1 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «ПРОСТІ ВІДСОТКИ», «СКЛАДНІ ВІДСОТКИ»

1. Основні формули

	ПРОСТІ ВІДСОТКИ		СКЛАДНІ ВІДСОТКИ	
формула нарощення	$S = P(1 + ni)$	P – початкова сума грошей i – ставка простих процентів n – число років	$S = P(1+i)^n$	P – початкова сума грошей n – число лет i – ставка складних процентів
	$S = P\left(1 + \frac{i}{4}m\right)$	m – число кварталів	$S = P \cdot (1+i_1)^{n_1} \times$ $\times \ldots \times (1+i_k)^{n_k}$	$i_1, i_2, \ldots, i_k$ – послідовні значення процентних ставок в періодах $n_1, \ldots, n_k$
	$S = P\left(1 + \frac{i}{12}k\right)$	k – число місяців	$S = P \cdot (1+i)^a \cdot (1+bi)$	$n = a + b$ – строк позики a – ціле число років b – дробова частина року
дисконт суми S	$D = S - P$	D – дисконт	$D = S - P$	D – дисконт
процентні гроші (проценти)	$I = S - P = Pni$	S – нарощена сума	$I = S - P = (1+i)^n - 1$	S – нарощена сума
германська практика	звичайні проценти з наближеним числом днів позики за схемою 360/360	кількість днів року – 360, в повному місяці – 30 днів, в неповному – точна кількість днів		

французька практика	звичайні проценти з точним числом днів позики за схемою 365/360	кількість днів року – 360, кількість днів в місяці – фактична календарна		
англійська практика	точні проценти з точним числом днів позики за схемою 365/365	кількість днів року точна (365 або 366), кількість днів в місяці – фактична календарна		
МАТЕМАТИЧНЕ ДИСКОНТУВАННЯ				
математичне дисконтування (проценти нараховуються 1 раз на рік)	$P = \dfrac{S}{1+ni}$	S – задана сума P – вихідна сума	$P = \dfrac{S}{(1+i)^n} = S \cdot v^n$	S – задана сума P – вихідна сума
математичне дисконтування (проценти нараховуються m раз на рік)			$P = \dfrac{S}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn}} = S \cdot v^{mn}$	S – сучасна величина v – обліковий (дисконтний множник)

2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1 Визначити відсотки та нарощену суму, якщо позика складає 700 тис. грн., термін – 4 роки, відсотки – прості за ставкою 20% річних.

Розв'язання.

$I = 700 \cdot 4 \cdot 0,2 = 560$ (тис. грн.);

$S = P + I = 700 + 560 = 1260$ (тис. грн.)

Приклад 2 Позика – 10000 грн.; 7.03 – 5.10; 18 % простих річних. Знайти нарощену суму при різних методах визначення строку нарахування.

Розв'язання.

а) при германській практиці розрахункова кількість днів буде дорівнювати:

$$k = 24(\text{днів в березні}) + 180(6\,\text{місяців по 30 днів}) +$$
$$+5(\text{днів в жовтні}) = 209 \text{ днів}.$$

Тоді, $S = 10000\left(1 + \frac{209}{360} \cdot 0,18\right) = 11045$ грн.

б) при французькій практиці кількість днів дорівнює:

$$k = 24 + 31 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 5 = 212 \text{ днів}.$$

Тоді, $S = 10000\left(1 + \frac{212}{360} \cdot 0,18\right) = 11060$ грн.

в) при англійській практиці кількість днів така ж, як и при французькій, тобто $k = 212$ днів, тривалість року 365 днів. Тоді, $S = 10000\left(1 + \frac{212}{365} \cdot 0,18\right) = 11045,48$ грн.

Приклад 3 $S = 310000$ грн.; 180 днів; $i = 16\%$. Знайти теперішню вартість та дисконт.

Розв'язання.

Теперішня вартість:

$$P = \frac{S}{1 + ni} = \frac{310000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0,16} = 287329 \text{ (грн.)}.$$

Дисконт: $D = S - P = 310000 - 287329 = 22671$ (грн.).

Приклад 4 Вексель виданий на 1 млн. грн. Власник векселя облікував його у банку за 55 днів до терміну погашення за обліковою ставкою 20%. Знайти дисконт.

Розв'язання.

Отримана власником сума на день обліку:

$$P = 1000000 \cdot \left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0,2\right) = 969444,4 \text{ (грн.)}.$$

Дисконт складе $D = S - P = 1000000 - 969444{,}4 = 30555{,}6$ (грн.).

Приклад 5 Через 180 днів після підписання договору боржник сплатить 310 тис. грн. Кредит виданий під 16% річних. Часова база – 365 днів. Яка початкова сума боргу?

Розв'язання.

$$P = \frac{310000}{1 + \frac{180}{365} \cdot 0{,}16} = 287328{,}59 \text{ грн.}$$

Приклад 6 Яку суму треба покласти на рахунок в банку, щоб через 2 роки мати 13200 грн.? Нарахування відсотків в банку відбувається за схемою простих відсотків в кінці кожного кварталу за ставкою 16% річних.

Розв'язання.

$$P = \frac{S}{1 + \frac{0{,}16}{4} \cdot 8} = \frac{13200}{1 + \frac{0{,}16}{4} \cdot 8} = 10000 \text{ грн.}$$

Приклад 7 Який величини досягне борг, що дорівнює 1 млн. грн., через 5 років при зростанні за складною ставкою 15,5% річних?

Розв'язання.

За формулою $S = P\left(1+i\right)^n$ отримаємо

$$S = 1 \cdot \left(1 + 0{,}155\right)^5 = 2{,}05546422 \text{ млн. грн.}$$

Приклад 8 Обчислити нарощену суму і отриманий дохід за простими і складними відсотками, якщо 20 тис. грн. інвестуються на 3 роки під 10% річних.

Розв'язання.

а) по простих процентах:

$$S = P\left(1 + ni\right) = 20 \cdot \left(1 + 3 \cdot 0{,}1\right) = 26 \text{ тис. грн.,}$$

доход $I = 6$ тис. грн.

б) по складних процентах:

$$S = P\left(1+i\right)^n = 20 \cdot \left(1 + 0{,}1\right)^3 = 26{,}62 \text{ тис. грн.,}$$

доход $I = 6{,}62$ тис. грн.

Приклад 9 Позика була видана на 2 роки: з 01.05.06 по 01.05.08. Розмір позики – 10 млн. грн. Ставка 14% річних (англійська практика). Необхідно розподілити нараховані відсотки по календарним рокам.

Розв'язання.

За період с 01.05.06 по 31.12.06 (244 дні):

$$I_{06} = 10000 \cdot \left(\left(1 + 0{,}14\right)^{\frac{244}{365}} - 1 \right) = 915{,}4 \text{ тис. грн.}$$

За 2007 рік:

$$I_{07} = 10000 \cdot \left(1 + 0{,}14\right)^{\frac{244}{365}} \cdot \left(\left(1 + 0{,}14\right)^{1} - 1 \right) = 1528{,}2 \text{ тис. грн.}$$

За період с 01.01.08 по 01.05.08 (121 день):

$$I_{08} = 10000 \cdot \left(1 + 0{,}14\right)^{1\frac{244}{365}} \cdot \left(\left(1 + 0{,}14\right)^{\frac{121}{365}} - 1 \right) = 552{,}4 \text{ тис. грн.}$$

Таким чином, $I = I_{06} + I_{07} + I_{08} = 2996$ тис. грн.

Аналогічний результат можна обчислити для всього строку в цілому:

$$I = 10000 \cdot \left(\left(1 + 0{,}14\right)^{2} - 1 \right) = 2996 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 10 Термін позики – 5 років. Договірна базова процентна ставка – 12% річних плюс маржа 0,5% вперше 2 роки і 0,75% в решту життя. Знайти множник нарощення.

Розв'язання.

$$\left(1 + 0{,}12 + 0{,}005\right)^{2} \cdot \left(1 + 0{,}12 + 0{,}0075\right)^{3} = 1{,}81407.$$

Приклад 11 Кредит у розмірі 3 млн. грн., виданий на 3 роки і 160 днів. Ставка – 16,5% складних річних. Знайти суму боргу на кінець терміну.

Розв'язання.

Обчислимо строк кредиту:

$$n = 3 + \frac{160}{365} = 3{,}43836 \text{ роки.}$$

1. Загальний метод (за формулою складних відсотків):

$$S = 3000000 \cdot \left(1 + 0{,}165\right)^{3{,}43836} = 5071935{,}98 \text{ грн.}$$

2. Мішаний метод:

$$S = 3000000 \cdot \left(1 + 0{,}165\right)^{3} \cdot \left(1 + 0{,}43836 \cdot 0{,}165\right) = 5086595{,}98 \text{ грн.}$$

Приклад 12 Сума 100 тис. грн. покладена в банк, який виплачує складні відсотки за ставкою 8% за квартал. Обчисліть дохід клієнта за півтора року.

Розв'язання.

$$S = P\left(1 + i\right)^{n} = 100 \cdot \left(1 + 0{,}08\right)^{6} = 158{,}68743 \text{ тис. грн.,}$$

доход $I = 58{,}68743$ тис. грн.

Приклад 13 Банк нараховує складні відсотки за номінальною ставкою 10% річних. На рахунку 10 тис. Грн. Розрахуйте, яка сума буде на рахунку через 2 роки, якщо нарахування виконуються: а) щорічно; б) по півріччях; в) щоквартально.

Розв'язання.

а) $S = P\left(1+i\right)^{n} = 10 \cdot \left(1+0{,}1\right)^{2} = 12{,}1$ тис. грн.;

б) $S = 10 \cdot \left(1+0{,}1 \cdot \dfrac{1}{2}\right)^{4} = 12{,}15506$ тис. грн.;

в) $S = 10 \cdot \left(1+0{,}1 \cdot \dfrac{1}{4}\right)^{8} = 12{,}18403$ тис. грн.

Приклад 14 Який величини досягне борг, який дорівнює 1 млн. грн., через 5 років при зростанні за складною ставкою 15,5% річних, при цьому відсотки нараховуються не один раз на рік, а поквартально?

Розв'язання.

$$S = 1000000 \cdot (1+\frac{0{,}155}{4})^{20} = 2139049{,}01 \text{ грн.}$$

А при щорічному нарахуванні процентів:

$$S = 1000000 \cdot (1+0{,}155)^{5} = 2055464{,}22 \text{ грн.}$$

Приклад 15 Яка сума боргу через 25 місяців, якщо його початкова величина 500 тис. грн., відсотки складні, ставка 20% річних, нарахування поквартальне?

Розв'язання.

За умовою задачі число періодів нарощення $N = 25:3 = 8\frac{1}{3}$. Застосуємо два методи нарощення: загальний та мішаний.

1. Загальний метод:

$$S = 500000 \cdot \left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{8\frac{1}{3}} = 750840{,}04 \text{ грн.}$$

2. Мішаний метод:

$$S = 500000 \cdot \left(1+\frac{0{,}2}{4}\right)^{8} \cdot \left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{0{,}2}{4}\right) = 751039{,}85 \text{ грн.}$$

Приклад 16 Розмір позики, наданої на 28 місяців, дорівнює 20 млн. грош. од. Номінальна ставка дорівнює 60% річних; нарахування відсотків щоквартальне. Обчислити нарощену суму в трьох ситуаціях:

– на дробову частину нараховуються складні відсотки;
– на дробову частину нараховуються прості відсотки;
– дрібна частина не враховується.

Результати розрахунків порівняти.

Розв'язання.

Всього $N = 28:3 = 9\frac{1}{3}$ періодів нарахування, тобто 9 кварталів та 1 місяць:

1) $S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9\frac{1}{3}} = 73,713$ млн. грош. од.;

2) $S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,6}{4}\right) = 73,875$ млн. грош. од.;

3) $S = 20 \cdot \left(1 + \frac{0,6}{4}\right)^{9} = 70,358$ млн. грош. од.

З отриманих результатів розрахунку слід, що найбільшого значення нарощена сума досягає в другому випадку, тобто при нарахуванні на дробову частина простих відсотків. Таким чином, для позикодавця вигідніше другий варіант, так як підсумкова сума виходить максимальною, а для позичальника краще третій варіант, так як підсумкова сума є мінімальною.

Приклад 17 Сума в 5 млн. грн. виплачується через 5 років. Необхідно визначити її сучасну величину за умови, що застосовується ставка складних відсотків, що дорівнює 12% річних.

Розв'язання.

Дисконтний множник дорівнює

$$v^5 = (1 + 0,12)^{-5} = 0,56574.$$

Таким чином, початкова сума скоротилася майже на 44%. Сучасна величина дорівнює:

$$P = 5000 \cdot 0,56574 = 2837,1 \text{ тис. грн.}$$

2 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «БАНКІВСЬКИЙ ОБЛІК», «СТРОК ПОЗИКИ», «РОЗМІР СТАВКИ»

Банківський облік – метод, де проценти за користування позикою у вигляді дисконту нараховуються на суму, яку треба сплатити в кінці строку договору. При цьому застосовується облікова ставка.

1. Основні формули

<table>
<tr><th colspan="5">БАНКІВСЬКИЙ ОБЛІК</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">ПРОСТІ ВІДСОТКИ</th><th colspan="2">СКЛАДНІ ВІДСОТКИ</th></tr>
<tr><td rowspan="2">дисконтування (банківський облік)</td><td rowspan="2">$P = S \cdot (1 - nd)$</td><td rowspan="6">d – проста річна облікова ставка</td><td>$P = S \cdot (1 - d)^n$</td><td rowspan="6">d – складна річна облікова ставка
f – номінальна річна облікова ставка
m – число нарахувань відсотків на рік</td></tr>
<tr><td>$P = S \cdot \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">нарощення</td><td rowspan="2">$S = \frac{P}{1 - nd}$</td><td>$S = \frac{P}{(1 - d)^n}$</td></tr>
<tr><td>$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">дисконт</td><td rowspan="2">$D = Snd$</td><td>$D = S\left(1 - (1 - d)^n\right)$</td></tr>
<tr><td>$D = S\left(1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}\right)$</td></tr>
</table>

СТРОКИ ПОЗИКИ				
	ПРОСТІ ВІДСОТКИ		**СКЛАДНІ ВІДСОТКИ**	
строк позики (в роках) при нарощенні	$n=\dfrac{S-P}{Pi}=\dfrac{\frac{S}{P}-1}{i}$	P – вихідна сума S – необхідна сума i – проста річна ставка процентів d – облікова ставка n – кількість років K – часова база	$n=\dfrac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{\log(1+i)}$	d – складна річна облікова ставка f – номінальна річна облікова ставка m – число нарахувань відсотків на рік n – кількість років (логарифм можна взяти по будь-якій основі)
	$t=\dfrac{S-P}{Pi}K=\dfrac{\frac{S}{P}-1}{i}K$		$n=\dfrac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{m\cdot\log\left(1+\frac{j}{m}\right)}$	
строк позики (в роках) при дисконтуванні	$n=\dfrac{S-P}{Sd}=\dfrac{1-\frac{P}{S}}{d}$		$n=\dfrac{\log\left(\frac{P}{S}\right)}{\log(1-d)}$	
	$t=\dfrac{S-P}{Sd}K=\dfrac{1-\frac{P}{S}}{d}K$		$n=\dfrac{\log\left(\frac{P}{S}\right)}{m\cdot\log\left(1-\frac{f}{m}\right)}$	
формули збільшення позики в N разів	$n=\dfrac{N-1}{i}$	i – ставка простих процентів	$n=\dfrac{\ln N}{\ln(1+i)}$	i – ставка складних процентів
формули подвоєння	$n=\dfrac{1}{i}$		$n=\dfrac{\ln 2}{\ln(1+i)}$	

РОЗМІР СТАВКИ				
	ПРОСТІ ВІДСОТКИ		**СКЛАДНІ ВІДСОТКИ**	
річна ставка при нарощенні (процентна ставка)	$i=\dfrac{S-P}{Pn}=\dfrac{\frac{S}{P}-1}{n}=$ $=\dfrac{\frac{S}{P}-1}{t}K$	P – вихідна сума S – необхідна сума i – проста річна ставка процентів n – строк операції	$i=\sqrt[n]{\dfrac{S}{P}}-1$ $j=m\cdot\left(\sqrt[mn]{\dfrac{S}{P}}-1\right)$	i – складна річна процентна ставка j – номінальна річна процентна ставка m – число нарахувань відсотків на рік
річна ставка при дисконтуванні (облікова ставка)	$d=\dfrac{S-P}{Sn}=\dfrac{1-\frac{P}{S}}{n}=$ $=\dfrac{1-\frac{P}{S}}{t}K$	n – строк, який залишився до погашення	$d=1-\sqrt[n]{\dfrac{P}{S}}$ $f=m\cdot\left(1-\sqrt[mn]{\dfrac{P}{S}}\right)$	d – складна річна облікова ставка f – номінальна річна облікова ставка m – число нарахувань відсотків на рік

2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1 Тратта (перевідний вексель) виданий на суму 1 млн. грн. зі сплатою 17.11.16. Власник векселя врахував його в банку 23.09.16 по обліковій ставці 20% річних. Знайти дисконт.

Розв'язання.

Часовий період, що залишився до кінця терміну складе 55 днів. Отримана при обліку сума (без сплати комісійних) дорівнює:

$$P = 1000000 \cdot \left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0{,}2\right) = 969444{,}4 \text{ грн.}$$

Дисконт складатиме: $D = S - P = 1000000 - 969444{,}4 = 30555{,}6$ грн.

Приклад 2 Вексель на суму 30 тис. грн. з терміном погашення 6 вересня врахований 6 червня за банківської облікової ставки 6% річних. Визначити, яку суму отримає клієнт.

Розв'язання.

Проведемо дисконтування за 92 дня (тривалість року візьмемо 360 днів):

$$P = 30000\left(1 - 0{,}06 \cdot \frac{92}{360}\right) = 29540 \text{ грн.}$$

Приклад 3 Визначити термін платежу за векселем на суму 1000 у.од., якщо при його обліку за простою обліковою ставкою 36% річних отримана позика 600 у.од. При необхідності виконати корекцію дисконту так, щоб термін був з цілим кількістю днів (з розрахунку 365 днів у році).

Розв'язання.

З формули $d = \dfrac{1 - \dfrac{P}{S}}{t} K$ при $n = \dfrac{t}{K}$, отримаємо $t = \dfrac{K}{d}\left(1 - \dfrac{P}{S}\right)$. Звідки

$$t = \frac{365}{0{,}36}\left(1 - \frac{600}{1000}\right) \approx 405{,}56 \text{ днів.}$$

Округливши строк до 405 днів, скорегуємо величину отриманої позики:

$$P = 1000\left(1 - 0{,}36 \cdot \frac{405}{365}\right) = 600{,}55 \text{ у.од.}$$

Приклад 4 Тратта (перевідний вексель) виданий на 120 днів на суму 1 млн. грн. зі сплатою 17.11.16 за ставкою 20,5% річних. Власник векселя врахував його в банку 23.09.16 по обліковій ставці 20% річних. Знайти дисконт.

Розв'язання.

Нехай $n_1 = \dfrac{120}{360}$, тоді

$$P_2 = 1000000\left(1 + \frac{120}{360} \cdot 0{,}205\right)\left(1 - \frac{55}{360} \cdot 0{,}2\right) = 1035690 \text{ грн.}$$

Приклад 5 Платіжне зобов'язання сплатити через 60 днів 200 000 грн. з відсотками, що нараховуються за ставкою простих відсотків $i = 15\%$ річних, було враховано за 10 днів до терміну погашення по обліковій ставці $d = 12\%$. Визначити суму, одержувану при обліку.

Розв'язання.

$$P_2 = 200000\left(1 + \frac{60}{365} \cdot 0,15\right)\left(1 - \frac{10}{360} \cdot 0,12\right) = 204243,76 \text{ грн.}$$

Приклад 6 Платіжне зобов'язання сплатити через 100 днів 2 млн. грн. з відсотками, що нараховуються за ставкою простих відсотків $i = 20\%$ річних, було враховано за 40 днів до терміну погашення по обліковій ставці $d = 15\%$. Потрібно визначити суму, одержувану при обліку.

Розв'язання.

$$P_2 = 2\left(1 + \frac{100}{365} \cdot 0,2\right)\left(1 - \frac{40}{360} \cdot 0,15\right) = 2,074 \text{ млн. грн.}$$

Слід зазначити, що в останніх двох прикладах при нарощенні використовувалася тимчасова база, яка дорівнює 365 днів, а при дисконтуванні – 360.

Приклад 7 Позика в розмірі 1 млн. грн. видана 20.01 до 05.10 включно під 18% річних. Визначити суму, яку треба проставити в векселі.

Розв'язання.

Визначимо нарощену суму за умови, що відсотки нараховуються за простою обліковою ставкою $d = 18\%$:

$$S = \frac{P}{1 - nd} = \frac{1000000}{1 - \frac{258}{360} \cdot 0,18} = 1148105,62 \text{ грн.}$$

Приклад 8 Вексель 50 тис. грн. терміном на 3 роки врахований в банку через один рік. Визначити ціну продажу і величину дисконту, якщо облікова ставка банку 8%.

Розв'язання.

За умовою задачі $S = 50$ тис. грн. настане через 3 роки. Ціну продажу обчислимо за формулою $P = S(1 - nd)$ при $n = 2$ роки:

$$P = 50 \cdot (1 - 2 \cdot 0,08) = 42 \text{ тис. грн.}$$

Величина дисконту: $D = S - P = 50 - 42 = 8$ тис. грн.

Приклад 9 Власник векселя 100 тис. грн. терміном погашення через 100 днів вирішив його продати банку через 20 днів по обліковій ставці 10% річних. Яку суму заплатить йому банк?

Розв'язання.

Ціна продажу векселя обчислимо за формулою $P = S(1 - nd)$, взявши за тимчасову базу 360 днів:

$$P = 100 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{80}{360}\right) = 97{,}778 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 10 Громадянин А зайняв у громадянина Б 20000 грн., видавши вексель із зобов'язанням повернути через три місяці 22000 грн. Під який річний процент видано цей вексель?

Розв'язання.

Сума процентів за три місяці складає 2000 грн. Отже,

$$2000 = 20000 \cdot \frac{3}{12} \cdot i \Rightarrow i = 0{,}4,$$

тобто річна ставка процентів за векселем 40%.

Приклад 11 Громадянин А видав громадянину Б вексель на 5000 $ під 40% річних на 90 днів. Громадянин Б через 30 днів врахував вексель в банку за обліковою ставкою 20% річних. Скільки він отримав? Визначити прибутковість операції для продавця і для банку.

Розв'язання.

Вартість векселя за строком погашення дорівнює:

$$S = P(1 + ni) = 5000 \cdot \left(1 + 0{,}4 \cdot \frac{30}{360}\right) = 5500 \text{ доларів.}$$

Ціна продажу векселя в банку:

$$P = S(1 - nd) = 5000 \cdot \left(1 - 0{,}2 \cdot \frac{60}{360}\right) = 5317 \text{ доларів.}$$

Прибутковість операції враховує фактор часу. Тому для громадянина Б, який отримав 317$ за 30 днів прибутковість обчислюється таким чином:

$$\frac{317}{5000} \cdot \frac{360}{30} \cdot 100 = 76\%.$$

Для банка, який отримав $5500 - 5317 = 183\$$ за 60 днів, прибутковість буде:

$$\frac{183}{5317} \cdot \frac{360}{60} \cdot 100 = 20{,}6\%.$$

Приклад 12 Яка повинна бути тривалість позички в днях для того, щоб борг, рівний 100 тис. грн., виріс до 120 тис. грн. за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 25% річних при точному підрахунку днів?

Розв'язання.

За формулою $t = \frac{S - P}{Pi} K$ знаходимо

$$t = \frac{120 - 100}{100 \cdot 0{,}25} \cdot 365 = 292 \text{ дні.}$$

Приклад 13 Визначити прибутковість операції для кредитора, якщо їм надана позика в розмірі 2 млн. грн. на 100 днів і контракт передбачає суму погашення боргу 2,5 млн. грн. Прибутковість висловити у вигляді простої ставки відсотків i і облікової ставки d. Тимчасову базу прийняти рівною $K=360$ днів.

Розв'язання.

$$i=\frac{S-P}{Pt}K=\frac{2,5-2}{2\cdot 100}\cdot 360=0,9\text{, тобто 90\%,}$$

$$d=\frac{S-P}{St}K=\frac{2,5-2}{2,5\cdot 100}\cdot 360=0,72\text{, тобто 72\%.}$$

Приклад 14 Визначити прибутковість операції для кредитора, якщо їм надана позика в розмірі 200 000 грн. на 60 днів і контракт передбачає суму погашення боргу 210 000 грн. Прибутковість висловити у вигляді простої ставки відсотків i і облікової ставки d. Тимчасову базу прийняти рівною $K=360$ днів.

Розв'язання.

$$i=\frac{S-P}{Pt}K=\frac{210000-200000}{200000\cdot 60}\cdot 360=0,3\text{, тобто 30\%;}$$

$$d=\frac{S-P}{St}K=\frac{210000-200000}{210000\cdot 60}\cdot 360=0,286\text{, тобто 28,6\%.}$$

Приклад 15 Боргове зобов'язання на суму 5 млн. грн., термін оплати якого настає через 5 років, продано з дисконтом по складній обліковій ставці 15% річних. Знайти розмір суми, отриманої за борг, і величину дисконту (в тис. грн.).

Розв'язання.

$$P=5000\cdot(1-0,15)^5=2218,5\text{ тис. грн.,}$$

$$D=S-P=5000-2218,5=2781,5\text{ тис. грн.}$$

Якщо застосувати просту облікову ставку того же розміру, то

$$P=5000\cdot(1-5\cdot 0,15)=1250\text{ тис. грн.,}$$

$$D=5000-1250=3750\text{ тис. грн.}$$

Приклад 16 Яку суму слід проставити в векселі, якщо реально видана сума дорівнює 20 млн. грн., термін погашення 2 роки. Вексель розраховується, виходячи зі складної річної облікової ставки 10%.

Розв'язання.

$$S=\frac{20}{(1-0,1)^2}=24,691358\text{ млн. грн.}$$

Приклад 17 Розв'язати попередню задачу за умови, що нарощення за складною обліковою ставкою здійснюється не один, а 4 рази на рік.

Розв'язання.

$$S=\frac{20}{\left(1-\frac{0,1}{4}\right)^8}=24,490242 \text{ млн. грн.}$$

Приклад 18 Вексель 500 тис. грн. терміном на 5 років видано під 10% річних складних з нарахуванням по півріччях. Через 3 роки вексель враховано за складною ставкою 15% річних. Визначити ціну продажу.

Розв'язання.

Майбутня вартість векселя за терміном погашення дорівнює:

$$S=500\cdot\left(1+\frac{0,1}{2}\right)^{10}=815 \text{ тис. грн.}$$

Ціна продажу:

$$P=815\cdot\left(1-\frac{0,15}{2}\right)^4=815\cdot 0,925^4=815\cdot 0,732=596,58 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 19 Знайти строки подвоєння для $i_{\text{пр}}=i_{\text{сл}}=22,5\%$.

Розв'язання.

$$n=\frac{1}{0,225}=4,44; \qquad n=\frac{\ln 2}{\ln(1+0,225)}=3,04.$$

Приклад 20 Розрахувати, за скільки років борг збільшиться вдвічі при ставці простих і складних відсотків дорівнює 10%. Для ставки складних відсотків розрахунки виконати по точної та наближеній формулах. Результати порівняти.

Розв'язання.

При простих процентах: $n=\frac{1}{i_{\text{пр}}}=\frac{1}{0,1}=10$ років.

При складних процентах та точній формулі:

$$n=\frac{\ln 2}{\ln(1+i_{\text{сл}})}=\frac{0,693147}{\ln(1+0,1)}=\frac{0,693147}{0,09531018}=7,27 \text{ років.}$$

При складних процентах та наближеній формулі:

$$n=\frac{0,7}{i}=\frac{0,7}{0,1}=7 \text{ років.}$$

Таким чином, однакове значення ставок простих і складних відсотків призводить до різних результатів, при малих значеннях ставки складних відсотків точна і наближена формули дають практично однакові результати.

Приклад 21 Розрахувати, за скільки років борг збільшиться вдвічі при ставці простих і складних відсотків, яка дорівнює 3%. Для ставки складних відсотків розрахунки виконати по точній та наближеній формулах. Результати порівняти.

Розв'язання.

При простих процентах: $n = \dfrac{1}{i_{\text{пр}}} = \dfrac{1}{0,03} = 33,33$ років.

При складних процентах та точній формулі:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + i_{\text{сл}}\right)} = \frac{0,693147}{\ln\left(1 + 0,03\right)} = 23,45 \text{ років.}$$

При складних процентах та наближеній формулі:

$$n = \frac{0,7}{i} = \frac{0,7}{0,03} = 23,33 \text{ років.}$$

Таким чином, однакове значення ставок простих і складних відсотків призводить до різних результатів, при малих значеннях ставки складних відсотків точна і наближена формули дають практично однакові результати.

Приклад 22 За який термін в роках сума, що дорівнює 75 млн. грн., досягне 200 млн. грн. при нарахуванні відсотків за складною ставкою 15% раз на рік і поквартально?

Розв'язання.

За формулами $n = \dfrac{\log\left(\dfrac{S}{P}\right)}{\log\left(1 + i\right)}$ і $n = \dfrac{\log\left(\dfrac{S}{P}\right)}{m \cdot \log\left(1 + \dfrac{j}{m}\right)}$ отримаємо відповідно:

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{200}{75}\right)}{\log\left(1 + 0,15\right)} = 7,0178 \text{ років;} \qquad n = \frac{\log\left(\dfrac{200}{75}\right)}{4 \cdot \log\left(1 + \dfrac{0,15}{4}\right)} = 6,6607 \text{ років.}$$

Приклад 23 Ощадний сертифікат куплений за 100 тис. грн., викупна його сума 160 тис. грн., термін 2,5 років. Який рівень прибутковості у вигляді річної ставки складних відсотків?

Розв'язання.

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[2,5]{\frac{160}{100}} - 1 = 0,20684 \text{ або } 20,684\%.$$

Приклад 24 Термін до погашення векселя дорівнює 2 років. Дисконт при його обліку склав 30%. Який складної річної облікової ставки відповідає цей дисконт?

Розв'язання.

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}} = 1 - \sqrt[2]{\frac{P}{S}} = 1 - \sqrt{\frac{0,7S}{S}} = 1 - \sqrt{0,7} = 0,16334 \text{ або } 16,334\%.$$

3 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «НОМІНАЛЬНА ТА ЕФЕКТИВНА СТАВКИ»

1. Основні формули

НОМІНАЛЬНА ТА ЕФЕКТИВНА СТАВКИ		
формула нарощення процентів m раз на рік	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$	j – номінальна ставка m – число періодів нарахування в рік
	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{\frac{N}{\tau}}$	$\frac{N}{\tau}$ – число періодів нарахування в рік τ – період нарахування процентів
	$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{a} \times$ $\times \left(1 + b\frac{j}{m}\right)$	a – ціле число періодів нарахування, тобто $a = \left[\frac{N}{\tau}\right]$ – ціла частина від ділення всього строку позики N на період нарахування τ; b – дробова частина періоду нарахування ($b = \frac{N}{\tau} - a$)

назва	**формула**	**складові**
ефективна процентна ставка (річна ставка складних процентів, яка дає той самий результат, що й нарахування по номінальній ставці m раз на рік)	$i_{эф} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1$	j – номінальна ставка (складних процентів, яка нараховується m раз на рік)
номінальна ставка через ефективну	$j = m\left(\sqrt[m]{1 + i} - 1\right)$	
ефективна облікова ставка (характеризує результат дисконтування за рік та знаходиться шляхом прирівнювання множників дискон-	$d_{эф} = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}$	f – номінальна річна облікова ставка

тування по річній обліковій ставці й по номінальній обліковій ставці m раз на рік)		
номінальна облікова ставка	$f = m \cdot \left(1 - \sqrt[m]{1-d}\right)$	
еквівалентна заміна номінальної ставки	$j_2^{(m_2)} = m_2 \left(\left(1 + \frac{j_1^{(m_1)}}{m_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1 \right)$	$j^{(m)}$ – розмір номінальної ставки та число нарахувань за рік m_2 – значення нової ставки

	ПРОСТІ ВІДСОТКИ		**СКЛАДНІ ВІДСОТКИ**	
процентна ставка	$i_{\text{экв}} = \frac{d}{1-nd}$	d – облікова проста ставка	$i_{\text{экв}} = \frac{d}{1-d}$	d – облікова складна ставка
облікова ставка	$d_{\text{экв}} = \frac{i}{1+ni}$	i – процентна проста ставка	$d_{\text{экв}} = \frac{i}{1+i}$	i – процентна складна ставка

2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1 Знайти розмір ефективної ставки, якщо номінальна ставка дорівнює 25% при щомісячному нарахуванні відсотків.

Розв'язання.

$$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{12} - 1 = 0,280732\,.$$

Для сторін, які беруть участь в угоді, байдуже, застосувати ставку 25% при щомісячному нарахуванні відсотків або річну (ефективну) ставку 28,0732%.

Приклад 2 Визначити номінальну ставку $j^{(4)}$, яка беззбитково замінює ставку $j^{(12)} = 25\%$ в Прикладе 1.

Розв'язання.

$$j^{(4)} = 4 \cdot \left(\left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{\frac{12}{4}} - 1 \right) = 0,25524\,.$$

Таким чином, скорочення кількості нарахувань зажадає збільшення ставки з 25% до 25,524%.

Приклад 3 Обчислити ефективну ставку відсотка, якщо банк нараховує відсотки щоквартально, виходячи з номінальної ставки 10% річних.

Розв'язання.

$$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4} - 1 = 0,1038, \text{ тобто } 10,38\%.$$

Приклад 4 Визначити якою повинна бути номінальна ставка при щоквартальному нарахуванні відсотків, щоб забезпечити ефективну ставку 12% річних.

Розв'язання.

$$j = 4\left(\sqrt[4]{1 + 0,12} - 1\right) = 0,11495, \text{ тобто } 11,495\%.$$

Приклад 5 Річна ефективна процентна ставка становить 45%. обчислити квартальну ефективну процентну ставку і відповідну номінальну.

Розв'язання.

Обчислимо квартальну ефективну ставку:

$$i_{кв} = \sqrt[m]{1 + i} - 1 = \sqrt[4]{1 + 0,45} - 1 = 0,097 \text{ або } 9,7\%.$$

Номінальна ставка при нарахуванні по кварталах:

$$j = m\left(\sqrt[m]{1 + i} - 1\right) = 4 \cdot 0,097 = 0,388 \text{ або } 38,8\%.$$

Приклад 6 Визначити номінальну ставку з нарахуванням по півріччях, яка еквівалентна ставкою 24% з щомісячним нарахуванням.

Розв'язання.

Обчислимо річну ефективну ставку:

$$i_{эф}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1=\left(1+\frac{0,24}{12}\right)^{12}-1=0,268.$$

Номінальна ставка буде

$$j=m\cdot\left(\sqrt[m]{1+i}-1\right)=2\cdot\left(\sqrt{1+0,268}-1\right)=0,25 \text{ або } 25\%.$$

Приклад 7 Фінансова компанія встановила щоденне збільшення вкладів 5 грн. на кожну тисячу. Визначити ефективну річну ставку відсотків при укладанні договору з компанією на 3 місяці, на півроку і на рік. (Рік не високосний)

Розв'язання.

Річна ефективна ставка: $i_{эф}=\left(1+0,005\right)^{365}-1=5,17$ або 517%.

Річна ставка при укладенні договору на 3 місяці, еквівалентна $i_{эф}=5,17$:

$$j^{(4)}=4\left(\sqrt[4]{1+5,17}-1\right)=4\left(\sqrt[4]{6,17}-1\right)=4\cdot 0,575=2,30 \text{ або } 230\%.$$

Річна ставка при укладенні договору на півроку, еквівалентна $i_{эф}=5,17$:

$$j^{(2)}=2\left(\sqrt{1+5,17}-1\right)=2\left(\sqrt{6,17}-1\right)=2\cdot 1,484=2,97 \text{ або } 297\%.$$

Приклад 8 Визначити значення облікової ставки банку, еквівалентної ставці простих відсотків 35% річних.

Розв'язання.

$$d_{экв}=\frac{i}{1+ni}=\frac{0,35}{1+0,35}=0,239259 \text{ або } 23,93\%.$$

Приклад 9 Боргове зобов'язання на суму 5 млн. Грн., Термін оплати якого настає через 5 років. Визначити суму, отриману при поквартальному обліку за номінальною обліковою ставкою 15%, і ефективну облікову ставку.

Розв'язання.

Маємо $f=0,15$; $m=4$; $n=5$; $m\cdot n=20$.

$$P=5000\cdot\left(1-\frac{0,15}{4}\right)^{20}=2328,0 \text{ тис. грн.}$$

Ефективна облікова ставка складає

$$d=1-\left(1-\frac{0,15}{4}\right)^{4}=0,14177 \text{ або } 14,177\%.$$

4 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «НЕПЕРЕВНІ ПРОЦЕНТИ»

1. Основні формули

НЕПЕРЕВНІ ПРОЦЕНТИ				
	по постійній ставці		**по змінній ставці**	
нарощена сума	$S = Pe^{nj} = Pe^{\delta n}$	δ – сила росту, при $m \to \infty$ є номінальною ставкою процентів j	$S = Pe^{\int_0^n \delta_t dt}$	$\delta_t = f(t)$ – сила росту змінюється в часі за деяким законом, представленим в вигляді неперервної суми функцій часу
дисконтування	$P = Se^{-\delta n}$		$P = Se^{-\int_0^n \delta_t dt}$	
строк позики при нарощені	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}$		$n = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \ln\left[1 + \dfrac{\ln a \cdot \ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\delta}\right]$	a – приріст сили росту в одиницю часу
процентна ставка при нарощені	$\delta = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{n}$		$\delta = \dfrac{\ln a \cdot \ln\left(\frac{S}{P}\right)}{a^n - 1}$	
	лінійна функція сили росту $\delta_t = \delta + at$		**експоненціальна функція сили росту** $\delta_t = \delta a^t$	
множник нарощення	$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}$		$q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot \left(a^n - 1\right)}$	δ – начальне значення сили росту
зв'язок дискретних та неперервних процентних ставок	$\delta = \ln(1+i)$			
	$i = e^{\delta} - 1$			

2. Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1 Сума, на яку нараховуються неперервні відсотки, дорівнює 2 млн. грн., сила росту 10%, термін 5 років. Визначити нарощену суму.

Розв’язання.

Нарощена сума, згідно формули $S = Pe^{nj} = Pe^{\delta n}$, складатиме

$$S = Pe^{\delta n} = 2 \cdot e^{0,1\cdot 5} = 3,29774425 \text{ млн. грн.}$$

Приклад 2 Визначити сучасну вартість платежу з прикладу 1 за умови, що дисконтування проводиться за силою зростання 12% та по дискретної складної облікової ставки такого ж розміру.

Розв’язання.

Отримаємо в тис. грн.:

$$P = 5000 \cdot e^{-0,12\cdot 5} = 2744, \qquad S = 5000 \cdot (1 - 0,12)^5 = 2639.$$

Приклад 3 Використовуючи умову приклада 1, отримаємо, що неперервне нарощення за ставкою 10% рівнозначно нарощенню за той же термін дискретних складних відсотків за річною ставкою.

Розв’язання.

Знаходимо

$$i = e^{0,1} - 1 = 0,10517.$$

В підсумку отримаємо

$$S = 2 \cdot (1 + 0,10517)^5 = 3,29774425 \text{ млн. грн.}$$

Приклад 4 Річна ставка складних відсотків дорівнює 15%, чому дорівнює еквівалентна сила зростання.

Розв’язання.

Скористаємося формулою $\delta = \ln(1+i)$:

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1 + 0,15) = 0,13976,$$

тобто еквівалентна сила росту дорівнює 13,976%.

Приклад 5 Нехай початкове значення сили росту дорівнює 8%, процентна ставка неперервно й лінійно змінюється, приріст за рік становить 2% ($a = 0,02$). Термін нарощення 5 років. Знайти множник нарощення. Розглянути випадок, коли сила зростання лінійно зменшується, тобто $a = -0,02$.

Розв’язання.

Для розрахунку множника нарощення скористаємося формулою $q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}}$:

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = e^{0,08\cdot 5 + \frac{0,02\cdot 5^2}{2}} = e^{0,65} = 1,91554.$$

У разі, коли сила зростання лінійно зменшується, тобто $a = -0,02$, будемо мати

$$q = e^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = e^{0,08 \cdot 5 - \frac{0,02 \cdot 5^2}{2}} = e^{0,15} = 1,16183 .$$

Приклад 6 Нехай початкове значення сили росту дорівнює 8%, процентна ставка неперервно й експоненціально змінюється, приріст за рік становить 20% ($a = 1,2$). Термін нарощення 5 років. Знайти множник нарощення.

Розв'язання.

Для розрахунку множника нарощення скористаємося формулою $q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot \left(a^n - 1\right)}$:

$$q = e^{\frac{\delta}{\ln a} \cdot \left(a^n - 1\right)} = e^{\frac{0,08}{\ln 1,2} \cdot \left(1,2^5 - 1\right)} = e^{0,65305} = 1,92139 .$$

Приклад 7 Ставка неперервного дисконтування дорівнює 7,5%. Яку суму потрібно покласти на рахунок, щоб через 3 роки отримати 50 тис. грн.?

Розв'язання.

За умовою $\delta = 0,075$. Використовуючи формулу $P = Se^{-\delta n}$, отримаємо:

$$P = 50000 \cdot e^{-0,075 \cdot 3} = 50000 \cdot e^{-0,225} = 50000 \cdot 0,802 = 40100 \text{ грн.}$$

Приклад 8 Обрати найбільш вигідний варіант вкладення грошей, обчисливши ефективні річні ставки, якщо банк пропонує варіанти:

а) 12% річних;

б) 3% – щоквартальне нарахування;

в) 6% – по півріччях;

г) неперервне нарахування відсотків з інтенсивністю 12%.

Розв'язання.

а) 12% річних при нарахуванні за рік є ефективною ставкою;

б) при 3% за кожен квартал отримаємо:

$$i = \left(1 + 0,03\right)^4 - 1 = 1,1257 - 1 = 0,1257 \text{ або } 12,57\%.$$

в) при 6% за півріччя отримаємо:

$$i = \left(1 + 0,06\right)^2 - 1 = 1,1236 - 1 = 0,1236 \text{ або } 12,36\%.$$

г) якщо $\delta = 0,075$, то за формулою $i = e^{\delta} - 1$ отримаємо:

$$i = e^{0,12} - 1 = 1,1275 - 1 = 0,1275 \text{ або } 12,75\%.$$

Таким чином, найбільш вигідний варіант – неперервне нарахування відсотків.

Приклад 9 Банк нараховує неперервні відсотки за вкладами, причому за 1-й рік ставка дорівнює 9%, а за кожен наступний рік зберігання вкладу ставка збільшується на 1%. На скільки відсотків збільшиться початкова сума за 3 роки і при якій річній ставці складних відсотків можна досягти такого ж фінансового результату?

Розв'язання.

За три роки:

$$S = P \cdot e^{0,09} \cdot e^{0,10} \cdot e^{0,11} = P \cdot e^{0,30};$$

$$e^{0,30} = 1,3499; \qquad i = 1,3499 - 1 = 0,3499,$$

тобто за три роки початкова сума збільшиться на 34,99%.

Визначимо тепер річну ставку:

$$(1+i)^3 = 1,3499 \Rightarrow i = \sqrt[3]{1,3499} - 1 = 0,105 \text{ або } 10,5\%.$$

5 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «РОЗРАХУНКИ В УМОВАХ ІНФЛЯЦІЇ»

1. Основні формули

<table>
<tr><th colspan="5">РОЗРАХУНКИ В УМОВАХ ІНФЛЯЦІЇ</th></tr>
<tr><td colspan="2">індекс купівельної спроможності</td><td>$J_n = \frac{1}{J_p}$</td><td colspan="2">J_p – індекс цін</td></tr>
<tr><td colspan="2">реально нарощена сума грошей, з урахуванням їх купівельної спроможності</td><td>$C = \frac{S}{J_p}$</td><td colspan="2">S – нарощена сума за n років;
J_p – індекс цін</td></tr>
<tr><td></td><th colspan="2">ПРОСТІ ВІДСОТКИ</th><th colspan="2">СКЛАДНІ ВІДСОТКИ</th></tr>
<tr><td>нарощена сума к кінцю строку позики з урахуванням падіння купівельної спроможності грошей</td><td>$C = \frac{P(1+ni)}{J_p}$</td><td rowspan="5">$J_p = \prod_{t=1}^{n}(1+h_t)$ – в загальному випадку;
$J_p = (1+h)^n$ – при незмінному темпі росту цін h
h – темп інфляції
r – брутто-ставка</td><td>$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p}$</td><td rowspan="5">$J_p = \prod_{t=1}^{n}(1+h_t)$ – в загальному випадку;
$J_p = (1+h)^n$ – при незмінному темпі росту цін h
h – темп інфляції
r – брутто-ставка
i – реальна ставка</td></tr>
<tr><td>індексація початкової суми P</td><td>$S = PJ_p(1+ni)$</td><td>$S = PJ_p(1+i)^n$</td></tr>
<tr><td>процентна ставка, що компенсує інфляцію</td><td>$i = \frac{J_p - 1}{n}$</td><td>$i = \sqrt[n]{J_p} - 1$</td></tr>
<tr><td>річна реальна ставка процентів</td><td>$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{J_p} - 1\right)$</td><td>$i = \frac{1+r}{1+h} - 1 = \frac{r-h}{1+h}$</td></tr>
<tr><td>брутто-ставка – скорегована ставка, тобто збільшена на величину інфляційної премії</td><td>$r = \frac{(1+ni)J_p - 1}{n}$</td><td>$r = i + h + ih$
(формула Фішера)</td></tr>
<tr><td>інфляційна премія</td><td colspan="2">$h + ih$</td><td colspan="2">i – реальна ставка
h – річний темп інфляції</td></tr>
</table>

2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1 Передбачається, що темп інфляції складе 20% в рік. Яку ставку складних відсотків слід вказати в договорі на відкриття депозитного рахунку, щоб реальна прибутковість становила 10%? Чому дорівнює інфляційна премія?

Розв'язання.

Брутто-ставка обчислюється по формулі Фішера:

$$r = i + h + ih = 0,2 + 0,1 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,32 \text{ або } 32\%.$$

Інфляційна премія $h + ih = 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,22$ або 22%.

Приклад 2 Кредит у розмірі 500 000 грн. виданий на 2 роки. Реальна дохідність операції повинна складати 20% річних за складною ставкою відсотків. Очікуваний рівень інфляції становить 15% на рік. Визначити множник нарощення, що враховує інфляцію, і нарощену суму.

Розв'язання.

Множник нарощення:

$$J_p \left(1 + i\right)^n = \left(1 + 0,15\right)^2 \cdot \left(1 + 0,2\right)^2 = 1,9.$$

Нарощена сума:

$$S = PJ_p \left(1 + i\right)^n = 50000 \cdot 1,9 = 950000 \text{ грн.}$$

Приклад 3 На депозит зі ставкою 12% річних поміщені грошові кошти строком на 1 рік. Інфляція становить 10% на рік. Знайти реальну ставку відсотків для випадку простих і складних відсотків.

Розв'язання.

При нарахуванні простих відсотків річна реальна ставка визначається формулою:

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + nr}{\left(1 + h\right)^n} - 1\right) = \frac{1 + 0,12}{1 + 0,1} - 1 = 0,018 \text{ або } 1,8\%.$$

При нарахуванні складних відсотків річна реальна ставка визначається формулою:

$$i = \frac{r - h}{1 + h} = \frac{0,12 - 0,1}{1 + 0,1} = 0,0198 \text{ або } 1,98\%.$$

Приклад 4 Розрахувати реальну річну ставку для наступних умов: річний темп інфляції – 20%, брутто-ставка – 25% річних, термін – 0,5 року.

Розв'язання.

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1 + nr}{\left(1 + h\right)^n} - 1\right) = \frac{1}{0,5}\left(\frac{1 + 0,5 \cdot 0,25}{\left(1 + 0,2\right)^{0,5}} - 1\right) = 0,05404 \text{ або } 5,4\%.$$

Приклад 5 Банк нараховує відсотки за вкладом за номінальною ставкою 12% річних з щомісячною капіталізацією. Середньорічний темп інфляції 2%. Знайти реальну прибутковість операції.

Розв'язання.

Реальну дохідність операції забезпечує брутто-ставка. Мова йде про складні відсотках. Знайдемо ефективну ставку відсотків:

$$i_{\text{эф}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}1047 \text{ або } 10{,}47\%.$$

Таким чином, $i_{\text{эф}} = r = 10{,}47\%$.

Знаходимо реальну прибутковість у вигляді складної процентної ставки:

$$i = \frac{r - h}{1 + h} = \frac{0{,}1047 - 0{,}02}{1 + 0{,}02} = 0{,}0830 \text{ або } 8{,}3\%.$$

Приклад 6 Яку брутто-ставку повинен призначити банк, щоб при річній інфляції 12% реальна ставка виявилася 6%?

Розв'язання.

$$r = i + h + ih = 0{,}06 + 0{,}12 + 0{,}12 \cdot 0{,}06 = 0{,}1872 \text{ або } 18{,}72\%.$$

Приклад 7 На суму 1,5 млн. грн. протягом трьох місяців нараховуються прості відсотки за ставкою 28% річних. Щомісячна інфляція характеризується темпами 2,5; 2,0 і 1,8%. Визначити нарощену суму з урахуванням знецінювання.

Розв'язання.

$$C = P\frac{1 + ni}{J_p} = P\frac{1 + ni}{(1 + h_1)(1 + h_2)(1 + h_3)} =$$

$$= \frac{1{,}5 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}28\right)}{(1 + 0{,}025)(1 + 0{,}02)(1 + 0{,}018)} = 1{,}508 \text{ млн. грн.}$$

6 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ»

1. Основні формули

ПОТОКИ ПЛАТЕЖІВ			
дисконтована величина першого платежу річної ренти	$R\dfrac{1}{1+i} = Rv$	R – член річної ренти i – річна процентна ставка n – строк ренти $v = \dfrac{1}{1+i}$ – дисконтний множник	
	один раз на рік, відсотки – один раз в кінці року	*один раз в кінці року, відсотки – m раз на рік*	*один раз на рік і число нарахувань відсотків $m \to \infty$*
нарощена сума постійної фінансової ренти постнумерандо	$S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;\,i}$ i – процентна ставка	$S = R\dfrac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m} - 1}$ j – номінальна ставка процентів	$S = R\dfrac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1} = Rs_{n;\,\delta}$
сучасна величина річної ренти постнумерандо	$A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;\,i}$ i – процентна ставка	$A = R\dfrac{1-\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = Ra_{mn;\,\frac{j}{m}}$ j – номінальна ставка процентів	$A = R\dfrac{1-e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1} = Ra_{n;\,\delta}$

	p раз на рік рівними платежами, проценти – один раз в кінці року	*p на рік і число нарахувань процентів m співпадають*	*p - строкова рента, проценти – m раз на рік, $p \geq m$*
нарощена сума постійної фінансової ренти постнумерандо	$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = Rs_{n;i}^{(p)}$ i – процентна ставка	$S = R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{j} = Rs_{mn;\,\frac{j}{m}}$	$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$
		j – номінальна ставка процентів	
сучасна величина річної ренти постнумерандо	$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} = Ra_{n;\,i}^{(p)}$ i – процентна ставка	$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{j} = Ra_{mn;\,\frac{j}{m}}$	$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$
		j – номінальна ставка процентів	

	через нарощену суму	*через сучасну величину*
розмір щорічної суми платежу R	$R = \frac{S}{s_{n;i}}$	$R = \frac{A}{a_{n;i}}$
строк постійної ренти	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}$	$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)}$
ставка процентів	$s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$a_{n;i} = \frac{A}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
	рівняння, де єдиною невідомою є процентна ставка i, розв'язуються наближено	
зв'язок коефіцієнта дисконтування і нарощення ренти	$a_{n;i}(1+i)^n = s_{n;i}$	$s_{n;i}v^n = a_{n;i}$

2. Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1 Протягом 3 років на розрахунковий рахунок в кінці кожного року надходить по 10 млн. грн., на які нараховуються відсотки за складною річною ставкою 10%. Потрібно визначити суму на розрахунковий рахунок до кінця зазначеного терміну.

Розв’язання.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10 \cdot \frac{(1+0{,}1)^3 - 1}{0{,}1} = 33{,}1 \text{ млн. грн.}$$

Приклад 2 Для проведення заміни обладнання підприємству необхідно за 10 років накопичити 2 млн. грн.. Щорічно вона може вносити в банк для цієї мети 100 000 грн. на спеціальний рахунок. Під яку ставку складних відсотків необхідно вкладати ці гроші, щоб накопичити необхідну суму в зазначений термін?

Розв’язання.

$$s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{2000000}{100000} = 20.$$

Визначимо $s_{n;i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i = 0{,}14$

$$s_{10;\,0{,}14} = \frac{(1+0{,}14)^{10} - 1}{0{,}14} = 19{,}26.$$

Для $i = 0{,}15$

$$s_{10;\,0{,}15} = \frac{(1+0{,}15)^{10} - 1}{0{,}15} = 20{,}33.$$

Справжнє значення процентної ставки лежить в інтервалі $0{,}14 < i < 0{,}15$, так як $19{,}26 < 20 < 20{,}33$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i = 0{,}14 + \frac{20 - 19{,}26}{20{,}33 - 19{,}26}(0{,}15 - 0{,}14) = 0{,}1469.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної відсоткової ставки:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+0{,}1469)^{10} - 1}{0{,}1469} = 20.$$

Таким чином, процентна ставка повинна становити $i = 14{,}69\%$.

Приклад 3 Проводяться внески протягом 15 років, щорічно по 10000 грн., На які нараховуються відсотки за складною ставкою 12% річних. Визначити нарощену суму.

Розв’язання.

В цій задачі розглядається річна рента постнумерандо. Її нарощена сума обчислюється за формулою $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$. Підставляючи чисельні значення, отримаємо

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 1000 \cdot \frac{(1+0{,}12)^{15} - 1}{0{,}12} = 372797{,}15 \text{ грн.}$$

Інший спосіб полягає у використанні таблиць коефіцієнтів нарощення річної ренти.

По таблиці знаходимо: $s_{n;\,i}(n = 15; i = 12) = 37{,}27971466$, після чого визначаємо нарощену суму шляхом множення коефіцієнта нарощення на розмір ренти: $S = Rs_{n;\,i} = 10000 \cdot 37{,}27971466 = 372797{,}15$ грн.

Приклад 4 Для створення пенсійного фонду організація щорічно перераховує в банк ренту постнумерандо в розмірі 10 млн. грн. На що надходять платежі нараховують складні відсотки по річній процентній ставці 18% річних. Визначити розмір фонду через 6 років. Прийнявши, що банк нараховує відсотки щоквартально, визначити, який варіант нарахування відсотків вигідний кредитору.

Розв'язання.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 10 \cdot \frac{(1+0{,}18)^6 - 1}{0{,}18} = 94{,}41 \text{ млн. грн.};$$

$$S = R\frac{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{m} - 1} = R\frac{\left(1+\dfrac{0{,}18}{4}\right)^{24} - 1}{\left(1+\dfrac{0{,}18}{4}\right)^{4} - 1} = 97{,}45 \text{ млн. грн.}$$

Отже, кредитору вигідно щоквартальне нарахування відсотків на ренту, при цьому розмір фонду становитиме 97,45 млн. грн.

Приклад 5 Щорічна фінансова рента терміном на 7 років становить для фірми 200 грн. Платежі здійснюються поквартально. Відсотки в розмірі 5% річних капіталізуються поквартально. Знайти сучасну вартість такої ренти.

Розв'язання.

Виходячи з умов завдання, вибираємо розрахункову формулу

$$A = R \cdot \frac{1 - \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{-mn}}{j}.$$

Підставляючи чисельні значення, отримаємо

$$A = 200 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{-4 \cdot 7}}{0,05} = 4000 \text{ грн.}$$

Отже, сучасна вартість потоку платежів склала 4000 грн.

Приклад 6 Визначити розмір щорічних платежів за складною ставкою 10% річних для створення через п'ять років фонду в розмірі 600000 грн.

Розв'язання.

Член ренти обчислюється по формулі $R = \dfrac{S}{s_{n;i}}$, де $s_{n;i}$ – множник нарощення ренти. Знайдемо його двома способами.

Спосіб 1. По таблицям множників нарощення для $n = 5$ та $i = 0,1$ знаходимо $s_{n;i} = 6,0151$. Звідси: $R = \dfrac{600000}{6,0151} = 99748,97$ грн.

Спосіб 2. Обчислення можна зробити і не використовуючи таблиці. Для цього зі співвідношення для розрахунку нарощеної суми ренти $S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ виражаємо R:

$$R = \frac{Si}{(1+i)^n - 1} = \frac{600000 \cdot 0,1}{(1+0,1)^5 - 1} = 99748,97 \text{ грн.}$$

Приклад 7 Який термін необхідний для накопичення 100 млн. грн. за умови, що щомісяця вноситься по 12 млн. грн., а на накопичення щорічно нараховуються відсотки за ставкою 25% річних?

Розв'язання.

В цій задачі $S = 100$ млн. грн.; $R = 12$ млн. грн.; $i = 0,25$; $p = 12$; $m = 1$.

Підставляючи ці чисельні значення в формулу для випадку $p > 1$ і $m = 1$, отримаємо

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] + 1\right)}{\ln(1+i)} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{100}{12} \cdot 12\left[(1+0,25)^{\frac{1}{12}} - 1\right] + 1\right)}{\ln(1+0,25)} = 4,7356 \text{ роки.}$$

7 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКІВ ЗА ТЕМАМИ «ОПЕРАЦІЇ З ВАЛЮТОЮ»

1. Основні формули

СКВ → грн. → грн. → СКВ			
	ПРОСТІ ВІДСОТКИ	**СКЛАДНІ ВІДСОТКИ**	
нарощена сума в валюті	$S_v = P_v \frac{K_0}{K_1}(1+ni)$	$S_v = P_v \frac{K_0}{K_1}(1+i)^n$	P_v – сума депозиту в СКВ K_0 – курс обміну на початку операції (курс СКВ в грн.) K_1 – курс обміну в кінці операції n – строк депозиту i – відповідна відсоткова ставка
множник нарощення з урахуванням подвійної конвертації	$m = \frac{K_0}{K_1}(1+ni) = \frac{1+ni}{k}$	$m = \frac{K_0}{K_1}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n}{k}$	
темп росту обмінного курсу за строк операції	$k = \frac{K_1}{K_0}$	$k = \frac{K_1}{K_0}$	при $k=1$ доходність операції дорівнює гривневій ставці, тобто $i_d = i$ $i_d < i$ при $k > 1$ $i_d > i$ при $k < 1$
доходність операції	$i_d = \frac{S_v - P_v}{P_v n} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n}$	$i_d = \frac{1+i}{\sqrt[n]{k}} - 1$	
критичне значення k, при якому доходність операції дорівнює нулю	$k^* = 1+ni$ або $K_1^* = K_0(1+ni)$	$k^* = (1+i)^n$	

максимально допустиме значення курсу обміну в кінці операції K_1	$\max K_1 = \frac{K_0(1+ni)}{1+nj}$ або $\max k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{1+ni}{1+nj}$ при цьому значенні ефективність буде дорівнювати існуючій ставці по депозитах у валюті, та застосування подвійної конвертації не дає ніякої додаткової вигоди	$k_{\max} = \left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n$ або $\max K_1 = K_0\left(\frac{1+i}{1+j}\right)^n$ при цьому доходність операції буде дорівнювати доходності при прямому інвестуванні валютних коштів по ставці j	
грн. → СКВ → СКВ → грн.			
нарощена сума в грн.	$S_{ua} = P_{ua}(1+nj)\frac{K_1}{K_0}$	P_{ua} – сума депозиту в грн. j – ставка нарощення для конкретного виду СКВ	
доходність операції	$i_d = \frac{S_{ua} - P_{ua}}{P_{ua}n} = \frac{k(1+nj)-1}{n}$	при $k=1$ $i_d = j$ при $k>1$ $i_d > j$ при $k<1$ $i_d < j$	
критичне значення k, при якому доходність операції дорівнює нулю	$k^* = \frac{1}{1+nj}$ або $K_1^* = \frac{K_0}{1+nj}$		
мінімально допустима величина k, що забезпечує таку же прибутковість, що і прямий внесок в гривнях	$\min k = \frac{1+ni}{1+nj}$ або $\min K_1 = \frac{K_0(1+ni)}{1+nj}$		

2. Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1 Передбачається помістити 1000 доларів на гривневому депозиті. Курс продажу на початок терміну депозиту 24,08 грн. за 1 долар, курс купівлі долара в кінці операції 24,45 грн. Відсоткові ставки: $i = 22\%$, $j = 15\%$ (360/360). Строк депозиту – 3 місяці. Визначити кінцеву суму.

Розв'язання.

$$S_v = 1000 \cdot \frac{24,08}{24,45}\left(1 + \frac{3}{12} \cdot \frac{22}{100}\right) = 1039,03 \text{ доларів.}$$

У свою чергу пряме нарощення початкової доларової суми по доларовій ставці відсотка дає $S_v = 1000 \cdot (1 + 0,25 \cdot 0,15) = 1037,5$ доларів.

Приклад 2 Підприємець має намір помістити 5000 \$ на гривневий депозит на 4 місяці. Курс покупки доларів на початок фінансової операції складає 25,3 грн. за долар. Очікуваний курс продажу – 25,85 грн. за долар. Процентна ставка по гривневих депозитах 9%. Відсотки прості. Визначте:

а) нарощену суму в доларах;

б) прибутковість операції з конверсією;

в) критичне значення курсу продажу долара в кінці угоди, при якому проведення фінансової операції доцільно.

Розв'язання.

а) Нарощена сума: $S_v = 5000 \cdot \dfrac{24,3}{24,85}\left(1 + 0,09 \cdot \dfrac{4}{12}\right) = 5036,02$ доларів.

б) Доходність операції з конверсією $i_d = \dfrac{5036,02 - 5000}{5000 \cdot \dfrac{4}{12}} = 0,0216$ або 2,16%.

в) Критичне значення $K_1^* = K_0(1 + ni) = 24,3 \cdot \left(1 + 0,09 \cdot \dfrac{4}{12}\right) = 25,029$ грн..

У випадку, якщо $K_1 > 25,029$ грн., операція становиться збитковою.

Приклад 3 Передбачається помістити 1000 доларів на гривневому депозиті. Курс продажу на початок терміну депозиту 24,164 грн. за 1 долар. Очікується курс купівлі $K_1 = 24,221$ грн. Відсоткові ставки: $i = 20\%$, $j = 10\%$ (360/360). Строк депозиту – 3 місяці. Визначити кінцеву суму.

Розв'язання.

При подвійній конверсії СКВ → грн. → грн. → СКВ розрахунок проводимо наступним чином: $S_v = 1000 \cdot \dfrac{24,164}{24,221}\left(1 + 0,2 \cdot \dfrac{3}{12}\right) = 1047,53$ доларів.

У свою чергу пряме нарощення початкової доларової суми по доларової процентній ставці дає $S_v = 1000 \cdot \left(1 + 0,2 \cdot \dfrac{3}{12}\right) = 1025$ доларів.

Приклад 4 Припустимо, необхідно помістити на валютному депозиті суму в грн. (1 млн.). Курс продажу на початок терміну депозиту 24,08 грн. за 1 долар, курс купівлі долара в кінці операції 24,45 грн. Відсоткові ставки: $i = 22\%$, $j = 15\%$ (360/360). Строк депозиту – 3 місяці.

Розв'язання.

Нарощена сума в грн. до кінця строку складає:

$$S_{ua} = 1000 \cdot (1 + 0,25 \cdot 0,15) \frac{24,45}{24,08} = 1053,4 \text{ тис. грн.}$$

Пряме інвестування в гривневий депозит дає більше:

$$S_{ua} = 1000 \cdot (1 + 0,25 \cdot 0,22) = 1055,4 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 5 Підприємець, маючи суму в розмірі 400 тис. грн, передбачає помістити її на доларовому депозиті на 3 місяці під процентну ставку 5% річних, а потім обміняти отриману суму на грн. Курс продажу доларів на початок терміну депозиту 24,45 грн., очікуваний курс покупки через 3 місяці 24,85 грн. Відсоткова ставка на гривневому депозиті 10%. З'ясувати доцільність цієї угоди.

Розв'язання.

Оцінимо доцільність проведення конверсії. Для цього порівняємо значення $K_1 = 24,85$ грн. та $\dfrac{K_0(1+ni)}{1+nj}$:

$$\frac{K_0(1+ni)}{1+nj} = 24,45 \cdot \frac{1 + 0,1 \cdot \frac{3}{12}}{1 + 0,05 \cdot \frac{3}{12}} = 24,75 \text{ грн.}$$

Отже, доцільно провести операцію з конверсією. Щоб переконатися в цьому, порівняємо результати нарощення з конверсією і без неї.

1) нарощена сума з конверсією:

$$S_{ua} = P_{ua}(1+nj)\frac{K_1}{K_0} = 400 \cdot (1 + 0,05 \cdot 0,25) \cdot \frac{24,85}{24,45} = 411,626 \text{ тис. грн.}$$

2) нарощена сума на гривневому депозиті (без конверсії):

$$S_{ua} = P_{ua}(1+nj) = 400 \cdot (1 + 0,05 \cdot 0,25) = 410 \text{ тис. грн.}$$

Приклад 6 Є сума в гривнях, яку передбачається розмістити на піврічний депозит. Обмінний курс на початку операції 24 грн. за євро, в кінці операції очікується 25 грн. Річна ставка простих відсотків 12%, по валютним вкладом – 5%. Визначити вид найбільш вигідного розміщення вкладу.

Розв'язання.

Темп росту обмінного курсі за строк операції $k = \dfrac{K_1}{K_0} = \dfrac{25}{24} = 1,042$. Тоді доходність операції становитиме:

$$i_d = \frac{k(1+nj)-1}{n} = \frac{1,042 \cdot (1+0,5 \cdot 0,05)-1}{0,5} = 0,1361.$$

Вигідніше розмістити гривневий депозит.

Приклад 7 В Прикладі 3 визначити, як вигідніше розмістити вклад: валютний або через конверсію в гривнях.

Розв'язання.

Проведемо розрахунок при подвійній конверсії: СКВ → грн. → грн. → СКВ:

$$k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{24,221}{24,164} = 1,002,$$

$$i_d = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1+0,25 \cdot 0,2}{1,002 \cdot 0,25} - \frac{1}{0,25} = 0,19.$$

За умовою задачі, доходність валютного депозиту 10%, доходність операції з подвійною конверсію 19%. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

Приклад 8 Є сума в доларах, яку передбачається розмістити на піврічний депозит. Обмінний курс на початку операції 24 грн. за долар, в кінці операції передбачається 25 грн. Річна ставка простих відсотків по гривневих депозитах 12%, по валютних 5%. Як вигідніше розмістити вклад, як валютний або через конверсію в гривнях?

Розв'язання.

Проведемо розрахунок при подвійній конверсії: СКВ → грн. → грн. → СКВ з урахуванням того, що $k = \frac{K_1}{K_0}$, де k – темп росту обмінного курсу за строк операції, K_0 – курс обміну на початку операції, K_1 – курс обміну в кінці операції. Будемо мати

$$k = \frac{K_1}{K_0} = \frac{25}{24} = 1,042,$$

$$i_d = \frac{1}{k} \cdot \frac{(1+ni)}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1+0,5 \cdot 0,12}{1,042 \cdot 0,5} - \frac{1}{0,5} = 0,035.$$

Таким чином, за умовою завдання, прибутковість валютного депозиту 5%, прибутковість операції з подвійною конверсією 3,5%. Отже, вигідніше розмістити вклад через конверсію в гривнях.

Приклад 9 В обмінному пункті встановлена наступне котирування американського долара до гривні: покупка – 24 грн., продаж 24,4 грн. Визначте:

а) скільки гривень буде отримано при обміні 350 доларів;

б) яка кількість американських доларів можна придбати на 4500 грн.

Розв'язання.

а) Для переказу суми в іноземній валюті в еквівалентну їй суму в національній валюті необхідно помножити її на курс покупки:

$$350 \cdot 24 = 8400 \text{ грн.}$$

б) Для переказу суми в національній валюті в еквівалентну їй суму в іноземній валюті необхідно її розділити на курс продажу:

$$\frac{4500}{24,4} = 184,43 \text{ долар.}$$

Приклад 10 У банку встановлена наступне котирування валют:

	Покупка	Продаж
Долар США / грн.	24,50	24,76
Євро / грн.	30,00	30,80

Визначте:

а) крос-курс долара США до євро;

б) скільки доларів США можна придбати на 3500 євро.

Розв'язання.

а) Розглянемо операцію обміну доларів на євро.

На початку долари обміняємо на гривні за курсом покупки долара США, рівного 24,50 грн., а потім отримана сума обмінюється на євро за курсом продажу євро, що дорівнює 30,80 грн., Тобто $1 \text{ грн.} = \frac{1}{30,80}$ євро. Таким чином, $1\$ = 24,50 \cdot \frac{1}{30,80} = 0,795$ євро.

Робимо висновок, що в цьому банку крос-курс покупки долара США до євро дорівнює 0,795 євро за один долар.

Розглянемо операцію обміну євро на долари.

На початку євро обмінюються на гривні за курсом покупки 1 євро, рівного 30,00, тобто $1 \text{ грн.} = \frac{1}{30}$ євро, а потім отримана сума обмінюється на долари по курсу продажу 1 дол. США, рівного 24,76 грн., тобто $1\$ = 24,76 \cdot \frac{1}{30} = 0,825$ євро. Отже, в цьому банку крос-курс продажу долара США до євро дорівнює 0,825 євро за долар.

б) Щоб визначити, скільки доларів США можна придбати на 3500 євро, поміняємо євро на гривні за курсом покупки євро, що дорівнює 30 грн., потім отримана сума обмінюється на долари по курсу продажу долара 24,76 грн., тобто $\frac{3500 \cdot 30}{24,76} = 4240,71$ доларів.

Цей же результат можна отримати, якщо поділимо 3500 євро на 0,825 (крос-курс продажу долара до євро):

$$\frac{3500}{0,825} = 4242,42 \text{ доларів.}$$

Незначна розбіжність отримано за рахунок округлення.

8 ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Завдання №1

а) Початкову суму P грн. розміщено в банку на термін n років під $i\%$ річних (відсотки прості). Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої облікової ставки, складної процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються m раз на рік). Рівень інфляції за період, який розглядається, виявився рівним $a\%$. Яка реальна прибутковість операції?

б) Початкова сума P грн., нарощена сума S грн., процентна ставка $i\%$ річних (відсотки прості). Знайти період нарахування.

в) Початкова сума P грн., нарощена сума S грн., період нарахування n років. Знайти просту процентну ставку.

г) Початкова сума P грн. покладена в банк на термін з a по b під $i\%$ річних (відсотки прості). Знайти нарощену суму в англійській, німецькій та французькій практиках.

Варіант	P	n	$i\%$	m	$a\%$	S	a	b
1	6000	0,5	16	2	1,1	6300	12.03	27.08
2	7000	0,25	11	4	1,2	7200	03.04	15.09
3	8000	0,75	17	12	1,3	8400	11.05	09.10
4	9000	0,5	18	4	1,4	9300	17.06	23.11
5	6500	0,25	9	12	1,5	6900	24.07	05.12
6	5500	0,75	13	2	1,6	5800	23.03	14.08
7	7500	0,5	19	12	1,7	7700	16.04	26.09
8	5300	0,25	8	2	1,8	5700	19.05	21.10
9	6400	0,75	7	4	1,9	6800	24.06	09.11
10	7900	0,75	14	12	2	8200	11.07	15.12
11	5000	0,5	16	2	1,1	6300	14.03	27.08
12	6000	0,25	11	4	1,2	7200	04.04	15.09
13	7000	0,75	17	12	1,3	8400	12.05	09.10
14	8000	0,5	18	4	1,4	9300	18.06	23.11
15	6900	0,25	9	12	1,5	7500	25.07	05.12
16	4500	0,75	13	2	1,6	5800	24.03	14.08
17	6500	0,5	19	12	1,7	7700	17.04	26.09
18	4300	0,25	8	2	1,8	5700	15.05	21.10
19	5400	0,75	7	4	1,9	6800	27.06	09.11
20	6900	0,75	14	12	2	8200	14.07	15.12

Завдання №2

а) Початкова сума P грн. покладена в банк на термін n років під просту облікову ставку $d\%$ річних. Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої процентної ставки, складної процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються m раз на рік).

б) Початкова сума P грн., нарощена сума S грн., проста облікова ставка $d\%$ річних. Знайти період нарахування.

в) Початкова сума P грн., нарощена сума S грн., період нарахування n років. Знайти просту облікову ставку.

Варіант	P	n	$d\%$	m	S
1	6000	0,5	16	2	6300
2	7000	0,25	11	4	7200
3	8000	0,75	17	12	8400
4	9000	0,5	18	4	9300
5	6500	0,25	9	12	6900
6	5500	0,75	13	2	5800
7	7500	0,5	19	12	7700
8	5300	0,25	8	2	5700
9	6400	0,75	7	4	6800
10	7900	0,75	14	12	8200
11	5000	0,5	16	2	6300
12	6000	0,25	11	4	7200
13	7000	0,75	17	12	8400
14	8000	0,5	18	4	9300
15	5500	0,25	9	12	6900
16	4500	0,75	13	2	5800
17	6500	0,5	19	12	7700
18	4300	0,25	8	2	5700
19	5400	0,75	7	4	6800
20	6900	0,75	14	12	8200

Завдання №3

а) Початкова сума P грн. покладена в банк на термін n років під $i\%$ річних (відсотки складні). Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої облікової ставки, простої процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються m раз на рік).

б) Початкова сума P грн., нарощена сума S грн.., процентна ставка $i\%$ річних (відсотки складні). Знайти період нарахування.

в) Початкова сума P грн., нарощена сума S грн.., період нарахування n років. Знайти складну процентну ставку.

г) Початкова сума P грн. покладена в банк на термін n років під $i\%$ річних (відсотки складні). Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків.

д) Початкова сума P грн. покладена в банк на термін n років під $i\%$ річних (відсотки складні). Процентна ставка неперервна та змінюється, приріст за рік складає $a\%$. Строк нарощення n років. Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків (розглянути випадки лінійної та експоненціальної залежностей зі збільшенням та зі зменшенням).

Варіант	P	n	$i\%$	$a\%$	m	S
1	5000	2	16	1,1	2	6300
2	6000	3	11	1,2	4	7200
3	7000	4	17	1,3	12	8400
4	8000	3	18	1,4	4	9300
5	5500	4	9	1,5	12	6900
6	4500	2	13	1,6	2	5800
7	6500	3	19	1,7	12	7700
8	4300	3	8	1,8	2	5700
9	6200	2	7	1,9	4	6800
10	7700	4	14	2	12	8200
11	6100	2	16	1,1	2	6300
12	6000	3	11	1,2	4	7200
13	8100	4	17	1,3	12	8400
14	9100	3	18	1,4	4	9300
15	6300	4	9	1,5	12	6900
16	5300	2	13	1,6	2	5800
17	7200	3	19	1,7	12	7700
18	5200	3	8	1,8	2	5700
19	6100	2	7	1,9	4	6800
20	7500	4	14	2	12	8200

Завдання №4 Розрахунки в умовах інфляції

Відомий приріст цін за перші три місяці поточного року. Вклад в сумі P внесено в банк 1 січня поточного року під $i\%$ річних.

1) Визначити темп та індекс інфляції за 1-й квартал року.

2) Визначити темп та індекс інфляції за період n років за умови постійного поквартального рівня інфляції.

3) Визначити середньорічний темп та індекс інфляції по приросту цін за перші три місяці.

4) Розрахувати нарощену суму через період n років при нарахуванні процентів по схемі простих процентів та прогнозованій інфляції.

5) Розрахувати нарощену суму через період n років при нарахуванні процентів по схемі складних процентів та прогнозованій інфляції.

6) Розрахувати брутто-ставки для схеми простих та складних процентів.

Варіант	Вклад P, тис. грн.	Приріст цін по місяцях, %			i%	n
		січень	лютий	березень		
1	50	1,5	2,3	0,5	16	2,5
2	60	0,8	1,2	2,2	11	3,25
3	70	1,4	2,1	1,4	17	1,75
4	80	2,4	2,6	3,2	18	3,5
5	55	2,3	3,5	1,7	9	2,25
6	45	1,5	2,3	2,6	13	1,75
7	65	1,2	1,5	2,3	19	1,5
8	43	2,1	0,2	1,5	8	2,25
9	62	2,3	2,3	1,2	7	3,75
10	77	1,2	1,2	2,3	14	2,5
11	61	1,5	2,3	0,5	16	3,25
12	60	0,8	1,2	2,2	11	1,75
13	81	1,4	2,1	1,4	17	3,5
14	91	2,4	2,6	3,2	18	2,25
15	63	2,3	3,5	1,7	9	1,75
16	53	1,5	2,3	2,6	13	1,5
17	72	1,2	1,5	2,3	19	2,25
18	52	2,1	0,2	1,5	8	3,75
19	61	2,3	2,3	1,2	7	2,5
20	75	1,2	1,2	2,3	14	3,25

9 ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

Завдання №1

а) Початкову суму 3246 грн. розміщено в банку на термін 0,25 років під 12,5% річних (відсотки прості). Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої облікової ставки, складної процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються 12 раз на рік). Рівень інфляції за період, який розглядається, виявився рівним 2,67%. Яка реальна прибутковість операції?

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки прості). Знайти період нарахування.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайти просту процентну ставку.

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін з 20.03 по 06.08 під 12,5% річних (відсотки прості). Знайти нарощену суму в англійській, німецькій та французькій практиках.

Розв'язання.

а) Спочатку обчислимо нарощену суму :

$$S = P\left(1+\frac{i}{12}k\right) = 3246\cdot\left(1+\frac{0{,}125}{12}\cdot 3\right) = 3347{,}438 \text{ грн..}$$

Значення простої облікової ставки

$$d = \frac{i}{1+ni} = \frac{0{,}125}{1+0{,}125\cdot\frac{1}{4}} = 0{,}1212 \text{ або } 12{,}12\%.$$

Таким чином, облікова ставка 12,12% річних забезпечує за квартал таке ж нарощення простими процентами, як й процентна ставка 12,5% річних.

Складна процентна ставка:

$$i = m\cdot\left(\sqrt[mn]{\frac{S}{P}}-1\right) = 12\cdot\left(\sqrt[12\cdot 0{,}25]{\frac{3347{,}438}{3246}}-1\right) = 0{,}1237 \text{ або } 12{,}37\%.$$

Складна номінальна процентна ставка

$$j = 12\left((1+0{,}125)^{\frac{1}{12}}-1\right) = 0{,}1184\text{, тобто } 11{,}84\%.$$

Визначимо реальну прибутковість операції у вигляді процентної ставки при розміщенні грошових коштів на 0,25 року (1 квартал) при рівні інфляції 2,67%:

$$i = \frac{1}{n}\left(\frac{1+nr}{(1+h)^n}-1\right) = 4\cdot\left(\frac{1+0{,}125\cdot 0{,}25}{(1+0{,}0267)^{0{,}25}}-1\right) = 0{,}0979 \text{ або } 9{,}79\%,$$

тобто реальний дохід від фінансової операції складатиме 9,79% від кожної одиниці вкладених коштів.

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки прості) з щомісячним нарахуванням. Знайдемо період нарахування:

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{m \cdot \log\left(1+\frac{j}{m}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{4163}{3246}\right)}{12 \cdot \ln\left(1+\frac{0,125}{12}\right)} = 2 \text{ роки.}$$

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайдемо просту процентну ставку з щомісячним нарахуванням:

$$i = \frac{S-P}{Pn} = \frac{4163-3246}{3246 \cdot \frac{0,25}{12}} = 0,0942 \text{ або } 9,42\%.$$

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін з 20.03 по 06.08 під 12,5% річних (відсотки прості). Знайдемо нарощену суму в англійській, німецькій та французькій практиках.

– при германській практиці розрахункова кількість днів буде дорівнювати:

$$k = 11(\text{днів в березні}) + 120(4 \text{місяці по 30 днів}) +$$
$$+6(\text{днів в серпні}) = 137 \text{ днів.}$$

Тоді, $S = 3246\left(1+\frac{137}{360}\cdot 0,125\right) = 3400,41$ грн.

– при французькій практиці кількість днів дорівнює:

$$k = 11 + 31\cdot 2 + 30 \cdot 2 + 6 = 139 \text{ днів.}$$

Тоді, $S = 3246\left(1+\frac{139}{360}\cdot 0,125\right) = 3402,66$ грн.

– при англійській практиці кількість днів така ж, як и при французькій, тобто $k = 139$ днів, тривалість року 365 днів. Тоді, $S = 3246\left(1+\frac{139}{365}\cdot 0,125\right) = 3400,52$ грн.

Завдання №2

а) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 0,25 років під просту облікову ставку 12,5% річних. Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої процентної ставки, складної процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються 12 раз на рік).

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., проста облікова ставка 12,5% річних. Знайти період нарахування.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайти просту облікову ставку.

Розв'язання.

а) Спочатку обчислимо нарощену суму за формулою нарощення за простою обліковою ставкою:

$$S=\frac{P}{1-nd}=\frac{3246}{1-0,25\cdot 0,125}=3350,71\text{ грн.}.$$

Обчислимо значення простої процентної ставки

$$i=\frac{d}{1-nd}=\frac{0,125}{1-0,25\cdot 0,125}=0,1290\text{ або }12,9\%.$$

Складна процентна ставка:

$$i_c=\frac{1}{\sqrt[n]{1-nd}}-1=\frac{1}{\left(1-0,25\cdot 0,125\right)^4}-1=0,1354\text{ або }13,54\%.$$

Складна номінальна процентна ставка

$$j=m\left(1-\sqrt[mn]{1-nd}\right)=12\left(1-\sqrt[3]{1-0,25\cdot 0,125}\right)=0,1263\text{, тобто }12,63\%.$$

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., проста облікова ставка 12,5% річних. Знайдемо період нарахування:

$$n=\frac{S-P}{Sd}=\frac{4163-3246}{4163\cdot 0,125}=1,76\text{ років}$$

або 2 роки або приблизно 21 місяць.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 0,25 років. Знайдемо просту облікову ставку:

$$d=\frac{S-P}{Sn}=\frac{4163-3246}{4163\cdot 0,25}=0,8811\text{ або }88,11\%.$$

Завдання №3

а) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Знайти нарощену суму, еквівалентні значення простої облікової ставки, простої процентної ставки, складної номінальної процентної ставки (відсотки нараховуються 12 раз на рік).

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки складні). Знайти період нарахування.

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 5 років. Знайти складну процентну ставку.

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків.

д) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Процентна ставка неперервна та змінюється, приріст за рік складає 2,67%. Строк нарощення 5 років. Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків (розглянути випадки лінійної та експоненціальної залежностей зі збільшенням та зі зменшенням).

Розв'язання.

а) Спочатку обчислимо нарощену суму:

$$S = P\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n} = 3246\cdot\left(1+\frac{0,125}{12}\right)^{12\cdot 5} = 6044,75 \text{ грн..}$$

Значення простої облікової ставки

$$d = \frac{1}{n}\cdot\left(1-\left(1+\frac{i_c}{12}\right)^{-12n}\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(1-\left(1+\frac{0,125}{12}\right)^{-12\cdot 5}\right) = 0,0926 \text{ або } 9,26\%.$$

Проста процентна ставка:

$$i = \frac{1}{n}\cdot\left(\left(1+\frac{i_c}{m}\right)^{mn}-1\right) = \frac{1}{5}\cdot\left(\left(1+\frac{0,125}{12}\right)^{12\cdot 5}-1\right) = 0,1724 \text{ або } 17,24\%.$$

Складна номінальна процентна ставка

$$j = 12\left(\left(1+0,125\right)^{\frac{1}{12}}-1\right) = 0,1184\text{, тобто } 11,84\%.$$

б) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., процентна ставка 12,5% річних (відсотки складні). Знайдемо період нарахування:

$$n = \frac{\log\left(\frac{S}{P}\right)}{\log(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{4163}{3246}\right)}{\ln(1+0,125)} = 2,11 \text{ років.}$$

в) Початкова сума 3246 грн., нарощена сума 4163 грн., період нарахування 5 років. Знайдемо складну процентну ставку:

$$i = \sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1 = \sqrt[5]{\frac{4163}{3246}}-1 = 0,051 \text{ або } 5,1\%.$$

г) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Знайдемо нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків.

$$S = Pe^{\delta n} = Pe^{nj} = Pe^{5\left(\sqrt[5]{1+0,125}-1\right)} = 3656,86 \text{ грн..}$$

д) Початкова сума 3246 грн. покладена в банк на термін 5 років під 12,5% річних (відсотки складні). Процентна ставка неперервна та змінюється, приріст за рік складає 2,67%. Строк нарощення 5 років. Знайти нарощену суму у випадку неперервного нарахування відсотків (розглянути випадки лінійної та експоненціальної залежностей зі збільшенням та зі зменшенням).

Знайдемо нарощену суму у випадку лінійної залежності зі збільшенням ($a = 0,0267$):

$$S = Pe^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = 3246 \cdot e^{5\left(\sqrt[5]{1+0,125}-1\right)+\frac{0,0267\cdot 5^2}{2}} = 5105,69 \text{ грн.}$$

У разі, коли сила зростання лінійно зменшується, тобто $a = -0,0267$, будемо мати

$$S = Pe^{\delta n + \frac{an^2}{2}} = 3246 \cdot e^{5\left(\sqrt[5]{1+0,125}-1\right)-\frac{0,0267\cdot 5^2}{2}} = 2619,16 \text{ грн..}$$

Знайдемо нарощену суму у випадку експоненціальної залежності зі збільшенням ($a = 1 + 0,0267 = 1,0267$):

$$S = Pe^{\frac{\delta}{\ln a}\cdot\left(a^n - 1\right)} = 3246 \cdot e^{\frac{\sqrt[5]{1+0,125}-1}{\ln 1,0267}\cdot\left(1,0267^5 - 1\right)} = 3687,00 \text{ грн.}$$

У разі, коли сила зростання експоненціально зменшується, тобто $a = 1 - 0,0267 = 0,9733$, будемо мати

$$S = Pe^{\frac{\delta}{\ln a}\cdot\left(a^n - 1\right)} = 3246 \cdot e^{\frac{\sqrt[5]{1+0,125}-1}{\ln 0,9733}\cdot\left(0,9733^5 - 1\right)} = 3628,77 \text{ грн..}$$

Завдання №4 Розрахунки в умовах інфляції

Відомий приріст цін за перші три місяці поточного року: січень – 0,4%, лютий – 0,96%, березень – 1,1%. Вклад в сумі 3246 грн. внесено в банк 1 січня поточного року під 12,5% річних.

а) Визначити темп та індекс інфляції за 1-й квартал року.

б) Визначити темп та індекс інфляції за період 5 років за умови постійного поквартального рівня інфляції.

в) Визначити середньорічний темп та індекс інфляції по приросту цін за перші три місяці.

г) Розрахувати нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі простих процентів та прогнозованій інфляції.

д) Розрахувати нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі складних процентів та прогнозованій інфляції.

е) Розрахувати брутто-ставки для схеми простих та складних процентів.

Розв'язання.

а) Визначимо індекс інфляції за 1-й квартал року

$$J_p = \left(1 + h_1\right)\left(1 + h_2\right)\left(1 + h_3\right) = \left(1 + 0,004\right)\left(1 + 0,0096\right)\left(1 + 0,011\right) = 1,0248$$

або 102,48% та темп інфляції за 1-й квартал року:

$$h = J_p - 1 = 1,0248 - 1 = 0,0248 \text{ або } 2,48\%.$$

б) Визначимо індекс інфляції за період 5 років за умови постійного поквартального рівня інфляції:

$$J_p = (1+h)^n = (1+0,025)^5 = 1,1302 \text{ або } 113,02\%$$

та темп інфляції:

$$h = J_p - 1 = 1,13 - 1 = 0,1302 \text{ або } 13,02\%.$$

в) Визначимо середньорічний індекс інфляції по приросту цін за перші три місяці:

$$J_{p\_\text{сер/річн}} = \left[(1+h_1)(1+h_2)(1+h_3)\right]^4 = 1,0248^4 = 1,1029 \text{ або } 110,29\%$$

та відповідний темп інфляції:

$$h = J_{p\_\text{сер/річн}} - 1 = 1,1029 - 1 = 0,1029 \text{ або } 10,29\%.$$

г) Розрахуємо нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі простих процентів та прогнозованій інфляції:

$$C = \frac{P(1+ni)}{J_p} = \frac{3246(1+5\cdot 0,125)}{1,1302} = 4666,925 \text{ грн..}$$

д) Розрахуємо нарощену суму через період 5 років при нарахуванні процентів по схемі складних процентів та прогнозованій інфляції:

$$C = P\frac{(1+i)^n}{J_p} = 3246\cdot\frac{(1+0,125)^5}{1,1302} = 5175,354 \text{ грн..}$$

е) Розрахуємо брутто-ставки для схеми простих

$$r = \frac{(1+ni)J_p - 1}{n} = \frac{(1+5\cdot 0,125)\cdot 1,1029 - 1}{5} = 0,1584 \text{ або } 15,84\%$$

та складних процентів:

$$r = i + h + ih = 0,125\cdot(1+0,1029) + 0,1029 = 0,2408 \text{ або } 24,08\%.$$

10 ЗАЛІКОВА РОБОТА

Завдання № 1 Застосування простих і складних процентів в банківській практиці

Вклад в сумі P внесено в банк під i% річних (таблиця 1). Розрахувати та проаналізувати граничні суми виплат на вказані дати вилучення (365/360) при нарахуванні:

а) простих процентів;

б) складних процентів;

в) неперервному нарахуванні процентів;

г) капіталізації складних процентів m раз на рік.

Таблиця 1

Варіант	Дата вкладу	Дата вилучення 1	Дата вилучення 2	Вклад P, тис. грн.	i%	m
1	12.05.01	20.08.02	05.08.03	260	14	4
2	22.03.01	10.07.02	13.07.03	60	17	2
3	02.05.01	20.06.02	26.09.03	40	15	3
4	09.06.01	20.11.02	05.12.03	350	18	2
5	18.03.01	10.04.02	13.11.03	66	22	2
6	08.04.01	07.07.02	26.09.03	30	7	6
7	17.02.01	20.11.02	05.03.03	50	6	5
8	22.03.01	10.09.02	13.07.03	60	13	2
9	02.05.01	09.08.02	26.09.03	40	12	4
10	09.09.01	20.11.02	05.12.03	11	16	12
11	12.05.11	20.08.12	05.08.13	240	13	4
12	22.03.11	10.07.12	13.07.13	40	18	2
13	02.05.11	20.06.12	26.09.13	70	16	3
14	09.06.11	20.11.12	05.12.13	330	17	2
15	18.03.11	10.04.12	13.11.13	56	21	2
16	08.04.11	07.07.12	26.09.13	40	8	6
17	17.02.11	20.11.12	05.03.13	60	7	5
18	22.03.11	10.09.12	13.07.13	50	14	2
19	02.05.11	09.08.12	26.09.13	30	11	4
20	09.09.11	20.11.12	05.12.13	22	15	12

Завдання № 2 Операції з валютою

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}}$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Курс продажу на початок строку депозиту K_0 грн. за 1 долар; курс покупки долара в кінці операції $K_1^{(1)}$ ($K_1^{(2)}$) грн. Процентні ставки $i_{\text{грн.}}\%$, $i_{\text{дол.}}\%$. Строк депозиту m місяців. Розрахувати кінцеву суму при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по валютній ставці простих та складних відсотків.

Необхідно розмістити на валютному депозиті суму в $P_{\text{грн.}}$ тисячах грн., конвертувавши її попередньо в долари. Знайти нарощену вартість вкладів при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по гривневій ставці простих та складних відсотків.

Визначити вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу для кожного з випадків.

Таблиця 2

Варіант	K_0	$K_1^{(1)}$	$K_1^{(2)}$	$P_{\text{грн.}}$	$P_{\text{дол.}}$	$i_{\text{грн.}}\%$	$i_{\text{дол.}}\%$	m
1	26,3	29,5	26,0	4	2,6	13	10	4
2	25,4	28,1	25,2	8,6	6	18	13	2
3	25,5	28,2	25,4	6,3	4	14	20	3
4	26,2	27,5	26,1	5	3,5	17	11	2
5	26,5	28,6	25,8	9	6,6	21	14	8
6	25,2	27,8	24,6	4,7	3	11	19	6
7	25,9	26,9	25,4	8,1	5	16	10	5
8	24,8	29,5	24,5	8,8	6	14	21	2
9	26,1	28,2	24,8	6,4	4	11	18	4
10	26,6	28,0	24,2	3	1,1	15	9	12
11	26,3	29,5	26,0	4	2,4	12	17	4
12	25,4	28,1	25,2	5,9	4	19	12	2
13	25,5	28,2	25,4	9,8	7	15	22	3
14	26,2	27,5	26,1	6	3,3	16	11	2
15	26,5	28,6	25,8	7	5,6	20	8	9
16	25,2	27,8	24,6	7,1	4	11	17	6
17	25,9	26,9	25,4	8,4	6	17	12	5
18	24,8	29,5	24,5	7,4	5	15	19	2
19	26,1	28,2	24,8	4,9	3	12	15	4
20	26,6	28,0	24,2	5	2,2	14	18	12

Завдання № 3 Розрахунок параметрів постійних рент

1) Розмір щорічних платежів R грн., строк n років, проценти нараховуються по складній процентній ставці i% річних. Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо. Значення параметрів ренти див. в табл. 3.

2) Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів R грн., строк n років, проценти нараховуються по складній процентній ставці i% річних:

а) m раз на рік по ставці $\frac{i}{m}\%$;

б) p платежів на рік;

в) m раз на рік по ставці $\frac{i}{m}\%$, p платежів на рік.

3) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці i% річних для накопичення через n років суми S грн.

4) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці i% річних для погашення впродовж n років боргу A=S грн.

5) Розмір щорічних платежів – R грн., складна процентна ставка – i% річних, нарощена сума – S грн. Визначити строки в днях (Т=360) простих рент постнумерандо.

6) Розмір щорічних платежів – R грн., складна процентна ставка – i% річних, сучасна вартість – A=0,1S грн. Визначити строки в днях (Т=360) простих рент постнумерандо.

7) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно R грн., щоб через n років накопити суму S грн. (для рент постнумерандо).

8) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно R грн., щоб через n років погасити борг A=0,1S грн. (для рент постнумерандо).

Таблиця 3

Варіант	R	n	i%	S	m	p
1	1100	3	13	50000	2	3
2	2200	4	18	60000	3	3
3	2300	5	14	70000	4	2
4	2400	3	17	80000	6	2
5	1400	4	21	55000	12	6
6	900	5	11	45000	2	3
7	1700	3	16	65000	3	3
8	700	4	14	43000	4	2
9	1200	5	11	62000	6	2
10	1400	3	15	77000	12	6
11	2200	4	12	61000	2	3
12	2300	5	19	60000	3	3
13	2800	3	15	81000	4	2
14	2700	4	16	91000	6	2
15	1900	5	20	63000	12	6
16	2600	3	11	53000	2	3
17	3100	4	17	72000	3	3
18	1700	5	15	52000	4	2
19	2400	3	12	61000	6	2
20	2600	4	14	75000	12	6

11 ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ЗАЛІКОВОЇ РОБОТИ

Завдання № 1 Застосування простих і складних процентів в банківській практиці

Вклад в сумі 3246 грн. внесено в банк під 12,5% річних 29.04.11. Розрахувати та проаналізувати граничні суми виплат на дати вилучення 27.07.12 та 02.10.13 (365/360) при нарахуванні:

а) простих процентів;

б) складних процентів;

в) неперервному нарахуванні процентів;

г) капіталізації складних процентів 12 раз на рік.

Розв'язання.

Спочатку розрахуємо кількість днів при французькій практиці (365/360) на дати вилучення:

– з 29.04.11 по 27.07.12:

$$k_1 = 366 + 1 + 31 + 30 + 27 = 455 \text{ днів;}$$

– з 29.04.11 по 02.10.13:

$$k_2 = 366 + 365 + 1 + 31 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 2 = 887 \text{ днів.}$$

Тоді граничні суми виплат на дати вилучення будуть

а) при нарахуванні простих процентів:

$$S_1 = 3246\left(1 + \frac{455}{360} \cdot 0{,}125\right) = 3758{,}82 \text{ грн.,}$$

$$S_2 = 3246\left(1 + \frac{887}{360} \cdot 0{,}125\right) = 4245{,}72 \text{ грн.;}$$

б) при нарахуванні складних процентів:

$$S_1 = 3246\left(1 + \frac{12{,}5}{100}\right)^{\frac{455}{360}} = 3767{,}03 \text{ грн.,}$$

$$S_2 = 3246\left(1 + \frac{12{,}5}{100}\right)^{\frac{887}{360}} = 4338{,}93 \text{ грн.;}$$

в) при неперервному нарахуванні процентів:

$$S_1 = 3246 \cdot e^{0{,}125 \cdot \frac{455}{360}} = 3801{,}55 \text{ грн.,}$$

$$S_2 = 3246 \cdot e^{0{,}125 \cdot \frac{887}{360}} = 4416{,}77 \text{ грн.;}$$

г) при капіталізації складних процентів 12 раз на рік.

$$S_1 = 3246\left(1+\frac{0{,}125}{12}\right)^{\frac{455}{12\cdot 360}} = 3798{,}45 \text{ грн.},$$

$$S_2 = 3246\left(1+\frac{0{,}125}{12}\right)^{\frac{887}{12\cdot 360}} = 4409{,}74 \text{ грн..}$$

Завдання № 2 Операції з валютою

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}} = 3{,}2$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Курс продажу на початок строку депозиту $K_0 = 26{,}45$ грн. за 1 долар; курс покупки долара в кінці операції $K_1^{(1)} = 26{,}87$ ($K_1^{(2)} = 27{,}01$) грн. Процентні ставки $i_{\text{грн.}}\% = 12{,}5$, $i_{\text{дол.}}\% = 6{,}3$. Строк депозиту 18 місяців. Розрахувати кінцеву суму при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по валютній ставці простих та складних відсотків.

Необхідно розмістити на валютному депозиті суму в $P_{\text{грн.}} = 4{,}3$ тисячах грн., конвертувавши її попередньо в долари. Знайти нарощену вартість вкладів при подвійній конверсії та при прямому нарахуванні по гривневій ставці простих та складних відсотків.

Визначити вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу для кожного з випадків.

Розв'язання.

Передбачається розмістити $P_{\text{дол.}} = 3{,}2$ тисяч доларів на гривневому депозиті. Проведемо розрахунок при нарахуванні простих відсотків:

– при подвійній конверсії **СКВ → грн. → грн. → СКВ**:

$$S_{v\_1} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(1)}}\left(1 + i\cdot\frac{m}{12}\right) = 3{,}2\cdot\frac{26{,}45}{26{,}87}\left(1+0{,}125\cdot\frac{18}{12}\right) = 3{,}7406 \text{ тис. доларів,}$$

$$S_{v\_2} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(2)}}\left(1 + i\cdot\frac{m}{12}\right) = 3{,}2\cdot\frac{26{,}45}{27{,}01}\left(1+0{,}125\cdot\frac{18}{12}\right) = 3{,}7212 \text{ тис. доларів;}$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці простих відсотків:

$$S_v = P_v\left(1 + i_v\cdot\frac{m}{12}\right) = 3{,}2\cdot\left(1+0{,}063\cdot\frac{18}{12}\right) = 3{,}5024 \text{ тис. доларів.}$$

Проведемо розрахунок при нарахуванні складних відсотків:

– при подвійній конверсії **СКВ → грн. → грн. → СКВ**:

$$S_{v\_1} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(1)}}(1+i)^{\frac{m}{12}} = 3{,}2\cdot\frac{26{,}45}{26{,}87}(1+0{,}125)^{\frac{18}{12}} = 3{,}7587 \text{ тис. доларів,}$$

$$S_{v\_2} = P_v \frac{K_0}{K_1^{(2)}} \left(1+i\right)^{\frac{m}{12}} = 3,2 \cdot \frac{26,45}{27,01} \left(1+0,125\right)^{\frac{18}{12}} = 3,7392 \text{ тис. доларів;}$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці складних відсотків:

$$S_v = P_v \left(1 + i_v \cdot \frac{m}{12}\right) = 3,2 \cdot \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 3,5071 \text{ тис. доларів.}$$

Визначимо вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу: подвійна конверсія **СКВ → грн. → грн. → СКВ** або пряме нарахування по валютній ставці простих та складних відсотків:

– при нарахуванні простих відсотків:

$$i_{d\_1} = \frac{S_{v\_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7406 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,1126,$$

$$i_{d\_2} = \frac{S_{v\_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7212 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,0278;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність валютного депозиту 6,3%, доходність операцій з подвійною конверсію 11,26% та 2,78% відповідно. Отже, для першої операції вигідніша подвійна конверсія **СКВ → грн. → грн. → СКВ**, а для другої – доларовий депозит.

– при нарахуванні складних відсотків:

$$i_{d\_1} = \frac{S_{v\_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7587 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,11639,$$

$$i_{d\_2} = \frac{S_{v\_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3,7392 - 3,2}{3,2 \cdot \frac{18}{12}} = 0,1123;$$

За умовою задачі, при нарахуванні складних відсотків доходність валютного депозиту 6,3%, доходність операцій з подвійною конверсію 11,64% та 11,23% відповідно. Отже, для обох операцій вигідніша подвійна конверсія **СКВ → грн. → грн. → СКВ**.

Передбачається розмістити $P_{\text{грн.}} = 4,3$ тисяч грн. на доларовому депозиті. Проведемо розрахунок при нарахуванні простих відсотків:

– при подвійній конверсії **грн. → СКВ → СКВ → грн.**:

$$S_{ua\_1} = P_{ua} \frac{K_1^{(1)}}{K_0} \left(1 + j \cdot \frac{m}{12}\right) = 4,3 \cdot \frac{26,87}{26,45} \left(1 + 0,063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 4,7811 \text{ тис. грн.,}$$

$$S_{ua\_2} = P_{ua} \frac{K_1^{(2)}}{K_0}\left(1 + j \cdot \frac{m}{12}\right) = 4{,}3 \cdot \frac{27{,}01}{26{,}45}\left(1 + 0{,}063 \cdot \frac{18}{12}\right) = 4{,}8060 \text{ тис. грн.;}$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці простих відсотків:

$$S_{ua} = P_{ua}\left(1 + i_{ua} \cdot \frac{m}{12}\right) = 4{,}3 \cdot \left(1 + 0{,}125 \cdot \frac{18}{12}\right) = 5{,}1063 \text{ тис. грн.}$$

Проведемо розрахунок при нарахуванні складних відсотків:

– при подвійній конверсії **грн. → СКВ → СКВ → грн.**:

$$S_{ua\_1} = P_{ua} \frac{K_1^{(1)}}{K_0}(1 + j)^{\frac{m}{12}} = 4{,}3 \cdot \frac{26{,}87}{26{,}45}(1 + 0{,}063)^{\frac{18}{12}} = 4{,}7875 \text{ тис. грн.,}$$

$$S_{ua\_2} = P_{ua} \frac{K_1^{(2)}}{K_0}(1 + j)^{\frac{m}{12}} = 4{,}3 \cdot \frac{27{,}01}{26{,}45}(1 + 0{,}063)^{\frac{18}{12}} = 4{,}8125 \text{ тис. грн.;}$$

– при прямому нарахуванні по валютній ставці складних відсотків:

$$S_{ua} = P_{ua}\left(1 + i_{ua}\right)^{\frac{m}{12}} = 4{,}3 \cdot \left(1 + 0{,}125\right)^{\frac{18}{12}} = 5{,}1309 \text{ тис. грн.}$$

Визначимо вид найбільш вигіднішого розміщення вкладу: подвійна конверсія **грн. → СКВ → СКВ → грн.** або пряме нарахування по валютній ставці простих та складних відсотків:

– при нарахуванні простих відсотків:

$$i_{d\_1} = \frac{S_{ua\_1} - P_{ua}}{P_{ua}n} = \frac{4{,}7811 - 4{,}3}{4{,}3 \cdot \frac{18}{12}} = 0{,}07459,$$

$$i_{d\_2} = \frac{S_{ua\_2} - P_{ua}}{P_{ua}n} = \frac{4{,}8060 - 4{,}3}{4{,}3 \cdot \frac{18}{12}} = 0{,}07845;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність гривневого депозиту 12,5%, доходність операцій з подвійною конверсію 7,46% та 7,85% відповідно. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

– при нарахуванні складних відсотків:

$$i_{d\_1} = \frac{S_{v\_1} - P_v}{P_v n} = \frac{3{,}7587 - 3{,}2}{3{,}2 \cdot \frac{18}{12}} = 0{,}07558,$$

$$i_{d\_2} = \frac{S_{v\_2} - P_v}{P_v n} = \frac{3{,}7392 - 3{,}2}{3{,}2 \cdot \frac{18}{12}} = 0{,}07945;$$

За умовою задачі, при нарахуванні простих відсотків доходність гривневого депозиту 12,5%, доходність операцій з подвійною конверсію 7,56% та 7,95% відповідно. Отже, вигідніше розмістити гривневий депозит.

Завдання № 3 Розрахунок параметрів постійних рент

1) Розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних. Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо.

2) Знайти нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних:

а) 4 рази на рік по ставці 3,125%;

б) 3 платежі на рік;

в) 4 рази на рік по ставці 3,125%, 3 платежі на рік.

3) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для накопичення через 5 років суми 41630 грн.

4) Визначити розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для погашення впродовж 5 років боргу 41630 грн.

5) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, нарощена сума – 41630 грн. Визначити строки в днях (Т=360) простих рент постнумерандо.

6) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, сучасна вартість – 4163 грн. Визначити строки в днях (Т=360) простих рент постнумерандо.

7) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років накопити суму 41630 грн. (для рент постнумерандо).

8) Визначити під яку процентну ставку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років погасити борг 4163 грн. (для рент постнумерандо).

Розв'язання.

1) Розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних. Знайдемо нарощену суму простих рент постнумерандо:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3246 \cdot \frac{(1+0,125)^5 - 1}{0,125} = 20827,18 \text{ грн.}$$

та сучасну вартість простих рент постнумерандо:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 3246 \cdot \frac{1-(1+0,125)^{-5}}{0,125} = 11557,60 \text{ грн.}$$

2) Знайдемо нарощену суму та сучасну вартість простих рент постнумерандо, якщо розмір щорічних платежів 3246 грн., строк 5 років, проценти нараховуються по складній процентній ставці 12,5% річних:

а) 4 рази на рік по ставці 3,125%:

$$S = R\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{i} = 3246 \cdot \frac{\left(1+0{,}03125\right)^{4\cdot 5} - 1}{0{,}125} = 22084{,}69 \text{ грн.},$$

$$A = R \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1} = 3246 \cdot \frac{1-\left(1+0{,}03125\right)^{-4\cdot 5}}{\left(1+0{,}03125\right)^{4} - 1} = 11389{,}62 \text{ грн.};$$

б) 3 платежі на рік:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+i\right)^{n} - 1}{\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{\left(1+0{,}125\right)^{5} - 1}{\left(1+0{,}125\right)^{\frac{1}{3}} - 1} = 21672{,}27 \text{ грн.},$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{1-\left(1+0{,}03125\right)^{-5}}{\sqrt[3]{1+0{,}03125} - 1} = 12026{,}57 \text{ грн.};$$

в) 4 рази на рік по ставці 3,125%, 3 платежі на рік.

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} - 1}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{\left(1+0{,}03125\right)^{4\cdot 5} - 1}{\left(1+0{,}03125\right)^{\frac{4}{3}} - 1} = 21971{,}05 \text{ грн.},$$

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} = \frac{3246}{3} \cdot \frac{1-\left(1+0{,}03125\right)^{-4\cdot 5}}{\left(1+0{,}03125\right)^{\frac{4}{3}} - 1} = 11873{,}30 \text{ грн.}.$$

3) Визначимо розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для накопичення через 5 років суми 41630 грн.:

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} = \frac{Si}{\left(1+i\right)^{n} - 1} = \frac{41630 \cdot 0{,}125}{\left(1+0{,}125\right)^{5} - 1} = 6488{,}204 \text{ грн.}$$

4) Визначимо розмір щорічних платежів в кінці року по складній процентній ставці 12,5% річних для погашення впродовж 5 років боргу 41630 грн.

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} = \frac{Ai}{1-\left(1+i\right)^{-n}} = \frac{41630 \cdot 0{,}125}{1-\left(1+0{,}125\right)^{-5}} = 11691{,}95 \text{ грн.}$$

5) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, нарощена сума – 41630 грн. Визначимо строки в днях (T=360) простих рент постнумерандо.

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{41630}{3246}\cdot 0{,}125+1\right)}{\ln(1+0{,}125)}\cdot 360 = 2924 \text{ дні.}$$

6) Розмір щорічних платежів – 3246 грн., складна процентна ставка – 12,5% річних, сучасна вартість – 4163 грн. Визначимо строки в днях (T=360) простих рент постнумерандо.

$$n = \frac{-\ln\left(1-\frac{A}{R}i\right)}{\ln(1+i)} = \frac{-\ln\left(1-\frac{4163}{3246}\cdot 0{,}125\right)}{\ln(1+0{,}125)}\cdot 360 = 534 \text{ дні.}$$

7) Для визначення процентної ставки, під яку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років накопити суму 41630 грн. (для рент постнумерандо) необхідно розв'язати нелінійне рівняння:

$$41630 = 3246\cdot\frac{(1+i)^5-1}{i}.$$

<u>1 спосіб.</u> Коренями будуть (Maple):

0.4848739136 , -1.205126549 + 1.948468100 *I*, -3.074620816 ,
-1.205126549 – 1.948468100 *I*

Отже, $i = 0{,}48487$ або 48,49%.

<u>2 спосіб.</u> Згідно формулі $s_{n;i} = \frac{S}{R} = \frac{(1+i)^n-1}{i} = \frac{41630}{3246} = 12{,}825$. Визначимо $s_{n;i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i = 0{,}48$

$$s_{5;\,0{,}48} = \frac{(1+0{,}48)^5-1}{0{,}48} = 12{,}710.$$

Для $i = 0{,}49$

$$s_{5;\,0{,}49} = \frac{(1+0{,}49)^5-1}{0{,}49} = 12{,}947$$

Дійсне значення процентної ставки лежить в інтервалі $0{,}48 < i < 0{,}49$, так як $12{,}710 < 12{,}825 < 12{,}947$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i = 0{,}48 + \frac{12{,}825-12{,}710}{12{,}947-12{,}710}(0{,}49-0{,}48) = 0{,}485.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної процентної ставки:

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{(1+0,485)^5-1}{0,485}=12,825$$

Таким чином, процентна ставка повинна складати $i=48,5\%$.

8) Для визначення процентної ставки, під яку треба вносити щорічно 3246 грн., щоб через 5 років погасити борг 4163 грн. (для рент постнумерандо) необхідно розв'язати нелінійне рівняння:

$$4163=3246\cdot\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}.$$

1 спосіб. Коренями будуть (Maple):

$0.7293089013, -0.8164538516+0.8260407451\ I, -1.658337520+0.4430532736\ I, -1.658337520-0.4430532736\ I, -0.8164538516-0.8260407451\ I$

Отже, $i=0,7293$ або 72,93%.

2 спосіб. Згідно формулі $a_{n;i}=\frac{A}{R}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{4163}{3246}=1,2825$. Визначимо $a_{n;i}$, для декількох довільних значень процентних ставок. Так для $i=0,74$

$$a_{5;0,74}=\frac{1-(1+0,74)^{-5}}{0,74}=1,267.$$

Для $i=0,72$

$$a_{5;0,72}=\frac{1-(1+0,72)^{-5}}{0,72}=1,297$$

Дійсне значення процентної ставки лежить в інтервалі $0,72<i<0,74$, так як $1,267<1,2825<1,297$.

Знайдемо дійсне значення процентної ставки:

$$i=0,72+\frac{1,2825-1,267}{1,297-1,267}(0,74-0,72)=0,7306.$$

Перевіримо правильність знаходження дійсної процентної ставки:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1-(1+0,7306)^{-5}-1}{0,7306}=1,2806$$

Таким чином, процентна ставка повинна складати $i=73,06\%$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф. Финансовая математика. –М.: Гардарики, 2002. – 624 с.

2. Дьячкова О.В., Иващенко П.О., Кравец О.А., Русецкий А.И. Информатика для финансистов. Часть 2.//Харьков: ХНУ им. В.Н.Каразина, 2001 – 143 с.

3. Лапішко М.Л. Основи фінансово-статистичного аналізу економічних процесів. – Львів: Світ, 1995, с.327.

4. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 544 с.

5. Машина Н.В. Вищі фінансові обчислення. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, 2003 – 208 с.

6. Малыхин В.И. Финансовая математика. – М., 2000.: ЮНИТИ – ДАНА, 2000. – 247 с.

7. Основи актуарних розрахунків / За ред. І.О.Ковтуна. – К.: Алерта, 2004. – 328 с.

8. Смирнова Е.Ю. Техника финансовых вычислений на Excel. – СПб.: ОЦЭиМ, 2003- 126 с.

9. Четыркин Е.М. Методы финансовых вычислений. –М.: Изд. «Дело ЛтД», 2004.-420 с.

10. Фалин Г.И., Фалин А.И. Актуарная математика в задачах. – М.: Физматлит, 2003. – 192 с.

11. Цымбаленко С.В., Цымбаленко Т.Т. Финансовые вычисления. Учебное пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004 – 160 с.

Додаток А

ПОРЯДКОВІ НОМЕРА ДНІВ НЕВИСОКОСНОГО РОКУ

День	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354

День	січень	лютий	березень	квітень	травень	червень	липень	серпень	вересень	жовтень	листопад	грудень
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Додаток Б

ГЛОСАРІЙ

А

Актуарний метод розрахунку – один з двох методів розрахунку відсотків і визначення залишку боргу при погашенні короткострокової заборгованості частковими платежами

Б

Брутто-ставка – ставка відсотків, скоригована на інфляцію

В

Відсотки неперервні – припускають неперервне нарахування відсотків у часі
Відсотки дискретні – припускають, що нарахування відсотків здійснюється дискретно, тобто в окремі (зазвичай рівновіддалені) моменти часу, причому, як періодів нарахування приймають рік, півріччя, квартал, місяць
Відсоток звичайний або *комерційний* – отримують, коли за базу вимірювання часу беруть рік, умовно складається з 360 днів (12 місяців по 30 днів у кожному)
Відсоток точний – отримують, коли за базу вимірювання часу беруть дійсне число днів в році: 365 або 366

Д

Дисконт або знижка – відсотки у вигляді різниці D=S–P, де S – сума на кінець терміну, P – сума на початок терміну
Дисконтний множник – коефіцієнт, що показує, яку частку складає початкова сума позики в остаточній величиною боргу (нарощеної сумі).
Дисконтування – суми S – розрахунок її поточної вартості P

І

Індекс купівельної спроможності грошей – дорівнює зворотній величині індекс інфляції цін.
Індекс рентабельність – відношення наведених за ставкою порівняння доходів до наведених на ту ж дату капіталовкладенням.
Індекс цін – показує, у скільки разів зросли ціни за вказаний проміжок часу.
Інфляційна премія – коригування ставки відсотків для компенсації знецінення грошей.

К

Капіталізація відсотків – приєднання нарахованих відсотків до суми, яка служила базою для їх визначення
Коефіцієнт нарощення ренти – відношення нарощеної суми ренти до суми її річних платежів або до розміру окремого платежу.

Коефіцієнт приведення ренти – ставлення сучасної вартості ренти до суми її річних платежів або до розміру окремого платежу

М

Математичне дисконтування – вид дисконтування, що представляє собою розв'язання задачі, оберненої нарощенню початкової позики.

Множник нарощення – коефіцієнт, який показує у скільки разів нарощена сума більше початкової

Н

Нарощення або *зростання початкової суми* – процес збільшення грошей в зв'язку з приєднанням відсотків до суми боргу

Нарощена сума позики (боргу, депозиту, інших видів інвестованих коштів) – початкова її сума разом з нарахованими на неї процентами до кінця терміну

Нарощена сума потоку платежів – сума всіх членів послідовності платежів з нарахованими на них відсотками до кінця терміну ренти

О

Облік, банківський або комерційний облік – облік (купівля) векселів полягає в тому, що банк до настання терміну платежу за векселем або ін. Платіжному зобов'язанням купує його у власника (кредитора) за ціною нижче тієї суми, яка повинна бути виплачена по ньому в кінці терміну, тобто придбаває (враховує) його з дисконтом

П

Період нарахування – інтервал часу, до якого відноситься (застосовується) процентна ставка

Період ренти – часовий інтервал між двома сусідніми платежами

Постійна рента – рента з рівними членами

Потік платежів – ряд послідовних виплат і надходжень

Правило торговця – один з двох методів розрахунку відсотків і визначення залишку боргу при погашенні короткострокової заборгованості частковими платежами

Практика розрахунку простих відсотків – розрізняє три варіанти розрахунку: (1) точні відсотки з точним числом днів позички (британська практика); (2) звичайні відсотки з точним числом днів позички (французька практика); (3) звичайні відсотки з наближеним числом днів позики (німецька практика)

Приведення – це визначення будь-вартісної величини на деякий момент часу. Якщо деяка сума приводиться до більш ранньої дати, ніж поточна, то застосовується дисконтування, якщо ж мова йде про більш пізню дату, то – нарощення

Принцип нерівноцінності грошей – гроші, які стосуються різним моментів часу мають різну поточну вартість

Процентна ставка – відношення суми відсоткових грошей, виплачуваних за фіксований відрізок часу до величини позики. Ставка вимірюється у відсотках, у вигляді десяткового або натуральної дробу

Р

Реінвестування – неодноразове повторення процесу інвестування суми депозиту разом з нарахованими на неї в попередньому періоді відсотками

Рента р -термінова – рента, що передбачає *р* рівних платежів на рік

Рента відкладена або *відстрочена* – рента, початок терміну якої запізнюється

Рента вірна – рента, члени якої підлягають безумовній виплаті

Рента постнумерандо (або *звичайна рента*) – рента, платежі якої здійснюються в кінці кожного періоду

Рента пренумерандо – рента, платежі якої здійснюються на початку кожного періоду

Рента строкова – рента, термін якої починається негайно

Рента умовна – рента, виплата членів якої ставиться в залежність від настання деякої випадкової події

С

Сила росту δ – являє собою номінальну ставку відсотків при $m\to\infty$, де m – число нарахувань відсотків на рік

Ставка відсотків номінальна облікова – складна річна облікова ставка f, застосовується при дисконтуванні m раз на рік. Тоді в кожному періоді, що дорівнює $1/m$ частини року, дисконтування здійснюється за складною обліковою ставкою f/m

Ставка відсотків проста – це ставка, яка застосовується до однієї і тієї ж початкової суми протягом усього терміну позики

Ставка відсотків складна – це ставка, яка застосовується до суми з нарахованими в попередньому періоді відсотками

Ставка відсотків складна облікова – дисконтування по складній річної облікової ставки здійснюється за формулою $P=S(1-d_{\text{сл}})^n$, де $d_{\text{сл}}$ – складна річна облікова ставка, S – дисконтована величина, P – сучасна вартість S, n – термін дисконтування

Ставка ефективна – річна ставка складних відсотків, яка призводить до того ж фінансового результату, що і m-разове нарощення на рік за ставкою j/m, де j – номінальна ставка

Ставка ефективна облікова – складна річна облікова ставку, еквівалентна (за фінансовими результатами) номінальною облікової ставки, яка застосовується при заданому числі дисконтування в році m

Ставка номінальна – річна ставка складних відсотків j при числі періодів нарахування в році m. Тоді за кожен період відсотки нараховують за ставкою j/m

Ставка облікова – ставка, що застосовується для розрахунку відсотків при обліку векселів.

Сучасна величина (поточна вартість) суми S – величина P, знайдена дисконтуванням

Сучасна величина потоку платежів – сума всіх його членів, дисконтованих (приведених) на деякий момент часу, що співпадає з початком потоку платежів або попередній йому

Т

Термін окупності – тривалість періоду, протягом якого сума чистих доходів, дисконтованих на момент завершення інвестицій, дорівнює сумі наведених на цей же момент інвестицій

Термін ренти – час, виміряний від початку фінансової ренти до кінця її останнього періоду

Ф

Фінансова рента або *ануїтет* – потік платежів, усі члени якого позитивні величини, а часові інтервали постійні

Формула нарощення за простими відсотками – або, коротко, формулою простих відсотків: $S=P(1+ni)$, де S – нарощена сума, P – початкова сума (позика), n – термін нарахування відсотків (термін позики), i – ставка відсотків за одиницю часу.

Ч

Член ренти – величина кожного окремого платежу ренти

Чистий приведений дохід – різниця дисконтованих на один момент часу показників доходу і капіталовкладень