	2.4379	3.7816	5.8412	8.9850	13.7646	21.0025	31.9204	48.3273
46	1.5805	2.4866	3.8950	6.0748	9.4343	14.5905	22.4726	34.4741	52.6767
47	1.5963	2.5363	4.0119	6.3178	9.9060	15.4659	24.0457	37.2320	57.4176
48	1.6122	2.5871	4.1323	6.5705	10.4013	16.3939	25.7289	40.2106	62.5852
49	1.6283	2.6388	4.2562	6.8333	10.9213	17.3775	27.5299	43.4274	68.2179
50	1.6446	2.6916	4.3839	7.1067	11.4674	18.4202	29.4570	46.9016	74.3575

МНОЖИТЕЛЬ НАРАЩЕНИЯ $FM1(r,n) = (1 + r)^n$

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
1	1.1000	1.1100	1.1200	1.1300	1.1400	1.1500	1.1600
2	1.2100	1.2321	1.2544	1.2769	1.2996	1.3225	1.3456
3	1.3310	1.3676	1.4049	1.4429	1.4815	1.5209	1.5609
4	1.4641	1.5181	1.5735	1.6305	1.6890	1.7490	1.8106
5	1.6105	1.6851	1.7623	1.8424	1.9254	2.0114	2.1003
6	1.7716	1.8704	1.9738	2.0820	2.1950	2.3131	2.4364
7	1.9487	2.0762	2.2107	2.3526	2.5023	2.6600	2.8262
8	2.1436	2.3045	2.4760	2.6584	2.8526	3.0590	3.2784
9	2.3579	2.5580	2.7731	3.0040	3.2519	3.5179	3.8030
10	2.5937	2.8394	3.1058	3.3946	3.7072	4.0456	4.4114
11	2.8531	3.1518	3.4785	3.8359	4.2262	4.6524	5.1173
12	3.1384	3.4985	3.8960	4.3345	4.8179	5.3503	5.9360
13	3.4523	3.8833	4.3635	4.8980	5.4924	6.1528	6.8858
14	3.7975	4.3104	4.8871	5.5348	6.2613	7.0757	7.9875
15	4.1772	4.7846	5.4736	6.2543	7.1379	8.1371	9.2655
16	4.5950	5.3109	6.1304	7.0673	8.1372	9.3576	10.7480
17	5.0545	5.8951	6.8660	7.9861	9.2765	10.7613	12.4677
18	5.5599	6.5436	7.6900	9.0243	10.5752	12.3755	14.4625
19	6.1159	7.2633	8.6128	10.1974	12.0557	14.2318	16.7765
20	6.7275	8.0623	9.6463	11.5231	13.7435	16.3665	19.4608
21	7.4002	8.9492	10.8038	13.0211	15.6676	18.8215	22.5745
22	8.1403	9.9336	12.1003	14.7138	17.8610	21.6447	26.1864
23	8.9543	11.0263	13.5523	16.6266	20.3616	24.8915	30.3762

Продолжение

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
24	9.8497	12.2392	15.1786	18.7881	23.2122	28.6252	35.2364
25	10.8347	13.5855	17.0001	21.2305	26.4619	32.9190	40.8742
26	11.9182	15.0799	19.0401	23.9905	30.1666	37.8568	47.4141
27	13.1100	16.7386	21.3249	27.1093	34.3899	43.5353	55.0004
28	14.4210	18.5799	23.8839	30.6335	39.2045	50.0656	63.8004
29	15.8631	20.6237	26.7499	34.6158	44.6931	57.5755	74.0085
30	17.4494	22.8923	29.9599	39.1159	50.9502	66.2118	85.8499
31	19.1943	25.4104	33.5551	44.2010	58.0832	76.1435	99.5859
32	21.1138	28.2056	37.5817	49.9471	66.2148	87.5651	115.5196
33	23.2252	31.3082	42.0915	56.4402	75.4849	100.6998	134.0027
34	25.5477	34.7521	47.1425	63.7774	86.0528	115.8048	155.4432
35	28.1024	38.5749	52.7996	72.0685	98.1002	133.1755	180.3141
36	30.9127	42.8181	59.1356	81.4374	111.8342	153.1519	209.1643
37	34.0039	47.5281	66.2318	92.0243	127.4910	176.1246	242.6306
38	37.4043	52.7562	74.1797	103.9874	145.3397	202.5433	281.4515
39	41.1448	58.5593	83.0812	117.5058	165.6873	232.9248	326.4838
40	45.2593	65.0009	93.0510	132.7816	188.8835	267.8635	378.7212
41	49.7852	72.1510	104.2171	150.0432	215.3272	308.0431	439.3165
42	54.7637	80.0876	116.7231	169.5488	245.4730	354.2495	509.6072
43	60.2401	88.8972	130.7299	191.5901	279.8392	407.3870	591.1443
44	66.2641	98.6759	146.4175	216.4968	319.0167	468.4950	685.7274
45	72.8905	109.5302	163.9876	244.6414	363.6791	538.7693	795.4438
46	80.1795	121.5786	183.6661	276.4448	414.5941	619.5847	922.7148
47	88.1975	134.9522	205.7061	312.3826	472.6373	712.5224	1070.3492
48	97.0172	149.7970	230.3908	352.9923	538.8065	819.4007	1241.6051
49	106.7190	166.2746	258.0377	398.8813	614.2395	942.3108	1440.2619
50	117.3909	184.5648	289.0022	450.7359	700.2330	1083.6574	1670.7038

МНОЖИТЕЛЬ НАРАЩЕНИЯ $FM1(r,n) = (1+r)^n$

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
1	1.1700	1.1800	1.1900	1.2000	1.2100	1.2200
2	1.3689	1.3924	1.4161	1.4400	1.4641	1.4884
3	1.6016	1.6430	1.6852	1.7280	1.7716	1.8158
4	1.8739	1.9388	2.0053	2.0736	2.1436	2.2153
5	2.1924	2.2878	2.3864	2.4883	2.5937	2.7027
6	2.5652	2.6996	2.8398	2.9860	3.1384	3.2973
7	3.0012	3.1855	3.3793	3.5832	3.7975	4.0227
8	3.5115	3:7589	4.0214	4.2998	4.5950	4.9077
9	4.1084	4.4355	4.7854	5.1598	5.5599	5.9874
10	4.8068	5.2338	5.6947	6.1917	6.7275	7.3046
11	5.6240	6.1759	6.7767	7.4301	8.1403	8.9117
12	6.5801	7.2876	8.0642	8.9161	9.8497	10.8722
13	7.6987	8.5994	9.5964	10.6993	11.9182	13.2641
14	9.0075	10.1472	11.4198	12.8392	14.4210	16.1822
15	10.5387	11.9737	13.5895	15.4070	17.4494	19.7423
16	12.3303	14.1290	16.1715	18.4884	21.1138	24.0856
17	14.4265	16.6722	19.2441	22.1861	25.5477	29.3844
18	16.8790	19.6733	22.9005	26.6233	30.9127	35.8490
19	19.7484	23.2144	27.2516	31.9480	37.4043	43.7358
20	23.1056	27.3930	32.4294	38.3376	45.2593	53.3576
21	27.0336	32.3238	38.5910	46.0051	54.7637	65.0963
22	31.6293	38.1421	45.9233	55.2061	66.2641	79.4175
23	37.0062	45.0076	54.6487	66.2474	80.1795	96.8894

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
24	43.2973	53.1090	65.0320	79.4968	97.0172	118.2050
25	50.6578	62.6686	77.3881	95.3962	117.3909	144.2101
26	59.2697	73.9490	92.0918	114.4755	142.0429	175.9364
27	69.3455	87.2598	109.5893	137.3706	171.8719	214.6424
28	81.1342	102.9666	130.4112	164.8447	207.9651	261.8637
29	94.9271	121.5005	155.1893	197.8136	251.6377	319.4737
30	111.0647	143.3706	184.6753	237.3763	304.4816	389.7579
31	129.9456	169.1774	219.7636	284.8516	368.4228	475.5046
32	152.0364	199.6293	261.5187	341.8219	445.7916	580.1156
33	177.8826	235.5625	311.2073	410.1863	539.4078	707.7411
34	208.1226	277.9638	370.3366	492.2235	652.6834	863.4441
35	243.5035	327.9973	440.7006	590.6682	789.7470	1053.4018
36	284.8991	387.0368	524.4337	708.8019	955.5938	1285.1502
37	333.3319	456.7034	624.0761	850.5623	1156.2685	1567.8833
38	389.9983	538.9100	742.6506	1020.6747	1399.0849	1912.8176
39	456.2980	635.9139	883.7542	1224.8096	1692.8927	2333.6375
40	533.8687	750.3783	1051.6675	1469.7716	2048.4002	2847.0378
41	624.6264	885.4464	1251.4843	1763.7259	2478.5643	3473.3861
42	730.8129	1044.8268	1489.2664	2116.4711	2999.0628	4237.5310
43	855.0511	1232.8956	1772.2270	2539.7653	3628.8659	5169.7878
44	1000.4098	1454.8168	2108.9501	3047.7183	4390.9278	6307.1411
45	1170.4794	1716.6839	2509.6506	3657.2620	5313.0226	7694.7122
46	1369.4609	2025.6870	2986.4842	4388.7144	6428.7574	9387.5489
47	1602.2693	2390.3106	3553.9162	5266.4573	7778.7964	11452.8096
48	1874.6550	2820.5665	4229.1603	6319.7487	9412.3437	13972.4277
49	2193.3464	3328.2685	5032.7008	7583.6985	11388.9358	17046.3618
50	2566.2153	3927.3569	5988.9139	9100.4382	13780.6123	20796.5615

МНОЖИТЕЛЬ НАРАЩЕНИЯ $FM1(r,n) = (1+r)^n$

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
1	1.2300	1.2400	1.2500	1.3000	1.4000
2	1.5129	1.5376	1.5625	1.6900	1.9600
3	1.8609	1.9066	1.9531	2.1970	2.7440
4	2.2889	2.3642	2.4414	2.8561	3.8416
5	2.8153	2.9316	3.0518	3.7129	5.3782
6	3.4628	3.6352	3.8147	4.8268	7.5295
7	4.2593	4.5077	4.7684	6.2749	10.5414
8	5.2389	5.5895	5.9605	8.1573	14.7579
9	6.4439	6.9310	7.4506	10.6045	20.6610
10	7.9259	8.5944	9.3132	13.7858	28.9255
11	9.7489	10.6571	11.6415	17.9216	40.4957
12	11.9912	13.2148	14.5519	23.2981	56.6939
13	14.7491	16.3863	18.1899	30.2875	79.3715
14	18.1414	20.3191	22.7374	39.3738	111.1201
15	22.3140	25.1956	28.4217	51.1859	155.5681
16	27.4462	31.2426	35.5271	66.5417	217.7953
17	33.7588	38.7408	44.4089	86.5042	304.9135
18	41.5233	48.0386	55.5112	112.4554	426.8789
19	51.0737	59.5679	69.3889	146.1920	597.6304
20	62.8206	73.8641	86.7362	190.0496	836.6826
21	77.2694	91.5915	108.4202	247.0645	1171.3556
22	95.0413	113.5735	135.5253	321.1839	1639.8978
23	116.9008	140.8312	169.4066	417.5391	2295.8569

Продолжение

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
24	143.7880	174.6306	211.7582	542.8008	3214.1997
25	176.8593	216.5420	264.6978	705.6410	4499.8796
26	217.5369	268.5121	330.8722	917.3333	6299.8314
27	267.5704	332.9550	413.5903	1192.5333	8819.7640
28	329.1115	412.8642	516.9879	1550.2933	12347.6696
29	404.8072	511.9516	646.2349	2015.3813	17286.7374
30	497.9129	634.8199	807.7936	2619.9956	24201.4324
31	612.4328	787.1767	1009.7420	3405.9943	33882.0053
32	753.2924	976.0991	1262.1774	4427.7926	47434.8074
33	926.5496	1210.3629	1577.7218	5756.1304	66408.7304
34	1139.6560	1500.8500	1972.1523	7482.9696	92972.2225
35	1401.7769	1861.0540	2465.1903	9727.8604	130161.1116
36	1724.1856	2307.7070	3081.4879	12646.2186	182225.5562
37	2120.7483	2861.5567	3851.8599	16440.0841	255115.7786
38	2608.5204	3548.3303	4814.8249	21372.1094	357162.0901
39	3208.4801	4399.9295	6018.5311	27783.7422	500026.9261
40	3946.4305	5455.9126	7523.1638	36118.8648	700037.6966
41	4854.1095	6765.3317	9403.9548	46954.5243	980052.7752
42	5970.5547	8389.0113	11754.9435	61040.8815	1372073.8853
43	7343.7823	10402.3740	14693.6794	79353.1460	1920903.4394
44	9032.8522	12898.9437	18367.0992	103159.0898	2689264.8152
45	11110.4082	15994.6902	22958.8740	134106.8167	3764970.7413
46	13665.8021	19833.4158	28698.5925	174338.8617	5270959.0378
47	16808.9365	24593.4356	35873.2407	226640.5203	7379342.6529
48	20674.9919	30495.8602	44841.5509	294632.6763	10331079.7140
49	25430.2401	37814.8666	56051.9386	383022.4792	14463511.6000
50	31279.1953	46890.4346	70064.9232	497929.2230	20248916.2390

Таблица 2

МНОЖИТЕЛЬ ДИСКОНТИРОВАНИЯ $FM2(r,n) = (1+r)^{-n}$

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8417
3	0.9706	0.9423	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7722
4	0.9610	0.9238	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.7084
5	0.9515	0.9057	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6499
6	0.9420	0.8880	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5963
7	0.9327	0.8706	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5470
8	0.9235	0.8535	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.5019
9	0.9143	0.8368	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4604
10	0.9053	0.8203	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.4224
11	0.8963	0.8043	0.7224	0.6496	0.5847	0.5268	0.4751	0.4289	0.3875
12	0.8874	0.7885	0.7014	0.6246	0.5568	0.4970	0.4440	0.3971	0.3555
13	0.8787	0.7730	0.6810	0.6006	0.5303	0.4688	0.4150	0.3677	0.3262
14	0.8700	0.7579	0.6611	0.5775	0.5051	0.4423	0.3878	0.3405	0.2992
15	0.8613	0.7430	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624	0.3152	0.2745
16	0.8528	0.7284	0.6232	0.5339	0.4581	0.3936	0.3387	0.2919	0.2519
17	0.8444	0.7142	0.6050	0.5134	0.4363	0.3714	0.3166	0.2703	0.2311
18	0.8360	0.7002	0.5874	0.4936	0.4155	0.3503	0.2959	0.2502	0.2120
19	0.8277	0.6864	0.5703	0.4746	0.3957	0.3305	0.2765	0.2317	0.1945
20	0.8195	0.6730	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584	0.2145	0.1784
21	0.8114	0.6598	0.5375	0.4388	0.3589	0.2942	0.2415	0.1987	0.1637
22	0.8034	0.6468	0.5219	0.4220	0.3418	0.2775	0.2257	0.1839	0.1502
23	0.7954	0.6342	0.5067	0.4057	0.3256	0.2618	0.2109	0.1703	0.1378

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
24	0.7876	0.6217	0.4919	0.3901	0.3101	0.2470	0.1971	0.1577	0.1264
25	0.7798	0.6095	0.4776	0.3751	0.2953	0.2330	0.1842	0.1460	0.1160
26	0.7720	0.5976	0.4637	0.3607	0.2812	0.2198	0.1722	0.1352	0.1064
27	0.7644	0.5859	0.4502	0.3468	0.2678	0.2074	0.1609	0.1252	0.0976
28	0.7568	0.5744	0.4371	0.3335	0.2551	0.1956	0.1504	0.1159	0.0895
29	0.7493	0.5631	0.4243	0.3207	0.2429	0.1846	0.1406	0.1073	0.0822
30	0.7419	0.5521	0.4120	0.3083	0.2314	0.1741	0.1314	0.0994	0.0754
31	0.7346	0.5412	0.4000	0.2965	0.2204	0.1643	0.1228	0.0920	0.0691
32	0.7273	0.5306	0.3883	0.2851	0.2099	0.1550	0.1147	0.0852	0.0634
33	0.7201	0.5202	0.3770	0.2741	0.1999	0.1462	0.1072	0.0789	0.0582
34	0.7130	0.5100	0.3660	0.2636	0.1904	0.1379	0.1002	0.0730	0.0534
35	0.7059	0.5000	0.3554	0.2534	0.1813	0.1301	0.0937	0.0676	0.0490
36	0.6989	0.4902	0.3450	0.2437	0.1727	0.1227	0.0875	0.0626	0.0449
37	0.6920	0.4806	0.3350	0.2343	0.1644	0.1158	0.0818	0.0580	0.0412
38	0.6852	0.4712	0.3252	0.2253	0.1566	0.1092	0.0765	0.0537	0.0378
39	0.6784	0.4619	0.3158	0.2166	0.1491	0.1031	0.0715	0.0497	0.0347
40	0.6717	0.4529	0.3066	0.2083	0.1420	0.0972	0.0668	0.0460	0.0318
41	0.6650	0.4440	0.2976	0.2003	0.1353	0.0917	0.0624	0.0426	0.0292
42	0.6584	0.4353	0.2890	0.1926	0.1288	0.0865	0.0583	0.0395	0.0268
43	0.6519	0.4268	0.2805	0.1852	0.1227	0.0816	0.0545	0.0365	0.0246
44	0.6454	0.4184	0.2724	0.1780	0.1169	0.0770	0.0509	0.0338	0.0226
45	0.6391	0.4102	0.2644	0.1712	0.1113	0.0727	0.0476	0.0313	0.0207
46	0.6327	0.4022	0.2567	0.1646	0.1060	0.0685	0.0445	0.0290	0.0190
47	0.6265	0.3943	0.2493	0.1583	0.1009	0.0647	0.0416	0.0269	0.0174
48	0.6203	0.3865	0.2420	0.1522	0.0961	0.0610	0.0389	0.0249	0.0160
49	0.6141	0.3790	0.2350	0.1463	0.0916	0.0575	0.0363	0.0230	0.0147
50	0.6080	0.3715	0.2281	0.1407	0.0872	0.0543	0.0339	0.0213	0.0134

МНОЖИТЕЛЬ ДИСКОНТИРОВАНИЯ $FM2(r,n)=(1+r)^{-n}$

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
1	0.9091	0.9009	0.8929	0.8850	0.8772	0.8696	0.8621
2	0.8264	0.8116	0.7972	0.7831	0.7695	0.7561	0.7432
3	0.7513	0.7312	0.7118	0.6931	0.6750	0.6575	0.6407
4	0.6830	0.6587	0.6355	0.6133	0.5921	0.5718	0.5523
5	0.6209	0.5935	0.5674	0.5428	0.5194	0.4972	0.4761
6	0.5645	0.5346	0.5066	0.4803	0.4556	0.4323	0.4104
7	0.5132	0.4817	0.4523	0.4251	0.3996	0.3759	0.3538
8	0.4665	0.4339	0.4039	0.3762	0.3506	0.3269	0.3050
9	0.4241	0.3909	0.3606	0.3329	0.3075	0.2843	0.2630
10	0.3855	0.3522	0.3220	0.2946	0.2697	0.2472	0.2267
11	0.3505	0.3173	0.2875	0.2607	0.2366	0.2149	0.1954
12	0.3186	0.2858	0.2567	0.2307	0.2076	0.1869	0.1685
13	0.2897	0.2575	0.2292	0.2042	0.1821	0.1625	0.1452
14	0.2633	0.2320	0.2046	0.1807	0.1597	0.1413	0.1252
15	0.2394	0.2090	0.1827	0.1599	0.1401	0.1229	0.1079
16	0.2176	0.1883	0.1631	0.1415	0.1229	0.1069	0.0930
17	0.1978	0.1696	0.1456	0.1252	0.1078	0.0929	0.0802
18	0.1799	0.1528	0.1300	0.1108	0.0946	0.0808	0.0691
19	0.1635	0.1377	0.1161	0.0981	0.0829	0.0703	0.0596
20	0.1486	0.1240	0.1037	0.0868	0.0728	0.0611	0.0514
21	0.1351	0.1117	0.0926	0.0768	0.0638	0.0531	0.0443
22	0.1228	0.1007	0.0826	0.0680	0.0560	0.0462	0.0382
23	0.1117	0.0907	0.0738	0.0601	0.0491	0.0402	0.0329

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
24	0.1015	0.0817	0.0659	0.0532	0.0431	0.0349	0.0284
25	0.0923	0.0736	0.0588	0.0471	0.0378	0.0304	0.0245
26	0.0839	0.0663	0.0525	0.0417	0.0331	0.0264	0.0211
27	0.0763	0.0597	0.0469	0.0369	0.0291	0.0230	0.0182
28	0.0693	0.0538	0.0419	0.0326	0.0255	0.0200	0.0157
29	0.0630	0.0485	0.0374	0.0289	0.0224	0.0174	0.0135
30	0.0573	0.0437	0.0334	0.0256	0.0196	0.0151	0.0116
31	0.0521	0.0394	0.0298	0.0226	0.0172	0.0131	0.0100
32	0.0474	0.0355	0.0266	0.0200	0.0151	0.0114	0.0087
33	0.0431	0.0319	0.0238	0.0177	0.0132	0.0099	0.0075
34	0.0391	0.0288	0.0212	0.0157	0.0116	0.0086	0.0064
35	0.0356	0.0259	0.0189	0.0139	0.0102	0.0075	0.0055
36	0.0323	0.0234	0.0169	0.0123	0.0089	0.0065	0.0048
37	0.0294	0.0210	0.0151	0.0109	0.0078	0.0057	0.0041
38	0.0267	0.0190	0.0135	0.0096	0.0069	0.0049	0.0036
39	0.0243	0.0171	0.0120	0.0085	0.0060	0.0043	0.0031
40	0.0221	0.0154	0.0107	0.0075	0.0053	0.0037	0.0026
41	0.0201	0.0139	0.0096	0.0067	0.0046	0.0032	0.0023
42	0.0183	0.0125	0.0086	0.0059	0.0041	0.0028	0.0020
43	0.0166	0.0112	0.0076	0.0052	0.0036	0.0025	0.0017
44	0.0151	0.0101	0.0068	0.0046	0.0031	0.0021	0.0015
45	0.0137	0.0091	0.0061	0.0041	0.0027	0.0019	0.0013
46	0.0125	0.0082	0.0054	0.0036	0.0024	0.0016	0.0011
47	0.0113	0.0074	0.0049	0.0032	0.0021	0.0014	0.0009
48	0.0103	0.0067	0.0043	0.0028	0.0019	0.0012	0.0008
49	0.0094	0.0060	0.0039	0.0025	0.0016	0.0011	0.0007
50	0.0085	0.0054	0.0035	0.0022	0.0014	0.0009	0.0006

МНОЖИТЕЛЬ ДИСКОНТИРОВАНИЯ $FM2(r,n) = (1+r)^{-n}$

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
1	0.8547	0.8475	0.8403	0.8333	0.8264	0.8197
2	0.7305	0.7182	0.7062	0.6944	0.6830	0.6719
3	0.6244	0.6086	0.5934	0.5787	0.5645	0.5507
4	0.5337	0.5158	0.4987	0.4823	0.4665	0.4514
5	0.4561	0.4371	0.4190	0.4019	0.3855	0.3700
6	0.3898	0.3704	0.3521	0.3349	0.3186	0.3033
7	0.3332	0.3139	0.2959	0.2791	0.2633	0.2486
8	0.2848	0.2660	0.2487	0.2326	0.2176	0.2038
9	0.2434	0.2255	0.2090	0.1938	0.1799	0.1670
10	0.2080	0.1911	0.1756	0.1615	0.1486	0.1369
11	0.1778	0.1619	0.1476	0.1346	0.1228	0.1122
12	0.1520	0.1372	0.1240	0.1122	0.1015	0.0920
13	0.1299	0.1163	0.1042	0.0935	0.0839	0.0754
14	0.1110	0.0985	0.0876	0.0779	0.0693	0.0618
15	0.0949	0.0835	0.0736	0.0649	0.0573	0.0507
16	0.0811	0.0708	0.0618	0.0541	0.0474	0.0415
17	0.0693	0.0600	0.0520	0.0451	0.0391	0.0340
18	0.0592	0.0508	0.0437	0.0376	0.0323	0.0279
19	0.0506	0.0431	0.0367	0.0313	0.0267	0.0229
20	0.0433	0.0365	0.0308	0.0261	0.0221	0.0187
21	0.0370	0.0309	0.0259	0.0217	0.0183	0.0154
22	0.0316	0.0262	0.0218	0.0181	0.0151	0.0126
23	0.0270	0.0222	0.0183	0.0151	0.0125	0.0103

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
24	0.0231	0.0188	0.0154	0.0126	0.0103	0.0085
25	0.0197	0.0160	0.0129	0.0105	0.0085	0.0069
26	0.0169	0.0135	0.0109	0.0087	0.0070	0.0057
27	0.0144	0.0115	0.0091	0.0073	0.0058	0.0047
28	0.0123	0.0097	0.0077	0.0061	0.0048	0.0038
29	0.0105	0.0082	0.0064	0.0051	0.0040	0.0031
30	0.0090	0.0070	0.0054	0.0042	0.0033	0.0026
31	0.0077	0.0059	0.0046	0.0035	0.0027	0.0021
32	0.0066	0.0050	0.0038	0.0029	0.0022	0.0017
33	0.0056	0.0042	0.0032	0.0024	0.0019	0.0014
34	0.0048	0.0036	0.0027	0.0020	0.0015	0.0012
35	0.0041	0.0030	0.0023	0.0017	0.0013	0.0009
36	0.0035	0.0026	0.0019	0.0014	0.0010	0.0008
37	0.0030	0.0022	0.0016	0.0012	0.0009	0.0006
38	0.0026	0.0019	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005
39	0.0022	0.0016	0.0011	0.0008	0.0006	0.0004
40	0.0019	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0004
41	0.0016	0.0011	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003
42	0.0014	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002
43	0.0012	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002
44	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002
45	0.0009	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001
46	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
47	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
48	0.0005	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
49	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
50	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000

МНОЖИТЕЛЬ ДИСКОНТИРОВАНИЯ $FM2(r,n) = (1+r)^{-n}$

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
1	0.8130	0.8065	0.8000	0.7692	0.7143
2	0.6610	0.6504	0.6400	0.5917	0.5102
3	0.5374	0.5245	0.5120	0.4552	0.3644
4	0.4369	0.4230	0.4096	0.3501	0.2603
5	0.3552	0.3411	0.3277	0.2693	0.1859
6	0.2888	0.2751	0.2621	0.2072	0.1328
7	0.2348	0.2218	0.2097	0.1594	0.0949
8	0.1909	0.1789	0.1678	0.1226	0.0678
9	0.1552	0.1443	0.1342	0.0943	0.0484
10	0.1262	0.1164	0.1074	0.0725	0.0346
11	0.1026	0.0938	0.0859	0.0558	0.0247
12	0.0834	0.0757	0.0687	0.0429	0.0176
13	0.0678	0.0610	0.0550	0.0330	0.0126
14	0.0551	0.0492	0.0440	0.0254	0.0090
15	0.0448	0.0397	0.0352	0.0195	0.0064
16	0.0364	0.0320	0.0281	0.0150	0.0046
17	0.0296	0.0258	0.0225	0.0116	0.0033
18	0.0241	0.0208	0.0180	0.0089	0.0023
19	0.0196	0.0168	0.0144	0.0068	0.0017
20	0.0159	0.0135	0.0115	0.0053	0.0012
21	0.0129	0.0109	0.0092	0.0040	0.0009
22	0.0105	0.0088	0.0074	0.0031	0.0006
23	0.0086	0.0071	0.0059	0.0024	0.0004

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
24	0.0070	0.0057	0.0047	0.0018	0.0003
25	0.0057	0.0046	0.0038	0.0014	0.0002
26	0.0046	0.0037	0.0030	0.0011	0.0002
27	0.0037	0.0030	0.0024	0.0008	0.0001
28	0.0030	0.0024	0.0019	0.0006	0.0001
29	0.0025	0.0020	0.0015	0.0005	0.0001
30	0.0020	0.0016	0.0012	0.0004	0.0000
31	0.0016	0.0013	0.0010	0.0003	0.0000
32	0.0013	0.0010	0.0008	0.0002	0.0000
33	0.0011	0.0008	0.0006	0.0002	0.0000
34	0.0009	0.0007	0.0005	0.0001	0.0000
35	0.0007	0.0005	0.0004	0.0001	0.0000
36	0.0006	0.0004	0.0003	0.0001	0.0000
37	0.0005	0.0003	0.0003	0.0001	0.0000
38	0.0004	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000
39	0.0003	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000
40	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
41	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
42	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
43	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
44	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
45	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
46	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
47	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
48	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
49	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

КОЭФФИЦИЕНТ НАРАЩЕНИЯ АННУИТЕТА

$$FM3(r,n) = ((1+r)^n - 1)/r$$

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0100	2.0200	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700	2.0800	2.0900
3	3.0301	3.0604	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149	3.2464	3.2781
4	4.0604	4.1216	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399	4.5061	4.5731
5	5.1010	5.2040	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507	5.8666	5.9847
6	6.1520	6.3081	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753	7.1533	7.3359	7.5233
7	7.2135	7.4343	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938	8.6540	8.9228	9.2004
8	8.2857	8.5830	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598	10.6366	11.0285
9	9.3685	9.7546	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780	12.4876	13.0210
10	10.4622	10.9497	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164	14.4866	15.1929
11	11.5668	12.1687	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836	16.6455	17.5603
12	12.6825	13.4121	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699	17.8885	18.9771	20.1407
13	13.8093	14.6803	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406	21.4953	22.9534
14	14.9474	15.9739	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505	24.2149	26.0192
15	16.0969	17.2934	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290	27.1521	29.3609
16	17.2579	18.6393	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881	30.3243	33.0034
17	18.4304	20.0121	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402	33.7502	36.9737
18	19.6147	21.4123	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057	33.9990	37.4502	41.3013
19	20.8109	22.8406	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790	41.4463	46.0185
20	22.0190	24.2974	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856	40.9955	45.7620	51.1601
21	23.2392	25.7833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927	44.8652	50.4229	56.7645
22	24.4716	27.2990	30.5368	34.2480	38.5052	43.3923	49.0057	55.4568	62.8733
23	25.7163	28.8450	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958	53.4361	60.8933	69.5319

Продолжение

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
24	26.9735	30.4219	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156	58.1767	66.7648	76.7898
25	28.2432	32.0303	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645	63.2490	73.1059	84.7009
26	29.5256	33.6709	38.5530	44.3117	51.1135	59.1564	68.6765	79.9544	93.3240
27	30.8209	35.3443	40.7096	47.0842	54.6691	63.7058	74.4838	87.3508	102.7231
28	32.1291	37.0512	42.9309	49.9676	58.4026	68.5281	80.6977	95.3388	112.9682
29	33.4504	38.7922	45.2189	52.9663	62.3227	73.6398	87.3465	103.9659	124.1354
30	34.7849	40.5681	47.5754	56.0849	66.4388	79.0582	94.4608	113.2832	136.3075
31	36.1327	42.3794	50.0027	59.3283	70.7608	84.8017	102.0730	123.3459	149.5752
32	37.4941	44.2270	52.5028	62.7015	75.2988	90.8898	110.2182	134.2135	164.0370
33	38.8690	46.1116	55.0778	66.2095	80.0638	97.3432	118.9334	145.9506	179.8003
34	40.2577	48.0338	57.7302	69.8579	85.0670	104.1838	128.2588	158.6267	196.9823
35	41.6603	49.9945	60.4621	73.6522	90.3203	111.4348	138.2369	172.3168	215.7108
36	43.0769	51.9944	63.2759	77.5983	95.8363	119.1209	148.9135	187.1021	236.1247
37	44.5076	54.0343	66.1742	81.7022	101.6281	127.2681	160.3374	203.0703	258.3759
38	45.9527	56.1149	69.1594	85.9703	107.7095	135.9042	172.5610	220.3159	282.6298
39	47.4123	58.2372	72.2342	90.4091	114.0950	145.0585	185.6403	238.9412	309.0665
40	48.8864	60.4020	75.4013	95.0255	120.7998	154.7620	199.6351	259.0565	337.8824
41	50.3752	62.6100	78.6633	99.8265	127.8398	165.0477	214.6096	280.7810	369.2919
42	51.8790	64.8622	82.0232	104.8196	135.2318	175.9505	230.6322	304.2435	403.5281
43	53.3978	67.1595	85.4839	110.0124	142.9933	187.5076	247.7765	329.5830	440.8457
44	54.9318	69.5027	89.0484	115.4129	151.1430	199.7580	266.1209	356.9496	481.5218
45	56.4811	71.8927	92.7199	121.0294	159.7002	212.7435	285.7493	386.5056	525.8587
46	58.0459	74.3306	96.5015	126.8706	168.6852	226.5081	306.7518	418.4261	574.1860
47	59.6263	76.8172	100.3965	132.9454	178.1194	241.0986	329.2244	452.9002	626.8628
48	61.2226	79.3535	104.4084	139.2632	188.0254	256.5645	353.2701	490.1322	684.2804
49	62.8348	81.9406	108.5406	145.8337	198.4267	272.9584	378.9990	530.3427	746.8656
50	64.4632	84.5794	112.7969	152.6671	209.3480	290.3359	406.5289	573.7702	815.0836

КОЭФФИЦИЕНТ НАРАЩЕНИЯ АННУИТЕТА

$$FM3(r,n) = ((1+r)^n - 1)/r$$

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.1000	2.1100	2.1200	2.1300	2.1400	2.1500	2.1600
3	3.3100	3.3421	3.3744	3.4069	3.4396	3.4725	3.5056
4	4.6410	4.7097	4.7793	4.8498	4.9211	4.9934	5.0665
5	6.1051	6.2278	6.3528	6.4803	6.6101	6.7424	6.8771
6	7.7156	7.9129	8.1152	8.3227	8.5355	8.7537	8.9775
7	9.4872	9.7833	10.0890	10.4047	10.7305	11.0668	11.4139
8	11.4359	11.8594	12.2997	12.7573	13.2328	13.7268	14.2401
9	13.5795	14.1640	14.7757	15.4157	16.0853	16.7858	17.5185
10	15.9374	16.7220	17.5487	18.4197	19.3373	20.3037	21.3215
11	18.5312	19.5614	20.6546	21.8143	23.0445	24.3493	25.7329
12	21.3843	22.7132	24.1331	25.6502	27.2707	29.0017	30.8502
13	24.5227	26.2116	28.0291	29.9847	32.0887	34.3519	36.7862
14	27.9750	30.0949	32.3926	34.8827	37.5811	40.5047	43.6720
15	31.7725	34.4054	37.2797	40.4175	43.8424	47.5804	51.6595
16	35.9497	39.1899	42.7533	46.6717	50.9804	55.7175	60.9250
17	40.5447	44.5008	48.8837	53.7391	59.1176	65.0751	71.6730
18	45.5992	50.3959	55.7497	61.7251	68.3941	75.8364	84.1407
19	51.1591	56.9395	63.4397	70.7494	78.9692	88.2118	98.6032
20	57.2750	64.2028	72.0524	80.9468	91.0249	102.4436	115.3797
21	64.0025	72.2651	81.6987	92.4699	104.7684	118.8101	134.8405
22	71.4027	81.2143	92.5026	105.4910	120.4360	137.6316	157.4150
23	79.5430	91.1479	104.6029	120.2048	138.2970	159.2764	183.6014

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
24	88.4973	102.1742	118.1552	136.8315	158.6586	184.1678	213.9776
25	98.3471	114.4133	133.3339	155.6196	181.8708	212.7930	249.2140
26	109.1818	127.9988	150.3339	176.8501	208.3327	245.7120	290.0883
27	121.0999	143.0786	169.3740	200.8406	238.4993	283.5688	337.5024
28	134.2099	159.8173	190.6989	227.9499	272.8892	327.1041	392.5028
29	148.6309	178.3972	214.5828	258.5834	312.0937	377.1697	456.3032
30	164.4940	199.0209	241.3327	293.1992	356.7868	434.7451	530.3117
31	181.9434	221.9132	271.2926	332.3151	407.7370	500.9569	616.1616
32	201.1378	247.3236	304.8477	376.5161	465.8202	577.1005	715.7475
33	222.2515	275.5292	342.4294	426.4632	532.0350	664.6655	831.2671
34	245.4767	306.8374	384.5210	482.9034	607.5199	765.3654	965.2698
35	271.0244	341.5896	431.6635	546.6808	693.5727	881.1702	1120.7130
36	299.1268	380.1644	484.4631	618.7493	791.6729	1014.3457	1301.0270
37	330.0395	422.9825	543.5987	700.1867	903.5071	1167.4975	1510.1914
38	364.0434	470.5106	609.8305	792.2110	1030.9981	1343.6222	1752.8220
39	401.4478	523.2667	684.0102	896.1984	1176.3378	1546.1655	2034.2735
40	442.5926	581.8261	767.0914	1013.7042	1342.0251	1779.0903	2360.7572
41	487.8518	646.8269	860.1424	1146.4858	1530.9086	2046.9539	2739.4784
42	537.6370	718.9779	964.3595	1296.5289	1746.2358	2354.9969	3178.7949
43	592.4007	799.0655	1081.0826	1466.0777	1991.7088	2709.2465	3688.4021
44	652.6408	887.9627	1211.8125	1657.6678	2271.5481	3116.6334	4279.5465
45	718.9048	986.6386	1358.2300	1874.1646	2590.5648	3585.1285	4965.2739
46	791.7953	1096.1688	1522.2176	2118.8060	2954.2439	4123.8977	5760.7177
47	871.9749	1217.7474	1705.8838	2395.2508	3368.8380	4743.4824	6683.4326
48	960.1723	1352.6996	1911.5898	2707.6334	3841.4753	5456.0047	7753.7818
49	1057.1896	1502.4965	2141.9806	3060.6258	4380.2819	6275.4055	8995.3869
50	1163.9085	1668.7712	2400.0182	3459.5071	4994.5213	7217.7163	10435.6488

КОЭФФИЦИЕНТ НАРАЩЕНИЯ АННУИТЕТА

$$FM3(r,n) = ((1+r)^n - 1)/r$$

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.1700	2.1800	2.1900	2.2000	2.2100	2.2200
3	3.5389	3.5724	3.6061	3.6400	3.6741	3.7084
4	5.1405	5.2154	5.2913	5.3680	5.4457	5.5242
5	7.0144	7.1542	7.2966	7.4416	7.5892	7.7396
6	9.2068	9.4420	9.6830	9.9299	10.1830	10.4423
7	11.7720	12.1415	12.5227	12.9159	13.3214	13.7396
8	14.7733	15.3270	15.9020	16.4991	17.1189	17.7623
9	18.2847	19.0859	19.9234	20.7989	21.7139	22.6700
10	22.3931	23.5213	24.7089	25.9587	27.2738	28.6574
11	27.1999	28.7551	30.4035	32.1504	34.0013	35.9620
12	32.8239	34.9311	37.1802	39.5805	42.1416	44.8737
13	39.4040	42.2187	45.2445	48.4966	51.9913	55.7459
14	47.1027	50.8180	54.8409	59.1959	63.9095	69.0100
15	56.1101	60.9653	66.2607	72.0351	78.3305	85.1922
16	66.6488	72.9390	79.8502	87.4421	95.7799	104.9345
17	78.9792	87.0680	96.0218	105.9306	116.8937	129.0201
18	93.4056	103.7403	115.2659	128.1167	142.4413	158.4045
19	110.2846	123.4135	138.1664	154.7400	173.3540	194.2535
20	130.0329	146.6280	165.4180	186.6880	210.7584	237.9893
21	153.1385	174.0210	197.8474	225.0256	256.0176	291.3469
22	180.1721	206.3448	236.4385	271.0307	310.7813	356.4432
23	211.8013	244.4868	282.3618	326.2369	377.0454	435.8607

Продолжение

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
24	248.8076	289.4945	337.0105	392.4842	457.2249	532.7501
25	292.1049	342.6035	402.0425	471.9811	554.2422	650.9551
26	342.7627	405.2721	479.4306	567.3773	671.6330	795.1653
27	402.0323	479.2211	571.5224	681.8528	813.6759	971.1016
28	471.3778	566.4809	681.1116	819.2233	985.5479	1185.7440
29	552.5121	669.4475	811.5228	984.0680	1193.5129	1447.6077
30	647.4391	790.9480	966.7122	1181.8816	1445.1507	1767.0813
31	758.5038	934.3186	1151.3875	1419.2579	1749.6323	2156.8392
32	888.4494	1103.4960	1371.1511	1704.1095	2118.0551	2632.3439
33	1040.4858	1303.1253	1632.6698	2045.9314	2563.8467	3212.4595
34	1218.3684	1538.6878	1943.8771	2456.1176	3103.2545	3920.2006
35	1426.4910	1816.6516	2314.2137	2948.3411	3755.9379	4783.6447
36	1669.9945	2144.6489	2754.9143	3539.0094	4545.6848	5837.0466
37	1954.8936	2531.6857	3279.3481	4247.8113	5501.2787	7122.1968
38	2288.2255	2988.3891	3903.4242	5098.3735	6657.5472	8690.0801
39	2678.2238	3527.2992	4646.0748	6119.0482	8056.6321	10602.8978
40	3134.5218	4163.2130	5529.8290	7343.8578	9749.5248	12936.5353
41	3668.3906	4913.5914	6581.4965	8813.6294	11797.9250	15783.5730
42	4293.0169	5799.0378	7832.9808	10577.3553	14276.4893	19256.9591
43	5023.8298	6843.8646	9322.2472	12693.8263	17275.5521	23494.4901
44	5878.8809	8076.7603	11094.4741	15233.5916	20904.4180	28664.2779
45	6879.2907	9531.5771	13203.4242	18281.3099	25295.3458	34971.4191
46	8049.7701	11248.2610	15713.0748	21938.5719	30608.3684	42666.1312
47	9419.2310	13273.9480	18699.5590	26327.2863	37037.1257	52053.6801
48	11021.5002	15664.2586	22253.4753	31593.7436	44815.9222	63506.4897
49	12896.1553	18484.8251	26482.6356	37913.4923	54228.2658	77478.9175
50	15089.5017	21813.0937	31515.3363	45497.1908	65617.2016	94525.2793

КОЭФФИЦИЕНТ НАРАЩЕНИЯ АННУИТЕТА

$$FM3(r,n) = ((1+r)^n - 1)/r$$

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.2300	2.2400	2.2500	2.3000	2.4000
3	3.7429	3.7776	3.8125	3.9900	4.3600
4	5.6038	5.6842	5.7656	6.1870	7.1040
5	7.8926	8.0484	8.2070	9.0431	10.9456
6	10.7079	10.9801	11.2588	12.7560	16.3238
7	14.1708	14.6153	15.0735	17.5828	23.8534
8	18.4300	19.1229	19.8419	23.8577	34.3947
9	23.6690	24.7125	25.8023	32.0150	49.1526
10	30.1128	31.6434	33.2529	42.6195	69.8137
11	38.0388	40.2379	42.5661	56.4053	98.7391
12	47.7877	50.8950	54.2077	74.3270	139.2348
13	59.7788	64.1097	68.7596	97.6250	195.9287
14	74.5280	80.4961	86.9495	127.9125	275.3002
15	92.6694	100.8151	109.6868	167.2863	386.4202
16	114.9834	126.0108	138.1085	218.4722	541.9883
17	142.4295	157.2534	173.6357	285.0139	759.7837
18	176.1883	195.9942	218.0446	371.5180	1064.6971
19	217.7116	244.0328	273.5558	483.9734	1491.5760
20	268.7853	303.6006	342.9447	630.1655	2089.2064
21	331.6059	377.4648	429.6809	820.2151	2925.8889
22	408.8753	469.0563	538.1011	1067.2796	4097.2445
23	503.9166	582.6298	673.6264	1388.4635	5737.1423

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
24	620.8174	723.4610	843.0329	1806.0026	8032.9993
25	764.6054	898.0916	1054.7912	2348.8033	11247.1990
26	941.4647	1114.6336	1319.4890	3054.4443	15747.0785
27	1159.0016	1383.1457	1650.3612	3971.7776	22046.9099
28	1426.5719	1716.1007	2063.9515	5164.3109	30866.6739
29	1755.6835	2128.9648	2580.9394	6714.6042	43214.3435
30	2160.4907	2640.9164	3227.1743	8729.9855	60501.0809
31	2658.4036	3275.7363	4034.9678	11349.9811	84702.5132
32	3270.8364	4062.9130	5044.7098	14755.9755	118584.5185
33	4024.1287	5039.0122	6306.8872	19183.7681	166019.3260
34	4950.6783	6249.3751	7884.6091	24939.8985	232428.0563
35	6090.3344	7750.2251	9856.7613	32422.8681	325400.2789
36	7492.1113	9611.2791	12321.9516	42150.7285	455561.3904
37	9216.2969	11918.9861	15403.4396	54796.9471	637786.9466
38	11337.0451	14780.5428	19255.2994	71237.0312	892902.7252
39	13945.5655	18328.8731	24070.1243	92609.1405	1250064.8153
40	17154.0456	22728.8026	30088.6554	120392.8827	1750091.7415
41	21100.4761	28184.7152	37611.8192	156511.7475	2450129.4380
42	25954.5856	34950.0469	47015.7740	203466.2718	3430182.2133
43	31925.1403	43339.0581	58770.7175	264507.1533	4802256.0986
44	39268.9225	53741.4321	73464.3969	343860.2993	6723159.5380
45	48301.7747	66640.3758	91831.4962	447019.3891	9412424.3532
46	59412.1829	82635.0660	114790.3702	581126.2058	13177395.0940
47	73077.9850	102468.4818	143488.9627	755465.0675	18448354.1320
48	89886.9215	127061.9174	179362.2034	982105.5878	25827696.7850
49	110561.9135	157557.7776	224203.7543	1276738.2641	36158776.4990
50	135992.1536	195372.6442	280255.6929	1659760.7433	50622288.0990

КОЭФФИЦИЕНТ ДИСКОНТИРОВАНИЯ АННУИТЕТА

$$FM4(r,n) = (1-(1+r)^{-n})/r$$

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174
2	1.9704	1.9416	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334	1.8080	1.7833	1.7591
3	2.9410	2.8839	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730	2.6243	2.5771	2.5313
4	3.9020	3.8077	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651	3.3872	3.3121	3.2397
5	4.8534	4.7135	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124	4.1002	3.9927	3.8897
6	5.7955	5.6014	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173	4.7665	4.6229	4.4859
7	6.7282	6.4720	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893	5.2064	5.0330
8	7.6517	7.3255	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713	5.7466	5.5348
9	8.5660	8.1622	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152	6.2469	5.9952
10	9.4713	8.9826	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236	6.7101	6.4177
11	10.3676	9.7868	9.2526	8.7605	8.3064	7.8869	7.4987	7.1390	6.8052
12	11.2551	10.5753	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838	7.9427	7.5361	7.1607
13	12.1337	11.3484	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527	8.3577	7.9038	7.4869
14	13.0037	12.1062	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950	8.7455	8.2442	7.7862
15	13.8651	12.8493	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122	9.1079	8.5595	8.0607
16	14.7179	13.5777	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059	9.4466	8.8514	8.3126
17	15.5623	14.2919	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773	9.7632	9.1216	8.5436
18	16.3983	14.9920	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276	10.0591	9.3719	8.7556
19	17.2260	15.6785	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581	10.3356	9.6036	8.9501
20	18.0456	16.3514	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699	10.5940	9.8181	9.1285
21	18.8570	17.0112	15.4150	14.0292	12.8212	11.7641	10.8355	10.0168	9.2922
22	19.6604	17.6580	15.9369	14.4511	13.1630	12.0416	11.0612	10.2007	9.4424
23	20.4558	18.2922	16.4436	14.8568	13.4886	12.3034	11.2722	10.3711	9.5802

Число периодов	Процентная ставка								
	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%
24	21.2434	18.9139	16.9355	15.2470	13.7986	12.5504	11.4693	10.5288	9.7066
25	22.0232	19.5235	17.4131	15.6221	14.0939	12.7834	11.6536	10.6748	9.8226
26	22.7952	20.1210	17.8768	15.9828	14.3752	13.0032	11.8258	10.8100	9.9290
27	23.5596	20.7069	18.3270	16.3296	14.6430	13.2105	11.9867	10.9352	10.0266
28	24.3164	21.2813	18.7641	16.6631	14.8981	13.4062	12.1371	11.0511	10.1161
29	25.0658	21.8444	19.1885	16.9837	15.1411	13.5907	12.2777	11.1584	10.1983
30	25.8077	22.3965	19.6004	17.2920	15.3725	13.7648	12.4090	11.2578	10.2737
31	26.5423	22.9377	20.0004	17.5885	15.5928	13.9291	12.5318	11.3498	10.3428
32	27.2696	23.4683	20.3888	17.8736	15.8027	14.0840	12.6466	11.4350	10.4062
33	27.9897	23.9886	20.7658	18.1476	16.0025	14.2302	12.7538	11.5139	10.4644
34	28.7027	24.4986	21.1318	18.4112	16.1929	14.3681	12.8540	11.5869	10.5178
35	29.4086	24.9986	21.4872	18.6646	16.3742	14.4982	12.9477	11.6546	10.5668
36	30.1075	25.4888	21.8323	18.9083	16.5469	14.6210	13.0352	11.7172	10.6118
37	30.7995	25.9695	22.1672	19.1426	16.7113	14.7368	13.1170	11.7752	10.6530
38	31.4847	26.4406	22.4925	19.3679	16.8679	14.8460	13.1935	11.8289	10.6908
39	32.1630	26.9026	22.8082	19.5845	17.0170	14.9491	13.2649	11.8786	10.7255
40	32.8347	27.3555	23.1148	19.7928	17.1591	15.0463	13.3317	11.9246	10.7574
41	33.4997	27.7995	23.4124	19.9931	17.2944	15.1380	13.3941	11.9672	10.7866
42	34.1581	28.2348	23.7014	20.1856	17.4232	15.2245	13.4524	12.0067	10.8134
43	34.8100	28.6616	23.9819	20.3708	17.5459	15.3062	13.5070	12.0432	10.8380
44	35.4555	29.0800	24.2543	20.5488	17.6628	15.3832	13.5579	12.0771	10.8605
45	36.0945	29.4902	24.5187	20.7200	17.7741	15.4558	13.6055	12.1084	10.8812
46	36.7272	29.8923	24.7754	20.8847	17.8801	15.5244	13.6500	12.1374	10.9002
47	37.3537	30.2866	25.0247	21.0429	17.9810	15.5890	13.6916	12.1643	10.9176
48	37.9740	30.6731	25.2667	21.1951	18.0772	15.6500	13.7305	12.1891	10.9336
49	38.5881	31.0521	25.5017	21.3415	18.1687	15.7076	13.7668	12.2122	10.9482
50	39.1961	31.4236	25.7298	21.4822	18.2559	15.7619	13.8007	12.2335	10.9617

КОЭФФИЦИЕНТ ДИСКОНТИРОВАНИЯ АННУИТЕТА

$$FM4(r,n) = (1-(1+r)^{-n})/r$$

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
1	0.9091	0.9009	0.8929	0.8850	0.8772	0.8696	0.8621
2	1.7355	1.7125	1.6901	1.6681	1.6467	1.6257	1.6052
3	2.4869	2.4437	2.4018	2.3612	2.3216	2.2832	2.2459
4	3.1699	3.1024	3.0373	2.9745	2.9137	2.8550	2.7982
5	3.7908	3.6959	3.6048	3.5172	3.4331	3.3522	3.2743
6	4.3553	4.2305	4.1114	3.9975	3.8887	3.7845	3.6847
7	4.8684	4.7122	4.5638	4.4226	4.2883	4.1604	4.0386
8	5.3349	5.1461	4.9676	4.7988	4.6389	4.4873	4.3436
9	5.7590	5.5370	5.3282	5.1317	4.9464	4.7716	4.6065
10	6.1446	5.8892	5.6502	5.4262	5.2161	5.0188	4.8332
11	6.4951	6.2065	5.9377	5.6869	5.4527	5.2337	5.0286
12	6.8137	6.4924	6.1944	5.9176	5.6603	5.4206	5.1971
13	7.1034	6.7499	6.4235	6.1218	5.8424	5.5831	5.3423
14	7.3667	6.9819	6.6282	6.3025	6.0021	5.7245	5.4675
15	7.6061	7.1909	6.8109	6.4624	6.1422	5.8474	5.5755
16	7.8237	7.3792	6.9740	6.6039	6.2651	5.9542	5.6685
17	8.0216	7.5488	7.1196	6.7291	6.3729	6.0472	5.7487
18	8.2014	7.7016	7.2497	6.8399	6.4674	6.1280	5.8178
19	8.3649	7.8393	7.3658	6.9380	6.5504	6.1982	5.8775
20	8.5136	7.9633	7.4694	7.0248	6.6231	6.2593	5.9288
21	8.6487	8.0751	7.5620	7.1016	6.6870	6.3125	5.9731
22	8.7715	8.1757	7.6446	7.1695	6.7429	6.3587	6.0113
23	8.8832	8.2664	7.7184	7.2297	6.7921	6.3988	6.0442

Число периодов	Процентная ставка						
	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%
24	8.9847	8.3481	7.7843	7.2829	6.8351	6.4338	6.0726
25	9.0770	8.4217	7.8431	7.3300	6.8729	6.4641	6.0971
26	9.1609	8.4881	7.8957	7.3717	6.9061	6.4906	6.1182
27	9.2372	8.5478	7.9426	7.4086	6.9352	6.5135	6.1364
28	9.3066	8.6016	7.9844	7.4412	6.9607	6.5335	6.1520
29	9.3696	8.6501	8.0218	7.4701	6.9830	6.5509	6.1656
30	9.4269	8.6938	8.0552	7.4957	7.0027	6.5660	6.1772
31	9.4790	8.7331	8.0850	7.5183	7.0199	6.5791	6.1872
32	9.5264	8.7686	8.1116	7.5383	7.0350	6.5905	6.1959
33	9.5694	8.8005	8.1354	7.5560	7.0482	6.6005	6.2034
34	9.6086	8.8293	8.1566	7.5717	7.0599	6.6091	6.2098
35	9.6442	8.8552	8.1755	7.5856	7.0700	6.6166	6.2153
36	9.6765	8.8786	8.1924	7.5979	7.0790	6.6231	6.2201
37	9.7059	8.8996	8.2075	7.6087	7.0868	6.6288	6.2242
38	9.7327	8.9186	8.2210	7.6183	7.0937	6.6338	6.2278
39	9.7570	8.9357	8.2330	7.6268	7.0997	6.6380	6.2309
40	9.7791	8.9511	8.2438	7.6344	7.1050	6.6418	6.2335
41	9.7991	8.9649	8.2534	7.6410	7.1097	6.6450	6.2358
42	9.8174	8.9774	8.2619	7.6469	7.1138	6.6478	6.2377
43	9.8340	8.9886	8.2696	7.6522	7.1173	6.6503	6.2394
44	9.8491	8.9988	8.2764	7.6568	7.1205	6.6524	6.2409
45	9.8628	9.0079	8.2825	7.6609	7.1232	6.6543	6.2421
46	9.8753	9.0161	8.2880	7.6645	7.1256	6.6559	6.2432
47	9.8866	9.0235	8.2928	7.6677	7.1277	6.6573	6.2442
48	9.8969	9.0302	8.2972	7.6705	7.1296	6.6585	6.2450
49	9.9063	9.0362	8.3010	7.6730	7.1312	6.6596	6.2457
50	9.9148	9.0417	8.3045	7.6752	7.1327	6.6605	6.2463

КОЭФФИЦИЕНТ ДИСКОНТИРОВАНИЯ АННУИТЕТА

$$FM4(r,n) = (1-(1+r)^{-n})/r$$

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
1	0.8547	0.8475	0.8403	0.8333	0.8264	0.8197
2	1.5852	1.5656	1.5465	1.5278	1.5095	1.4915
3	2.2096	2.1743	2.1399	2.1065	2.0739	2.0422
4	2.7432	2.6901	2.6386	2.5887	2.5404	2.4936
5	3.1993	3.1272	3.0576	2.9906	2.9260	2.8636
6	3.5892	3.4976	3.4098	3.3255	3.2446	3.1669
7	3.9224	3.8115	3.7057	3.6046	3.5079	3.4155
8	4.2072	4.0776	3.9544	3.8372	3.7256	3.6193
9	4.4506	4.3030	4.1633	4.0310	3.9054	3.7863
10	4.6586	4.4941	4.3389	4.1925	4.0541	3.9232
11	4.8364	4.6560	4.4865	4.3271	4.1769	4.0354
12	4.9884	4.7932	4.6105	4.4392	4.2784	4.1274
13	5.1183	4.9095	4.7147	4.5327	4.3624	4.2028
14	5.2293	5.0081	4.8023	4.6106	4.4317	4.2646
15	5.3242	5.0916	4.8759	4.6755	4.4890	4.3152
16	5.4053	5.1624	4.9377	4.7296	4.5364	4.3567
17	5.4746	5.2223	4.9897	4.7746	4.5755	4.3908
18	5.5339	5.2732	5.0333	4.8122	4.6079	4.4187
19	5.5845	5.3162	5.0700	4.8435	4.6346	4.4415
20	5.6278	5.3527	5.1009	4.8696	4.6567	4.4603
21	5.6648	5.3837	5.1268	4.8913	4.6750	4.4756
22	5.6964	5.4099	5.1486	4.9094	4.6900	4.4882
23	5.7234	5.4321	5.1668	4.9245	4.7025	4.4985

Число периодов	Процентная ставка					
	17%	18%	19%	20%	21%	22%
24	5.7465	5.4509	5.1822	4.9371	4.7128	4.5070
25	5.7662	5.4669	5.1951	4.9476	4.7213	4.5139
26	5.7831	5.4804	5.2060	4.9563	4.7284	4.5196
27	5.7975	5.4919	5.2151	4.9636	4.7342	4.5243
28	5.8099	5.5016	5.2228	4.9697	4.7390	4.5281
29	5.8204	5.5098	5.2292	4.9747	4.7430	4.5312
30	5.8294	5.5168	5.2347	4.9789	4.7463	4.5338
31	5.8371	5.5227	5.2392	4.9824	4.7490	4.5359
32	5.8437	5.5277	5.2430	4.9854	4.7512	4.5376
33	5.8493	5.5320	5.2462	4.9878	4.7531	4.5390
34	5.8541	5.5356	5.2489	4.9898	4.7546	4.5402
35	5.8582	5.5386	5.2512	4.9915	4.7559	4.5411
36	5.8617	5.5412	5.2531	4.9929	4.7569	4.5419
37	5.8647	5.5434	5.2547	4.9941	4.7578	4.5426
38	5.8673	5.5452	5.2561	4.9951	4.7585	4.5431
39	5.8695	5.5468	5.2572	4.9959	4.7591	4.5435
40	5.8713	5.5482	5.2582	4.9966	4.7596	4.5439
41	5.8729	5.5493	5.2590	4.9972	4.7600	4.5441
42	5.8743	5.5502	5.2596	4.9976	4.7603	4.5444
43	5.8755	5.5510	5.2602	4.9980	4.7606	4.5446
44	5.8765	5.5517	5.2607	4.9984	4.7608	4.5447
45	5.8773	5.5523	5.2611	4.9986	4.7610	4.5449
46	5.8781	5.5528	5.2614	4.9989	4.7612	4.5450
47	5.8787	5.5532	5.2617	4.9991	4.7613	4.5451
48	5.8792	5.5536	5.2619	4.9992	4.7614	4.5451
49	5.8797	5.5539	5.2621	4.9993	4.7615	4.5452
50	5.8801	5.5541	5.2623	4.9995	4.7616	4.5452

КОЭФФИЦИЕНТ ДИСКОНТИРОВАНИЯ АННУИТЕТА

$$FM4(r,n) = (1-(1+r)^{-n})/r$$

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
1	0.8130	0.8065	0.8000	0.7692	0.7143
2	1.4740	1.4568	1.4400	1.3609	1.2245
3	2.0114	1.9813	1.9520	1.8161	1.5889
4	2.4483	2.4043	2.3616	2.1662	1.8492
5	2.8035	2.7454	2.6893	2.4356	2.0352
6	3.0923	3.0205	2.9514	2.6427	2.1680
7	3.3270	3.2423	3.1611	2.8021	2.2628
8	3.5179	3.4212	3.3289	2.9247	2.3306
9	3.6731	3.5655	3.4631	3.0190	2.3790
10	3.7993	3.6819	3.5705	3.0915	2.4136
11	3.9018	3.7757	3.6564	3.1473	2.4383
12	3.9852	3.8514	3.7251	3.1903	2.4559
13	4.0530	3.9124	3.7801	3.2233	2.4685
14	4.1082	3.9616	3.8241	3.2487	2.4775
15	4.1530	4.0013	3.8593	3.2682	2.4839
16	4.1894	4.0333	3.8874	3.2832	2.4885
17	4.2190	4.0591	3.9099	3.2948	2.4918
18	4.2431	4.0799	3.9279	3.3037	2.4941
19	4.2627	4.0967	3.9424	3.3105	2.4958
20	4.2786	4.1103	3.9539	3.3158	2.4970
21	4.2916	4.1212	3.9631	3.3198	2.4979
22	4.3021	4.1300	3.9705	3.3230	2.4985
23	4.3106	4.1371	3.9764	3.3254	2.4989

Число периодов	Процентная ставка				
	23%	24%	25%	30%	40%
24	4.3176	4.1428	3.9811	3.3272	2.4992
25	4.3232	4.1474	3.9849	3.3286	2.4994
26	4.3278	4.1511	3.9879	3.3297	2.4996
27	4.3316	4.1542	3.9903	3.3305	2.4997
28	4.3346	4.1566	3.9923	3.3312	2.4998
29	4.3371	4.1585	3.9938	3.3317	2.4999
30	4.3391	4.1601	3.9950	3.3321	2.4999
31	4.3407	4.1614	3.9960	3.3324	2.4999
32	4.3421	4.1624	3.9968	3.3326	2.4999
33	4.3431	4.1632	3.9975	3.3328	2.5000
34	4.3440	4.1639	3.9980	3.3329	2.5000
35	4.3447	4.1644	3.9984	3.3330	2.5000
36	4.3453	4.1649	3.9987	3.3331	2.5000
37	4.3458	4.1652	3.9990	3.3331	2.5000
38	4.3462	4.1655	3.9992	3.3332	2.5000
39	4.3465	4.1657	3.9993	3.3332	2.5000
40	4.3467	4.1659	3.9995	3.3332	2.5000
41	4.3469	4.1661	3.9996	3.3333	2.5000
42	4.3471	4.1662	3.9997	3.3333	2.5000
43	4.3472	4.1663	3.9997	3.3333	2.5000
44	4.3473	4.1663	3.9998	3.3333	2.5000
45	4.3474	4.1664	3.9998	3.3333	2.5000
46	4.3475	4.1665	3.9999	3.3333	2.5000
47	4.3476	4.1665	3.9999	3.3333	2.5000
48	4.3476	4.1665	3.9999	3.3333	2.5000
49	4.3477	4.1666	3.9999	3.3333	2.5000
50	4.3477	4.1666	3.9999	3.3333	2.5000

Рабочая программа курса "Финансовые вычисления"

Тема 1. Логика финансовых операций в рыночной экономике

1.1. Временнáя ценность денег. Задача эффективного вложения денежных средств.

1.2. Оценка результативности простейшей финансовой сделки: процентная ставка, учетная ставка.

1.3. Операции наращения и дисконтирования. Будущая стоимость и приведенная стоимость.

1.4. Проценты *"со 100"*, *"на 100"*, *"во 100"*.

Тема 2. Простые проценты

2.1. Логика наращения простыми процентами. Обыкновенные и точные проценты; три способа начисления простых процентов.

2.2. Переменные процентные ставки и реинвестирование.

2.3. Сущность операций с кредитами. Составление плана погашения кредита и *"правило 78"*

2.4. Дисконтирование по простым процентам: математическое, банковское.

2.5. Учет векселя. Факторный анализ учета векселя.

2.6. Наращение по учетной ставке. Сравнение наращений простыми процентами по учетной и процентной ставкам. Способы наращения капитала и его учета.

2.7. Определение срока ссуды и величины ставки.

2.8. Вычисление средних значений.

2.9. Операции с девизами.

2.10. Влияние на величину наращенной суммы ставки налога на проценты.

2.11. Анализ влияния инфляции на результат процесса наращения. Номинальные и реальные ставки. Понятие о дефляции.

2.12. Замена платежей и их консолидация. Проблемы, возникающие при замене платежей в случае использования простых ставок.

Тема 3. Сложные проценты

3.1. Сущность наращения сложными процентами. Множитель наращения и его экономический смысл. Начисление процентов по смешанной схеме. "*Правило 72-х*" и другие аналогичные правила. Возможные методы начисления процентов в случае нецелого числа лет.

3.2. Способы наращения сложными процентами при начислении процентов несколько раз в году.

3.3. Эффективная годовая процентная ставка. Различные подходы к определению понятия эффективной ставки.

3.4. Дисконтирование по сложной процентной ставке. Дисконтный множитель и его экономический смысл. Определение величины ставки дисконтирования.

3.5. Дисконтирование и наращение по сложной учетной ставке. Эффективная годовая учетная ставка.

3.6. Непрерывное наращение и дисконтирование. Сила роста и ее содержательный смысл.

3.7. Эквивалентность ставок. Рассмотрение проблемы эквивалентности ставок с общих позиций.

3.8. Конвертация валюты и наращение сложными или непрерывными процентами.

3.9. Налоги, инфляция и наращение сложными процентами. Формула Фишера.

3.10. Замена платежей и сроков их выплат в случае сложных ставок.

Тема 4. Денежные потоки

4.1. Виды денежных потоков и их оценка.

4.2. Аннуитеты постнумерандо и пренумерандо. Примеры аннуитетов.

4.3. Наращенная сумма постоянного аннуитета. Коэффициент наращения аннуитета и его экономический смысл. Подходы при рассмотрении ситуации, когда в течение базового периода начисления процентов денежные поступления происходят несколько раз, а проценты начисляются один раз в конце периода.

4.4. Приведенная стоимость постоянного аннуитета. Коэффициент дисконтирования аннуитета и его экономический смысл.

4.5. Отсроченный постоянный аннуитет.

4.6. Бессрочный аннуитет. Формула связи между приведенной стоимостью срочного аннуитета и приведенными стоимостями бессрочных аннуитетов.

4.7. Оценка непрерывного аннуитета для различных случаев начисления процентов.

4.8. Оценка аннуитета с изменяющейся величиной платежа.

4.9. Аннуитеты с периодом, большим, чем базовый период начисления процентов.

4.10. Конверсия аннуитетов: выкуп аннуитета, консолидация аннуитетов, изменение параметров аннуитета.

Тема 5. Некоторые приложения финансовых вычислений

5.1. Анализ доступности ресурсов к потреблению в условиях рынка.

5.2. Погашение долгосрочных кредитов: погашение долга равными и переменными выплатами; формирование фонда погашения. Доходность потребительского кредита для продавца. Стоимость привлечения кредита.

5.3. Оценка инвестиций в ценные бумаги.

5.4. Введение в страховые расчеты.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Глава 1. Простые проценты

1.1. Определение ставок и вычисление процентов

1.1.1. 60%; 37,5%.
1.1.2. 300 тыс. руб.; 75%.
1.1.3. 12,5%; 11,11%; 88,89%.
1.1.4. 16%; 13,79%; 86,21%; 1,16.
1.1.5. 30,77%.
1.1.6. Нормы прибыли: 20%, 40%, 20%. Учетные ставки: 16,67%, 28,57%, 16,67%. Дисконт-факторы: 83,33%, 71,43%, 83,33%.
1.1.7. Минимальный доход (6 тыс. руб.) от первой инвестиции; максимальный доход (12 тыс. руб.) от первой или третьей инвестиции.
1.1.8. 2,912; на 191,2%.
1.1.9. Второй вариант лучше, так как при первом варианте капитал за 2 года увеличится на 65%, при втором – на 69%.
1.1.10. 2250 руб.
1.1.11. На 48,764%; а) 20,95%, 79,05%; б) 32,78%, 67,22%.
1.1.12. 62,5%.
1.1.13. На 5,32%.
1.1.14. 160 тыс. руб.
1.1.15. При продаже второй партии товара, так как в первом случае получено 33,33% прибыли, во втором – 38,10% прибыли.
1.1.16. а) 12 руб.; б) 35 руб.; в) 209,09 руб.; г) 8,4 тыс. руб.; д) 3 тыс. руб.
1.1.17. а) 39 руб.; б) 40 руб.; в) 127,78 руб.; г) 7,667 тыс. руб.; д) 8 тыс. руб.
1.1.18. а) 375 руб., 3 тыс. руб.; б) 300 руб., 2,4 тыс. руб.; в) 500 руб., 4 тыс. руб.
1.1.19. 53,077 тыс. руб., 176,923 тыс. руб.
1.1.20. 3,913 тыс. руб., 48,913 тыс. руб.
1.1.21. 107 кг.
1.1.22. 180 руб., 1800 руб.
1.1.23. 12 руб. 99 коп.

1.2. Простая процентная ставка

1.2.1. 202,5 руб., 67,5 руб.
1.2.2. а) 6,7 тыс. руб.; б) 9,6 тыс. руб.; в) 10,5 тыс. руб.
1.2.3. 21,4 тыс. руб., 23,2 тыс. руб., 26,8 тыс. руб.
1.2.4. 48%.
1.2.5. 18,89%; 28,33%.

1.2.6. В 1,64 раза.

1.2.7. а) 375 руб.;
б) 369 руб. 86 коп.

1.2.8. 18 тыс. руб.
и 20 тыс. руб.

1.2.9. 4,61 тыс. руб.

1.2.10. а) 52,94%;
б) 53,68%;
в) 53,82%.

1.2.11. Первый вариант размещения вклада:
а) 94 дня и 95 дней;
б) при обоих способах подсчета – 94 дня.
Второй вариант размещения вклада:
в обоих случаях 128 дней и 130 дней.

1.2.12. а) 92 дня и 93 дня;
б) 151 день и 148 дней.
Если год високосный:
а) при обоих способах подсчета – 93 дня;
б) 151 день и 148 дней.

1.2.13. а) 214,125 тыс. руб.;
б) 213,75 тыс. руб.;
в) 213,658 тыс. руб.

1.2.14. а) 68,320 тыс. руб. (365/360);
б) 68,16 тыс. руб. (360/360);
в) 68,184 тыс. руб. (365/365).

1.2.15. 52,549 тыс. руб.

1.2.16. Для предприятия выгоден способ 360/360 – 182,500 тыс. руб.;
для банка – способ 365/360 – 183,042 тыс. руб.

1.2.17. В 1,283 раза (365/360);
в 1,28 раза (360/360);
в 1,279 раза (365/365).

1.2.18. Точные проценты с точным числом дней.

1.2.19. 6,312 тыс. руб.,
6,295 тыс. руб.

1.2.20. а) 85,781 тыс. руб.;
б) 85,738 тыс. руб.

1.2.21. 217 дней.

1.2.22. 25,42%; 208 руб.

1.2.23. 0,625 года или приблизительно 228 дней (если год невисокосный).

1.2.24. 7,5 года.

1.2.25. 6 лет.

1.2.26. Приблизительно 166 дней (165,91 дня).

1.2.27. На 135 дней.

1.2.28. Нет; не менее 31,71% годовых.

1.2.29. Не менее 48%.

1.2.30. 21,88%.

1.2.31. В случае начисления обыкновенных процентов – 27%;
в случае начисления точных процентов – 27,38% (год невисокосный) или 27,45% (год високосный).

1.2.32. 32,99%.

1.2.33. 34,11%; 36,55%.

1.2.34. 0,0345 года или приблизительно 13 дней.

1.2.35. 0,1225 года или приблизительно 45 дней.

1.2.36. 0,3%.

1.2.37. 38,08 тыс. руб.;
32,32%.

1.2.38. 29112 руб.

1.2.39. 30%.

1.2.40. Краткосрочные сертификаты.

1.2.41. Краткосрочные сертификаты.

1.2.42. а) 1600 руб.; б) 800 руб.; в) 500 руб.

1.2.43. В обоих случаях – 4 тыс. руб.

1.2.44. а) 178 руб.;
б) 533 руб.;
в) 889 руб.
1.2.45. 368 руб.
1.2.46. 1058 руб. и 10942 руб.; 1038 руб. и 10962 руб.
1.2.47. 12,293 тыс. руб.
1.2.48. 29 апреля.
1.2.49. 20 тыс. руб.;
13 тыс. руб.;
10 тыс. руб.
1.2.50. а) 11765 руб. и 11768 руб.; б) 11215 руб. и 11227 руб.; в) 9231 руб. и 9266 руб.
1.2.51. 19,801 тыс. руб.
1.2.52. а) 166,367 тыс. руб.;
б) 166,540 тыс. руб.
1.2.53. 5850 руб.
1.2.54. 7,8 тыс. руб.;
через 2 года.
1.2.55. 24648 руб.; 16092 руб. и 13908 руб.
1.2.56. 36760 руб.; 25064 руб., 13880 руб., 11056 руб.
1.2.57. 218,015 тыс. руб.;
217,5 тыс. руб.
1.2.58. 1,28; 28%.
1.2.59. 1,345; 34,5%.
1.2.60. 30%.
1.2.61. 2,125.
1.2.62. 1,164; 1,172.
1.2.63. 3,025 тыс. руб.; 30,25%.
1.2.64. 1904 руб. (365/360);
1873 руб. (360/360);
1878 руб. (365/365).
1.2.65. 60,438 тыс. руб.
1.2.66. 67,9 тыс. руб.; 31,33%;
82,509 тыс. руб.
1.2.67. 5963 руб.
1.2.68. 69,077 тыс. руб.

1.3. Простая учетная ставка

1.3.1. 700 руб.
1.3.2. 59,22 тыс. руб.;
780 руб.; не более чем за 3,846 года.
1.3.3. 25 тыс. руб.
1.3.4. 16,335 тыс. руб.
1.3.5. а) 1 850 625 руб.,
9 375 руб.;
б) 1 842 750 руб.,
17 250 руб.
1.3.6. 4887 руб. 50 коп.
1.3.7. 7711 руб.; 8533 руб.
1.3.8. 60 тыс. руб.
1.3.9. 36%; 36,73%.
1.3.10. Выгоднее учет векселя по процентной ставке.
1.3.11. а) 22,64%;
б) 27,91%.
1.3.12. 5488 руб.
1.3.13. 71,633 тыс. руб.
1.3.14. 20,867 тыс. руб.
1.3.15. а) 72%;
б) 73,2%.
1.3.16. 56,818 тыс. руб.
1.3.17. 27 тыс. руб.;
3 тыс. руб.
1.3.18. 8493 руб. и 1507 руб. (365/365); 8472 руб. и 1528 руб. (365/360); 8500 руб. и 1500 руб. (360/360)
1.3.19. а) 32,89%;
б) 33,49%.
1.3.20. 1364 руб.; 1794 руб.; 2467 руб.; 3606 руб.; 19231 руб.
1.3.21. 44,47%; 55,89%;
41,26%.
1.3.22. 1,471 года, т.е. 1 год и приблизительно

172 дня; 0,980 года, т.е. приблизительно 358 дней.

1.3.23. 3 года; 1,364 года, т.е. 1 год и приблизительно 133 дня.

1.3.24. 16,86%; 16,67%; 16,63%; 16,44%.

1.3.25. 33,80%.

1.3.26. 42,72%; 39,61%; нет.

1.3.27. а) 10,17%; б) 20,69%; в) 54,55%.

1.3.28. 41,53%.

1.3.29. 34,29%; 28,8%.

1.3.30. 27,86%, 32,86%; нет; нет.

1.3.31. 30,51%.

1.3.32. 40,86%.

1.3.33. 37,95%; 47,91%.

1.3.34. а) 360 дней; б) 366 дней.

1.3.35. 21,569 тыс. руб.; 21,612 тыс. руб.

1.3.36. 10,6 тыс. руб.; 69,4 тыс. руб.; да при 26,5% годовых.

1.3.37. За 0,0106 года или примерно за 4 дня.

1.4. Погашение кредита и амортизационные отчисления

1.4.1. 3996 руб.; 1296 руб.; 333 руб.

1.4.2. 5,6 тыс. руб.; 1,6 тыс. руб.; 700 руб.; остаток основного долга на начало четвертого квартала – 2834 руб.; погашение в конце четвертого квартала общей величины начисленных процентов и основного долга: 222 руб. и 478 руб.

1.4.3. 12,644 тыс. руб.; 1044 руб.; 1405 руб.; остаток основного долга на начало шестого месяца – 5387 руб.; погашение в конце шестого месяца общей величины начисленных процентов и основного долга: 93 руб. и 1312 руб.

1.4.4. Полугодовая выплата основного долга – 900 руб.; остаток основного долга на начало четвертого полугодия – 2700 руб.; процентный платеж и величина погасительного платежа в конце четвертого полугодия: 202,5 руб. и 1102,5 руб.; общая величина процентного платежа – 1417,5 руб.

1.4.5. Ежемесячная выплата основного долга – 924 руб.; остаток основного долга на начало четвертого месяца – 1848 руб.; процентный платеж и величина погасительного платежа – в конце четвертого месяца: 46,2 руб. и 970,2 руб.; общая величина процентного платежа – 346,5 руб.

1.4.6. 148,289 тыс. руб.; 2,8 тыс. руб.

1.4.7. 63,618 тыс. руб.

1.4.8. 18,778 тыс. руб.; 10,613 тыс. руб.

1.4.9. 225 дней.

1.4.10. а) стоимость уменьшается ежегодно на 7 тыс. руб.; б) амортизационные отчисления и стоимость микроавтобуса в конце третьего года: 8 тыс. руб. и 12 тыс. руб.

1.4.11. а) стоимость уменьшается ежегодно на 8,8 тыс. руб.; б) амортизационные отчисления и стоимость оборудования в конце пятого года: 96 тыс. руб. и 310 тыс. руб.

1.5. Вычисление средних значений

1.5.1. а) 6 сентября, 27,859 тыс. руб.; б) 6 сентября, 27,826 тыс. руб.

1.5.2. а) 7,478 месяца или приблизительно 7 месяцев 14 дней; б) 32,94%; в) 7 месяцев 14 дней, 31,85%; г) 48,527 тыс. руб.

1.5.3. 15,13%; 21,67%.

1.5.4. 73,05 тыс. руб.

1.5.5. 58,57%.

1.5.6. 5,237 месяца или приблизительно 5 месяцев 85 дней (если в году 360 дней); 39,71%.

1.5.7. а) 0,535 года, или приблизительно 193 дня; б) 43,15%; в) 193 дня, 42,41%; г) 22,987 тыс. руб.

1.5.8. 28,12%; например, в виде простой годовой процентной ставки 10,06%.

1.5.9. 35,25%.

1.5.10. 60 тыс. руб.; 40 тыс. руб.; 50 тыс. руб.; 10 тыс. руб.

1.6. Валютные расчеты

1.6.1. а) 2310 руб.; б) 200 долл.

1.6.2. а) 215 руб. 80 коп.; б) 96 тыс. лир.

1.6.3. Покупка – 1,495 нем. марок за 1 долл., продажа – 1,746 нем. марок за 1 долл.; б) 358,8 нем. марок; в) 500 долл.

1.6.4. 626,42 долл. США.

1.6.5. Покупка – 5,490 руб. за 1 фр. франк; продажа – 6,283 руб. за 1 фр. франк.

1.6.6. Покупка – 1,964 фр. франков за 1 нем. марку; продажа – 2,178 фр. франков за 1 нем. марку.

1.6.7. а) 466,50% или 555,53%; б) 208,28% или 224,34%.

1.6.8. а) 1446,45 долл.; б) 1590 долл.; 16 руб. 92 коп.

1.6.9. При использовании валютного депозита будет получено 26136,82 руб., т.е. доходность – 40,91% годовых.

1.6.10. 16,26%; да.

1.6.11. 7,98% (365/365); 8,57% (365/360); 7,84% (360/360).

1.6.12. 32,4%; 6529 руб.

1.6.13. а) 4117,76 долл.; б) 4166,67 долл.; воспользоваться валютным депозитом.

1.6.14. На 9131 руб.

1.6.15. Если курс покупки меньше 21 руб. 50 коп., то предпочтительнее рублевый вклад; если больше 21 руб. 50 коп. – валютный вклад.

1.7. Налог на прибыль

1.7.1. а) 5172 руб., 13,65%; б) 5216 руб., 13,69%.

1.7.2. 9,76 тыс. руб.

1.7.3. 644,48 руб.

1.7.4. На 18,49%.

1.7.5. 7667 руб.

1.7.6. 3,571 года; 1,587 года.

1.7.7. 4,706 года; 1,633 года.

1.7.8. Обыкновенные проценты и точное число дней.

1.7.9. 15340 руб. 50 коп.

1.7.10. 0,418 года.

1.7.11. Приблизительно 238 дней; приблизительно 209 дней.

1.7.12. 2,5 тыс. руб.

1.7.13. 17,346 тыс. руб.; 12,407 тыс. руб.

1.7.14. 2067,74 долл.; 2211,2 долл.

1.7.15. На 14385 руб.

1.7.16. Не менее 26,14%.

1.7.17. 20%.

1.7.18. 28,9%; нет

1.8. Инфляция

1.8.1. а) 1,2217, 22,17%; б) 1,0339, 3,39%; в) 1,0690, 6,90%.

1.8.2. а) 1,1249, 12,49%; б) 1,2653, 26,53%; в) 1,6010, 60,10%.

1.8.3. а) 1,5301, 53,01%; б) 1,0361, 3,61%; в) 1,1122, 11,22%.

1.8.4. 9200 руб.; более 67,38%.

1.8.5. 20,09%; 0,61%; за 114 дней.

1.8.6. За 7,62 дня или приблизительно за 8 дней.

1.8.7. 17,76%.

1.8.8. 11,48%; 100%.

1.8.9. 50%.

1.8.10. На 69,13%.

1.8.11. а) 3,83%; б) 4,66%.

1.8.12. Выигрыш составил 49,77% от реальной цены дома.

1.8.13. 1,062.

1.8.14. 5,347 тыс. руб.

1.8.15. 18,935 тыс. руб.; 26,23%.

1.8.16. В 1,103 раза; в 1,72 раза.

1.8.17. а) 2,160 тыс. руб.; б) 1,421 тыс. руб.

1.8.18. 26,39%; 26,56%

1.8.19. 12,07%; 50,8%.

1.8.20. 7,94%; более 26%; 71,36%.

1.8.21. 16%; 41,67%.

1.8.22. 49,5%; 89,7 тыс. руб.

1.8.23. 66,74%; 75,028 тыс. руб.

1.8.24. а) 90,38%, 165,274 тыс. руб.; б) 91,15%, 164,929 тыс. руб.

1.8.25. а) в 1,074 раза; б) в 1,068 раза.

1.8.26. Да, так как уже достаточна процентная ставка 34,17%.

1.8.27. 61,13%.

1.8.28. 21,54%.

1.8.29. 74,83%; 47,93%.

1.8.30. 20,801 тыс. руб.

1.8.31. Рублевый депозит.

1.8.32. 38,51%; 37,42%.

1.8.33. 73%.

1.8.34. 70,67%.

1.9. Замена и консолидация платежей

1.9.1. а) 3,883 тыс. руб.; б) 4,24 тыс. руб.

1.9.2. 0,377 года или приблизительно 4,5 месяца.

1.9.3. а) 51,282 тыс. руб.; б) 48,75 тыс. руб.

1.9.4. 0,801 года или приблизительно 292 дня.

1.9.5. Не менее 89,286 тыс. руб.; не менее 88 тыс. руб.

1.9.6. 30,441 тыс. руб.

1.9.7. 13,515 тыс. руб.

1.9.8. 35,39 дня или приблизительно 35 дней; 36,52 дня или приблизительно 37 дней.

1.9.9. 158,93 дня или приблизительно 159 дней.

1.9.10. 16,927 тыс. руб. В качестве даты приведения принять момент уплаты четвертого платежа, т.е. конец первого года.

1.9.11. 38,786 тыс. руб. В качестве даты приведения принять момент уплаты пятого платежа.

1.9.12. 7,236 тыс. руб.; 7,216 тыс. руб.

1.9.13. 3,997 тыс. руб.; 3,999 тыс. руб.

1.9.14. 14,615 тыс. руб.; 14,634 тыс. руб.

1.9.15. 6,814 тыс. руб.

1.9.16. 4,035 тыс. руб.

1.9.17. 12.08.

1.9.18. а) 14,624 тыс. руб.; б) 14,499 тыс. руб.

1.9.19. а) 19,635 тыс. руб.; б) 19,571 тыс. руб.

1.9.20. Второй контракт для предпринимателя выгоднее.

1.9.21. 31,460 тыс. руб.

Глава 2. Сложные проценты

2.1. Сложная процентная ставка

2.1.1. 137,439 тыс. руб.; по годам (в тыс. руб.): 51,2; 65,536; 83,886; 107,374; 137,439.

2.1.2. а) 68,546 тыс. руб., 52,8 тыс. руб.; б) 330,859 тыс. руб., 96 тыс. руб.

2.1.3. Сравниваются графики линейной (с положительным тангенсом угла наклона) и показательной (с основанием больше единицы) функций.

2.1.4. 123,779 тыс. руб.

2.1.5. 559,085 тыс. руб.; 563,370 тыс. руб.; схема сложных процентов.

2.1.6. Смешанную схему.

2.1.7. а) 56,105 тыс. руб., 36,4 тыс. руб.; б) 61,760 тыс. руб., 36,4 тыс. руб.

2.1.8. В условиях простых процентов (в тыс. руб.): 1,02; 1,1; 1,14; 1,24; 1,96; 3,4; 5,8. В условиях сложных процентов (в тыс. руб.): 1,0181; 1,0938; 1,1337; 1,24; 2,3642; 8,5944; 73,8641.

2.1.9. 12,695 тыс. руб.; по кварталам (в тыс. руб.): 8,64; 9,331; 10,078; 10,884; 11,754; 12,695; при ежемесячном начислении – 12,848 тыс. руб.

2.1.10. В тыс. руб.: а) 465,259; б) 523,384; в) 560,441; г) 589,160; д) 601,224; е) 604,421.

2.1.11. Схема сложных процентов и смешанная схема (в тыс. руб.): а) 351,890; 354,266; б) 372,078; 372,987; в) при обеих схемах – 384,062.

2.1.12. В годах: а) 20 и 14,207;

б) 10 и 7,273;
в) 6,667 и 4,959;
г) 4 и 3,106;
д) 2 и 1,710;
е) 1,333 и 1,239;
ж) 1 и 1.

2.1.13. За 7,273 года; за 6,989 года.

2.1.14. а) 4,450 года; б) 4,059 года; в) 3,969 года.

2.1.15. 14,87%; с помощью *"правила 72-х"* – 14,4%.

2.1.16. 17,71%.

2.1.17. а) 13,98%; б) 13,75%.

2.1.18. Первый вариант условий предпочтительнее.

2.1.19. Первый вариант условий предпочтительнее.

2.1.20. Например, если количество начислений в году 2, 4, 12, 24, то соответственно 21%, 21,55%, 21,94%, 22,04%.

2.1.21. 29,93%.

2.1.22. 77,50%; 78,92%

2.1.23. а) 27,12%; б) 26,53%.

2.1.24. 24,50%; 23,34%.

2.1.25. а) 6,345 тыс. руб., 8,655 тыс. руб.; б) 6,059 тыс. руб., 8,941 тыс. руб.; в) 5,798 тыс. руб., 9,202 тыс. руб.

2.1.26. а) 33,919 тыс. руб.; б) 16,642 тыс. руб.

2.1.27. а) 10,359 тыс. руб.; б) 15,284 тыс. руб.

2.1.28. а) 7,961 тыс. руб.; б) 117,340 тыс. руб.; в) 40 тыс. руб.

2.1.29. а) 39,761 тыс. руб.; б) 11,606 тыс. руб.

2.1.30. 21,56 тыс. руб.

2.1.31. Если не оценивать риск участия, то да; если оценивать путем введения премии не менее 2%, то участие становится невыгодным.

2.1.32. 100 тыс. руб. сегодня.

2.1.33. Выгоднее: получить 4,6 тыс. руб. через 4 года.

2.1.34. 30%; 27,12%.

2.1.35. а) 26,312 тыс. руб.; б) 34,205 тыс. руб.; в) 50,7 тыс. руб.

2.1.36. 132,373 тыс. руб.

2.1.37. 174,010 тыс. руб.

2.1.38. 912,8 тыс. долл.

2.1.39. а) 72 тыс. руб. через 6 лет; б) 30 тыс. руб. через год; 72 тыс. руб. через 6 лет.

2.1.40. 14,269 тыс. руб.

2.1.41. 5,976 тыс. руб.

2.1.42. 587,158 тыс. руб.

2.1.43. 16,930 тыс. руб.

2.1.44. 457,172 тыс. руб.

2.1.45. 20,600 тыс. руб.

2.1.46. 116,406 тыс. руб.

2.1.47. 261,187 тыс. руб.

2.1.48. а) 30%; б) 32,76%; в) 34,49%.

2.1.49. 16,668 тыс. руб.

2.1.50. 22,620 тыс. руб.; нет не изменится.

2.1.51. 6,419 года.

2.1.52. 0,364.

2.1.53. 22,122 тыс. руб.

2.1.54. 3,357 года.

2.1.55. 31,52%; да, увеличится до 31,97%.

2.1.56. а) 24,25%; б) 26,50%; в) 27,08%.

2.1.57. а) 23,66%; б) 17,57%. Без удержания комиссионных доходность уменьшится: а) 22,88%; б) 17,20%.

2.1.58. а) 26,25%; б) 27,10%; в) 26,76%.

2.1.59. 0,569 года или 6,83 месяца, т.е. приблизительно 7 месяцев.

2.1.60. 6,23%.

2.1.61. а) 28,08%; б) 41,73%; в) 35,84%.

2.1.62. а) 200% годовых; б) 35% за квартал; до 280 дней выгоднее вариант 200%, после – вариант 35%.

2.1.63. Выгоднее всего вложить средства в ценные бумаги трастовой компании.

2.1.64. Лучше воспользоваться валютным депозитом.

2.1.65. При ожидаемом курсе продажи, равном или более 12 руб. 53 коп.

2.1.66. а) 20,20%; б) 20,61%.

2.1.67. 293,665 тыс. руб.

2.1.68. 555,043 тыс. руб.; 4984 руб., 6199 руб., 7709 руб., 9588 руб., 11924 руб., 14829 руб.

2.1.69. а) 145,254 тыс. руб.; б) 146,422 тыс. руб.

2.1.70. 3,432 года; 3,092 года.

2.1.71. 4,567 года; 3,967 года.

2.1.72. 35,07%.

2.1.73. 412,496 тыс. руб.

2.1.74. 530,290 тыс. руб.

2.1.75. Смешанную.

2.2. Сложная учетная ставка

2.2.1. Схема учета векселя по годам (в тыс. руб.): 80; 60; 51,2; 40,96. Предъявитель векселя получит 40, 96 тыс. руб.

2.2.2. 4,367 тыс. руб.; 6,355 тыс. руб.

2.2.3. Сравниваются графики линейной (с отрицательным тангенсом угла наклона) и показательной (с основанием меньше единицы) функций.

2.2.4. В условиях простой ставки (в руб.): 985, 895, 820, 460, 100, не имеет смысла.

В условиях сложной ставки (в руб.): 984, 891, 820, 551, 371, 19.

2.2.5. По сложной учетной ставке – 30,832 тыс. руб.; по смешанной схеме – 30,933 тыс. руб.

2.2.6. 14,186 тыс. руб., 814 руб.; 11,349 тыс. руб.; 3,651 тыс. руб.

2.2.7. Смешанную.

2.2.8. Схема учета векселя по кварталам (в тыс. руб.): 28,8; 27,648; 26,542; 25,480; 24,461. Векселедержатель получит 24,461 тыс. руб.

2.2.9. а) 113,574 тыс. руб.; б) 115,099 тыс. руб.; в) 116,074 тыс. руб.

2.2.10. 11,026 тыс. руб.

2.2.11. По сложной учетной ставке – 23,397 тыс. руб.; по смешанной схеме – 23,407 тыс. руб.

2.2.12. а) 0,898 года, или приблизительно 323 дня; б) 0,909 года, или приблизительно 327 дней.

2.2.13. 11,97%.

2.2.14. а) 10 лет, 13,513 года; б) 5 лет, 6,579 года; в) 2 года, 2,409 года; г) 1 год; д) 0,625 года, 0,431 года.

2.2.15. 19,77%; 18,35%.

2.2.16. За 3,151 года.

2.2.17. а) 2,064 года; б) 2,107 года.

2.2.18. а) 31,82%; б) 33,20%.

2.2.19. Первые условия для банка более выгодны.

2.2.20. Первый вариант предпочтительнее.

2.2.21. Например, если количество начислений в году 2, 4, 12, 24, то соответственно 22,56%, 21,92%, 21,53%, 21,43%.

2.2.22. 12,64%.

2.2.23. а) 24,63%; б) 24,93%.

2.2.24. а) 24,09%; б) 24,59%.

2.2.25. а) 44,492 тыс. руб., 26,492 тыс. руб.; б) 42,112 тыс. руб., 24,112 тыс. руб.

2.2.26. а) 29,802 тыс. руб.; б) 16,856 тыс. руб.

2.2.27. а) 118,998 тыс. руб.; б) 50,972 тыс. руб.

2.2.28. 14,435 тыс. руб.

2.2.29. В годах: а) 10 и 13,513; б) 5 и 6,579; в) 3,333 и 4,265; г) 2 и 2,409; д) 1; е) 0,667 и 0,5.

2.2.30. По учетной ставке: а) 50,025 тыс. руб.; б) 48,840 тыс. руб.; в) 48,600 тыс. руб. По процентной ставке: а) 47,205 тыс. руб.; б) 48,141 тыс. руб.; в) 48,366 тыс. руб.

2.2.31. Выгоднее 23,5 тыс. руб. через 5 лет.

2.2.32. 2536 руб.; 14,37%.

2.2.33. 39,59%.

2.2.34. а) 21,05%;
б) 22,18%;
в) 22,77%.

2.2.35. 29,44%.

2.2.36. 12,24%.

2.2.37. Приблизительно 32 дня.

2.2.38. а) 19,60%; б) 19,36%.

2.2.39. Менее 20 руб. 74 коп. за 1 долл.

2.2.40. 12%.

2.2.41. 9%.

2.2.42. 3,285 года; 3,204 года.

2.2.43. Фиксированный процент – 20,16%; амортизационные отчисления за пятый год – 77,821 тыс. руб.; стоимость оборудования на конец пятого года – 308,195 тыс. руб.

2.3. Непрерывная ставка

2.3.1. а) 17,200 тыс. руб.;
б) 31,340 тыс. руб.;
в) 57,106 тыс. руб.

2.3.2. Наращенные суммы (в руб.): 1250; 1234,57; 1227,74; 1223,46; 1221,47; 1221,41 и в остальных случаях – 1221,40.
Эффективные учетные ставки: 20%; 19%; 18,55%; 18,26% и в остальных случаях – 18,13%.

2.3.3. а) 69,960 тыс. руб.;
б) 74,632 тыс. руб.;
в) 72,885 тыс. руб.

2.3.4. 26,630 тыс. руб.

2.3.5. 9,1%.

2.3.6. 1,729 года; 1,801 года.

2.3.7. а) 42,364 тыс. руб.;
б) 57,186 тыс. руб.

2.3.8. 30,78%; не изменится.

2.3.9. а) 67,55%; б) 31%.

2.3.10. 32,21%; не зависит.

2.3.11. Второй.

2.3.12. 15,27%; 23,10%.

2.3.13. Лучше получить 20 тыс. руб. через 3 года.

2.3.14. 27,47%; 29,45%.

2.3.15. а) 13,863 года;
б) 2,773 года;
в) 1,386 года;
г) 0,693 года.

2.3.16. а) 28,342 тыс. руб.;
б) 231,446 тыс. руб.;
в) 60 тыс. руб.

2.3.17. а) 49,192 тыс. руб.;
б) 9,518 тыс. руб.

2.3.18. 151,522 тыс. руб.

2.3.19. 41,968 тыс. руб.

2.3.20. 10,894 тыс. руб.

2.3.21. 7403 руб.

2.3.22. 462,103 тыс. руб.

2.3.23. 15,306 тыс. руб.

2.3.24. 397,555 тыс. руб.

2.3.25. а) 35,300 тыс. руб.;
б) 45,326 тыс. руб.;
в) 65,949 тыс. руб.

2.3.26. 88,68%; 32,60%.

2.3.27. 0,374 года.

2.3.28. 6,49%.

2.3.29. 20,734 тыс. руб.; 15,5%.

2.3.30. 136,222 тыс. руб.

2.3.31. 8,320 тыс. руб.

2.3.32. 2484 долл.

2.3.33. Более 21 руб. 41 коп. за 1 долл.

2.3.34. Лучше воспользоваться валютным депозитом.

2.3.35. а) 3,872 года; б) 3,512 года; в) 3,386 года.

2.3.36. 60 тыс. руб.

2.3.37. 40 тыс. руб.

2.3.38. 3,781 года.

2.3.39. 4,548 года.

2.4. Эквивалентность ставок

2.4.1. а) под сложную ставку; б) под простую ставку.

2.4.2. 22,95%.

2.4.3. 32,84%

2.4.4. 21,03%.

2.4.5. 25,53%.

2.4.6. 16,64%.

2.4.7. 21,15%.

2.4.8. а) 26,49%; б) 29,38%.

2.4.9. 33,05%.

2.4.10. 19,28%.

2.4.11. 17,87%.

2.4.12. а) 19,09%; б) 18,51%; в) 18,37%; г) 18,23%.

2.4.13. а) 19,36%; б) 19,52%; в) 19,68%.

2.4.14. а) 18,08%; б) 23,31%.

2.4.15. 20,01%; 19,97%.

2.4.16. 21,55%.

2.4.17. 22,85%.

2.4.18. 31,26%.

2.5. Инфляция и начисление сложных и непрерывных процентов

2.5.1. Более: а) 64,5%; б) 60%; в) 57,23%.

2.5.2. 12,49%.

2.5.3. 9,92%

2.5.4. 1,51%.

2.5.5. Более: а) 57,35%; б) 54,88%.

2.5.6. 112,211 тыс. руб., более 18,69%; 72,261 тыс. руб., более 38,81%.

2.5.7. 0,8456.

2.5.8. 45,27%; 970,445 тыс. руб.

2.5.9. а) 55,76%, 588,605 тыс. руб.; б) 50,25%, 664,201 тыс. руб.; в) 49,11%, 685,698 тыс. руб.

2.5.10. 45,40%; 702,719 тыс. руб.

2.5.11. а) в 1,426 раза; б) в 1,508 раза; в) в 1,445 раза.

2.5.12. 39,08%.

2.5.13. а) 2,744 года; б) 1,551 года; в) 2,100 года.

2.5.14. 1,609 года.

2.5.15. а) нет; б) да.

2.5.16. а) 13,33%; б) 0; в) –12,26%.

2.5.17. 7,34%; 53,09%.

2.5.18. 19,02%; 52,22%.

2.5.19. 13,76%; 66,24%.

2.5.20. 20,01%; 21,79%.

2.5.21. 15,59%.

2.5.22. 16,96%.

2.5.23. 191,416 тыс. руб.; 22,28%.

2.5.24. 25,107 тыс. руб.; 25,54%.

2.5.25. 7,61%.

2.5.26. 17,93%.

2.5.27. 20,87%.

2.5.28. 7,46%.

2.6. Замена платежей и сроков их выплат

2.6.1. а) 11,293 тыс. руб.; 36,220 тыс. руб.

2.6.2. а) 7,809 тыс. руб.; б) 3,888 тыс. руб.; в) 6,057 тыс. руб.

2.6.3. а) 1,503 года; б) 5,036 года.

2.6.4. а) 3,503 года; б) 3,739 года; в) 3,618 года.

2.6.5. 42,555 тыс. руб., 2,434 года; 42,010 тыс. руб., 2,422 года.

2.6.6. а) 2,258 года; б) 2,347 года; в) 2,302 года.

2.6.7. Второй контракт выгоднее.

2.6.8. 29,612 тыс. руб.

2.6.9. а) 88,889 тыс. руб.; б) 93,389 тыс. руб.

2.6.10. 6,649 тыс. руб.

2.6.11. 12,825 тыс. руб.

2.6.12. 26,070 тыс. руб.

2.6.13. 16,64 тыс. руб.

2.6.14. 179,616 тыс. руб.

2.6.15. Второй покупатель предлагает более выгодные условия.

Глава 3. Аннуитеты

3.1. Постоянный аннуитет

3.1.1. В конце года (в тыс. руб.): а) 15,96; б) 95,431; в) 669,145. В начале года: а) 20,748; б) 124,060; в) 869,889.

3.1.2. Вариант б); 16,152 тыс. руб.

3.1.3. а) 144,166 тыс. руб. или 144,606 тыс. руб.; б) 147,596 тыс. руб.; в) 149,549 тыс. руб.

3.1.4. а) 213,843 тыс. руб.; б) 235,227 тыс. руб.

3.1.5. а) 1534,803 тыс. руб.; б) 1556,661 тыс. руб. и при снижении ставки – 1518,772 тыс. руб.

3.1.6. а) 1185,956 тыс. руб.; б) 1126,840 тыс. руб. и при увеличении ставки 1178,783 тыс. руб.

3.1.7. а) 22,875 тыс. руб.; б) 24,225 тыс. руб., 24,305 тыс. руб.; в) 24,920 тыс. руб., 25,020 тыс. руб.

3.1.8. а) 124,689 тыс. руб.; б) 122,618 тыс. руб.; в) 121,542 тыс. руб.

3.1.9. а) 676,944 тыс. руб.; б) 826,388 тыс. руб.; в) 859,856 тыс. руб.

3.1.10. Нет.

3.1.11. а) 47,698 тыс. руб.; б) 13,923 тыс. руб.; в) 8,772 тыс. руб.

3.1.12. а) 8,847 тыс. руб.; б) 1,877 тыс. руб.

3.1.13. а) 14,165 тыс. руб.; б) 2,372 тыс. руб.

3.1.14. 607,441 тыс. руб.

3.1.15. а) 281,767 тыс. руб.; б) 331,843 тыс. руб.; в) 346,940 тыс. руб.

3.1.16. а) 173,161 тыс. руб.; б) 176,773 тыс. руб.

3.1.17. а) 37,274 тыс. руб.; б) 35,279 тыс. руб.

3.1.18. а) 163,384 тыс. руб.; б) 150,994 тыс. руб.; в) 148,328 тыс. руб.

3.1.19. а) 17,408 тыс. руб.; б) 16,341 тыс. руб.; в) 14,920 тыс. руб.

3.1.20. 123,426 тыс. руб.

3.1.21. 2363,302 тыс. руб.

3.1.22. а) 3,442 года; б) 3,347 года; в) 3,312 года.

3.1.23. 4,079 года.

3.1.24. 230,26 тыс. руб.

3.1.25. Нет.

3.1.26. 8768 руб.

3.1.27. а) 9,583 года; б) 13,254 года; в) 17,895 года.

3.1.28. а) 20,513 тыс. руб.; б) 19,214 тыс. руб.; в) 17,805 тыс. руб.

3.1.29. а) 46,886 тыс. руб.; б) 44,294 тыс. руб.; в) 43,355 тыс. руб.

3.1.30. 124,020 тыс. руб.

3.1.31. Более чем на 5,39 тыс. руб. в год; более чем на 6,952 тыс. руб. в год.

3.1.32. 21,429 тыс. руб.

3.1.33. Постнумерандо: а) 20 тыс. руб.; б) 10 тыс. руб.; в) 1 тыс. руб. Пренумерандо: а) 21 тыс. руб.; б) 11 тыс. руб.; в) 2 тыс. руб.

3.1.34. 16,509 тыс. руб.

3.1.35. а) да; б) нет.

3.1.36. 800 тыс. долл.

3.1.37. Под с/х культуры (с/х – 950 тыс. руб.; нефть – 723,852 тыс. руб.).

3.1.38. а) 50 тыс. руб.; б) 46,512 тыс. руб.; в) 42,874 тыс. руб.

3.1.39. а) 278,267 тыс. руб.; б) 250 тыс. руб.; в) 240,133 тыс. руб.

3.1.40. Второй проект лучше; "да" при ставке менее 18,13%.

3.1.41. 218547 руб.; остаток основного долга на начало третьего года – 433015 руб., погашение в конце третьего года начисленных процентов и основного долга: 103924 руб. и 114623 руб.

3.1.42. 4710 руб. или приблизительно 13,08% основной суммы.

3.1.43. 5701 руб.

3.1.44. 65699 руб.

3.1.45. 160,583 тыс. руб.

3.1.46. Долг погашается за 4,923 года; остаток основного долга на начало третьего года – 287500 руб., погашение в конце третьего года начисленных процентов и основного долга: 71875 руб. и 78125 руб.; последняя уплата – 139649 руб.

3.1.47. 67157 руб.; остаток основного долга на начало второго квартала – 184035 руб., погашение в конце второго квартала начисленных процентов и основного долга: 8582 руб. и 58575 руб.

3.1.48. а) 7476 руб.; б) 7343 руб.

3.1.49. Долг погашается за 0,535 года (6,42 месяца); остаток основного долга на начало третьего месяца – 84171 руб., погашение в конце третьего месяца начисленных процентов и основного долга: 1580 руб. и 18420 руб.; последняя уплата – 8547 руб.

3.1.50. 282,375 тыс. руб.

3.1.51. Остаток основного долга на начало третьего года – 497801 руб., погашение в конце третьего года начисленных процентов и основного долга: 99560 руб. и 66894 руб.; остаток основного долга на начало пятого года – 356170 руб., погашение в конце пятого года начисленных процентов и основного долга: 89043 руб. и 93421 руб.

3.2. Непрерывный и переменный аннуитеты

3.2.1. 489,189 тыс. руб.

3.2.2. Схемы постнумерандо и пренумерандо: а) 58,917 тыс. руб., 58,945 тыс. руб.; б) 59,518 тыс. руб., 59,548 тыс. руб.

Непрерывный аннуитет:
а) 58,927 тыс. руб.;
б) 59,537 тыс. руб.

3.2.3. 1 262,77 млн руб.

3.2.4. 17,495 млн руб.

3.2.5. Будущая и приведенная стоимости:
а) 244,469 млн руб., 110,352 млн руб.;
б) 256,527 млн руб., 106,403 млн руб.

3.2.6. а) 172,841 тыс. руб.;
б) 166,667 тыс. руб.

3.2.7. Постнумерандо:
а) 140,858 тыс. руб.;
б) 49,318 тыс. руб.
Пренумерандо:
а) 183,115 тыс. руб.;
б) 64,113 тыс. руб.

3.2.8. Будущая и приведенная стоимости:
а) 91,628 тыс. руб., 22,778 тыс. руб.;
б) 111,786 тыс. руб., 27,789 тыс. руб.
Будущая и приведенная стоимости:
а) 73,247 тыс. руб., 18,208 тыс. руб.;
б) 89,361 тыс. руб., 22,214 тыс. руб.

3.2.9. 697 руб.; на 139 руб.

3.2.10. Имеет смысл приобрести акцию, так как ее истинная стоимость (16 тыс. руб.) больше ее цены.

3.2.11. Будущая и приведенная стоимости (аннуитет постнумерандо):
а) 63,260 тыс. руб.;
б) 21,186 тыс. руб.
Будущая и приведенная стоимости (аннуитет пренумерандо):
а) 75,912 тыс. руб.;
б) 25,423 тыс. руб.

3.2.12. 3,912 тыс. руб.

3.2.13. Не имеет смысла приобретать акцию, так как ее истинная стоимость (12,5 тыс. руб.) меньше ее цены.

3.2.14. 137,367 тыс. руб.

3.2.15. 158,727 тыс. руб.

3.3. Оценка аннуитета с периодом больше года

3.3.1. 100,891 тыс. руб.

3.3.2. а) 1742,045 тыс. руб.;
б) 1997,471 тыс. руб.

3.3.3. а) 9,003 тыс. руб.;
б) 8,217 тыс. руб.;
в) 7,941 тыс. руб.

3.3.4. 460,735 тыс. руб.

3.3.5. а) 1843,191 тыс. руб.;
б) 3411,563 тыс. руб.

3.3.6. а) 61,046 тыс. руб.;
б) 57,921 тыс. руб.;
в) 56,796 тыс. руб.

3.3.7. а) 44,327 тыс. руб.;
б) 5,245 тыс. руб.

3.3.8. а) 10,124 года;
б) 9,636 года;
в) 9,460 года.

3.3.9. а) 14,417 тыс. руб.;
б) 13,301 тыс. руб.;
в) 12,134 тыс. руб.

3.3.10. Постнумерандо:
а) 97,548 тыс. руб.;
б) 3,432 тыс. руб.
Пренумерандо:
а) 190,523 тыс. руб.;
в) 6,703 тыс. руб.

3.3.11. 934232 руб.; остаток основного долга на начало третьего трехлетнего периода – 1034596 руб., погашение в конце третьего трехлетнего периода начисленных процентов и основного долга: 753186 руб. и 181046 руб.

3.3.12. 14,881 тыс. руб.

3.3.13. 2151 руб.

3.3.14. 84,826 тыс. руб.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. *Ковалев В.В., Уланов В.А.* Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 1999.

2. *Кочович Е.* Финансовая математика: теория и практика финансово-банковских расчетов. – М.: Финансы и статистика, 1994.

Дополнительная литература

1. *Башарин Г.П.* Начала финансовой математики. – М.: Инфра-М, 1997.

2. *Брейли Р., Майерс С.* Принципы корпоративных финансов: Пер. с англ. – М.: ЗАО "Олимп-Бизнес", 1997.

3. *Бригхем Ю., Гапенски Л.* Финансовый менеджмент: Полный курс: В 2-х т.: Пер. с англ. /Под ред. В.В. Ковалева. – СПб.: Экономическая школа, 1997.

4. *Бухвалов А.В., Идельсон А.В.* Самоучитель по финансовым расчетам. – М.: Мир, Пресс-Сервис, 1997.

5. *Вебер М.* Коммерческие расчеты от А до Я. Формулы, примеры расчетов и практические советы: Пер. с нем. – М.: Изд-во "Дело и Сервис", 1999.

6. *Едронова В.Н., Мизиковский Е.А.* Учет и анализ финансовых активов: акции, облигации, векселя. – М.: Финансы и статистика, 1995.

7. *Капельян С.Н., Левкович О.А.* Основы коммерческих и финансовых расчетов. – НТЦ "АПИ", 1999.

8. *Ковалев В.В.* Введение в финансовый менеджмент. – М.: Финансы и статистика, 1999.

9. *Кутуков В.Б.* Основы финансовой и страховой математики: Методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. – М.: Дело, 1998.

10. *Лукасевич И.Я.* Анализ финансовых операций: Методы, модели, техника вычислений: Учеб. пособие для вузов – М Финансы, ЮНИТИ, 1998.

11. *Малыхин В.И.* Финансовая математика: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999.

12. *Мелкумов Я.С.* Теоретическое и практическое пособие по финансовым вычислениям. – М.: Инфра-М, 1996.

13. *Мицкевич А.А.* Деловая математика в экономической теории и практике. – Киров, 1995.

14. *Первозванский А.А., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра-М, 1994.

15. *Уотшем Т.Дж., Паррамоу К.* Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов.: Пер. с англ. /Под ред. М.Р. Ефимовой. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.

16. *Черкасов В.Е.* Финансовый анализ в коммерческом банке. – М.: ИНФРА-М, 1995.

17. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: "Дело Лтд", 1995.

18. *Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж.* Инвестиции: Пер. с англ. – М.: Инфра-М, 1997.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное пособие

Уланов Владимир Алексеевич

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИНАНСОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Редактор **И.М. Гумерова**
Младший редактор **И.П. Елкина**
Художественный редактор **Ю.И. Артюхов**
Технический редактор **И.Л. Ткаченко**
Корректоры **Г.Б. Абудеева, Н.П. Сперанская**
Обложка художника **О.В. Толмачева**
Компьютерная верстка **Е.Ф. Тимохиной**

ИБ № 4130

Лицензия ЛР № 010156 от 29.01.97

Сдано в набор 06.03.2000. Подписано в печать 24.08.2000
Формат 60x88/16. Гарнитура "Таймс". Печать офсетная
Усл. печ. л. 24,5. Уч.-изд. л. 21,71
Тираж 4000 экз. Заказ 2686. «С»151

Издательство «Финансы и статистика»
101000, Москва, ул. Покровка, 7
(метро «Китай-город», выход на ул. Маросейка)

Телефоны: (095) 925-35-02, 923-80-42, 923-18-68
Факс (095) 925-09-57
E-mail: mail@finstat.ru http://www.finstat.ru

Великолукская городская типография
Комитета по средствам массовой информации и связям
с общественностью администрации Псковской области
182100, Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12
E-mail: VTL@MAPT.RU