

“Современная математика”  
Вводные курсы

*Р. Уилсон “Введение в теорию графов”*

Перевод с английского  
И. Г. Никитиной

Под. редакцией  
Г. П. Гаврилова

Издательство “МИР”  
Москва 1977

# **Introduction to Graph Theory**

**Robin J. Wilson**

Oliver and Boyd  
Edinburgh

1972

В последнее время теория графов стала важнейшим математическим инструментом, широко используемым в таких областях науки, как исследование операций, лингвистика, химия, генетика и другие. Книга Р. Уилсона является вводным курсом в теорию графов; вместе с тем она затрагивает целый ряд интересных и сложных задач. В ней дано хорошее введение в теорию матроидов, доказаны теоремы о связности и укладках, приведено много упражнений разной степени трудности.

Книга будет полезна студентам, изучающим дискретную математику. Её можно рекомендовать и как учебное пособие специалистам в области техники, занимающимся прикладными задачами теории графов.

*Редакция литературы по математическим наукам.*

©Перевод на русский язык, “Мир”, 1977

# Оглавление

<b><u>ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА</u></b> .....	6
<b><u>ПРЕДИСЛОВИЕ</u></b> .....	8
<b><u>1. ВВЕДЕНИЕ</u></b> .....	10
§ <u>1. ЧТО ТАКОЕ ГРАФ?</u> .....	10
<b><u>2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ</u></b> .....	16
§ <u>2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ</u> .....	16
§ <u>3. ПРИМЕРЫ ГРАФОВ</u> .....	21
§ <u>4. УКЛАДКИ ГРАФОВ</u> .....	27
<b><u>3. ЦЕПИ И ЦИКЛЫ</u></b> .....	32
§ <u>5. НОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ</u> .....	32
§ <u>6. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ</u> .....	37
§ <u>7. ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ</u> .....	42
§ <u>8. БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ</u> .....	44
<b><u>4. ДЕРЕВЬЯ</u></b> .....	50
§ <u>9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ДЕРЕВЬЕВ</u> .....	50
§ <u>10 ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ</u> .....	54
§ <u>11. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ</u> .....	58
<b><u>5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ</u></b> .....	63
§ <u>12. ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ</u> .....	63
§ <u>13. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКИХ ГРАФАХ</u> .....	68
§ <u>14. ГРАФЫ НА ДРУГИХ ПОВЕРХНОСТЯХ</u> .....	74
§ <u>15. ДВОЙСТВЕННЫЕ ГРАФЫ</u> .....	77
§ <u>16. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПО УИТНИ</u> .....	83
<b><u>6. РАСКРАШИВАНИЕ ГРАФОВ</u></b> .....	86
§ <u>17. ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО</u> .....	86
§ <u>18. ДВА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА</u> .....	90
§ <u>19. РАСКРАШИВАНИЕ КАРТ</u> .....	93
§ <u>20. РЕБЕРНАЯ РАСКРАСКА</u> .....	98
§ <u>21. ХРОМАТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ</u> .....	102

<b><u>7. ОРГРАФЫ</u></b> .....	<b>107</b>
<b><u>§ 22. ОПРЕДЕЛЕНИЯ</u></b> .....	107
<b><u>§ 23. ЭЙЛЕРОВЫ ОРГРАФЫ И ТУРНИРЫ</u></b> .....	111
<b><u>§ 24. ЦЕПИ МАРКОВА</u></b> .....	116
<b><u>8. ПАРСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА</u></b>	
<b><u>МЕНГЕРА</u></b> .....	<b>121</b>
<b><u>§ 25. ТЕОРЕМА ХОЛЛА О СВАДЬБАХ</u></b> .....	121
<b><u>§ 26. ТЕОРИЯ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ</u></b> .....	124
<b><u>§ 27. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ХОЛЛА</u></b> .....	127
<b><u>§ 28. ТЕОРЕМА МЕНГЕРА</u></b> .....	132
<b><u>§ 29. ПОТОКИ В СЕТЯХ</u></b> .....	137
<b><u>9. ТЕОРИЯ МАТРОИДОВ</u></b> .....	<b>145</b>
<b><u>§ 30. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МАТРОИДОВ</u></b> .....	145
<b><u>§ 31. ПРИМЕРЫ МАТРОИДОВ</u></b> .....	149
<b><u>§ 32. МАТРОИДЫ И ТЕОРИЯ ГРАФОВ</u></b> .....	154
<b><u>§ 33. МАТРОИДЫ И ТЕОРИЯ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ</u></b> .....	160
<b><u>ПОСЛЕСЛОВИЕ</u></b> .....	<b>166</b>
<b><u>ПРИЛОЖЕНИЕ</u></b> .....	<b>168</b>
<b><u>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</u></b> .....	<b>169</b>
<b><u>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ</u></b> .....	<b>171</b>

## ***ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА***

Из младенческого возраста теория графов вышла давно: ей уже около 240 лет! А тонкие результаты, установленные в теории графов А. Кэли, К. Куратовским и Л. С. Понтрягиным, Д. Пойа, К. Менгером и другими исследователями — разве они не говорят о возмужании теории графов?!

Однако от людей разного уровня математической культуры и знаний нередко можно услышать высказывания о теории графов, которые свидетельствуют о весьма поверхностной оценке возможностей и глубины этой теории. «Несерьезные отзывы» порождаются, как нам кажется, следующими основными причинами. Во-первых, в теории графов чрезвычайно много задач, формулировки и возможные пути решения которых понятны даже школьникам начальных классов (при этом тонкость и строгость соответствующих доказательств остаются, как правило, непрочувствованными). Например, при небольшом методическом навыке можно достаточно подробно и обоснованно (!) рассказать третьекласснику об отсутствии «положительного решения» в задаче «о трех домах и трех колодцах». Но нюансы теоремы Куратовского — Понтрягина останутся невскрытыми.

Вторая причина — большая наглядность многих теоретико-графовых конструкций и естественность приемов доказательства даже очень тонких теорем. Все это приводит к неверному представлению об «очевидности и несложности» утверждений теории графов. В-третьих, теория графов имеет ярко выраженный прикладной характер, и поэтому ее изучают и о ней говорят (часто — слишком однобоко!) химики, физики, лингвисты, экономисты, психологи (и можно назвать еще десятка два областей науки и техники, представители которых «интересуются графами»).

Наконец, четвертая причина состоит в том, что среди громадного числа разнообразных руководств, появившихся в мировой литературе за последние 10—15 лет, почти полностью отсутствуют такие, которые доступны читателю со средней математической подготовкой и в которых в то же время не затушевываются тонкость, своеобразие и изящество методов современной теории графов.

Нам кажется, что книга Уилсона как раз ориентирована (и притом удачно) на читателя, обладающего математической культурой, которая формируется обычным школьным курсом математики; она предполагает знание лишь самых начал теории групп, линейной алгебры и топологии. В книге систематично и последовательно излагаются и классические факты из теории графов и ряд утверждений из таких ее разделов, которые бурно развиваются в наши дни (например, из теории матроидов). Конечно, заменить богатую по содержанию книгу Ф. Харари «Теория графов» книга Уилсона не может. Но для первоначального ознакомления читателей с теорией графов она, по нашему мнению, приспособлена превосходно.

Мы упоминали уже о том, что теорией графов интересуются специалисты

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

из весьма разнообразных областей знания. Этим отчасти объясняется пестрота и неупорядоченность терминологии и обозначений в теории графов. В предлагаемой читателю книге терминология близка к той, которая имеется в переведенных на русский язык книгах К. Бержа [3] и Р. Басакера и Т. Саати [2]. Там, где терминология и обозначения, применяемые Уилсоном, сильно «противоречили» «естественной» терминологии, принятой в упомянутой выше книге Ф. Харари, мы сочли благоразумным внести соответствующие изменения.

*Г. П. Гаврилов*

Вперед, моя книжка, в дорогу!  
Вперед, добрым людям на радость!

**Вильям Воксфорд<sup>1</sup>**

## ***ПРЕДИСЛОВИЕ***

В последние несколько лет теория графов стала важнейшим математическим инструментом, широко используемым во многих областях науки, начиная с исследования операций и лингвистики и кончая химией и генетикой. В то же самое время она выросла в самостоятельную математическую дисциплину. В связи с этим возникла необходимость в небольшом вводном курсе, полезном и для математиков, начинающих изучать теорию графов, и для нематематиков, стремящихся как можно быстрее овладеть предметом. Надеюсь, что этой книгой сделан шаг в нужном направлении. Для ее понимания требуется только знание элементарной теории множеств и теории матриц.

Содержание книги удобно разделить на 4 части. Первая из них, состоящая из начальных четырех глав, закладывает фундамент курса и включает в себя такие темы, как связность, деревья, эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы. Затем следуют две главы, посвященные планарным графам и раскрашиванию, где особенно выделены вопросы, связанные с гипотезой четырех красок. В третьей части (гл. 7 и 8) рассматриваются теория ориентированных графов (орграфов), теория трансверсалей и их связь с такими понятиями, как цепи Маркова и потоки в сетях. Заканчивается книга главой, посвященной теории матроидов, в которой сделана попытка связать воедино материал предыдущих глав, а также дать некоторое представление о последних достижениях в этой области. Читатель, которого больше интересуют «чистая» теория графов, может опустить при первом чтении гл. 7 и 8, а читатель, которого занимают главным образом приложения, может опустить гл. 5 и 6. Я надеюсь, что некоторые разделы первых трех глав книги будут признаны подходящими для школьников.

Всюду в данном курсе я старался ограничиваться в тексте только самыми важными вещами, относя все остальное в упражнения. В результате в книгу включено около 250 упражнений, часть которых предназначена для проверки понимания текста, большинство же имеет своей целью подвести читателя к новым результатам и идеям. Поэтому мы настоятельно рекомендуем читателю ознакомиться с каждым упражнением, даже если он не намерен подробно разбирать это упражнение. Наиболее трудные

---

<sup>1</sup> Вильям Вордсворд (1770-1850) – английский поэт. – *Прим. ред.*

упражнения помечены звездочкой(\*)).

При первом чтении некоторые разделы книги можно пропустить либо из-за их трудности, либо из-за того, что материал, который они содержат, не используется в дальнейшем; для обозначения начала и конца таких разделов используется символ ▲. Конец доказательства (или его отсутствие) отмечается символом //, все определяемые термины выделены жирным шрифтом. Наконец, число элементов множества  $S$  обозначается  $|S|$ , пустое множество — символом  $\emptyset$ .

Невозможно отметить поименно всех тех людей, которые помогли созданию этой книги своими ценными предложениями и замечаниями. Однако мне особенно хочется поблагодарить Джона В. Муна, Питера А. Радо и Т. Д. Парсонса за их неоценимую помощь в подготовке окончательного варианта рукописи. Я благодарю также Джан-Карло Рота и Холларда Крофта, которые впервые познакомили меня с предметом. Весьма признателен я миссис Дейдр Конкеннон, нарисовавшей диаграммы, и миссис Э. Джиллон, перепечатавшей рукопись.

Наконец, мне хочется поблагодарить моих студентов, не будь которых, эта книга была бы завершена на год раньше; В. Шекспира и других за их точные и остроумные высказывания, приведенные в начале каждой главы, а больше всего мою жену Джой — за многое, что не имеет вообще никакого отношения к теории графов.

Оксфорд

Р. Дж. У.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Последнее, что понимаешь, когда пишешь книгу, — это с чего ее следует начать.

**Блез Паскаль**

В этой вводной главе мы хотим с помощью простых примеров заложить интуитивные основы того материала, который в последующих главах будет описан более формально. Ко всем напечатанным здесь жирным шрифтом терминам надо относиться скорее как к описаниям, а не как к определениям, чтобы, познакомившись с ними интуитивно, узнать их и в более формальном окружении. Советуем быстро прочитать эту главу, а потом совсем о ней забыть!

### § 1. ЧТО ТАКОЕ ГРАФ?

Рассмотрим сначала рис. 1.1 и 1.2, на которых изображены соответственно участок электрической цепи и часть карты дорог. Ясно, что оба эти рисунка могут быть представлены одной и той же диаграммой из точек и линий, изображенной на рис. 1.3. Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и  $T$  называются, линии называются **ребрами**, а вся диаграмма называется **графом**. (Заметим, что точка пересечения линий  $PS$  и  $QT$  не относится к вершинам графа, так как она не является ни общей точкой двух проводов, ни перекрестком дорог.) **Степенью** вершины называется число ребер, концом которых является эта вершина; на рис. 1.2 это соответствует числу дорог, сходящихся у перекрестка; так, степень вершины  $Q$  равна 4.

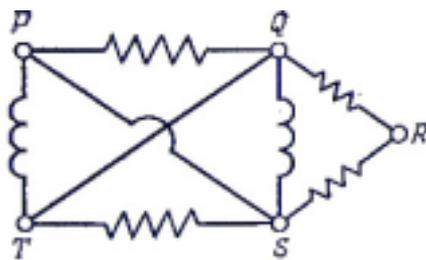


Рис. 1.1.

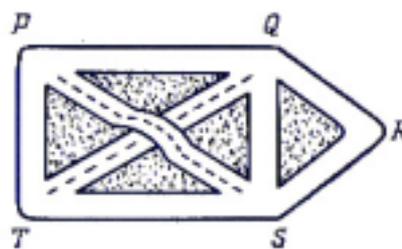


Рис. 1.2.

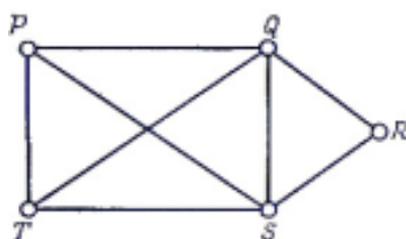


Рис. 1.3.

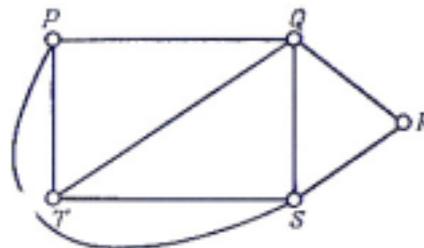


Рис. 1.4.

Очевидно, что граф, изображенный на рис. 1.3, может описывать и

другие ситуации. Например, если обозначить через  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и  $T$  футбольные команды, то наличие ребра между двумя вершинами можно трактовать как состоявшуюся встречу соответствующих двух команд (так, согласно рис. 1.3, команда  $P$  уже сыграла с  $S$ , но еще не сыграла с  $R$ ); в этом случае степенью вершины будет число матчей, сыгранных соответствующей командой.

Рассмотренные выше ситуации можно описать и другим графом, изображенным на рис. 1.4. Здесь мы устранили «пересечение» линий  $PS$  и  $QT$ , проведя линию  $PS$  вне прямоугольника  $PQST$ . Заметим, что полученный при этом граф по-прежнему дает нам представление о том, как соединены провода в электрической цепи, есть ли прямая дорога от одного перекрестка к другому и какие футбольные команды встречались друг с другом; потеряна только информация, касающаяся «метрических» свойств (длина дороги, прямолинейность провода и т. д.).

Тем самым мы хотим подчеркнуть, что граф — это представление некоторого множества точек и способа их соединения и что для наших целей метрические свойства несущественны. Исходя из этого, любые два графа, которые представляют одну и ту же ситуацию (как, например, графы, изображенные на рис. 1.3 и 1.4), будут считаться по существу одинаковыми. Более точно, мы будем говорить, что два графа **изоморфны**, если существует взаимно однозначное соответствие между их вершинами, обладающее тем свойством, что две вершины соединены ребром в одном графе тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины соединены ребром в другом. На рис. 1.5 изображен еще один граф, изоморфный двум предыдущим. Заметим, что в этом графе представления о пространстве и расстояниях совершенно искажены, хотя, как и раньше, можно сразу сказать, какие точки соединены проводом или дорогой.

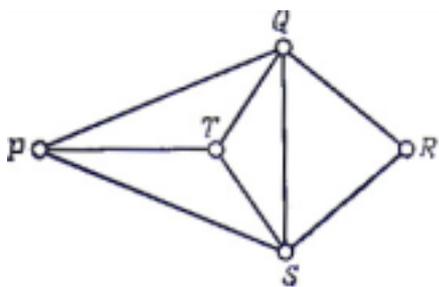


Рис. 1.5.

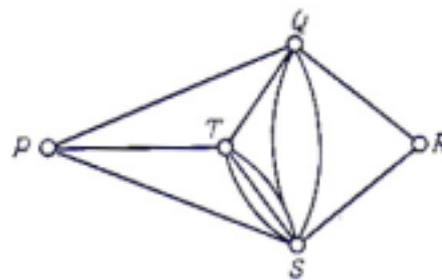


Рис. 1.6.

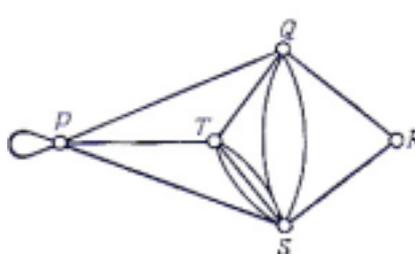


Рис. 1.7.

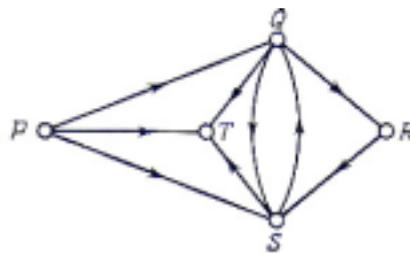


Рис. 1.8.

Стоит отметить, что граф, о котором шла речь до сих пор, «простой» в том смысле, что в нем любую пару вершин соединяет не более чем одно ребро. Предположим теперь, что дороги от  $Q$  до  $S$  и от  $S$  до  $T$  (рис. 1.5) слишком загружены и для их разгрузки проложены параллельные дороги, соединяющие те же точки; тогда соответствующая диаграмма будет выглядеть, как на рис. 1.6. (Ребра, соединяющие  $Q$  с  $S$  или  $S$  с  $T$ , называются кратными.) Если к тому же мы хотим построить гараж в пункте  $P$ , то на диаграмме это можно отметить ребром, идущим из  $P$  в  $P$ ; такое ребро обычно называют петлей (рис. 1.7). В этой книге рассматриваются графы, содержащие петли и кратные ребра. Графы, не содержащие петель и кратных ребер (как, например, граф на рис. 1.5), мы будем называть **простыми**.

А что получится, если по каждой из дорог возможно только одностороннее движение? Задавшись таким вопросом, мы придем к рассмотрению **ориентированных графов** (или, сокращенно, **орграфов**). Пример орграфа дан на рис. 1.8; направления движения указаны стрелками (в этом конкретном случае в пункте  $T$  творилось бы нечто несусветное, но это не мешает нам исследовать и такие ситуации). Заметим, что если *не все* дороги односторонние, то можно получить соответствующий орграф, сопоставляя дороге с двусторонним движением два противоположно ориентированных ребра. Более подробно мы будем изучать орграфы в гл. 7.

Много внимания уделяется в теории графов изучению различного рода цепей; под **цепью** понимается последовательность идущих друг за другом ребер. Так, например, на рис. 1.5 один из способов попасть из  $P$  в  $R$  описывается цепью  $P \rightarrow Q \rightarrow R$  длины 2; аналогично, есть цепь  $P \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow S \rightarrow R$  длины 5. По очевидным соображениям цепь  $Q \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow Q$  называется **циклом**.

В общем случае не всегда можно найти цепь, связывающую две данные вершины и рассматриваемого графа (см. рис. 1.9); такая цепь будет существовать, только если граф состоит как бы из одного куска. Для большей ясности рассмотрим пример графа, вершины которого соответствуют станциям лондонского и нью-йоркского метрополитенов, а ребра линиями, соединяющими станции между собой. Совершенно очевидно, что по ребрам этого графа невозможно попасть со станции Черинг Кросс в Лондоне на Гранд Централ Стейшен в Нью-Йорке. С другой стороны, если рассматривать станции и линии только лондонского метро, то всегда найдется путь, соединяющий две произвольно выбранные станции. Граф, в котором любые две вершины соединены цепью, называется **связным графом**; такие графы будут рассматриваться в гл. 3.

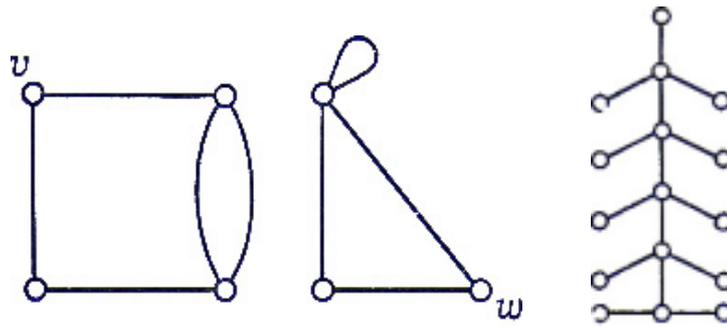


Рис. 1.9.

Рис. 1.10.

Значительная часть глав 3 и 4 посвящена изучению графов, которые содержат цепь или цепи с некоторыми специальными свойствами. Например, в гл. 3 мы будем рассматривать графы, в которых существует цепь, кончающаяся в начальной вершине и проходящая ровно один раз через каждое ребро или через каждую вершину. Такие графы называются соответственно **эйлеровыми** и **гамильтоновыми**. Например, граф на рис. 1.5 гамильтонов (возможная цепь  $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow P$ ), но не эйлеров, так как в нем любая цепь, содержащая каждое ребро ровно один раз (например,  $P \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow P \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow T$ ), обязательно заканчивается в вершине, отличной от начальной.

Нас также будут интересовать связные графы, в которых существует одна и только одна цепь, соединяющая каждую пару вершин; такие графы называются **деревьями** (по аналогии с генеалогическими деревьями) и рассматриваются в гл. 4. Мы увидим, что дерево можно определить и как связный граф, не содержащий циклов (см. рис. 1.10).

Вернемся немного назад и вспомним, что при обсуждении графа, изображенного на рис. 1.3, мы приводили примеры изоморфных ему графов (рис. 1.4 и 1.5), не имеющих пересечений ребер. Всякий граф, который можно так нарисовать на плоскости, что он не будет содержать пересечений (ребер), называется **планарным графом**. Планарные графы играют очень важную роль в теории графов. В гл. 5 мы приведем несколько критериев планарности; в некоторых из них используются свойства подграфов исследуемых графов, а в других — фундаментальное понятие **двойственности**.

Планарные графы играют заметную роль и в задачах раскрашивания. Для того чтобы понять, как возникают такие задачи, вернемся к нашему «дорожному» графу и предположим, что компании «Шелл», «Эссо», «Бритиш Петролеум» и «Галф» хотят распределить между собой строительство пяти бензозаправочных станций в пунктах  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и  $T$ . Предположим далее, что по экономическим причинам ни одна из компаний не желает сооружать свои станции в соседних вершинах. Тогда возможно следующее решение: «Шелл» строит станцию в пункте  $P$ , «Эссо» — в  $Q$ , «Б. П.» — в  $S$ , «Галф» — в  $T$ , а в  $R$  строит либо «Шелл», либо «Галф». Однако если «Галф» решит отказаться от участия в строительстве, то ясно, что три оставшиеся компании не смогут построить свои станции указанным

способом.

Эта задача на более «красочном» языке будет обсуждаться в гл. 6, где мы исследуем вопрос о возможности такой раскраски вершин простого графа при помощи  $k$  данных красок, что каждое ребро будет иметь концы разного цвета. Если граф планарный, то, как мы увидим, его вершины всегда можно раскрасить указанным образом, используя пять красок. Более того, высказано предположение (которое не удалось пока доказать), что для этой цели достаточно четырех красок — это и есть знаменитая **гипотеза четырех красок**<sup>2</sup>. (Наверное, более известным ее вариантом является аналогичная гипотеза о раскрашивании стран на карте.)

В гл. 8 мы рассмотрим различные комбинаторные задачи, включая известную «задачу о свадьбах». В ней спрашивается: при каких условиях юноши, каждый из которых знаком с несколькими девушками, могут вступить в брак так, что каждый юноша женится на знакомой ему девушке. Эта проблема легко формулируется на языке теории трансверсалей — весьма важной ветви комбинаторной математики, которой мы коснемся в §26. Оказывается, что эти задачи тесно связаны с задачей нахождения числа цепей, связывающих две заданные вершины в графе или орграфе и удовлетворяющих дополнительному условию, что никакие две из них не имеют общих ребер.

Завершается глава 8 рассмотрением потоков в сетях и транспортных задач. Чтобы получить представление об этих задачах, допустим, что на рис. 1.5 изображен участок электрической цепи, в которой каждый провод сделан из своего материала. Требуется узнать, какова наибольшая сила тока, которую может выдержать этот участок цепи, если известны величины предельных токов для каждого из проводов. Можно также считать  $P$  фабрикой,  $R$  — рынком, а ребра графа — различными каналами связи, по которым происходит пересылка товаров; в этом случае хотелось бы узнать, сколько товаров можно послать с фабрики на рынок, учитывая заданные пропускные способности различных каналов.

Заканчивается книга главой по теории матроидов. Эта глава была задумана для того, чтобы связать воедино материал предыдущих глав, а еще для того, чтобы не нарушить принципа: «Мудрым будь — обобщить не забудь!» На самом деле **теория матроидов** есть просто-напросто учение о множествах с определенными на них «структурами независимости»; она обобщает не только свойства линейной независимости в векторных пространствах, но и некоторые результаты теории графов, полученные в этой книге. Однако, как мы увидим, теория матроидов отнюдь не является «обобщением ради обобщения»; напротив, она позволяет нам глубже проникнуть в суть некоторых задач теории графов, а в приложениях своих

---

<sup>2</sup> В печать появилось сообщение (K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, Bull. Of Amer. Math. Soc., 82, №5 (sept. 1976)), что гипотезу четырех красок удалось обосновать с использованием ЭВМ. — *Прим. ред.*

дает простые доказательства результатов из теории трансверсалей, которые плохо поддаются более традиционным методам. Мы убеждены, что в скором времени теория матроидов сыграет важную роль в развитии комбинаторной теории; по этой причине мы и включили ее в нашу книгу.

Надеемся, что эта вступительная глава оказалась полезной нашим читателям тем, что ввела их в курс дела, и тем, что предложила им описание понятий, которые встретятся в дальнейшем. Приступим теперь к формальному изложению предмета.

## УПРАЖНЕНИЯ

- (1a) Покажите, что следующие объекты можно рассматривать как графы или орграфы: (i) вершины и ребра многогранника; (ii) план лабиринта; (iii) дружеские отношения между людьми, приглашенными на вечер; (iv) Атомиум в Брюсселе; (v) стадии игры в крестики-нолики; (vi) генеалогическое дерево; (vii) теннисный турнир; (viii) делители числа 60; (ix) страны на карте; (x) размещение экспонатов на выставке.

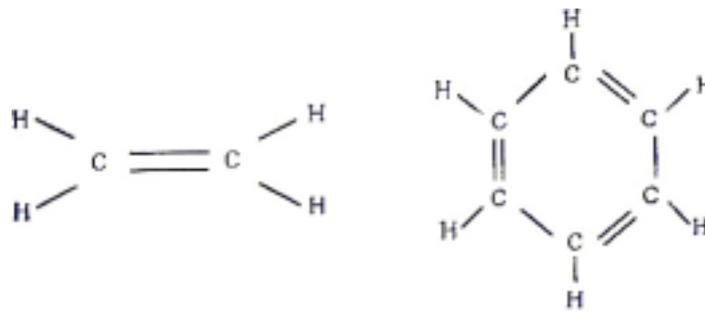


Рис. 1.11.

- (1b) На рис. 1.11 представлены молекулы этилена в бензола; через *C* и *H* обозначены атомы углерода и водорода соответственно. Можно ли считать эти диаграммы графами? Если да, то можете ли вы предложить какие-нибудь необходимые условия, которые надо наложить на граф, для того чтобы он представлял молекулу какого-нибудь из углеводородов?
- (1c) Придумайте пять других приложений теории графов (как можно более разнообразных).

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Ненавижу определения!

Бенджамин Дизраэли<sup>3</sup>

В этой главе закладывается фундамент теории графов. В §2 даны точные определения некоторых основных понятий, упомянутых в гл. 1, в §3 предложены разнообразные примеры. Для наглядности широко используются диаграммы; обоснование такого представления графов дано в §4. Описание некоторых типичных приложений теории графов мы отложим до того момента, когда в нашем распоряжении будет больше технических средств теории (§11).

### § 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Дадим сначала определение простого графа  $G$ . Пара  $(V(G), E(G))$  называется **простым графом**, если  $V(G)$  — непустое конечное множество элементов, называемых **вершинами** (или **узлами**, или **точками**), а  $E(G)$  — конечное множество неупорядоченных пар различных элементов из  $V(G)$ , называемых **ребрами** (или **линиями**). Иногда  $V(G)$  называют **множеством вершин**, а  $E(G)$  — **множеством ребер** графа  $G$ . Например, на рис. 2.1 изображен простой граф  $G$ , у которого множеством вершин  $V(G)$  является множество  $\{u, v, w, z\}$ , а множество ребер  $E(G)$  состоит из пар  $\{u, v\}$ ,  $\{v, w\}$ ,  $\{u, w\}$  и  $\{w, z\}$ . Говорят, что ребро  $\{v, w\}$  соединяет вершины  $v$  и  $w$ . Отметим, что так как  $V(G)$  является множеством, а не семейством<sup>4</sup>), то в простом графе данную пару вершин может соединять не более чем одно ребро.

Оказывается, многие результаты, полученные для простых графов, без труда можно перенести на более общие объекты, в которых две вершины могут быть соединены более чем одним ребром. Кроме того, часто бывает удобно снять ограничение, состоящее в том, что ребро должно соединять две *различные* вершины, и допустить существование **петель**,

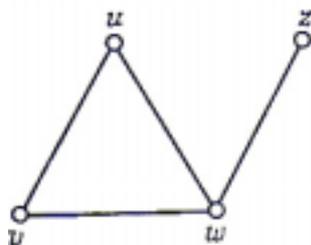


Рис. 2.1.

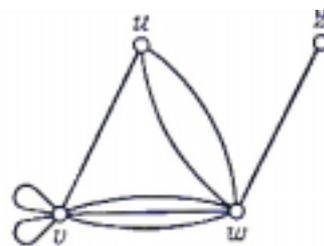


Рис. 2.2.

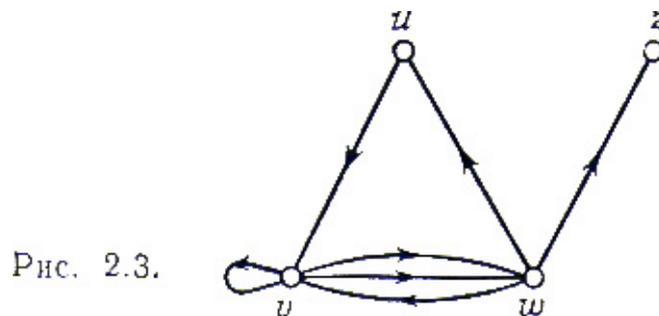
<sup>3</sup> Бенджамин Дизраэли (1804 – 1881) – английский государственный деятель и писатель. – *Прим. ред.*

<sup>4</sup> Под словом “семейство” мы понимаем совокупность элементов, где некоторые элементы могут встречаться несколько раз, например,  $\{a, b, c\}$  – множество, тогда как  $(a, a, a, b, c, c)$  – семейство.

т. е. ребер, соединяющих вершину с ней самой. Получающийся при этом объект, в котором могут быть петли и кратные ребра, называется **общим графом**, или просто **графом** (рис. 2.2). Подчеркнем тот факт, что каждый простой граф является графом, но не каждый граф является простым графом.

Более точно, **графом**  $G$  называется пара  $(V(G), E(G))$ , где  $V(G)$  — непустое конечное множество элементов, называемых **вершинами**, а  $E(G)$  — конечное семейство неупорядоченных пар элементов из  $V(G)$  (не обязательно различных), называемых **ребрами**. Заметим, что употребление слова «семейство» говорит о том, что допускаются кратные ребра. Будем называть  $V(G)$  **множеством вершин**, а  $E(G)$  — **семейством ребер** графа  $G$ ; на рис. 2.2  $V(G)$  — это множество  $\{u, v, w, z\}$ , а  $E(G)$  — это семейство, состоящее из ребер  $\{u, v\}$ ,  $\{v, v\}$ ,  $\{v, v\}$ ,  $\{v, w\}$ ,  $\{v, w\}$ ,  $\{v, w\}$ ,  $\{u, w\}$ ,  $\{u, w\}$  и  $\{w, z\}$ . О каждом ребре вида  $\{v, w\}$  говорят, что оно **соединяет** вершины  $v, w$ ; значит, каждая петля  $\{v, v\}$  соединяет вершину  $v$  саму с собой. Хотя в этой книге нам придется иногда ограничиться простыми графами, всюду, где это возможно, мы будем доказывать наши результаты для общих графов.

Предметом изучения в теории графов являются также ориентированные графы (называемые иногда орграфами или сетями; однако мы будем употреблять слово «сеть» в несколько ином смысле). **Орграфом**  $D$  называется пара  $(V(D), A(D))$ , где  $V(D)$  — непустое конечное множество элементов, называемых **вершинами**, а  $A(D)$  — конечное семейство *упорядоченных* пар



элементов из  $V(D)$ , называемых **дугами** (или **ориентированными ребрами**). Дуга, у которой вершина  $v$  является первым элементом, а вершина  $w$  вторым, называется дугой из  $v$  в  $w$  и обозначается  $(v, w)$ .

Заметим, что дуги  $(v, w)$  и  $(w, v)$  различны. На рис. 2.3 изображен оргграф, дугами которого являются  $(u, v)$ ,  $(v, v)$ ,  $(v, w)$ ,  $(v, w)$ ,  $(w, v)$ ,  $(w, u)$  и  $(w, z)$ ; порядок вершин на дуге указан стрелкой.

Подробнее оргграфы будут изучаться в гл. 7. Здесь же мы только отметим, что хотя графы и оргграфы — существенно различные объекты, в определенных случаях графы можно рассматривать как оргграфы, в которых каждому ребру соответствуют две противоположно ориентированные дуги (рис. 2.4).

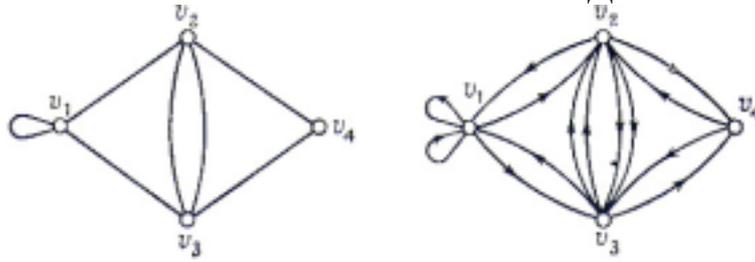


Рис. 2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ ПО ПОВОДУ ТЕРМИНОЛОГИИ.

Язык теории графов, бесспорно, еще не стал стандартным — каждый автор вводит свою собственную терминологию. В этой книге мы пользуемся в основном терминологией Басакера и Саати [2]. Некоторые специалисты по теории графов называют графом то, что мы назвали простым графом. Во многих случаях, и особенно в приложениях, под графом понимается орграф. Еще хуже, иногда графом называют объект, который получается, если снять условие конечности множества вершин или семейства ребер. (Если оба они бесконечны, мы называем соответствующий объект **бесконечным графом**; изучение бесконечных графов мы отложим до §8, хотя в упражнениях они появятся гораздо раньше.) Следует подчеркнуть, что любое из перечисленных определений графа вполне допустимо, если только пользоваться им последовательно. Повторяем еще раз, что в этой книге *все графы конечны и неориентированы, причем всегда допускаются петли и кратные ребра, если только нет специальных указаний об их исключении.*

Прежде чем привести примеры некоторых важных типов графов (§ 3), удобно дать еще несколько простых определений.

Две вершины  $v$  и  $w$  графа  $G$  называются **смежными**, если существует соединяющее их ребро (т. е. ребро вида  $\{v, w\}$ ); при этом вершины  $v$  и  $w$  называются **инцидентными** этому ребру (а ребро — **инцидентным** этим вершинам). Аналогично, два различных ребра графа  $G$  называются смежными, если они имеют по крайней мере одну общую вершину. **Степенью** (или **валентностью**) вершины  $v$  графа  $G$  называется число ребер, инцидентных  $v$ ; степень вершины  $v$  обозначается через  $\rho(v)$ . При вычислении степени вершины и договоримся учитывать петлю в и два раза, а не один (если только явно не сказано иное). Вершина степени 0 называется **изолированной вершиной**, вершина степени 1 называется **висячей** (или **концевой**) вершиной. Так, граф, изображенный на рис. 2.2, имеет одну висячую вершину, одну вершину степени 3, одну — степени 6 и одну — степени 8.

Легко видеть, что если сложить степени всех вершин графа, то получится четное число — равное удвоенному числу ребер, так как каждое ребро участвует в этой сумме ровно два раза. Этот результат, известный еще двести лет назад Эйлеру, часто называют **леммой о рукопожатиях**. Из нее следует, что если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук обязательно четно, ибо в каждом рукопожатии участвуют две руки (при этом каждая рука считается столько раз, сколько она участвовала в рукопожатиях). Из леммы о рукопожатиях сразу следует, что в любом графе

число вершин нечетной степени должно быть четным. Аналог этого результата для орграфов будет сформулирован в § 23.

Два графа  $G_1$  и  $G_2$ , называются **изоморфными**, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин, обладающее тем свойством, что число ребер, соединяющих любые две вершины в  $G_1$ , равно числу ребер, соединяющих соответствующие вершины в  $G_2$ . Так, два графа, изображенные на рис. 2.5, изоморфны при соответствии  $u \leftrightarrow l, v \leftrightarrow m, w \leftrightarrow n, x \leftrightarrow p, y \leftrightarrow q, z \leftrightarrow r$ .

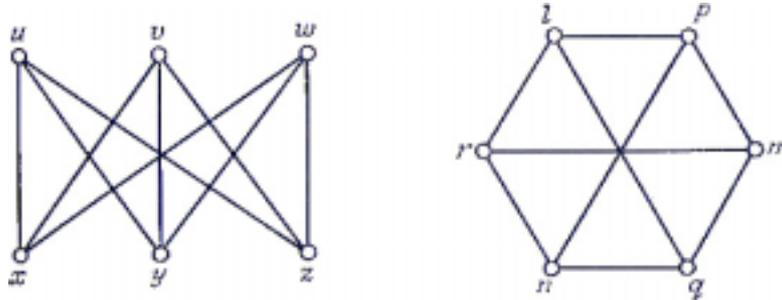


Рис. 2.5.

$y \leftrightarrow q, z \leftrightarrow r$ . Заметим, что эти графы имеют по шесть вершин — другие точки пересечения ребер вершинами не являются. **Подграфом** графа  $G$  называется граф, все вершины которого принадлежат  $V(G)$ , а все ребра принадлежат  $E(G)$ . Так, граф на рис. 2.1 является подграфом графа, изображенного на рис. 2.4, но не является подграфом ни одного из графов, приведенных на рис. 2.5 (так как последние не содержат «треугольников»).

Наконец, **матрицей смежности** графа  $G$  с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$  (соответствующей данной нумерации вершин) называется матрица  $A=(a_{ij})$  размера  $n \times n$ , в которой элемент  $a_{ij}$  равен числу ребер в  $G$ , соединяющих  $v_i$  и  $v_j$ . Например, на рис. 2.6 дана матрица смежности графа, изображенного на рис. 2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Рис. 2.6.}$$

Можно получить несколько различных матриц смежности данного графа, меняя обозначения его вершин; это приведет к изменению порядка строк и столбцов матрицы  $A$ . Но в результате всегда получится симметричная матрица из неотрицательных целых чисел, обладающая тем свойством, что сумма чисел в любой строке или столбце равна степени соответствующей вершины (здесь каждая петля учитывается в степени вершины один раз). Обратное, по любой заданной симметричной матрице из неотрицательных целых чисел легко построить граф (единственный с точностью до изоморфизма), имеющий данную матрицу своей матрицей смежности. Отсюда следует, что теорию графов можно свести к изучению матриц особого типа. (Как видно из упр. 2g, теорию графов можно свести также к изучению полиномов особого типа.)

Глава 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ  
**УПРАЖНЕНИЯ**

- (2a) Пусть  $G_n$  — граф с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , в котором вершины  $v_i, v_j$  смежны тогда и только тогда, когда  $i$  и  $j$  взаимно просты. Изобразите графы  $G_4$  и  $G_8$  и найдите их матрицы смежности. Покажите также, что если  $m < n$ , то  $G_m$  является подграфом графа  $G_n$ .
- (2b) Покажите, что два графа, изображенные на рис. 2.7, изоморфны, а два графа, изображенные на рис. 2.8, не изоморфны.

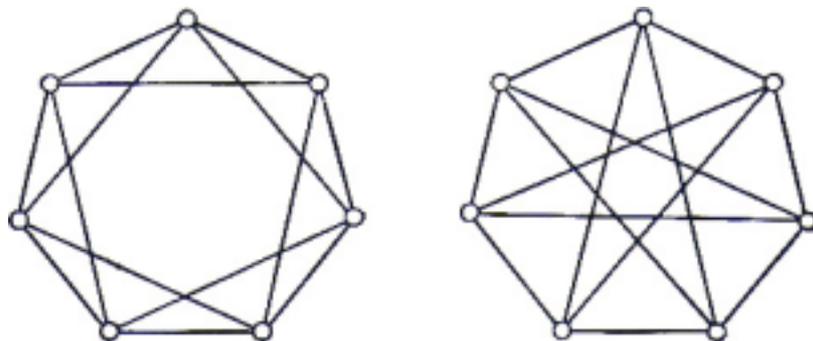


Рис. 2.7.

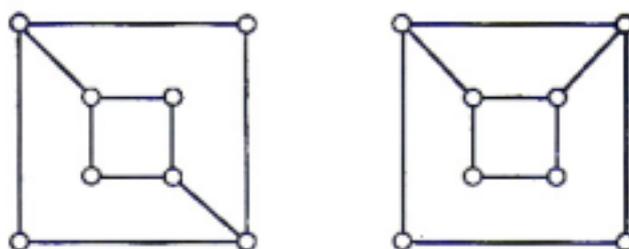


Рис. 2.8.

- (2c) Докажите, что с точностью до изоморфизма существует ровно четыре простых графа с тремя вершинами и одиннадцать — с четырьмя вершинами. Сколько можно построить простых графов с пятью вершинами? ([См. приложение](#))
- (2d) Как можно было бы определить понятие изоморфизма между орграфами? Проверьте, согласуется ли это определение с определением, данным в § 22, и докажите, что с точностью до изоморфизма существует ровно шестнадцать простых орграфов с тремя вершинами.
- (2e) Пусть  $G$  — простой граф, имеющий по крайней мере две вершины. Покажите, что  $G$  содержит две вершины с одинаковыми степенями.
- (2f) **Матрицей инциденций** простого графа с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$  и множеством ребер  $\{e_1, \dots, e_m\}$  называется матрица  $A=(a_{ij})$  размера  $m \times n$ , у которой  $a_{ij}=1$ , если вершина  $v_j$  инцидентна ребру  $e_i$  и  $a_{ij}=0$  в противном случае. Докажите, что сумма чисел, стоящих в любом из столбцов, равна степени вершины, соответствующей выбранному столбцу. Что можно сказать о сумме чисел, стоящих в любой из строк? Покажите, как можно определить матрицу инциденций общего графа.

(2g) Пусть  $G$  — граф с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , и пусть  $f(G)$  — многочлен от переменных  $x_1, \dots, x_n$ , определенный формулой

$$f(G) = X_1^{\sigma_1} X_2^{\sigma_2} \dots X_n^{\sigma_n} \prod (x_j - x_i)^{a_{ij}}$$

В этом равенстве произведение берется по всем таким парам  $i, j$ , что  $i < j$ ;  $a_{ij}$  равно числу ребер, соединяющих  $v_i$  и  $v_j$ , а  $\sigma_i$  равно числу петель в  $v_i$ . Докажите, что многочлен  $f(G)$  определяет граф  $G$  с точностью до изоморфизма. Каким графам соответствуют делители  $f(G)$ ? Проиллюстрируйте свой ответ, используя граф, изображенный на [рис.2.4](#).

(2h) **Реберным графом**  $L(G)$  простого графа  $G$  называется граф, вершины которого взаимно однозначно сопоставлены ребрам графа  $G$ , причем две вершины в  $L(G)$  смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра смежны в  $G$ . Покажите, что реберные графы графов, изображенных на рис. 2.9, изоморфны; найдите выражение для числа ребер графа  $L(G)$  через степени вершин графа  $G$ .

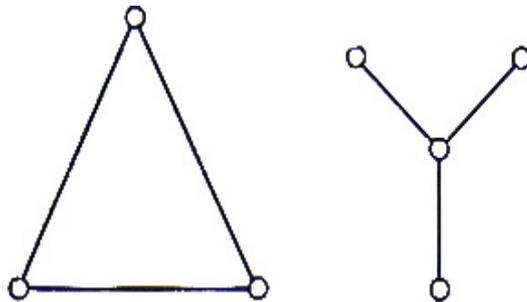


Рис. 2.9.

(\*2i)  **$k$ -графом** называется пара  $(V(G), E(G))$ , где  $V(G)$  есть, как обычно, множество вершин, а  $E(G)$  — конечное семейство неупорядоченных наборов, каждый из которых содержит  $k$  (необязательно различных) элементов множества  $V(G)$ . Убедитесь, что каждый граф является 2-графом, и покажите, как распространить на  $k$ -графы понятия инцидентности, смежности, степени и висячей вершины.

(\*2j) Рассмотрим простой граф  $G$  с множеством ребер  $E(G)$ . **Векторным пространством, связанным с графом  $G$** , называется такое векторное пространство над полем целых чисел, взятых по модулю два, элементами которого являются подмножества множества  $E(G)$ . Сумма  $E \oplus F$  двух множеств ребер  $E$  и  $F$  определяется как множество всех ребер, принадлежащих либо  $E$ , либо  $F$ , но не  $E$  и  $F$  одновременно; умножение на число определяется обычным образом (т. е.  $1 * E = E$ ,  $0 * E = \emptyset$ ). Покажите, что так определенное множество с операциями действительно является векторным пространством, и опишите его базис. Проиллюстрируйте это на графе, изображенном на рис. 2.1.

### § 3. ПРИМЕРЫ ГРАФОВ

В этом параграфе мы займемся исследованием некоторых важных типов

графов. Советуем читателю освоиться с ними, так как они будут часто встречаться в примерах и упражнениях.

ВПОЛНЕ НЕСВЯЗНЫЕ ГРАФЫ.

Граф, у которого множество ребер пусто, называется **вполне несвязным** (или **пустым**) **графом**. Будем обозначать вполне несвязный граф с  $n$  вершинами через  $N_n$ ;  $N_4$  показан на рис. 3.1. Заметим, что у вполне несвязного графа все вершины изолированы.



Рис. 3.1.

Вполне несвязные графы не представляют особого интереса.

ПОЛНЫЕ ГРАФЫ.

Простой граф, в котором любые две вершины смежны, называется **полным графом**. Полный граф с  $n$  вершинами обычно обозначается через  $K_n$ . Графы  $K_4$  и  $K_5$  изображены на рис. 3.2 и 3.3.

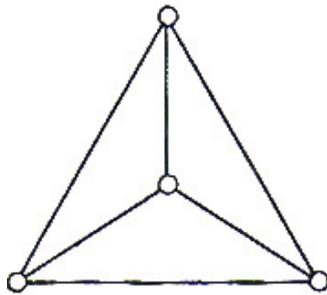


Рис. 3.2.

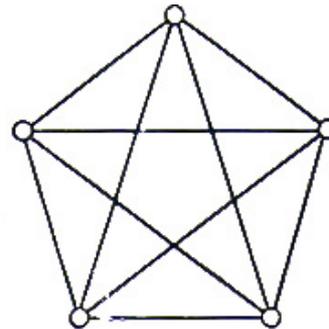


Рис. 3.3.

Предоставляем читателю убедиться в том, что  $K_n$  имеет ровно  $n(n-1)/2$  ребер.

РЕГУЛЯРНЫЕ ГРАФЫ.

Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется **регулярным графом**. Если степень каждой вершины равна  $r$ , то граф называется **регулярным степени  $r$** . Регулярные графы степени 3, называемые также **кубическими** (или **трехвалентными**) графами (см., например, рис. 2.5, 3.2 и 3.4), представляют особый интерес в связи с задачей раскраски, которая будет обсуждаться в гл. 6. Другим известным примером кубического графа является так называемый **граф Петерсена**, показанный на рис. 3.5. Отметим, что каждый вполне несвязный граф является регулярным степени 0, а каждый полный граф  $K_n$  — регулярным степени  $n-1$ .

ПЛАТОНОВЫ ГРАФЫ.

Среди регулярных графов особенно интересны так называемые **платоновы графы** — графы, образованные вершинами и ребрами пяти правильных многогранников — платоновых тел: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра. Граф  $K_4$  соответствует тетраэдру (рис. 3.2); графы, соответствующие

кубу и октаэдру, показаны на рис. 3.4 и 3.6;

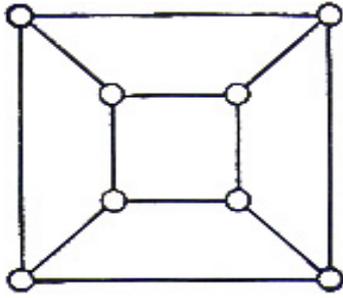


Рис. 3.4.

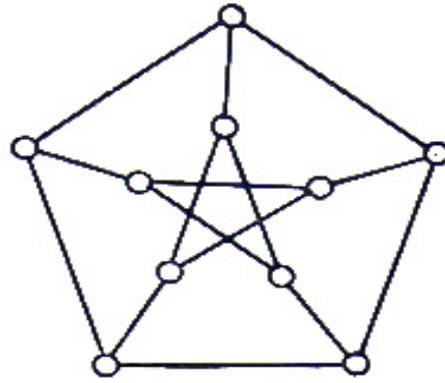


Рис. 3.5.

граф, соответствующий додекаэдру, изображен на [рис. 7.4](#). Граф, соответствующий икосаэдру, предоставляем нарисовать читателю.

ДВУДОЛЬНЫЕ ГРАФЫ.

Допустим, что множество вершин графа можно разбить на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$  так, что каждое ребро в  $G$  соединяет какую-нибудь вершину из  $V_1$  с какой-либо вершиной из  $V_2$  (рис. 3.7); тогда  $G$

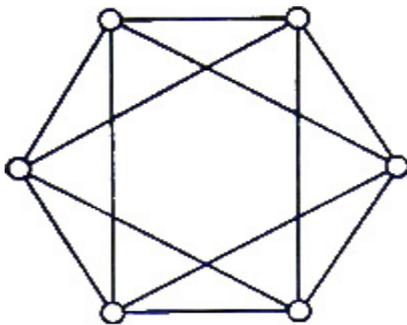


Рис. 3.6.

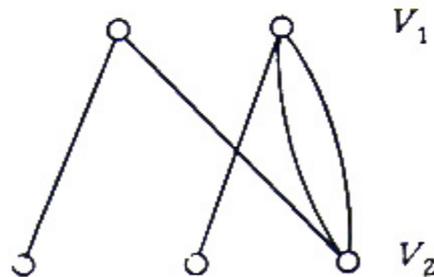


Рис. 3.7.

называется **двудольным графом**. Такие графы иногда обозначают  $G(V_1, V_2)$  если хотят выделить два указанных подмножества. Двудольный граф можно определить и по-другому — в терминах раскраски его вершин двумя цветами, скажем красным и синим. При этом граф называется двудольным, если каждую его вершину можно окрасить красным или синим цветом так, чтобы любое ребро имело один конец красный, а другой — синий. Следует подчеркнуть, что в двудольном графе совсем не обязательно каждая вершина из  $V_1$  соединена с каждой вершиной из  $V_2$ , если же это так и если при этом граф  $G$  простой, то он называется **полным двудольным графом** и обычно обозначается  $K_{m,n}$  где  $m$  и  $n$  — число вершин соответственно в  $V_1$  и  $V_2$ . Например, на рис. 3.8 изображен граф  $K_{4,3}$  на рис. 2.5 — два варианта графа  $K_{3,3}$ . Заметим, что граф  $K_{m,n}$  имеет ровно  $m+n$  вершин и  $mn$  ребер. Полный двудольный граф вида  $K_{1,n}$  называется **звездным графом**; на рис. 3.9 изображен звездный граф  $K_{1,5}$ .

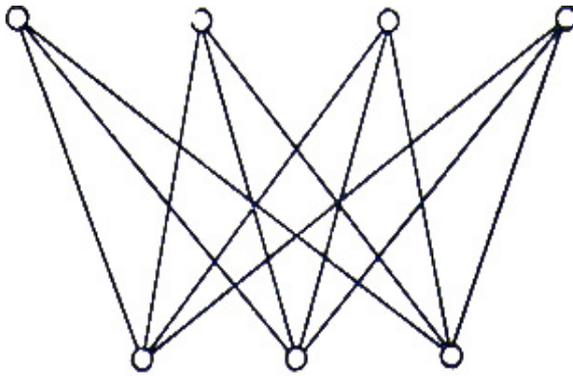


Рис. 3.8.

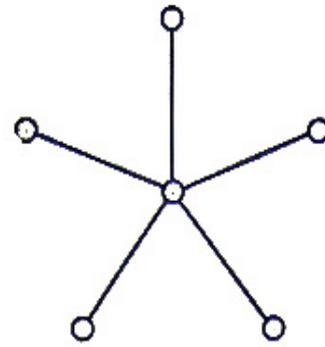


Рис. 3.9.

ОБЪЕДИНЕНИЕ И СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ГРАФОВ.

Существует несколько способов соединения двух графов для образования нового, большего графа; проиллюстрируем два из них. Пусть даны два графа  $G_1=(V(G_1), E(G_1))$  и  $G_2=(V(G_2), E(G_2))$ , причем множества  $V(G_1)$  и  $V(G_2)$  не пересекаются; тогда объединением  $G_1 \cup G_2$  графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф с множеством вершин  $V(G_1) \cup V(G_2)$  и семейством ребер  $E(G_1)$  и  $E(G_2)$  (рис. 3.10). Можно также образовать соединение графов  $G_1$  и  $G_2$  (обозначаемое  $G_1+G_2$ ), взяв их объединение и соединив ребрами каждую вершину графа  $G_1$  с каждой вершиной графа  $G_2$ . Пример графа  $K_2+K_3$  Дан на рис. 3.11. Заметим, что граф  $K_{m,n}$  можно было бы определить как соединение графов  $N_m$  и  $N_n$ . Предоставляем читателю проверить, что операции объединения и соединения можно распространить на любое конечное число графов и что они коммутативны и ассоциативны.

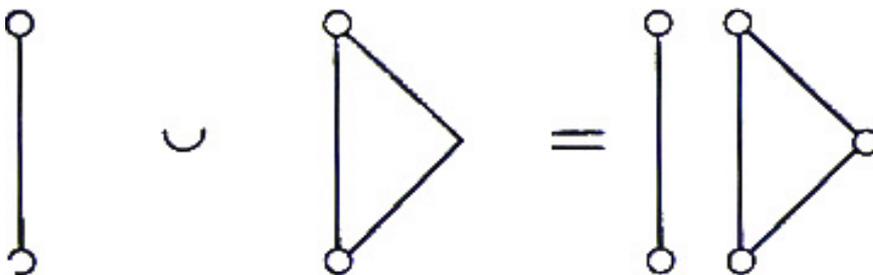


Рис. 3.10.

СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ.

Читатель, возможно, заметил, что почти все графы, рассмотренные нами до сих пор, состояли «из одного куска». Исключениями были вполне несвязные графы  $N_n$  ( $n \geq 2$ ) и объединения графов, состоящие из «не соединенных друг с другом частей». Формализуем это различие, называя граф **связным**, если его нельзя представить в виде объединения двух графов, и **несвязным** в противном случае. Очевидно, что всякий несвязный граф  $G$  можно представить в виде объединения конечного числа связных графов — каждый из таких связных графов называется **компонентой (связности)** графа  $G$ . (На рис.3.12 изображен граф с тремя компонентами.)

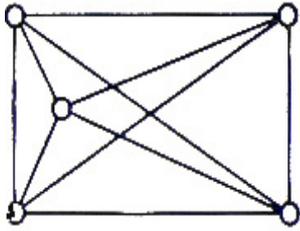


Рис. 3.11.

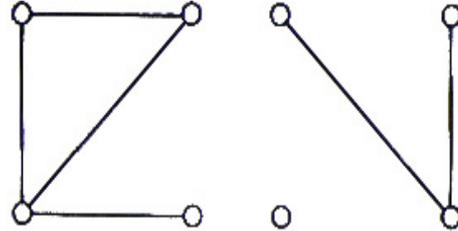


Рис. 3.12.

Доказательство некоторых утверждений для произвольных графов часто бывает удобно сначала провести для связных графов, а затем применить их к каждой компоненте в отдельности.

### ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И КОЛЕСА.

Связный регулярный граф степени 2 называется **циклическим графом** (или **циклом**); циклический граф с  $n$  вершинами обозначается через  $C_n$ . Соединение графов  $N_1$  и  $C_{n-1}$  ( $n \geq 3$ ) называется **колесом** с  $n$  вершинами и обозначается  $W_n$ . На рис.3. 13 изображены  $C_6$  и  $W_6$ , граф  $W_6$  уже появлялся на [рис. 3.2](#).

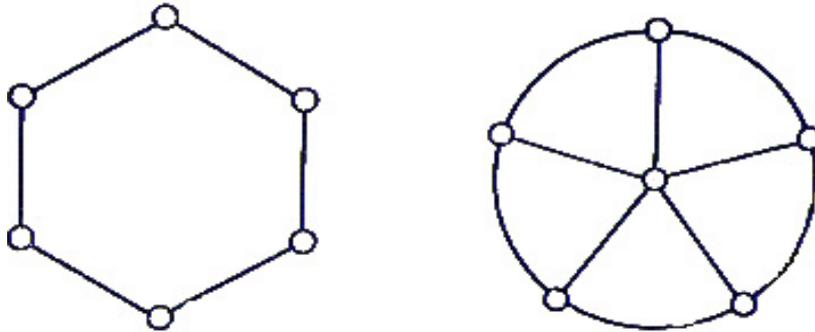


Рис. 3.13.

### ДОПОЛНЕНИЕ ПРОСТОГО ГРАФА.

Пусть  $G$  — простой граф с множеством вершин  $V(G)$ . **Дополнением**  $\bar{G}$  графа  $G$  называется простой граф с множеством вершин  $V(G)$ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в  $G$ . Отсюда следует, что если граф  $G$  содержит  $n$  вершин, то граф  $\bar{G}$  можно построить, удалив из графа  $K_n$  все ребра, принадлежащие  $G$  (здесь  $G$  считается подграфом  $K_n$ ). Заметим, что дополнение полного графа является вполне несвязным графом и наоборот; дополнение регулярного графа регулярно.

## УПРАЖНЕНИЯ

- (За) Нарисуйте все кубические графы с не более чем 8 вершинами.
- (Зб) Приведите примеры (когда это возможно) (i) двудольного графа, являющегося регулярным; (ii) кубического графа с девятью вершинами; (iii) платонова графа, являющегося двудольным; (iv) (для каждого  $n$ ) простого графа с  $n$  вершинами и  $(n-1)(n-2)/2$  ребрами; (v) простого графа, изоморфного своему реберному графу; (vi) простого графа, чье дополнение изоморфно реберному графу; (vii) колеса, дополнением которого является

## Глава 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

циклический граф; (viii) четырех связных графов, являющихся регулярными графами степени 4; (ix) платонова графа, являющегося реберным графом другого платонова графа; (x) связного графа, не представимого в виде соединения двух графов.

- (3c) Что можно сказать о (i) соединении двух полных графов; (ii) дополнении полного двудольного графа; (iii) дополнениях графов, соответствующих тетраэдру, кубу и октаэдру; (iv) дополнении соединения двух простых графов?
- (3d) Пусть  $G$ ,  $H$  и  $K$  — простые графы; докажите или опровергните следующие равенства:

$$(i) G \cup (H + K) = (G \cup H) + (G \cup K);$$

$$(ii) G + (H \cup K) = (G + H) \cup (G + K).$$

- (3e) Опишите матрицы смежности полных графов, вполне несвязных графов, двудольных графов и циклических графов. Что можно сказать о матрицах смежности простого графа и его дополнения?
- (3f) Покажите, как можно использовать двудольный граф для описания (i) дружеских отношений между множеством юношей и множеством девушек; (ii) рынков сбыта, куда различные фабрики поставляют продукты своего производства. Предложите три примера других применений двудольных графов.
- (3g) Пусть  $G$  — двудольный граф с наибольшей степенью вершин  $p$ . Покажите, что существует двудольный граф  $G' = G'(V_1, V_2)$  в котором  $V_2$  и  $V_1$  содержат одинаковое количество вершин, причем  $G'$  является регулярным графом степени  $p$ , содержащим  $G$  в качестве подграфа.
- (3h) Докажите, что реберный граф графа  $K_n$  имеет  $n(n-1)/2$  вершин и является регулярным степени  $2n-4$ ; получите аналогичные результаты для  $K_{n,m}$ . Докажите также, что простой граф изоморфен своему реберному графу тогда и только тогда, когда он является регулярным степени 2, и опишите все такие графы.
- (3i) Простой граф, изоморфный своему дополнению, называется **самодополнительным**. Докажите, что число вершин самодополнительного графа представимо в виде  $4k$  или  $4k+1$ , где  $k$  — целое, и найдите все самодополнительные графы с четырьмя и пятью вершинами.
- (3j) Докажите, что среди шестерых человек всегда найдутся трое таких, которые либо все знают друг друга, либо ни один из них не знает двух других.
- (3k) Приведите примеры (i) бесконечного графа с бесконечным числом висячих вершин; (ii) бесконечного графа с несчетным числом вершин и ребер; (iii) бесконечного связного кубического графа; (iv) бесконечного двудольного

графа; (v) бесконечного графа, изоморфного своему реберному графу.

- (\*31) **Автоморфизмом**  $\varphi$  простого графа  $G$  называется взаимно однозначное отображение множества вершин графа  $G$  на себя, обладающее тем свойством, что вершины  $\varphi(v)$  и  $\varphi(w)$  смежны тогда и только тогда, когда смежны вершины  $v$  и  $w$ . Докажите, что (i) все автоморфизмы графа  $G$  образуют группу относительно операции композиции (**группу автоморфизмов**  $\Gamma(G)$  графа  $G$ ); (ii) группы  $\Gamma(G)$  и  $\Gamma(\bar{G})$  изоморфны; (iii)  $\Gamma(K_n)$  является симметрической группой  $n$ -й степени; (iv)  $\Gamma(C_n)$  является диэдральной группой порядка  $2n$ ; (v) если через  $P$  обозначать граф Петерсена, то  $\Gamma(P)$  является подгруппой симметрической группы 10-й степени и изоморфна группе  $\Gamma(K_n)$ . Найдите группу автоморфизмов графа  $K_{n,m}$  и приведите пример графа, у которого группа автоморфизмов является циклической группой порядка три.
- (\*3m) **Характеристическими числами графа** называются собственные значения его матрицы смежности; найдите характеристические числа графов  $C_5$  и  $W_5$ . Докажите, что сумма характеристических чисел простого графа равна нулю, и проиллюстрируйте это на примере полных графов и полных двудольных графов.

## § 4. УКЛАДКИ ГРАФОВ

Для представления графов мы пользовались диаграммами, на которых точки или кружки изображали вершины, а прямолинейные отрезки или дуги кривых — ребра. Такие диаграммы очень удобны при исследовании свойств отдельных графов. Естественно поэтому спросить, что это на самом деле означает — «представить» граф с помощью диаграммы, и всякий ли граф может быть представлен таким образом? Читателю, которому нравится рисовать картинки и которого несколько не беспокоит обоснование этого занятия, достаточно будет узнать, что он все делает правильно. Такой читатель может пока пропустить этот параграф, однако ему все же придется вернуться сюда, когда он достигнет главы 5.

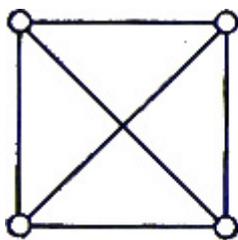


Рис. 4.1.

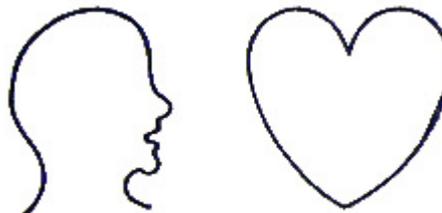


Рис. 4.2.

▲ Было бы хорошо, если бы мы имели возможность изображать графы в некотором пространстве (например, на плоскости или в трехмерном евклидовом пространстве) так, чтобы они не имели «пересечений» (формальное определение этого понятия будет дано позднее, а его интуитивное значение очевидно). Например, изображение графа  $K_4$ , данное на рис. 4.1, содержит

пересечение; мы же хотим найти такое изображение (см., например, [рис. 3.2](#)), которое не содержит пересечений. В действительности каждый граф может быть изображен без пересечений в трехмерном пространстве, но, как мы увидим, на плоскости такое представление возможно не всегда. В частности (как мы покажем в §12), графы  $K_4$  и  $K_{3,3}$  ([рис. 3.3](#) и [2.5](#)) не могут быть изображены на плоскости без пересечений.

Прежде чем определить понятие укладки графа, напомним читателю, что **жордановой кривой** (или **жордановой дугой**) на плоскости называется непрерывная кривая, не имеющая самопересечений; **замкнутой жордановой кривой** называется жорданова кривая, начало и конец которой совпадают (рис. 4.2). Аналогичным образом определяются жордановы кривые в трехмерном пространстве или на таких поверхностях, как сфера и тор. В дальнейшем мы воспользуемся одним из вариантов знаменитой **теоремы Жордана о кривой**, утверждающим, что если  $\xi$  — замкнутая жорданова кривая на плоскости, а  $x$  и  $y$  — две различные точки на ней, то любая жорданова кривая, соединяющая  $x$  и  $y$ , должна либо лежать целиком внутри  $\xi$  (за исключением, разумеется, точек  $x$  и  $y$ ) или вне  $\xi$  (с теми же исключениями), либо пересекать  $\xi$  в некоторой точке, отличной от  $x$  и  $y$  (рис. 4.3). (Подробное изложение теоремы Жордана и родственных вопросов можно найти в любой хорошей книге по анализу<sup>5</sup>, например в книге Апостола [13]).



Рис. 4.3.

Теперь мы подготовлены к определению укладки графов в данном пространстве; имеются в виду те пространства, в которых можно определить жордановы кривые (это в первую очередь плоскость и трехмерное пространство). Говорят, что граф  $G$  **может быть уложен** (или **обладает укладкой**) в данном пространстве, если он изоморфен некоторому графу, изображенному в этом пространстве при помощи точек, представляющих вершины  $G$ , и жордановых кривых, представляющих ребра, причем эти кривые не пересекаются друг с другом. В этом определении **пересечение** понимается так: или (i) жордановы кривые, соответствующие двум ребрам, пересекаются в точке, не соответствующей никакой вершине, или (ii) жорданова кривая, соответствующая ребру, проходит через точку, соответствующую вершине, не инцидентной этому ребру. (Случай (ii) показан на рис. 4.4; здесь вершина  $v$  не инцидентна ребрам  $e_1$  и  $e_2$ .)

<sup>5</sup> Элементарное доказательство теоремы Жордана приводится в статьях А. И. Вольперта и А. Ф. Филиппова, опубликованных в *Успехах матем. наук*, V, № 5 (39) (1950), 168-172; 173-176. — Прим. ред.

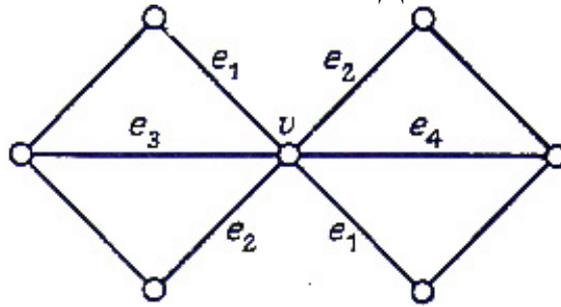


Рис. 4.4.

Докажем теперь основной результат этого параграфа, а именно, что любой граф может быть изображен без пересечений в трехмерном пространстве. Аналогичный результат для бесконечных графов, содержащих «не слишком много» вершин и ребер, рассматривается в упр. 4а; отметим, что для общего бесконечного графа эта теорема не верна.

#### ТЕОРЕМА 4А.

*Каждый граф может быть уложен в трехмерном евклидовом пространстве.*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Построим укладку в явном виде. Сначала поместим вершины графа в различные точки на оси  $x$ ; затем для каждого ребра выберем плоскость, проходящую через ось  $x$  таким образом, что различные ребра графа соответствуют различным плоскостям. (Это всегда можно сделать в силу конечности множества ребер.)

Требуемая укладка получается следующим образом: для каждой петли графа рисуем в соответствующей плоскости окружность, проходящую через соответствующую вершину; для каждого ребра, соединяющего две различные вершины, рисуем в соответствующей плоскости полуокружность, проходящую через эти две вершины. Ясно, что никакие из этих кривых не могут пересечься, так как они лежат в разных плоскостях; отсюда и вытекает нужный результат. //

Эта теорема дает нам искомое обоснование использования диаграмм для изображения графов: достаточно взять трехмерное представление и спроектировать его на плоскость так, чтобы никакие две вершины не попадали в одну и ту же точку. Конечно, в общем случае такой метод приводит к пересечениям, хотя в некоторых случаях мы получим диаграммы без пересечений. Произойдет это только тогда, когда рассматриваемый граф может быть уложен на плоскости; такие графы называются **планарными графами**. Подробнее планарные графы будут изучены в гл. 5, однако с несколькими примерами таких графов мы уже встречались. К ним относятся, например, вполне несвязные графы, граф  $K_4$ , платоновы графы, циклические графы, колеса и звездные графы.

Завершим этот параграф доказательством одного простого результата, который понадобится нам в дальнейшем. В доказательстве используется

## Глава 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

следующее определение: пусть граф  $G$  уложен в некотором пространстве; точка  $x$  этого пространства называется **дизъюнктой** с  $G$ , если она не соответствует ни одной вершине графа  $G$  и не лежит ни на каком его ребре.

ТЕОРЕМА 4В.

*Граф планарен тогда и только тогда, когда он укладывается на поверхности сферы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть граф  $G$  уложен на поверхности сферы. Поставим сферу на плоскость так, чтобы ее «северный полюс» (точка, диаметрально противоположная точке касания) был дизъюнктен с  $G$ . Тогда требуемое плоское представление получается стереографической проекцией из северного полюса (рис. 4.5).

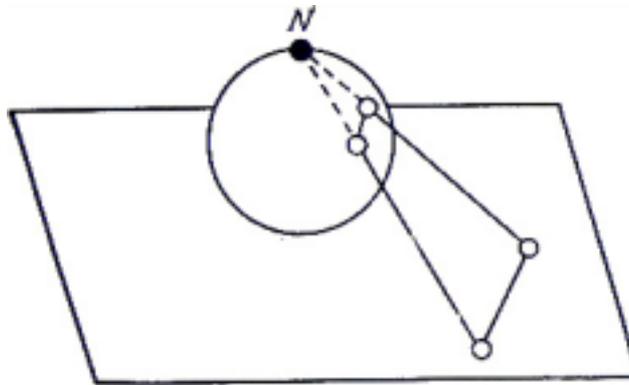


Рис. 4.5.

Обратное доказывается аналогично и может быть предложено в качестве упражнения. //

## УПРАЖНЕНИЯ

- (4а) Докажите, что бесконечный граф может быть уложен в трехмерном евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда и множество его вершин, и множество его ребер можно поставить во взаимно однозначное соответствие с некоторым подмножеством действительной оси.
- (4б) Проверьте, что упомянутые выше примеры планарных графов действительно являются планарными графами. Докажите, что любой подграф планарного графа планарен, и, приняв во внимание, что  $K_{3,3}$  не планарен, определите, какие из полных двудольных графов планарны.
- (4с) Докажите, что любой простой граф можно так уложить в трехмерном евклидовом пространстве, что все его ребра будут представлены отрезками прямых.
- (4d) Верна ли теорема 4В для платоновых графов?
- (4е) Проверьте, что каждый из графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  укладывается на поверхности тора. (Изображение тора дано на [рис. 14.1](#) ниже)

## Глава 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

- (\*4f) Покажите, каким образом  $k$ -граф (см. упр. 2i) может быть уложен в  $(k+1)$ -мерном евклидовом пространстве.
- (\*4g) **Размерностью** графа  $G$  называется наименьшее целое число  $n$ , обладающее тем свойством, что  $G$  можно уложить в  $n$ -мерном евклидовом пространстве так, что если две вершины  $v$  и  $w$  смежны, то расстояние между ними равно единице. Покажите, что размерность графа всегда существует, и найдите размерность (i)  $K_n$ , (ii) циклических графов; (iii) платоновых графов. ▲

### 3. ЦЕПИ И ЦИКЛЫ

...Как много есть извилистых путей,

А все, что нужно в этом грустном мире, —

Искусство быть немножечко добрей.

Элла Уилер Уилкокс<sup>6</sup>

Теперь, когда мы имеем в своем распоряжении достаточно богатый арсенал графов, можно начать изучение их свойств. Правда, для этого необходимо еще несколько определений, описывающих «пути, ведущие из одной вершины в другую». Эти определения даны в § 5 и там же доказаны некоторые результаты о связности. В § 6 и § 7 более подробно изучаются два особых типа графов: графы, которые содержат цепи, проходящие через каждое ребро, и графы, которые содержат циклы, проходящие через каждую вершину. В последнем параграфе этой главы рассмотрены бесконечные графы.

#### § 5. НОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Маршрутом** в данном графе  $G$  называется конечная последовательность ребер вида

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{m-1}, v_m\}.$$

Очевидно следующее свойство маршрута: любые два последовательных ребра либо смежны, либо одинаковы. Но не всякая последовательность ребер, обладающая этим свойством, является маршрутом (в качестве примера рассмотрим звездный граф и возьмем его ребра в произвольном порядке). Каждому маршруту соответствует последовательность вершин  $v_0, v_1, \dots, v_m$ ;  $v_0$  называется **начальной вершиной**, а  $v_m$  — **конечной вершиной** маршрута. Таким образом, мы будем говорить о **маршруте из  $v_0$  в  $v_m$** . Заметим, что для любой вершины  $v_0$  тривиальным маршрутом, вообще не содержащим ребер, является маршрут из  $v_0$  в  $v_0$ . Длиной маршрута называется число ребер в нем; например, на рис. 5.1 маршрут  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow w$  из  $v$  в  $w$  имеет длину, равную семи.

Для наших целей понятие маршрута является слишком общим, поэтому наложим еще несколько ограничений. Маршрут называется **цепью**, если все его ребра различны, и **простой цепью**, если все вершины  $v_0, v_1, \dots, v_m$  различны (кроме, может быть,  $v_0 = v_m$ ). Цепь или простая цепь **замкнута**, если  $v_0 = v_m$ . Замкнутая простая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро, называется

<sup>6</sup> Элла Уилер Уилкокс (1850-1919) – американская поэтесса. – Прим. ред.

**циклом**; в частности, любая петля или любая пара кратных ребер образует цикл.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Вот еще один пример разнобоя в терминологии, используемой различными авторами. То, что мы назвали маршрутом, называют также путем, реберной последовательностью. Цепь называют путем, полупростым путем; простую цепь — цепью, путем, дугой, простым путем, элементарной цепью; замкнутую цепь — циклической цепью, контуром; цикл — контуром, контурной цепью, простым циклом, элементарным циклом.

Чтобы разобраться в приведенных выше определениях, рассмотрим еще раз рис. 5.1.

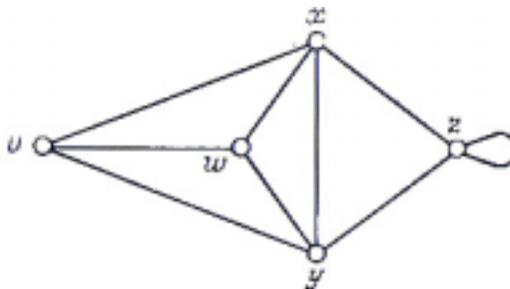


Рис. 5.1.

Мы видим, что  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow x$  — цепь,  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y$  — простая цепь,  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow x \rightarrow v$  — замкнутая цепь и  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v$  — цикл. Цикл длины три (например,  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow v$ ) называется **треугольником**. В дальнейшем мы обобщим все эти понятия на случай бесконечных графов и орграфов (§ 8 и § 22).

Дадим теперь другое, быть может, более удобное определение связных графов. Граф  $G$  называется **связным**, если для любых двух его вершин  $v$  и  $w$  существует простая цепь из  $v$  в  $w$ . Любой граф можно разбить на непересекающиеся связные подграфы, называемые **компонентами (связности)**, задав следующее отношение эквивалентности на множестве его вершин: две вершины **эквивалентны** (или **связаны**), если существует простая цепь из одной в другую. Оставим читателю доказательство того, что связность вершин действительно является отношением эквивалентности и что вершины, принадлежащие одному классу эквивалентности, вместе с инцидентными им ребрами образуют компоненты (связности) графа. Очевидно, что связный граф состоит из одной компоненты. Граф называется **несвязным**, если число его компонент больше единицы. Докажем теперь, что данные здесь определения не противоречат определениям из § 3.

ТЕОРЕМА 5А.

*Граф является связным в смысле данного выше определения тогда и только тогда, когда он связан в смысле определения из § 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$  Пусть граф  $G$  связан в смысле определения из данного параграфа. Допустим, что  $G$  представляет собой объединение двух (непересекающихся) подграфов, а  $v$  и  $w$  — вершины, принадлежащие разным подграфам. Любая простая цепь из  $v$  в  $w$  должна содержать ребро, инцидентное некоторым двум вершинам из разных подграфов; так как такого ребра не существует, мы получили противоречие.

$\Leftarrow$  Теперь предположим, что граф  $G$  связан в смысле определения из § 3 и не существует никакой простой цепи, связывающей заданную пару вершин  $v$  и  $w$ . Тогда, по данному выше определению компонент связности, вершины  $v$  и  $w$  будут принадлежать разным компонентам. Исходя из этого, можно представить  $G$  в виде объединения двух графов, одним из которых является компонента, содержащая  $v$ , а другим — объединение оставшихся компонент. Отсюда и получаем нужное противоречие. //

Теперь, когда мы представляем себе, что такое связность, естественно попытаться найти какие-нибудь свойства связных графов. Одно направление исследования — поиск оценок для числа ребер простого графа с  $n$  вершинами и заданным числом компонент. Если такой граф связан, то естественно ожидать, что число ребер в нем минимально тогда, когда он не имеет циклов (такой граф называется **деревом**), и максимально, когда он является полным графом. Отсюда следовало бы, что число ребер в связном графе заключено между  $n-1$  и  $n(n-1)/2$ . Этот результат является частным случаем более сильного утверждения, которое мы сейчас докажем.

ТЕОРЕМА 5В.

*Пусть  $G$  — простой граф с  $n$  вершинами и  $k$  компонентами. Тогда число  $m$  его ребер удовлетворяет неравенствам*

$$n-k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Неравенство  $m \geq n-k$  докажем индукцией по числу ребер в  $G$ . Если  $G$  — вполне несвязный граф, то утверждение очевидно. Если в графе  $G$  число ребер минимально (скажем  $m_0$ ), то удаление любого ребра должно привести к увеличению числа компонент на единицу. Таким образом, в получившемся графе будет  $n$  вершин,  $k+1$  компонент и  $m_0-1$  ребер. Следовательно, в силу индуктивного предположения  $m_0-1 \geq n-(k+1)$ , откуда сразу же получается  $m_0 \geq n-k$ , что и утверждалось.

Для доказательства оценки сверху можно считать каждую компоненту графа  $G$  полным графом. Предположим, что  $C_i$  и  $C_j$  — две компоненты соответственно с  $n_i$  и  $n_j$  вершинами и  $n_i \geq n_j > 1$ . Если мы заменим  $C_i$  и  $C_j$  на полные графы  $n_i+1$  и  $n_j-1$  вершинами, то общее число вершин не изменится, а число ребер увеличится на положительную величину

$$\{(n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)\}/2 - \{n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2)\}/2 = n_i - n_j + 1.$$

Следовательно, для того чтобы число ребер в графе  $G$  было максимально возможным (при заданных  $n$  и  $k$ ),  $G$  должен состоять из  $k-1$  изолированных вершин и полного графа с  $n-k+1$  вершинами. Отсюда сразу вытекает нужное неравенство. //

**СЛЕДСТВИЕ 5С.**

Любой простой граф с  $n$  вершинами и более чем  $(n-1)(n-2)/2$  ребрами связан. //

Другое направление исследования связных графов задается следующим вопросом: насколько сильно связан связный граф? Этот вопрос можно сформулировать и так: сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы он перестал быть связным? Для обсуждения данного вопроса удобно ввести еще два определения, которыми мы и завершим этот параграф. **Разделяющим множеством** связного графа  $G$  называется такое множество его ребер, удаление которого приводит к несвязному графу. Например, в графе, изображенном на рис. 5.2, каждое из множеств  $\{e_1, e_2, e_5\}$  и  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  является разделяющим; несвязный граф, оставшийся после удаления второго из этих множеств, показан на рис. 5.3.

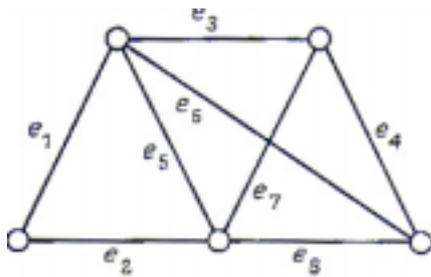


Рис. 5.2.

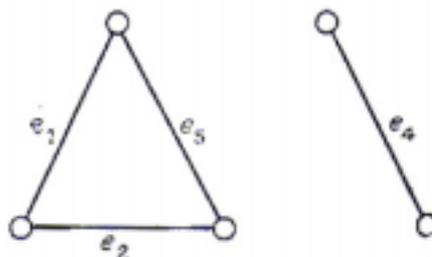


Рис. 5.3.

Далее, назовем **разрезом** такое разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим. В рассмотренном выше примере разрезом будет только второе разделяющее множество. Легко видеть, что после удаления ребер, принадлежащих разрезу, остается граф, имеющий ровно две компоненты. Если разрез состоит из единственного ребра  $e$ , то  $e$  называется **мостом**, или **перешейком** (рис. 5.4).

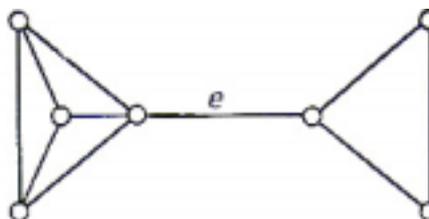


Рис. 5.4

Все эти определения легко переносятся на несвязные графы. В произвольном графе  $G$  **разделяющим множеством** называется такое множество ребер, удаление которого увеличивает число компонент в  $G$ . **Разрезом** в  $G$  называется разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим. Заметим, что в результате удаления ребер, принадлежащих разрезу, число компонент в  $G$  увеличивается ровно на единицу.

Оказывается, свойства циклов и разрезов удивительно схожи между собой. Читатель убедится в этом, если ознакомится с упражнениями 5f, 5i, 5j, 6h и 6i. Причина такого сходства будет выявлена в гл. 9, и тогда все вдруг станет ясно!

## УПРАЖНЕНИЯ

- (5a) В графе Петерсена найдите (i) маршрут длины 4; (ii) циклы длины пять, шесть, восемь и девять; (iii) разрезы, содержащие три, четыре и пять ребер.
- (5b) **Обхватом** графа называется длина его кратчайшего цикла; найдите обхваты графов (i)  $K_n$ ; (ii)  $K_{m,n}$ ; (iii)  $C_n$ ; (iv)  $W_n$ ; (v) платоновых графов; (vi) графа Петерсена.
- (5c) Докажите, что ребро связного графа является мостом в том и только в том случае, когда оно не содержится ни в одном из циклов.
- (5d) Докажите, что если  $G$  — простой граф, то (i)  $G$  и  $\bar{G}$  не могут одновременно быть несвязными; (ii) из того, что  $G$  связан, следует, что реберный граф  $L(G)$  тоже связан.
- (5e) Пусть  $G$  — связный граф с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$  и матрицей смежности  $A$ . Покажите, что число маршрутов длины  $k$  из  $v_i$  и  $v_j$  равно  $(i, j)$ -му элементу матрицы  $A^k$ . Покажите также, что если  $G$  — простой граф, а  $c$  обозначает число треугольников в  $G$ , то след матрицы  $A^3$  равен  $6c$ . (Следом квадратной матрицы называется сумма всех ее элементов, стоящих на главной диагонали.)
- (5f) Покажите, что если каждый из двух различных циклов некоторого графа  $G$  проходит через ребро  $e$ , то в графе  $G$  существует цикл, не проходящий через  $e$ ; установите соответствующий результат, заменив слово “цикл” на слово “разрез”.
- (5g) Докажите, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его циклы имеют четную длину. Можно ли сформулировать аналогичный результат для разрезов?
- (5h) Пусть в простом графе  $G$  выполняется неравенство  $\rho(v) \geq r(r \geq 2)$  для каждой вершины  $v$ ; докажите, что тогда в  $G$  существует цикл, имеющий длину не меньше  $r+1$ .
- (5i) Рассмотрим цикл  $C$  и разрез  $C^*$  в некотором связном графе. Докажите, что число общих ребер цикла  $C$  и разреза  $C^*$  четно. Докажите также, что если некоторое множество ребер  $S$  обладает тем свойством, что его пересечение со всяким разрезом состоит из четного числа ребер то  $S$  можно разбить на циклы таким образом, что никакие из них не имеют общих ребер.
- (5j) Множество  $E$  ребер графа называется **независимым**, если оно не содержит циклов<sup>7</sup>. Покажите, что (i) каждое подмножество независимого множества независимо; (ii) если  $I$  и  $J$  — независимые множества, содержащие соответственно  $k$  и  $k+1$  ребер, то существует ребро  $e$ , принадлежащее  $J$ , но

<sup>7</sup> Т. е. никакая совокупность ребер из  $E$  не образует цикла. — Прим. ред.

не входящее в  $I$  и обладает тем свойством, что множество  $I \cup \{e\}$  независимо. Кроме того, покажите что (i) и (ii) имеют место, если заменить слово “цикл” на слово “разрез”.

- (\*5k) Пусть  $G$  — простой граф с  $2n$  вершинами, не содержащий треугольников. Индукцией по  $n$  докажите, что  $G$  содержит не более  $n^2$  ребер, и приведите пример, когда эта верхняя граница достигается. (Этот результат известен как **экстремальная теорема Турана**.)
- (5l) В связном графе обозначим через  $d(v, w)$  (**расстояние** между  $v$  и  $w$ ) длину кратчайшей простой цепи из  $v$  в  $w$ . Докажите, что функция  $d$  задает метрику на множестве вершин и удовлетворяет таким условиям: (i) для всех  $v$  и  $w$  расстояние  $d(v, w)$  — целое число; (ii) если  $d(v, w) \geq 2$ , то существует такая вершина  $z$ , что

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w).$$

Обратно, докажите, что любое конечное метрическое пространство, в котором выполнены условия (i) и (ii), изоморфно метрическому пространству некоторого графа.

- (\*5m) **Диаметром**  $\delta$  связного графа  $G$  называется максимальное возможное расстояние между любыми двумя его вершинами. **Центром** графа  $G$  называется такая вершина  $v$ , что максимальное расстояние между  $v$  и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных; это расстояние называется **радиусом**  $r$ . Таким образом,

$$r = \min_v (\max_w d(v, w)).$$

Приведите пример графа, у которого больше одного центра. Найдите диаметры и радиусы графов  $K_n$ ,  $C_n$ ,  $W_n$  и графа Петерсена. Докажите также, что  $r \leq \delta \leq 2r$  и что  $\log(n\rho - n + 1) \leq (r+1)\log\rho$ , где  $\rho$  — наибольшая степень вершин.

- (\*5n) Попробуйте определить маршруты, простые цепи, связность и разрезы в  $k$ -графе.

## § 6. ЭЙЛЕРОВЫ ГРАФЫ

Связный граф  $G$  называется **эйлеровым**, если существует замкнутая цепь, проходящая через каждое его ребро; такая цепь называется **эйлеровой цепью**. Отметим, что в этом определении требуется, чтобы каждое ребро проходило только один раз. Если снять ограничение на замкнутость цепи, то граф называется **полуэйлеровым**; при этом каждый эйлеров граф будет полуэйлеровым. На рис. 6.1, 6.2 и 6.3 изображены соответственно не эйлеров, полуэйлеров и эйлеров графы.

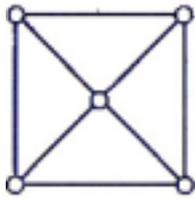


Рис. 6.1.

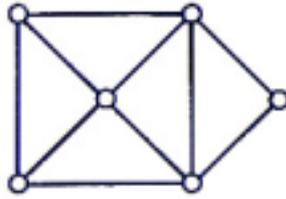


Рис. 6.2.

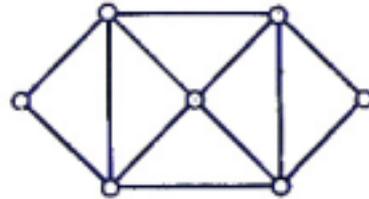


Рис. 6.3.

Заметим, что предположение о связности графа  $G$  введено только ради удобства, так как оно позволяет не рассматривать тривиальный случай графа, содержащего несколько изолированных вершин.

Задачи с эйлеровыми графами часто встречаются в книгах по занимательной математике — типичной является такая постановка: можно ли нарисовать какую-нибудь данную диаграмму, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя никакую линию дважды. Название «эйлеров» возникло в связи с тем, что Эйлер первым решил знаменитую задачу о кёнигсбергских мостах, в которой нужно было узнать, имеет ли граф, изображенный на рис. 6.4, эйлерову цепь (не имеет!).

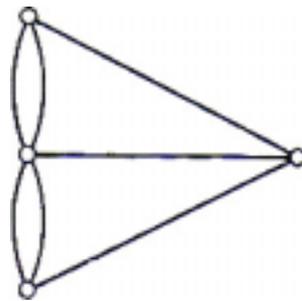


Рис. 6.4.

Сразу же возникает вопрос: можно ли найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы граф был эйлеровым? Прежде чем дать полный ответ на этот вопрос в теореме 6В, докажем простую лемму.

ЛЕММА 6А.

*Если степень каждой вершины графа  $G$  не меньше двух, то  $G$  содержит цикл.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если в графе  $G$  имеются петли или кратные ребра, то утверждение очевидно; поэтому предположим, что  $G$  является простым графом. Пусть  $v$  — произвольная вершина графа  $G$ ; построим по индукции маршрут  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$  выбирая вершину  $v_1$  смежной вершине  $v$ , а для  $i \geq 1$  — выбирая  $v_{i+1}$  смежной  $v_i$  и отличной от  $v_{i-1}$  (существование такой вершины  $v_{i+1}$  гарантировано условием леммы). Так как  $G$  имеет конечное число вершин, то в конце концов мы придем к вершине, которая уже была выбрана раньше. Предположим, что  $v_k$  — первая такая вершина; тогда часть маршрута, лежащая между двумя вхождениями  $v_k$ , и является требуемым циклом. //

ТЕОРЕМА 6В.

*Связный граф  $G$  является эйлеровым тогда и только тогда, когда каждая вершина в  $G$  имеет четную степень.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$  Предположим, что  $P$  является эйлеровой цепью в графе  $G$ . Тогда при всяком прохождении цепи  $P$  через любую из вершин графа степень этой вершины увеличивается на два. А так как каждое ребро встречается в  $P$  ровно один раз, то каждая вершина должна иметь четную степень.

$\Leftarrow$  Проведем доказательство индукцией по числу ребер в  $G$ . В силу связности  $G$ , степень каждой вершины не меньше двух, а отсюда, по предыдущей лемме, заключаем, что граф  $G$  содержит цикл  $C$ . Если  $C$  проходит через каждое ребро графа  $G$ , то доказательство завершено; если нет, то, удаляя из  $G$  ребра, принадлежащие циклу  $C$ , получим новый (быть может, и несвязный) граф  $H$ . Число ребер в  $H$  меньше, чем в  $G$ , и любая вершина в  $H$  по-прежнему имеет четную степень. Согласно индуктивному предположению, в каждой компоненте графа  $H$  существует эйлерова цепь. В силу связности графа  $G$ , каждая компонента в  $H$  имеет по крайней мере одну общую вершину с циклом  $C$ , поэтому искомую эйлерову цепь графа  $G$  можно получить так: идем по ребрам цикла  $C$  до тех пор, пока не встретим неизолированную вершину графа  $H$ , затем следуем по эйлеровой цепи той компоненты в  $H$ , которая содержит указанную вершину; далее продолжаем путь по ребрам цикла  $C$ , пока не встретим вершину, принадлежащую другой компоненте графа  $H$ , и т. д.; заканчивается процесс тогда, когда мы попадаем обратно в начальную вершину (см. рис. 6.5). //

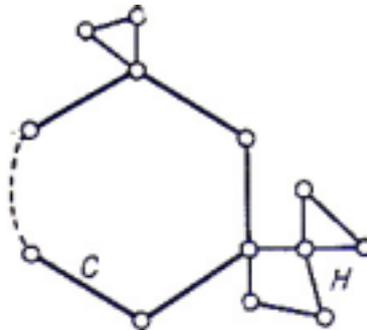


Рис. 6.5.

Модифицируя данное доказательство, легко получить следующие два результата; подробности мы оставляем читателю.

**СЛЕДСТВИЕ 6С.**

*Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда семейство его ребер можно разбить на непересекающиеся циклы.//*

**СЛЕДСТВИЕ 6D.**

*Связный граф является полу эйлеровым тогда и только тогда, когда в нем не более двух вершин имеют нечетные степени. //*

Заметим, что если полуэйлеров граф содержит ровно две вершины с нечетными степенями, то в любой полуэйлеровой цепи (смысл этого понятия очевиден) одна из этих вершин обязательно будет начальной, а другая — конечной. По лемме о рукопожатиях граф не может иметь только одну вершину нечетной степени.

▲ Завершая рассмотрение эйлеровых графов, дадим алгоритм построения эйлеровой цепи в данном эйлеровом графе. Этот метод известен под названием **алгоритма Флэри**.

ТЕОРЕМА 6Е.

*Пусть  $G$  — эйлеров граф; тогда следующая процедура всегда возможна и приводит к эйлеровой цепи графа  $G$ . Выходя из произвольной вершины  $u$ , идем по ребрам графа произвольным образом, соблюдая лишь следующие правила:*

*(i) стираем ребра по мере их прохождения и стираем также изолированные вершины, которые при этом образуются; (ii) на каждом этапе идем по мосту только тогда, когда нет других возможностей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Покажем сначала, что указанная процедура может быть выполнена на каждом этапе. Предположим, что мы достигли некоторой вершины  $v$ ; тогда если  $v \neq u$ , то оставшийся подграф  $H$  связан и содержит ровно две вершины нечетной степени, а именно  $u$  и  $v$ . Согласно следствию 6D, граф  $H$  содержит полуэйлерову цепь  $P$  из  $v$  в  $u$ . Поскольку удаление первого ребра цепи  $P$  не нарушает связности графа  $H$ , отсюда следует, что описанное в теореме построение возможно на каждом этапе. Если же  $v = u$ , то доказательство остается тем же самым до тех пор, пока есть еще ребра, инцидентные вершине  $u$ .

Осталось только показать, что данная процедура всегда приводит к полной эйлеровой цепи. Но это очевидно, так как в  $G$  не может быть ребер, оставшихся не пройденными после использования последнего ребра, инцидентного  $u$  (в противном случае удаление некоторого ребра, смежного одному из оставшихся, привело бы к несвязному графу, что противоречит (ii). //

## УПРАЖНЕНИЯ

- (6a) Для каких чисел  $m$  и  $n$  следующие графы являются эйлеровыми: (i)  $K_{m,n}$ , (ii)  $K_n$ , (iii)  $W_n$ ? Есть ли среди платоновых графов эйлеровы? Если да, то найдите в них эйлеровы цепи.
- (6b) Докажите, что если граф  $G$  связан и имеет  $k > 0$  вершин нечетной степени, то минимальное число не имеющих общих ребер цепей, объединение которых содержит каждое ребро графа  $G$ , равно  $k/2$ ; как частный случай

получите следствие 6D. Что можно сказать в случае нечетного  $k$ ?

- (6c) С помощью алгоритма Флёрри найдите эйлерову цепь в графе, изображенном на рис. 6.6.

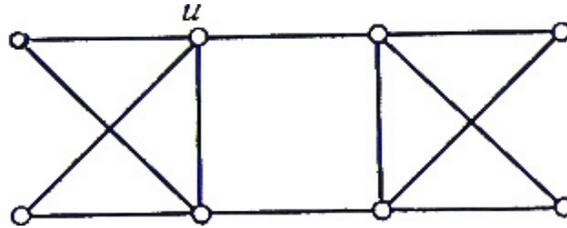


Рис. 6.6.

- (6d) Можно ли ходом шахматного коня обойти шахматную доску размером  $8 \times 8$  так, чтобы каждый ход встречался ровно один раз (при этом мы считаем, что ход «встречался», если конь переместился с одной клетки на другую любым из двух возможных способов)? Тот же вопрос для короля и ладьи. Как изменятся ответы для шахматной доски размером  $7 \times 7$ ? Изложите свои ответы в терминах теории графов.
- (6e) Докажите, что реберный граф простого эйлерова графа является эйлеровым. Если известно, что реберный граф простого графа  $G$  является эйлеровым, то можно ли отсюда вывести, что сам граф  $G$  эйлеров?
- (6f) Эйлеров граф называется **произвольно вычерчиваемым** из вершины  $v$ , если, начиная из вершины  $v$  и обходя граф произвольным образом, но не перемещаясь дважды ни по одному из ребер, мы всегда получим эйлерову цепь. Покажите, что граф, изображенный на рис. 6.7, произвольно вычерчиваем из  $v$ , и приведите пример эйлерова графа, не обладающего этим свойством.

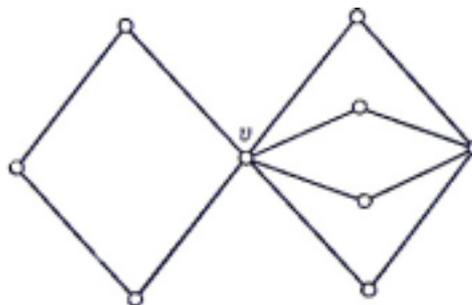


Рис. 6.7.

Попробуйте найти какие-нибудь эйлеровы графы, произвольно вычерчиваемые из двух различных вершин. Попытайтесь угадать, почему произвольно вычерчиваемый граф удобно использовать при разработке плана осмотра выставки.

- (\*6g) Докажите, что граф  $K_5$  имеет 264 эйлеровы цепи. Дано множество, состоящее из пятнадцати фишек домино, от 0—0 до 4—4; сколькими различными способами их можно уложить в цикл, соблюдая обычные для этой игры правила?
- (\*6h) Пусть  $V$  — векторное пространство, связанное (в смысле упр. 2j) с графом  $G$ . Используя Следствие 6C, докажите, что если  $C$  и  $D$  — два цикла в  $G$ , то

их векторная сумма  $C \oplus D$  может быть представлена в виде объединения циклов, не имеющих попарно общих ребер; выведите отсюда, что множество таких объединений циклов графа  $G$  образует подпространство  $W$  в  $V$  (называемое **подпространством циклов** графа  $G$ ).

(\*б<sub>1</sub>) Используя обозначения предыдущего упражнения, докажите аналогичным образом, что подмножество объединений, не имеющих попарно общих ребер разрезов графа  $G$  образует подпространство  $\tilde{W}$  в  $V$  (называемое **подпространством разрезов** графа  $G$ ). Найдите размерности подпространств  $W$  и  $\tilde{W}$ . (См. также упр. 9к.)

## § 7. ГАМИЛЬТОНОВЫ ГРАФЫ

В предыдущем параграфе мы обсудили проблему существования замкнутой цепи, проходящей через каждое ребро заданного связного графа  $G$ . Можно рассмотреть аналогичную проблему существования замкнутой цепи, проходящей ровно один раз через каждую вершину графа  $G$ . Ясно, что такая цепь должна быть циклом (исключая тривиальный случай, когда  $G$  является графом  $K_1$ ) если такой цикл существует, то он называется **гамильтоновым циклом**, а  $G$  называется **гамильтоновым графом**. Граф, который содержит простую цепь, проходящую через каждую его вершину, называется **полугамильтоновым**; заметим, что всякий гамильтонов граф является полугамильтоновым. На рис. 7.1, 7.2 и 7.3 изображены соответственно не гамильтонов, полугамильтонов и гамильтонов графы.

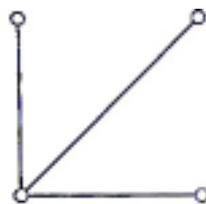


Рис. 7.1.

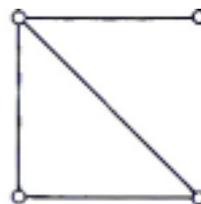


Рис. 7.2.

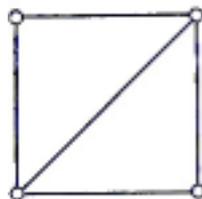


Рис. 7.3

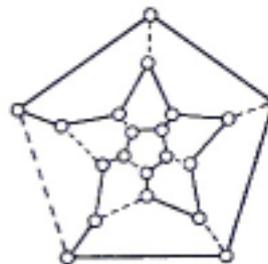


Рис. 7.4.

Название «гамильтонов цикл» возникло в связи с тем, что сэр Уильям Гамильтон занимался исследованием существования таких циклов в графе, соответствующем додекаэдру; на рис. 7.4 показан такой цикл (его ребра изображены сплошными линиями).

В теореме 6В мы получили необходимое и достаточное условие для того, чтобы связный граф был эйлеровым. Естественно было бы надеяться, что и для

гамильтоновых графов удастся получить аналогичный критерий. Однако поиск такого критерия стал одной из главных нерешенных задач теории графов! О гамильтоновых графах в общем-то известно очень мало. Большинство известных теорем имеет вид: «если  $G$  имеет достаточное число ребер, то  $G$  является гамильтоновым графом»; вероятно, самой знаменитой из них является следующая теорема, принадлежащая Г. Э. Дираку и потому известная как **теорема Дирака**.

ТЕОРЕМА 7А. (ДИРАК 1952)

*Если в простом графе с  $n$  ( $\geq 3$ ) вершинами  $\rho(v) \geq n/2$  для любой вершины  $v$ , то граф  $G$  является гамильтоновым.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Существует несколько доказательств этой широко известной теоремы; здесь мы приведем доказательство, принадлежащее Д. Дж. Ньюману.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Добавим к нашему графу  $k$  новых вершин, соединяя каждую из них с каждой вершиной из  $G$ . Будем предполагать, что  $A$  — наименьшее число вершин, нужных для того, чтобы полученный граф  $G'$  стал гамильтоновым. Затем, считая, что  $k > 0$ , придем к противоречию.

Пусть  $v \rightarrow p \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow v$  — гамильтонов цикл в  $G'$ , где  $v$  и  $w$  — вершины из  $G$ , а  $p$  — одна из новых вершин. Тогда  $w$  не является смежной с  $v'$ , так как в противном случае мы могли бы не использовать вершину  $p$ , что противоречит минимальности  $k$ . Более того, вершина (скажем  $w'$ ), смежная вершине  $w$ , не может непосредственно следовать за вершиной  $v'$ , смежной вершине  $v$ , потому что тогда мы могли бы заменить  $v \rightarrow p \rightarrow w \rightarrow \dots \rightarrow v' \rightarrow w' \rightarrow \dots \rightarrow v$  и на  $v \rightarrow v' \rightarrow \dots \rightarrow w \rightarrow w' \rightarrow \dots \rightarrow v$ , перевернув часть цикла, заключенную между  $w$  и  $v'$ . Отсюда следует, что число вершин графа  $G'$ , не являющихся смежными с  $w$ , не меньше числа вершин, смежных с  $v$  (т. е. равно по меньшей мере  $n/2 + k$ ), с другой стороны, очевидно, что число вершин графа  $G'$ , смежных с  $w$ , тоже равно по меньшей мере  $n/2 + k$ . А так как ни одна вершина графа  $G'$  не может быть одновременно смежной и не смежной вершине  $w$ , то общее число вершин графа  $G'$ , равно  $n + k$ , не меньше, чем  $n + 2k$ . Это и есть искомое противоречие. //

## УПРАЖНЕНИЯ

- (7a) Для каких чисел  $m$  и  $n$  следующие графы являются гамильтоновыми: (i)  $K_{m,n}$ ; (ii)  $K_n$ ; (iii)  $W_n$ ? Опишите гамильтоновы циклы в каждом из тех случаев, когда они существуют. Покажите также, что все платоновы графы являются гамильтоновыми, и найдите в каждом из них гамильтоновы циклы.
- (7b) Докажите, что граф Петерсена не является гамильтоновым; является ли он полугамильтоновым?

- (7c) Приведите пример графа, являющегося эйлеровым, но не гамильтоновым, а также графа, являющегося гамильтоновым, но не эйлеровым. Что можно сказать о графах, являющихся одновременно эйлеровыми и гамильтоновыми?
- (7d) Может ли шахматный конь побывать на каждой клетке шахматной доски размером  $8 \times 8$  ровно один раз и возвратиться в начальную точку? Тот же вопрос для короля и ладьи. Как изменятся ответы, если шахматная доска имеет размер  $7 \times 7$ ? Изложите все свои ответы в терминах теории графов.
- (7e) Пусть  $H$  — группа, порожденная двумя элементами  $l$  и  $r$ , удовлетворяющими соотношениям  $r^5=1$ ,  $lr^2l=rlr$  и  $lr^3l=r^2$  (здесь  $1$  обозначает единицу группы  $H$ ). Докажите, что  $(lr^3l^3r)^2=1$ . Какая связь между этой задачей и задачей нахождения гамильтонова цикла в графе, соответствующем додекаэдру?
- (7f) Приведите контрпример, показывающий, что в формулировке теоремы Дирака условие  $\rho(v) \geq n/2$  нельзя заменить условием  $\rho(v) \geq \frac{1}{2}(n-1)$ .
- (7g) Докажите, что если в простом графе  $G$ , имеющем  $n$  ( $\geq 3$ ) вершин, для каждой пары  $v$  и  $w$  несмежных вершин  $\rho(v) + \rho(w) \geq n$ , то  $G$  является гамильтоновым графом. Выведите отсюда теорему Дирака.
- (\*7h) Докажите, что реберные графы эйлерова простого графа и гамильтонова простого графа являются гамильтоновыми. Зная, что реберный граф некоторого простого графа  $G$  является гамильтоновым, можем ли мы утверждать, что сам граф  $G$  эйлеров или гамильтонов?
- (\*7i) Найдите  $n$  гамильтоновых циклов в графе  $K_{2n+1}$ , обладающих тем свойством, что никакие два из них не имеют общих ребер. Девять гурманов проводят каждый вечер в своем любимом ресторане в течение всей конференции. Предположим, что они садятся за круглый стол, причем любые двое из них занимают соседние места только один раз. Что можно сказать о продолжительности конференции? Выполните первое задание упражнения для двудольного графа  $K_{n,n}$  и найдите аналогичное «практическое» приложение этого случая.

## § 8. БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРАФЫ

В этом параграфе мы покажем, как можно обобщить некоторые определения, данные в предыдущих параграфах, на случай бесконечных графов. Напомним читателю, что **бесконечным графом** называется пара  $(V(G), E(G))$ , где  $V(G)$  — бесконечное множество элементов, называемых **вершинами**, а  $E(G)$  — бесконечное семейство неупорядоченных пар элементов из  $V(G)$ , называемых **ребрами**. Если оба множества  $V(G)$  и  $E(G)$  счетны, то  $G$  называется **счетным графом**. Заметим, что наши определения исключают те случаи, когда  $V(G)$  бесконечно, а  $E(G)$  конечно (такие объекты являются всего лишь конечными графами с бесконечным множеством изолированных вершин), или когда  $E(G)$  бесконечно, а  $V(G)$  конечно (такие объекты являются конечными графами с

бесконечным числом петель или кратных ребер).

Некоторые определения, данные в гл. 2 (таких понятий, как «смежный», «инцидентный», «изоморфный», «подграф», «объединение», «связный», «компонента»), сразу переносятся на бесконечные графы. **Степенью** вершины  $v$  бесконечного графа называется мощность множества ребер, инцидентных  $v$ ; степень вершины может быть конечной или бесконечной. Бесконечный граф, все вершины которого имеют конечные степени, называется **локально конечным**; хорошо известным примером такого графа является бесконечная квадратная решетка, часть которой изображена на рис. 8.1.

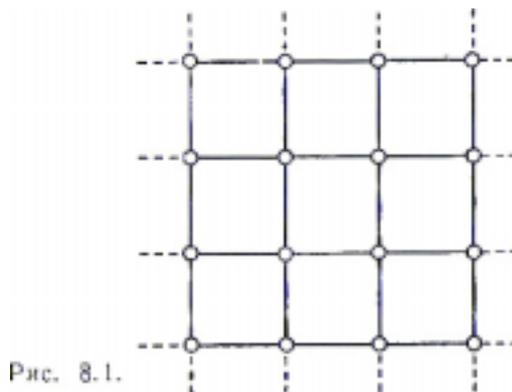


Рис. 8.1.

Аналогичным образом можно определить **локально счетный** бесконечный граф — как граф, все вершины которого имеют счетную степень<sup>8</sup>. Пользуясь этими определениями, докажем сейчас простой, но важный результат.

#### ТЕОРЕМА 8А.

*Каждый связный локально счетный бесконечный граф является счетным.*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть  $v$  — произвольная вершина такого бесконечного графа, и пусть  $A_1$  — множество вершин, смежных  $v$ ,  $A_2$  — множество всех вершин, смежных вершинам из  $A_1$  и т. д. По условию теоремы  $A_1$  — счетно и, следовательно, множества  $A_2, A_3, \dots$  тоже счетны (здесь мы используем тот факт, что объединение не более чем счетного множества счетных множеств счетно); следовательно,  $\{v\}, A_1, A_2, \dots$  — последовательность множеств, объединение которых счетно. Кроме того, эта последовательность содержит каждую вершину бесконечного графа в силу его связности. Отсюда и следует нужный результат. //

#### СЛЕДСТВИЕ 8В.

Каждый связный локально конечный бесконечный граф является счетным. //

<sup>8</sup> Под счетным множеством здесь и в дальнейшем понимается бесконечное множество, допускающее взаимно однозначное отображение на множество натуральных чисел. — Прим. ред.

Помимо этого, на бесконечный граф  $G$  можно перенести понятие маршрута, причем тремя различными способами:

- (i) **конечный маршрут** в  $G$  определяется так же, как и в §5;
- (ii) **бесконечным в одну сторону маршрутом** в  $G$  (с **начальной вершиной**  $v_0$ ) называется бесконечная последовательность ребер вида  $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots$
- (iii) **бесконечным в обе стороны маршрутом** в  $G$  называется бесконечная последовательность ребер вида  $\dots, \{v_{-2}, v_{-1}\}, \{v_{-1}, v_0\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots$

Бесконечные в одну сторону и в обе стороны цепи и простые цепи определяются очевидным образом, так же как и понятия длины цепи и расстояния между вершинами. Следующий результат, известный как лемма Кёнига, говорит о том, что бесконечные простые цепи не так уж трудно обнаружить.

ТЕОРЕМА 8C. (КЁНИГ 1936)

*Пусть  $G$  — связный локально конечный бесконечный граф; тогда для любой его вершины  $v$  существует бесконечная в одну сторону простая цепь с начальной вершиной  $v$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если  $z$  — произвольная вершина графа  $G$ , отличная от  $v$ , то существует нетривиальная простая цепь от  $v$  до  $z$ ; отсюда следует, что в  $G$  имеется бесконечно много простых цепей с начальной вершиной  $v$ . Поскольку степень  $v$  конечна, то бесконечное множество таких простых цепей должно начинаться с одного и того же ребра. Если таким ребром является  $\{v, v_1\}$ , то, повторяя эту процедуру для вершины  $v_1$ , получим новую вершину  $v_2$  и соответствующее ей ребро  $\{v_1, v_2\}$ . Продолжая таким образом, мы получим бесконечную в одну сторону простую цепь  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \dots$

Важное значение леммы Кёнига состоит в том, что она позволяет получать результаты о бесконечных графах из соответствующих результатов для конечных графов. Типичным примером этого является следующая теорема (которая предвосхищает некоторые определения и выводы гл. 5).

ТЕОРЕМА 8D.

*Пусть  $G$  — счетный, граф, каждый конечный подграф которого планарен; тогда и  $G$  планарен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как  $G$  — счетный граф, то его вершины можно занумеровать в последовательность  $v_1, v_2, v_3, \dots$ . Исходя из нее, построим строго возрастающую последовательность  $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \dots$  подграфов графа  $G$ , выбирая в качестве  $G_k$  подграф с вершинами  $v_1, \dots, v_k$  и ребрами графа  $G$ , соединяющими только эти вершины между собой. Далее, примем на веру тот факт, что графы  $G_i$  могут быть уложены на плоскости конечным числом (скажем  $m(i)$ ) топологически различных способов, и построим еще один

бесконечный граф  $H$ . Его вершины  $w_{ij}$  ( $i \geq 1$ ,  $1 \leq j \leq m(i)$ ) пусть соответствуют различным укладкам графов  $\{G_{ij}\}$ , а его ребра соединяют те из вершин  $w_{ij}$  и  $w_{kl}$ , для которых  $k=i+1$  и плоская укладка, соответствующая  $w_{kl}$ , «расширяется» (очевидным образом) до укладки, соответствующей  $w_{ij}$ . Легко видеть, что граф  $H$  связан и локально конечен, поэтому, как следует из леммы Кёнига, он содержит бесконечную в одну сторону простую цепь. А так как граф  $G$  является счетным, то эта бесконечная простая цепь и дает требуемую плоскую укладку графа  $G$ . //

Стоит подчеркнуть, что если принять дальнейшие аксиомы теории множеств (в частности, аксиому выбора для несчетных множеств), то многие результаты (подобные только что доказанному) можно перенести и на такие бесконечные графы, которые не обязательно являются счетными.

▲ В заключение этого небольшого отступления в область бесконечных графов дадим краткий обзор свойств бесконечных эйлеровых графов. Естественно назвать связный бесконечный граф  $G$  эйлеровым, если в нем существует бесконечная в обе стороны цепь, содержащая каждое ребро графа  $G$ ; такая бесконечная цепь называется (двусторонней) **эйлеровой цепью**. Далее, назовем граф  $G$  **полуэйлеровым**, если в нем существует бесконечная (в одну или в обе стороны) цепь, содержащая каждое ребро графа  $G$ . Заметим, что эти определения требуют счетности графа  $G$ . В следующих теоремах даны условия, необходимые для того, чтобы бесконечный граф был эйлеровым или полуэйлеровым.

ТЕОРЕМА 8Е.

*Пусть  $G$  — связный счетный граф, являющийся эйлеровым. Тогда (i) в графе  $G$  нет вершин нечетной степени; (ii) для каждого конечного подграфа  $H$  графа  $G$  бесконечный граф  $\bar{H}$  (полученный удалением из  $G$  ребер графа  $H$ ) имеет не более двух бесконечных связных компонент; (iii) если, кроме того, степень любой вершины из  $H$  четна, то  $\bar{H}$  имеет ровно одну бесконечную связную компоненту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(i) Предположим, что  $P$  — эйлерова цепь; тогда, рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 6В, получим, что степень любой вершины из  $G$  должна быть либо четной, либо бесконечной.

(ii) Разобьем цепь  $P$  на три подцепи  $P_-$ ,  $P_0$  и  $P_+$  так, что  $P_0$  — конечная цепь, содержащая все ребра графа  $H$  (и, быть может, другие ребра), а  $P_-$  и  $P_+$  — две бесконечные в одну сторону цепи. Тогда бесконечный граф  $K$ , образованный ребрами цепей  $P_-$  и  $P_+$  (а также инцидентными им вершинами), имеет не более двух бесконечных компонент. Так как  $\bar{H}$  получается из  $K$  присоединением лишь конечного множества ребер, то отсюда и следует нужный результат.

(iii) Пусть  $v$  и  $w$  — начальная и конечная вершины цепи  $P_0$ ; мы хотим показать, что  $v$  и  $w$  связаны в  $\bar{H}$ . Если  $v=w$ , то это очевидно; если  $v \neq w$ , то, применяя следствие 6D к графу, полученному из  $P_0$  удалением ребер графа  $H$  (по предположению в этом графе ровно две вершины, а именно  $v$  и  $w$ , имеют нечетные степени), получим требуемый результат. //

Можно получить соответствующие необходимые условия для полуэйлеровых бесконечных графов; в этом случае доказательство аналогично доказательству теоремы 8E, но гораздо проще и может быть предложено в качестве упражнения.

ТЕОРЕМА 8F.

*Пусть  $G$  — связный счетный граф, являющийся полуэйлеровым, но не эйлеровым; тогда (i)  $O$  содержит либо не более одной вершины нечетной степени, либо не менее одной вершины бесконечной степени; (ii) для каждого конечного подграфа  $H$  графа  $G$  бесконечный граф  $\bar{H}$  (описанный ранее) содержит ровно одну бесконечную компоненту. //*

Оказывается, условия двух предыдущих теорем являются не только необходимыми, но и достаточными. Этот результат мы сформулируем в виде следующей теоремы, доказательство которой выходит за рамки этой книги, но может быть найдено у Оре [4].

ТЕОРЕМА 8G.

*Пусть  $G$  — связный счетный граф;  $G$  является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда выполнены условия (i), (ii) и (iii) теоремы 8E. Более того,  $G$  является полуэйлеровым тогда и только тогда, когда выполнены либо эти условия, либо условия (i) и (ii) теоремы 8F. //▲*

## УПРАЖНЕНИЯ

- (8a) Найдите аналог теоремы 8A для бесконечных графов, у которых степени вершин имеют мощность большую, чем счетная.
- (8b) Докажите теорему 8F.
- (8c) Найдите обобщение следствия 6C на бесконечные графы.
- (8d) Приведите контрпример и докажите тем самым, что лемма Кёнига не верна, если не требовать локальной конечности бесконечных графов.
- (8e) Пусть  $S_2$  обозначает бесконечную квадратную решетку; докажите (построив в явном виде эйлерову цепь), что  $S_2$  — эйлеров граф, и проверьте, что  $S_2$  удовлетворяет условиям теоремы 8E.
- (8f) Являются ли бесконечная треугольная решетка  $T_2$  и бесконечная шестиугольная решетка  $H_2$  эйлеровыми графами? Если да, то найдите

эйлерову цепь в каждом из них.

- (8g) Покажите, что  $S_2$  содержит как бесконечную в одну сторону, так и бесконечную в обе стороны простые цепи, проходящие через каждую из вершин ровно один раз. Справедлив ли аналогичный результат для  $T_2$  и  $H_2$ ?

## 4. ДЕРЕВЬЯ

Дурак видит не то самое дерево, что видит умный.

Вильям Блейк<sup>9</sup>

Все мы знакомы с понятием генеалогического дерева; обобщение этого понятия изучается в настоящей главе. Здесь также затронуты вопросы, относящиеся к остовным деревьям в связных графах и замечательному результату Кэли (в §10) о перечислении помеченных деревьев. В последнем параграфе рассмотрены некоторые приложения теории графов.

### § 9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ДЕРЕВЬЕВ

**Лесом** называется граф, не содержащий циклов; связный лес называется **деревом**. Например, на рис. 9.1 изображен лес, состоящий из четырех компонент, каждая из которых является деревом<sup>10</sup>. Заметим, что по определению деревья и леса являются простыми графами.

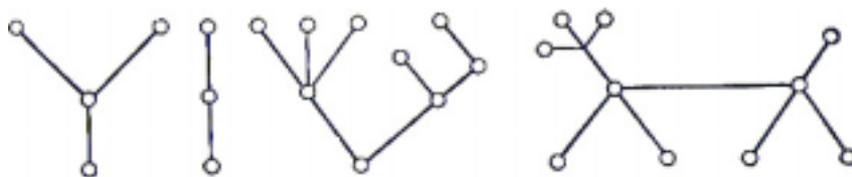


Рис. 9.1.

По многим показателям дерево представляет собой простейший нетривиальный тип графа. Как будет показано в теореме 9А, оно обладает некоторыми «приятными» свойствами; например, любые две его вершины соединены единственной простой цепью. Пытаясь доказать какой-нибудь общий результат или проверить гипотезу для графов, удобно бывает начать с деревьев, хотя и существует несколько гипотез, которые еще не доказаны для произвольных графов, несмотря на то, что они верны для деревьев.

В следующей теореме перечислены некоторые простые свойства деревьев.

ТЕОРЕМА 9А.

*Пусть граф  $T$  имеет  $n$  вершин. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (i)  $T$  является деревом; (ii)  $T$  не содержит циклов и имеет  $n-1$  ребер; (iii)  $T$  связен и имеет  $n-1$  ребер; (iv)  $T$  связен и каждое его ребро является мостом; (v) любые две вершины графа  $T$  соединены, ровно одной простой цепью; (vi)  $T$  не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, мы получаем ровно*

<sup>9</sup> Из «Пословиц ада», перевод С. Я. Маршака. Вильям Блейк (1757-1827) – английский поэт и художник. – Прим. перев.

<sup>10</sup> Последнее дерево, изображенное на рис. 9.1, особенно хорошо известно своим лаем.

*один цикл.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если  $n=1$ , утверждение очевидно. Предположим поэтому, что  $n \geq 2$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii). По определению  $T$  не содержит циклов; тогда, как следует из [упр. 5с](#), удаление любого ребра разбивает  $T$  на два графа, каждый из которых является деревом. По индуктивному предположению число ребер в каждом из этих деревьев на единицу меньше числа вершин. Отсюда выводим, что полное число ребер графа  $T$  равно  $n-1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Если граф  $T$  несвязен, то каждая его компонента представляет собой связный граф без циклов. Из предыдущей части доказательства следует, что число вершин в каждой из компонент больше числа ее ребер на единицу. Значит, полное число вершин графа  $T$  больше полного числа его ребер по крайней мере на 2, а это противоречит тому, что  $T$  имеет  $n-1$  ребер.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). Удаление любого ребра приводит к графу с  $n$  вершинами и  $n-2$  ребрами, который не может быть связным по теореме 5В.

(iv)  $\Rightarrow$  (v). Так как  $T$  связан, то каждая пара его вершин соединена по крайней мере одной простой цепью. Если же данная пара вершин соединена двумя простыми цепями, то они замыкаются в цикл, а это противоречит тому, что каждое ребро в  $T$  является мостом (согласно [упр. 5с](#)).

(v)  $\Rightarrow$  (vi). Если  $T$  содержит цикл, то любые две вершины этого цикла соединены по крайней мере двумя простыми цепями. Добавим теперь к графу  $T$  какое-то ребро  $e$ ; тогда мы получим цикл, поскольку инцидентные ребру  $e$  вершины уже соединены в  $T$  простой цепью. То, что при этом мы получим только один цикл, следует из [упр. 5f](#).

(vi)  $\Rightarrow$  (i). Предположим, что  $T$  несвязен; тогда добавление любого ребра, соединяющего вершину одной компоненты с вершиной другой компоненты, не приводит к образованию цикла. //

СЛЕДСТВИЕ 9В.

*Пусть  $G$  — лес с  $n$  вершинами и  $k$  компонентами; тогда  $G$  имеет  $n-k$  ребер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Применим к каждой компоненте графа  $G$  предложение (ii) теоремы 9А. //

Заметим, что по лемме о рукопожатиях сумма степеней всех  $n$  вершин дерева равна удвоенному числу его ребер ( $2n-2$ ); отсюда следует, что при  $n \geq 2$  дерево, имеющее  $n$  вершин, всегда содержит не менее двух висячих вершин.

Известно ([из упр. 5с](#)), что в связном графе  $G$  удаление одного ребра, принадлежащего некоторому выбранному циклу, не нарушает связности оставшегося графа. Применим эту процедуру к одному из оставшихся циклов, и так до тех пор, пока не останется ни одного цикла. В результате получим дерево, связывающее все вершины графа  $G$ ; оно называется **остовным**

деревом<sup>11</sup> графа  $G$ . Пример графа и одного из его остовных деревьев дан на рис. 9.2 и 9.3.

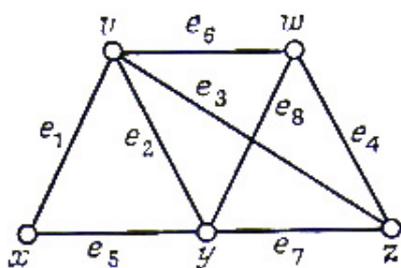


Рис. 9.2.

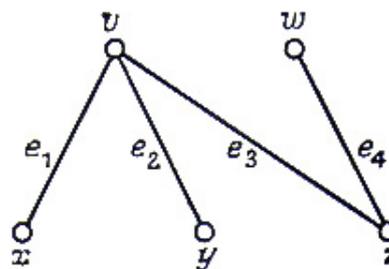


Рис. 9.3.

В общем случае обозначим через  $G$  произвольный граф с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами и  $k$  компонентами. Применяя описанную выше процедуру к каждой компоненте  $G$ , получим в результате граф, называемый **остовным лесом**. Число удаленных в этой процедуре ребер называется **циклическим рангом** (или **цикломатическим числом**) графа  $G$  и обозначается через  $\gamma(G)$ . Легко видеть, что  $\gamma(G) = m - n + k$  и является неотрицательным целым числом (по теореме 5B). Таким образом, циклический ранг дает меру связности графа (смысл этого понятия будет уточнен в упр. 9k): циклический ранг дерева равен нулю, а циклический ранг циклического графа равен единице. Удобно также определить **коциклический ранг** (или **ранг разреза**) графа  $G$  как число ребер в его остовном лесе; коциклический ранг обозначается через  $\chi(G)$  и равен  $n - k$ .

Прежде чем перейти к следующему разделу, докажем два простых результата, касающихся остовных лесов. В этой теореме **дополнением** остовного леса  $T$  некоторого (необязательно простого) графа  $G$  является граф, полученный из  $G$  удалением ребер  $T$ .

#### ТЕОРЕМА 9C.

*Если  $T$  — остовный лес графа  $G$ , то (i) всякий разрез в  $G$  имеет общее ребро с  $T$ ; (ii) каждый цикл в  $G$  имеет общее ребро с дополнением  $T$ .*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(i) Пусть  $C^*$  — разрез графа  $G$ , удаление которого разбивает одну из компонент  $G$  на два подграфа  $H$  и  $K$ . Поскольку  $T$  — остовный лес, в нем должно содержаться ребро, соединяющее вершину из  $H$  с вершиной из  $K$ ; это и есть требуемое ребро.

(ii) Пусть  $C$  — цикл в графе  $G$ , не имеющий ни одного общего ребра с дополнением  $T$ ; тогда  $C$  содержится в  $T$ , что невозможно. //

С понятием остовного леса  $T$  графа  $G$  тесно связано понятие фундаментальной системы циклов, ассоциированной с  $T$ . Оно определяется следующим образом: если добавить к  $T$  любое не содержащееся в нем ребро

<sup>11</sup> Или остовом, или каркасом. — Прим. ред.

графа  $G$ , то по предложению (vi) теоремы 9А получим единственный цикл; множество всех циклов, получаемых таким способом (т.е. путем добавления по отдельности каждого ребра из  $G$ , не содержащегося в  $T$ ), называется **фундаментальной системой циклов, ассоциированной с  $T$** . В том случае, когда нас не интересует, какой остовный лес рассматривается, мы говорим о **фундаментальной системе циклов графа  $G$** . Ясно, что циклы данной фундаментальной системы должны быть различными и что их число должно равняться циклическому рангу графа  $G$ . На рис. 9.4 показана фундаментальная система циклов графа, изображенного на рис. 9.2, ассоциированная с остовным деревом, изображенным на рис. 9.3.

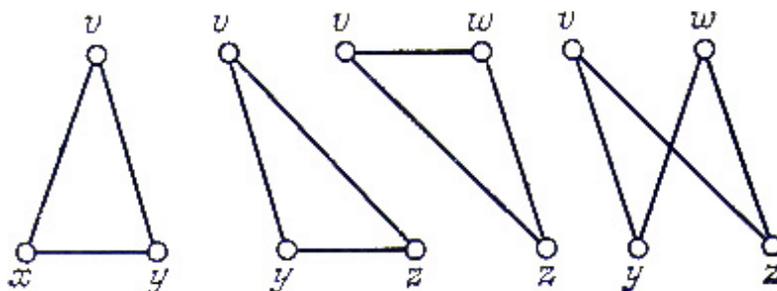


Рис. 9.4.

В свете замечаний, сделанных в конце § 5, можно надеяться, что удастся определить фундаментальную систему разрезов графа  $G$ , ассоциированную с данным остовным лесом  $T$ . Покажем, что это действительно можно сделать. По предложению (iv) теоремы 9А удаление любого ребра из  $T$  разбивает множество вершин дерева  $T$  на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$ . Множество всех ребер графа  $G$ , каждое из которых соединяет вершину из  $V_1$  с вершиной из  $V_2$ , является разрезом графа  $G$ . Множество всех разрезов, полученных таким способом (т.е. удалением по отдельности каждого ребра из  $T$ ), называется **фундаментальной системой разрезов, ассоциированной с  $T$** . Ясно, что разрезы данной фундаментальной системы должны быть различными и что их число должно равняться коциклическому рангу графа  $G$ . Фундаментальной системой разрезов графа, изображенного на рис. 9.2, ассоциированной с остовным деревом, изображенным на рис. 9.3, является такая система:

$$\{e_1, e_5\}, \{e_2, e_5, e_7, e_8\}, \{e_3, e_6, e_7, e_8\} \text{ и } \{e_4, e_6, e_8\}.$$

## УПРАЖНЕНИЯ

- (9a) Докажите, что существует ровно шесть неизоморфных деревьев с шестью вершинами и одиннадцать — с семью вершинами.
- (9b) Докажите, что каждое дерево является двудольным графом; какие деревья являются полными двудольными графами?
- (9c) Докажите, что графы, соответствующие (в смысле упр. 1b) насыщенным углеводородам ( $C_nH_{2n+2}$ ), спиртам ( $C_nH_{2n+1}OH$ ) являются деревьями.
- (9d) Вычислите циклические и нециклические ранги следующих графов: (i)  $K_n$ ;

(ii)  $K_{m,n}$ ; (iii)  $N_n$ ; (iv)  $W_n$ ; (v) платоновых графов; (vi) графа Петерсена; (vii) любого связного графа с  $n$  вершинами, являющегося регулярным степени  $r$ .

(9e) Найдите остовное дерево и ассоциированные с ним фундаментальные системы циклов и разрезов следующих графов: (i)  $K_5$ ; (ii)  $K_{3,3}$ ; (iii)  $W_5$ ; (iv)  $C_6$ ; (v) платоновых графов; (vi) графа Петерсена.

(9f) Докажите, что каждое дерево имеет один или два центра.

(9g) Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — остовные деревья связного графа  $G$ . Покажите, что для любого ребра  $e$  из  $T_1$  существует ребро  $f$  из  $T_2$ , обладающее тем свойством, что  $(T_1 - \{e\}) \cup \{f\}$  (граф, полученный из  $T_1$  «заменой»  $e$  на  $f$ ) также является остовным деревом. Покажите также, что  $T_1$  можно «перевести» в  $T_2$ , «заменяя» каждый раз одно ребро из  $T_1$  ребром из  $T_2$  так, что на каждом шаге получается остовное дерево.

(9h) Докажите, что если некоторое множество  $C^*$  ребер графа  $G$  обладает тем свойством, что любой остовный лес графа  $G$  имеет с  $C^*$  общее ребро, то  $C^*$  содержит разрез. Получите соответствующий результат для циклов.

(\*9i) Пусть  $A$  — матрица инциденции дерева с  $n$  вершинами. Докажите, что любые  $n-1$  столбцов матрицы  $A$  линейно независимы над полем целых чисел по модулю 2.

(\*9j) Докажите, что если  $H$  и  $K$  — подграфы графа  $G$  и  $H \cup K$ ,  $H \cap K$  определены естественным образом, то коциклический ранг  $\chi$  удовлетворяет следующим соотношениям: (i)  $0 \leq \chi(H) \leq m(H)$  (число ребер в  $H$ ); (ii) если  $H$  — подграф графа  $K$ , то  $\chi(H) \leq \chi(K)$ ; (iii)  $\chi(H \cup K) + \chi(H \cap K) \leq \chi(H) + \chi(K)$ .

(\*9k) Пусть  $V$  — векторное пространство, соответствующее простому связному графу  $G$ , и пусть  $T$  — остовное дерево графа  $G$ . Докажите, что фундаментальная система циклов, ассоциированная с  $T$ , образует базис подпространства циклов  $W$  графа  $G$ . Получите соответствующий результат для подпространства разрезов  $\tilde{W}$ . Выведите, что размерности подпространств  $W$  и  $\tilde{W}$  равны соответственно  $\gamma(G)$  и  $\chi(G)$ .

## § 10 ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ДЕРЕВЬЕВ

Теория перечисления графов занимается разработкой методов подсчета числа неизоморфных графов, обладающих тем или иным свойством. Вероятнее всего, эта теория возникла в 70-х годах девятнадцатого столетия и связана с именем Кэли, который пытался найти число насыщенных углеводородов  $C_n H_{2n+2}$ , содержащих данное число атомов углерода. Как он обнаружил и как читатель видел в упр. 9с, эта задача сводится к подсчету числа деревьев, у которых степень каждой вершины равна либо четырем, либо единице.

Сейчас многие задачи по перечислению графов решены. К примеру, можно подсчитать число графов, орграфов, связных графов, деревьев и эйлеровых

графов, содержащих данное число вершин и ребер; однако соответствующие результаты для планарных и гамильтоновых графов еще не получены. Большую часть всех известных результатов можно получить, применяя основную перечислительную теорему Пойа, хорошее изложение которой можно найти в книге Ли [6]. К сожалению, почти ни в одном случае невозможно выразить эти результаты с помощью простых формул. В приложении читатель найдет таблицу некоторых известных результатов.

Этот параграф посвящен доказательству знаменитой теоремы, приписываемой обычно Кэли, о числе помеченных деревьев с данным числом вершин. Мы уже встречались с помеченными графами в конце § 2; помеченный граф с  $n$  вершинами — это граф, у которого все вершины «помечены» целыми числами от 1 до  $n$ . Более точно, определим **распределение меток** в графе  $G$  с  $n$  вершинами как взаимно однозначное соответствие между множеством вершин  $G$  и множеством  $\{1, \dots, n\}$ ; тогда **помеченным графом** называется пара  $\{G, \varphi\}$ , где  $G$  — граф, а  $\varphi$  — распределение меток в  $G$ . Числа  $1, \dots, n$  часто будем называть **метками** графа  $G$  и обозначать вершины  $G$  через  $v_1, \dots, v_n$ . Далее, назовем два помеченных графа  $(G_1, \varphi_1)$  и  $(G_2, \varphi_2)$  **изоморфными**, если существует изоморфизм между  $G_1$  и  $G_2$ , сохраняющий распределение меток в этих графах.

Для того чтобы разобраться в этих определениях, рассмотрим рис. 10.1, где показаны различные распределения меток в дереве с четырьмя вершинами.

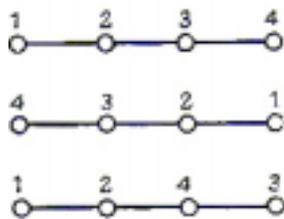


Рис. 10.1.

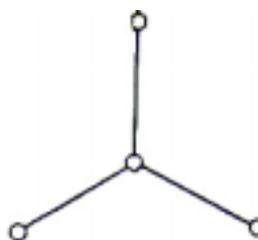


Рис. 10.2.

Внимательное изучение рисунка позволяет заметить, что второе помеченное дерево является просто перевернутым первым, а отсюда следует, что эти два помеченных дерева изоморфны. С другой стороны, ни одно из них не изоморфно третьему помеченному дереву (достаточно посмотреть на степень вершины  $v_3$ ). Следовательно, общее число различных распределений меток в данном дереве должно равняться  $(4!)/2 = 12$ , поскольку «переворот» любого распределения меток не приводит к новому объекту. Аналогично, общее число различных распределений меток в дереве, изображенном на рис. 10.2, должно равняться четырем, так как его центральная вершина может быть помечена четырьмя различными способами, каждый из которых однозначно определяет распределение меток.

Отсюда следует, что число всех (неизоморфных) помеченных деревьев с четырьмя вершинами равно шестнадцати. Сейчас мы докажем **теорему Кэли**, обобщающую этот результат на помеченные деревья с  $n$  вершинами.

ТЕОРЕМА 10А. (Кэли 1889)

Существует ровно  $n^{n-2}$  различных помеченных деревьев с  $n$  вершинами.

ЗАМЕЧАНИЕ.

Приведенное здесь доказательство принадлежит Кларку; другие доказательства см. у Муна [7].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Обозначим через  $T(n, k)$  число помеченных деревьев с  $n$  вершинами, в которых выбранная вершина (скажем  $v$ ) имеет степень  $k$ . Будем искать выражение для  $T(n, k)$ , а затем получим нужный результат суммированием по  $k$  от 1 до  $n-1$ .

Пусть  $A$  — любое помеченное дерево, в котором  $\rho(v)=k-1$ . Удаление любого ребра  $\{w, z\}$  из  $A$ , не инцидентного  $v$ , приводит к двум поддеревьям, одно из которых содержит  $v$  и одну из вершин  $w$  или  $z$  (допустим, что да), а другое содержит  $z$ . Если соединить вершины  $v$  и  $z$ , то получится дерево  $B$ , в котором  $\rho(v)=k$  (рис. 10.3).

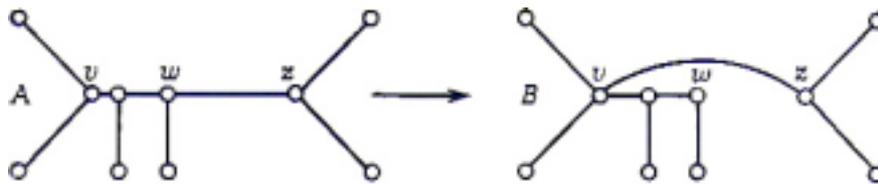


Рис. 10.3.

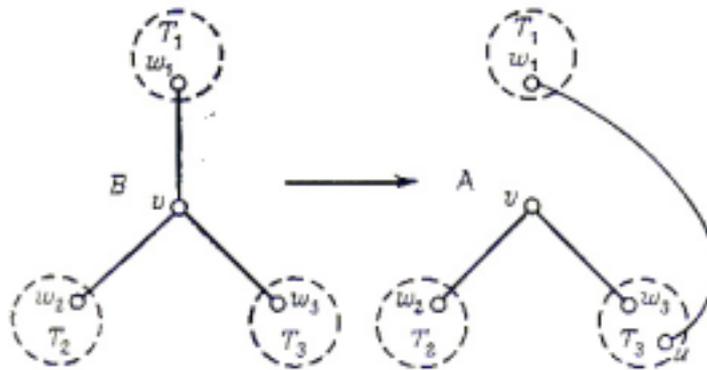


Рис. 10.4.

Назовем пару  $(A, B)$  помеченных деревьев **связкой**, если  $B$  можно получить из  $A$  описанным выше построением. Наша задача — подсчитать число всех возможных связок  $(A, B)$ .

Так как  $A$  можно выбрать любым из  $T(n, k-1)$  способов, а  $B$  однозначно определяется ребром  $\{w, z\}$ , которое может быть выбрано  $(n-1)-(k-1)=n-k$  способами, то число всех связок  $(A, B)$  равно  $(n-k)T(n, k-1)$ . С другой стороны, пусть  $B$  — помеченное дерево, в котором  $\rho(v)=k$ , и пусть  $T_1, \dots, T_k$  — поддеревья, полученные из  $B$  удалением вершины  $v$  с каждым из инцидентных ей ребер. Тогда помеченное дерево  $A$ , у которого  $\rho(v)=k-1$ ,

может быть получено удалением из  $B$  одного из этих ребер (скажем  $\{v, w_i\}$ , где  $w_i$  лежит в  $T_i$ ) и соединением  $w_i$  с любой вершиной  $u$ , принадлежащей любому другому поддереву  $T_j$ , (рис. 10.4). Очевидно, что соответствующая пара  $(A, B)$  помеченных деревьев образует связку и что все связки могут быть получены таким способом. Так как  $B$  можно выбрать  $T(n, k)$  способами, а число ребер, соединяющих  $w_i$  с вершинами любого другого поддерева  $T_j$ , равно  $(n-1)-n_i$ ; (где  $n_i$  обозначает число вершин в  $T_i$ ), то число всех связок  $(A, B)$  равно

$$T(n, k)\{(n-1-n_1)+\dots+(n-1-n_k)\}=(n-1)(k-1)T(n, k),$$

поскольку  $n_1+\dots+n_k=n-1$ .

Таким образом, мы показали, что

$$(n-k)T(n, k-1)=(n-1)(k-1)T(n, k).$$

При помощи итерации с учетом очевидного равенства  $T(n, n-1)=1$  сразу получаем, что

$$T(n, k) = C_{n-2}^{k-1} (n-1)^{n-k-1}.$$

Суммируя по всем возможным значениям, находим, что число  $T(n)$  помеченных деревьев с  $n$  вершинами равно

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-2}^{k-1} (n-1)^{n-k-1} = \{(n-1)+1\}^{n-2} = n^{n-2}. //$$

**СЛЕДСТВИЕ 10В.**

*Число остовных деревьев в  $K_n$  равно  $n^{n-2}$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Каждому помеченному дереву с  $n$  вершинами соответствует (единственным образом) остовное дерево графа  $K_n$ , обратно, каждое остовное дерево графа  $K_n$  представляет единственное помеченное дерево с  $n$  вершинами. //

## УПРАЖНЕНИЯ

- (10a) Докажите, что существует ровно  $2^{n(n-1)/2}$  помеченных простых графов с  $n$  вершинами; сколько из них имеет в точности  $m$  ребер?
- (10b) Убедитесь непосредственно, что существует ровно 125 помеченных деревьев с пятью вершинами.
- (10c) Докажите, что данный простой граф  $G$  с  $n$  вершинами можно пометить в точности  $n!/g$  различными способами, где  $g$  обозначает порядок группы автоморфизмов графа  $G$ .
- (10d) Покажите, что если  $\rho_1, \dots, \rho_n$  — заданные положительные целые числа, то

помеченное дерево с  $n$  вершинами, в котором степень  $v_k$  равна  $\rho_k$  (для каждого  $k$ ), существует в том и только в том случае, если  $\sum \rho_k = 2(n-1)$ .

- (10e) Докажите, что число реберно-помеченных деревьев с  $n$  вершинами (в которых помечены не вершины, а ребра) равно  $n^{n-3}$  ( $n \geq 3$ ).
- (10f) Покажите, что при больших  $n$  вероятность того, что данная вершина дерева с  $n$  вершинами является висячей, приближенно равна  $e^{-1}$ .
- (10g) Пусть  $T(n)$  обозначает число помеченных деревьев с  $n$  вершинами. Докажите (подсчетом числа способов соединения помеченного дерева с  $k$  вершинами с помеченным деревом с  $n-k$  вершинами), что

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k(n-k)T(k)T(n-k);$$

выведите тождество

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k k^{k-1} (n-1)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}.$$

- (\*10h) (**Матричная теорема о деревьях**). Можно показать, что число остовных деревьев помеченного простого графа  $G$  с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$  равно алгебраическому дополнению любого элемента  $(n \times n)$ -матрицы  $M = (m_{ij})$ , в которой  $m_{ii} = \rho(v_i)$ ,  $m_{ij} = -1$ , если  $v_i$  и  $v_j$  смежны, и  $m_{ij} = 0$  в противном случае. Проверьте этот результат в случае полного графа  $G$  и покажите, как можно перенести его на графы, содержащие петли и кратные ребра.

## § 11. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Хотя в этой книге мы главным образом занимаемся теорией графов, настало время указать некоторые возможные приложения. Ведь многие важные результаты в этой области были получены при попытках решить отдельные «практические» задачи. Вспомним хотя бы Эйлера и задачу о кёнигсбергских мостах, Кэли и задачу о перечислении насыщенных углеводородов и, наконец, разнообразные исследования по раскраске карт. Повышение интереса к теории графов в последнее время обусловлено во многом тем, что наряду с ее изяществом как собственно математической дисциплины она играет все возрастающую роль в таком широком диапазоне областей, как электротехника и лингвистика, исследование операций и кристаллография, вероятность и генетика, социология, география и численный анализ.

Конечно, книга таких размеров не годится для подробного обсуждения многочисленных приложений; поэтому мы отсылаем читателя к прекрасному изложению этого вопроса в гл. 6 книги Басакера и Саати [2]. Здесь мы только напомним читателю некоторые приложения, которые уже встречались в тексте, кратко опишем, что еще имеется в запасе, а затем детально обсудим две

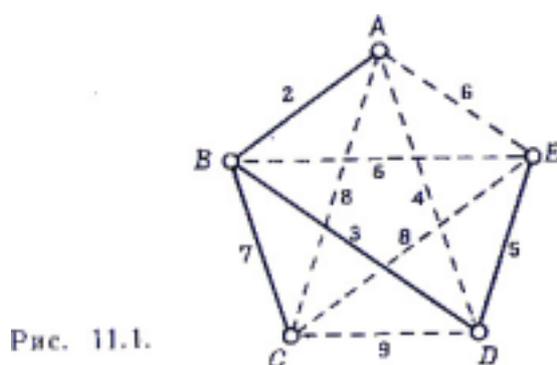
частные задачи.

Мы уже видели, как можно использовать графы и орграфы для описания многих ситуаций, включая: рыночные отношения (упр. 3f) — здесь использовались двудольные графы, представлявшие различные промышленные предприятия и рынки, на которые поступали их товары; игры (упр. 1a(v)) — здесь вершины соответствовали разным стадиям игры, а дуги указывали на возможные ходы; дружеские отношения (лемма о рукопожатиях и упр. 1a(iii), 3f, 3j и 7i); электрические цепи и карты дорог (§ 1); химические соединения (§ 10 и упр. 1b и 9c); головоломки (второй абзац из § 6 и упр. 6d, 6g, 7d и 7i).

Ниже мы упомянем еще такие приложения, как использование планарных графов при изучении печатных схем (§ 13), применение хроматических многочленов в задачах о составлении расписаний (§ 21) и теории трансверсалей — при построении латинских квадратов и в теории групп (§ 27). Мы обсудим также довольно подробно использование орграфов при изучении цепей Маркова (§ 24) и при решении проблемы нахождения максимальных потоков в транспортных сетях (§ 29).

Оставшаяся часть параграфа посвящена более детальному изучению двух конкретных приложений, одно из которых задача о соединении городов, а второе — гораздо менее серьезная задача.

(i) Представим себе, что мы хотим построить сеть железных дорог, которые соединили бы  $n$  данных городов, причем так, чтобы пассажир мог из каждого города проехать в любой другой. Если при этом из экономических соображений требуется, чтобы количество затраченных рельсов было минимальным, то ясно, что граф, вершины которого соответствуют городам, а ребра — соединяющим их железным дорогам, должен быть деревом. Задача состоит в нахождении алгоритма, определяющего, какое из возможных  $n^{n-2}$  деревьев, соединяющих эти города, требует наименьшего количества рельсов, если известны расстояния между каждой парой городов (рис. 11.1).



Можно сформулировать эту задачу в несколько более общем виде на языке теории графов. А именно, пусть  $G$  — связный граф, и пусть каждому его ребру  $e$  приписано неотрицательное действительное число  $\mu(e)$ , называемое его **мерой**; мы хотим найти алгоритм построения остовного дерева  $T$ , у которого **сумма мер**  $M(T) = \sum \mu(e)$  имеет минимальное возможное значение (сумма берется по всем ребрам дерева  $T$ ). Эта задача носит название **задачи о соединении городов** (или **задачи о минимальной связке**). Предыдущая задача

получается как частный случай, если положить  $G$  равным  $K_n$ , а в качестве меры ребра взять расстояние между соответствующей парой городов. Искомый алгоритм, известный под названием **алгоритма Краскала**, дает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА 11А.**

*Пусть  $G$  — связный граф с  $n$  вершинами; тогда следующая процедура приводит к решению задачи о соединении городов: (i) выберем ребро  $e_1$  обладающее в  $G$  наименьшей мерой;*

*(ii) определим по индукции последовательность ребер  $e_2, e_3, \dots, e_{n-1}$ , выбирая на каждом шаге ребро (отличное от предыдущих) с наименьшей мерой, обладающее тем свойством, что оно не образует циклов с предыдущими ребрами  $e_i$ . Полученный подграф  $T$  графа  $G$ , ребрами которого являются  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , и есть требуемое остовное дерево.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Предлагаем читателю проверить, что описанная процедура, примененная к графу, изображенному на рис. 11.1, дает:  $e_1=AB$ ,  $e_2=BD$ ,  $e_3=DE$ ,  $e_4=BC$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Тот факт, что  $T$  является остовным деревом графа  $G$ , сразу следует из утверждения (ii) теоремы 9А; остается только показать, что сумма мер дерева  $T$  минимальна. Для этого предположим, что некоторое остовное дерево  $S$  графа  $G$  обладает тем свойством, что  $M(S) < M(T)$ . Если  $e_k$  — первое ребро описанной выше последовательности, не принадлежащее  $S$ , то подграф графа  $G$ , образованный добавлением  $e_k$  к  $S$ , содержит единственный цикл  $C$ , проходящий по ребру  $e_k$ . Поскольку  $C$  содержит ребро  $e$ , принадлежащее  $S$ , но не  $T$ , то подграф, полученный из  $S$  заменой  $e$  на  $e_k$ , по-прежнему является остовным деревом (скажем,  $S'$ ). По построению  $\mu(e_k) \leq \mu(e)$ , поэтому  $M(S') \leq M(S)$  и число общих ребер у  $S'$  и  $T$  на одно больше, чем у  $S$  и  $T$ . Повторяя шаг за шагом эту процедуру, можно преобразовать  $S$  в  $T$ , причем сумма мер на каждом шаге не увеличивается; следовательно,  $M(T) \leq M(S)$ , и мы получаем требуемое противоречие. //

Задачу о соединении городов напоминает известная **задача о коммивояжере**, в которой требуется найти алгоритм для решения следующей задачи: коммивояжер желает посетить  $n$ , определенных городов; как он должен двигаться, чтобы заехать в каждый из них хотя бы один раз, проделав путь наименьшей общей длины? (На рис. 11.1 кратчайшим является путь  $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$ ; при этом пройденное расстояние равно 26.) Несмотря на многочисленные практические применения этой задачи, общий алгоритм ее решения до сих пор, к сожалению, неизвестен.

(ii) В последнее время стала популярной головоломка, названная

«мгновенное помешательство». Она состоит из четырех кубиков, грани которых раскрашены в красный, синий, зеленый и желтый цвета, причем каждый куб имеет хотя бы одну грань каждого цвета (как на рис. 11.2).

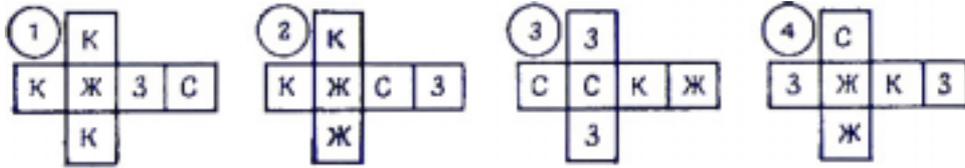


Рис. 11.2.

Требуется поставить эти кубы друг на друга так, чтобы каждая из четырех боковых граней размера  $4 \times 1$  получившейся прямоугольной призмы была окрашена в каждый из четырех цветов.

Чтобы решить эту задачу, представим каждый куб графом с четырьмя вершинами, по одной на каждый цвет. Во всех таких графах две вершины смежны тогда и только тогда, когда в рассматриваемом кубе две противоположные грани раскрашены в соответствующие цвета. Графы, соответствующие кубам, изображенным на рис. 11.2, показаны на рис. 11.3

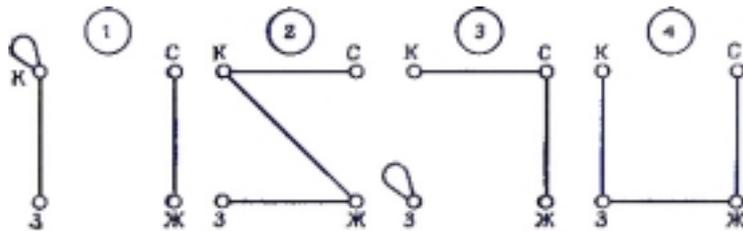


Рис. 11.3.

Удобно наложить все эти графы один на другой и образовать из них новый граф  $G$  (рис. 11.4). Так как в любом решении головоломки на каждой из двух пар противоположных боковых граней призмы имеются две грани куба каждого цвета, то нетрудно видеть, что искомое решение получается следующим образом: находим два реберно-непересекающихся подграфа  $H_1$  и  $H_2$  графа  $G$ , являющихся регулярными степени 2 и содержащих по одному ребру каждого номера (нашему частному случаю соответствуют подграфы, изображенные на рис. 11.5). Тогда  $H_1$  и  $H_2$  задают цвета, расположенные на передней-задней и левой-правой боковых гранях призмы. Таким образом, решение может быть получено с помощью этих подграфов (рис. 11.6).

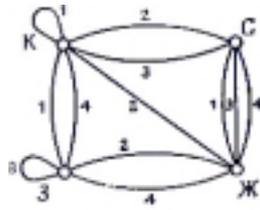


Рис. 11.4.

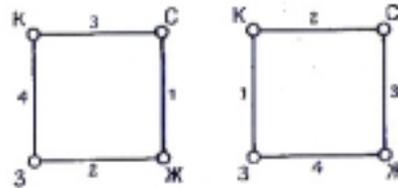


Рис. 11.5.

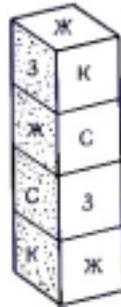


Рис. 11.6.

### УПРАЖНЕНИЯ

(11a) Применяя процедуру, указанную в теореме 11А, найдите остовное дерево с минимально возможной суммой мер для графа, изображенного на рис. 11.7.

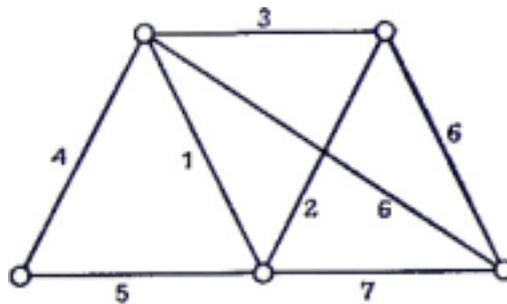


Рис. 11.7.

- (11b) Найдите какой-нибудь другой алгоритм для решения задачи о соединении городов, включающий удаление из графа  $G$  ребер самой большой меры. Покажите, что если меры всех ребер совпадают, то этот алгоритм дает метод построения остовного-дерева графа  $G$ .
- (\*11c) Примените теорему 11А для доказательства того, что если  $V$  — конечномерное векторное пространство, то любые два его базиса состоят из одного и того же числа элементов.
- (11d) Предположим, что в задаче о коммивояжере все  $n$  городов расположены в квадрате со стороной  $k$ . Разбивая этот квадрат на  $m$  параллельных узких полос, покажите, что весь пройденный путь может не превосходить  $k(m+3+\lceil n/m \rceil)$ . Подобрать подходящее  $m$ , покажите, что (при возрастании  $n$ ) это расстояние асимптотически не превосходит  $2k\sqrt{n}$ .
- (11e) Покажите, что в задаче о раскрашенных кубиках существует 41472 различных способа составить прямоугольную призму  $4 \times 1$  и что в нашем частном примере только один из этих способов дает решение задачи.

## 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

То

Вздыбленные,

То пологие,

Не то поля, не то плато.

**Л. Мартынов (Топология<sup>12</sup>)**

Теперь мы приступаем к изучению топологической теории графов. Здесь элементы теории графов тесно переплетаются с такими топологическими понятиями, как планарность, род и т. д. В § 4 было доказано, что каждый граф может быть уложен (т. е. изображен без пересечений) в трехмерном пространстве; теперь мы исследуем условия, при которых граф можно уложить на плоскости и на других поверхностях. В § 12 мы докажем существование графов, не являющихся планарными, и установим известный критерий Куратовского<sup>13</sup> планарных графов. Формула Эйлера, связывающая число вершин, ребер и граней плоских графов, доказана в § 13; ее обобщение на случай графов, уложенных на других поверхностях, дано в § 14. Остальная часть главы посвящена изучению двойственности: сначала геометрической, затем абстрактной (между циклами и разрезами) и, наконец, двойственности по Уитни.

### § 12. ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ

**Плоским графом** называется граф, изображенный на плоскости так, что никакие два его ребра (или, вернее, представляющие их кривые) геометрически не пересекаются нигде, кроме инцидентной им обоим вершины. Граф, изоморфный плоскому графу, называется **планарным**. На языке § 4 можно сказать, что граф планарен, если его можно уложить на плоскости. Например, все три графа на рис. 12.1 планарны, но только второй и третий из них плоские.

---

<sup>12</sup> Сб. Гиперболы, «Современник», М., 1972. В оригинале эпиграф к этой главе звучит так: Flattery will get you nowhere (Popular saying). – *Прим. ред.*

<sup>13</sup> Точнее, Понтрягина – Куратовского. – *Прим. ред.*

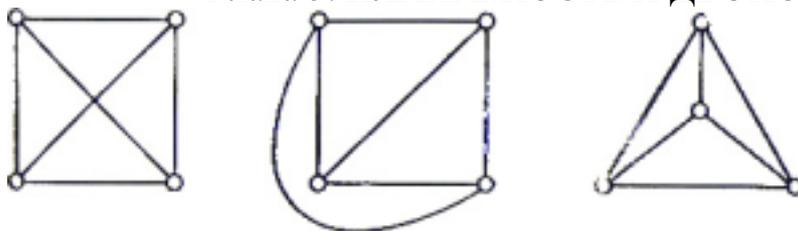


Рис. 12.1.

Глядя на этот пример и вспоминая упр. 4с, естественно поставить следующий вопрос: всегда ли можно изобразить планарный граф на плоскости так, чтобы все его ребра были представлены прямолинейными отрезками? Хотя очевидно, что для графов, содержащих петли и кратные ребра, это не верно, для простых графов это действительно так, что было доказано Вагнером в 1937 г. Заинтересованный читатель найдет дальнейшие результаты в книге Басакера и Саати [2].

Как показывает следующая теорема, не все графы являются планарными.

**ТЕОРЕМА 12А.**

*Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не планарны.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Мы дадим два доказательства этой теоремы. Первое, которое приводится здесь, основано на теореме Жордана (в той форме, которая дана в § 4); второе доказательство, которое мы отложим до следующего параграфа, будет опираться на формулу Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Предположим, что граф  $K_5$  планарен. Поскольку он содержит цикл длины пять (который мы запишем  $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow v$ , то без потери общности можно считать, что в любой плоской укладке этот цикл изображается правильным пятиугольником (как на рис. 12.2). По теореме Жордана ребро  $\{z, w\}$  должно лежать либо целиком внутри этого пятиугольника, либо целиком вне его (третью возможность, а именно, когда ребро имеет общую точку с пятиугольником, мы не рассматриваем, так как имеем дело с плоской укладкой). Рассмотрим тот случай, когда  $\{z, w\}$  лежит внутри пятиугольника (второй случай полностью аналогичен и предоставляется читателю). Поскольку ребра  $\{v, x\}$  и  $\{v, y\}$  не пересекают ребро  $\{v, z\}$ , оба они должны лежать вне пятиугольника; эта ситуация показана на рис. 12.3. Ребро  $\{x, z\}$  не может пересечь ребро  $\{v, z\}$  и потому должно лежать внутри пятиугольника; аналогичным образом, ребро  $\{w, y\}$  также должно лежать внутри пятиугольника. Но в этом случае ребра  $\{w, y\}$  и  $\{w, z\}$  обязательно пересекутся, и мы получаем требуемое противоречие.

Еще проще доказать, что граф  $K_{3,3}$  не планарен. Достаточно нарисовать шестиугольный цикл  $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u$ , как на рис. 12.4, и показать, что два из ребер  $\{u, x\}$ ,  $\{v, y\}$ ,  $\{w, z\}$  должны лежать либо оба внутри, либо оба вне шестиугольника и, следовательно, пересекаться. //

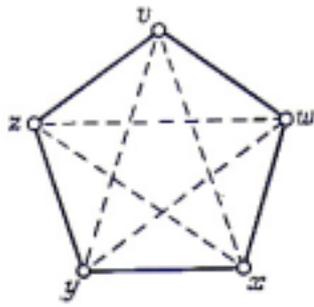


Рис. 12.2.

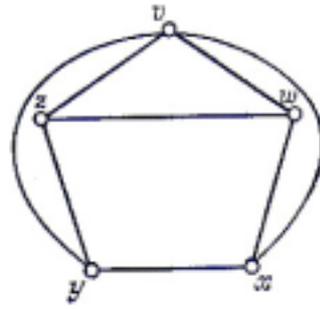


Рис. 12.3.

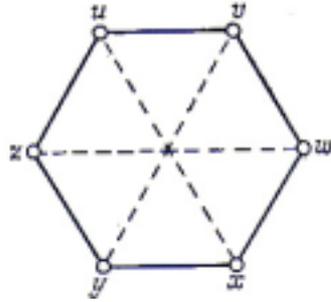


Рис. 12.4.

Легко видеть, что каждый подграф планарного графа планарен и что любой граф, содержащий в качестве подграфа неplanарный граф, сам не может быть планарным. Отсюда сразу вытекает, что любой граф, содержащий  $K_5$  или  $K_{3,3}$  в качестве подграфа, не планарен. Оказывается, что  $K_5$  и  $K_{3,3}$  — по существу единственные неplanарные графы в том смысле, что любой неplanарный граф «содержит» один из них. Чтобы сформулировать это утверждение более точно, нам понадобится понятие «гомеоморфных графов».

Два графа **гомеоморфны** (или **тождественны с точностью до вершин степени 2**), если они оба могут быть получены из одного и того же графа «включением<sup>14</sup> в его ребра» новых вершин степени 2. К примеру, графы, изображенные на рис. 12.5, гомеоморфны, и то же самое можно сказать о любых двух циклических графах. Отметим, что гомеоморфизм графов является отношением эквивалентности.

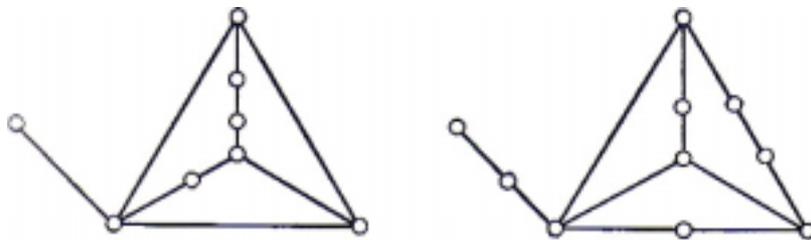


Рис. 12.5.

Ясно, что введение термина «гомеоморфны» удобно только с технической точки зрения — включение или удаление вершин степени 2 не имеет никакого отношения к планарности. Однако это позволяет нам установить следующий

<sup>14</sup> Добавление (включение) одной вершины (скажем  $v$ ) в какое-нибудь ребро (например  $e$ ) осуществляется следующим образом: пусть ребро  $e$  инцидентно вершинам  $w$  и  $x$ ; тогда ребро  $e$  удаляется из графа, но добавляются два новых ребра:  $e_1$ , инцидентное вершинам  $v$  и  $w$ , и  $e_2$  инцидентное вершинам  $v$  и  $x$ . — Прим. ред.

важный результат, известный как **теорема Куратовского**<sup>15</sup>, который дает необходимое и достаточное условие планарности графа.

ТЕОРЕМА 12В. (КУРАТОВСКИЙ 1930)

*Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных  $K_5$  или  $K_{3,3}$ .*

Поскольку доказательство теоремы Куратовского довольно длинное и сложное, мы решили не проводить его (см. книгу Харари). Тем не менее мы воспользуемся теоремой Куратовского для получения другого критерия планарности.

Для этого нам понадобятся еще два определения. **Элементарным стягиванием** называется такая процедура: берем ребро  $e$  (вместе с инцидентными ему вершинами, скажем  $v$  и  $w$ ) и «стягиваем» его, т. е. удаляем  $e$  и отождествляем  $v$  и  $w$ ; полученная при этом вершина инцидентна тем ребрам (отличным от  $e$ ), которым первоначально были инцидентны  $v$  или  $w$  (рис. 12.6). Граф  $G$  называется **стягиваемым** к графу  $H$ , если  $H$  можно получить из  $G$  с помощью некоторой последовательности элементарных стягиваний. Например, граф  $K_5$  получается из графа Петерсена стягиванием пяти ребер, соединяющих внутренний цикл с внешним; значит, граф Петерсена стягиваем к  $K_5$ .

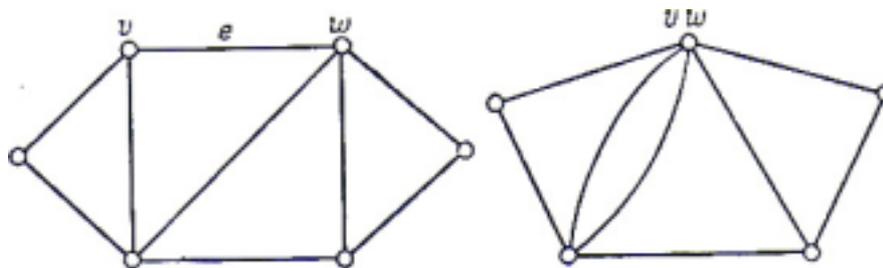


Рис. 12.6.

ТЕОРЕМА 12С.

*Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к  $K_5$  или к  $K_{3,3}$ .*

**▲ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

$\Leftarrow$  Предположим сначала, что граф  $G$  не планарен; тогда по теореме Куратовского он содержит подграф  $H$ , гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Стягивая те ребра из  $H$ , которые инцидентны вершинам степени 2, мы увидим» что  $H$  стягиваем к  $K_5$  или к  $K_{3,3}$ .

$\Rightarrow$  Теперь предположим, что  $G$  содержит подграф  $H$ , стягиваемый к  $K_{3,3}$  и что вершина  $v$  графа  $K_{3,3}$  получена стягиванием подграфа  $K_v$  графа  $H$  (рис. 12.7).

<sup>15</sup> Точнее, как теорема Понтягина-Куратовского, ибо Л. С. Понтрягин доказал (но не опубликовал) эту теорему еще в 1927 г. – Прим. ред.

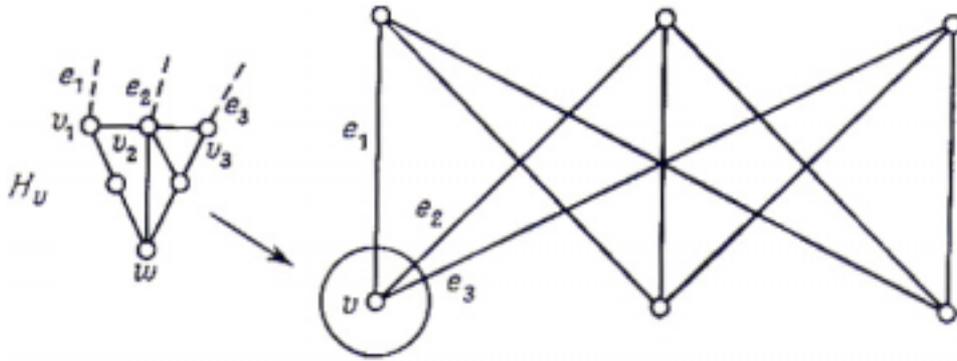


Рис. 12.7.

В графе  $K_{3,3}$  вершина  $v$  инцидентна трем ребрам  $e_1, e_2$  и  $e_3$ ; как ребра из  $H$  они инцидентны трем (не обязательно различным) вершинам  $v_1, v_2$  и  $v_3$  подграфа  $H_v$ . Если  $v_1, v_2$  и  $v_3$  различны, то можно найти вершину  $w$  из  $H_v$  и три простые цепи, ведущие из  $w$  в эти вершины и пересекающиеся только в  $w$ . (Можно проделать аналогичное построение и в том случае, когда не все вершины различны; при этом простые цепи вырождаются в отдельные вершины.) Следовательно, подграф  $H_v$  можно заменить вершиной  $w$  с тремя выходящими из нее простыми цепями. Если такое построение выполнить для каждой вершины графа  $K_{3,3}$  полученные простые цепи дополнить соответствующими ребрами из  $K_{3,3}$  то ясно, что результирующий подграф гомеоморфен  $K_{3,3}$ . Это доказывает (в силу теоремы Куратовского), что  $G$  непланарен (рис. 12.8).

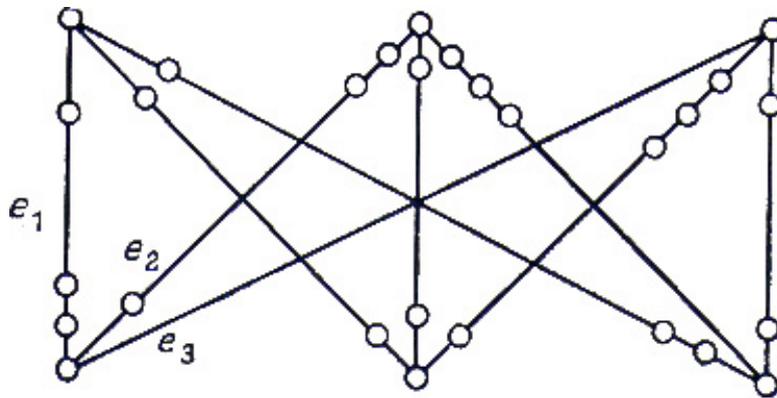


Рис. 12.8.

Аналогичное рассуждение можно провести и в том случае, когда  $G$  содержит подграф, стягиваемый к  $K_5$ , детали мы оставляем читателю в качестве упражнения (см. упр. 121). // ▲

## УПРАЖНЕНИЯ

(12a) Три соседа пользуются водой, маслом и повидлом из одних и тех же колодцев (см. Кэрролл [12]). К несчастью, они настолько не любят друг друга, что для того, чтобы избежать встречи, хотят проложить непересекающиеся дорожки от каждого из домов к каждому из трех колодцев. Выполнимо ли это?

- (12b) При каких значениях  $n$  графы  $G_n$  (определенные в [упр. 2а](#)) планарны?
- (12c) Применяя теорему Куратовского, покажите, что граф Петерсена не планарен.
- (12d) Пусть  $G$  — планарный граф с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , а  $p_1, \dots, p_n$  — любые  $n$  различных точек на плоскости. Приведите эвристические соображения, показывающие, что граф  $G$  можно так уложить на плоскости, что для любого  $i$  вершина  $v_i$  изобразится точкой  $p_i$ .
- (12e) Докажите сформулированное выше утверждение о том, что гомеоморфность графов является отношением эквивалентности. Покажите, что если у двух гомеоморфных графов число вершин равно  $n_i$ , а число ребер  $m_i$  ( $i=1, 2$ ), то  $m_1 - n_1 = m_2 - n_2$ .
- (12f) Пусть  $G$  — простой граф; покажите, что если он непланарен, то его реберный граф  $L(G)$  тоже непланарен. Если граф  $G$  планарен, то всегда ли планарен граф  $L(G)$ ?
- (12g) Докажите, что число топологически различных укладок планарного графа на плоскости конечно.
- (12h) **Числом скрещиваний**  $cr(G)$  графа  $G$  называется наименьшее возможное число пересечений, получаемых при изображении графа на плоскости (здесь понятие пересечения употребляется в смысле § 4 и относится к пересечению ровно двух ребер). Докажите, что (i) число скрещиваний планарного графа равно нулю; (ii)  $cr(K_5) = cr(K_{3,3}) = 1$ . Чему равно число скрещиваний графа Петерсена?
- (\*12i) Пусть граф  $G$  образован вершинами, ребрами и главными диагоналями  $2n$ -угольника ( $n \geq 3$ ); докажите, что  $cr(G) = 1$ . Можно ли сформулировать и доказать соответствующий результат для  $(2n+1)$ -угольника?
- (\*12j) Покажите, что если  $n$  и  $m$  — четные числа, то  $cr(K_{n,m}) \leq (mn(m-2)(n-2))/16$ ; получите аналогичный результат в случае, когда от  $m$  и  $n$  не обязательно четные. (*Указание:* на оси  $x$  расположите  $m$  вершин на равном расстоянии друг от друга симметрично относительно начала координат; на оси  $y$  расположите оставшиеся  $n$  вершин аналогичным образом и затем подсчитайте число скрещиваний.)
- (12k) Для каждой из следующих пар графов установите, можно ли второй из них получить стягиванием первого: (i) граф Петерсена,  $K_{3,3}$ ; (ii)  $K_n$ ,  $K_{n-1}$ ; (iii)  $W_6$ ,  $K_4$ ; (iv)  $K_{3,3}$ ,  $K_4$ ; (v) кубический граф,  $W_5$ ; (vi) граф Петерсена,  $W_6$ . Найдите непланарный граф, который нельзя стянуть к  $K_5$  или к  $K_{3,3}$ , почему это не противоречит теореме 12С?
- (\*12l) Завершите доказательство теоремы 12С. (*предостережение:* одна часть доказательства потребует довольно тонких рассуждений.)

### § 13. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА О ПЛОСКИХ ГРАФАХ

В этом параграфе мы докажем теорему, связывающую число вершин, ребер и

## Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

граней данного связного плоского графа. Перед тем как дать точное определение понятия грани графа  $G$ , напомним читателю, что точка  $x$  плоскости называется «дизъюнктивной с  $G$ », если она не соответствует никакой вершине графа  $G$  и не лежит ни на каком его ребре<sup>16</sup>.

Если точка  $x$  плоскости дизъюнктивна с  $G$ , то определим **грань** (графа  $G$ ), **содержащую**  $x$ , как множество всех таких точек плоскости, которые можно соединить с  $x$  жордановыми кривыми, состоящими целиком из точек, дизъюнктивных с  $G$ . Скажем иначе: назовем две точки плоскости  $x$  и  $y$  эквивалентными, если обе они дизъюнктивны с  $G$  могут быть соединены жордановой кривой, все точки которой дизъюнктивны с  $G$  (рис. 13.1).

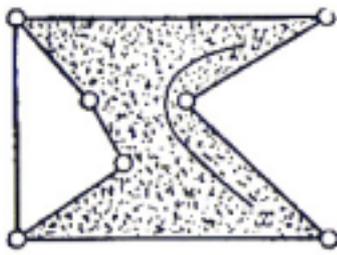


Рис. 13.1.

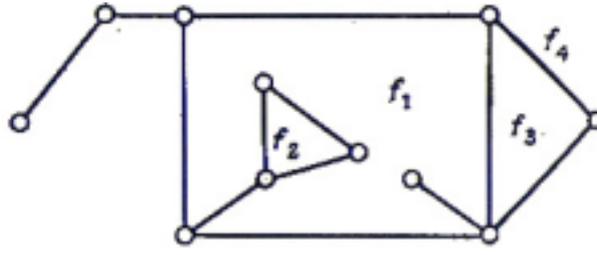


Рис. 13.2.

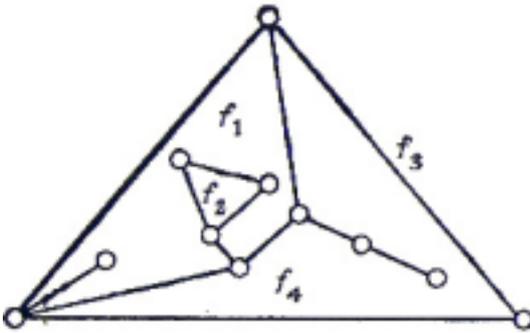


Рис. 13.3.

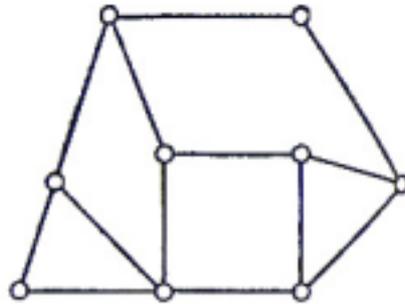


Рис. 13.4.

Тем самым установлено отношение эквивалентности на множестве точек плоскости, дизъюнктивных с  $G$ ; соответствующие классы эквивалентности называются **гранями**  $G$ . Отметим, что одна грань неограничена; она называется **бесконечной гранью**. Например, граф  $G$ , изображенный на рис. 13.2, имеет четыре грани, и  $f_4$  — его **бесконечная грань**. Если читателю покажется, что наше определение грани рассчитано на педанта, пусть он смело полагается на свою интуицию.

Важно уразуметь, что в понятии бесконечной грани нет ничего особенного, ибо в качестве бесконечной грани на самом деле можно взять любую грань. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся теоремой 4В и изобразим наш граф на поверхности сферы. Повернем теперь сферу так, чтобы центр проектирования (т.е. северный полюс) лежал внутри грани, которую мы хотим принять за бесконечную, и спроектируем граф на плоскость, касающуюся сферы в южном

<sup>16</sup> Напомним, что граф  $G$  плоский, т. е. уложен на плоскости, и все рассуждения относятся к конкретной плоской реализации графа! — Прим. ред.

## Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

полюсе. Тогда выбранная нами грань станет бесконечной. На рис. 13.3 показано представление графа, изображенного на рис. 13.2, в котором бесконечной гранью является  $f_3$ . Учитывая вышесказанное, мы в дальнейшем не будем делать различия между понятиями «граф, уложенный на плоскости» и «граф, изображенный на поверхности сферы».

Сейчас мы сформулируем и докажем **теорему Эйлера**, утверждающую, что в любой плоской укладке графа число граней остается одним и тем же и находится при помощи простой формулы. Еще одно доказательство этой теоремы вынесено в упр. 13.1.

ТЕОРЕМА 13А. (ЭЙЛЕР 1752)

*Пусть  $G$  — связный плоский граф, пусть  $n$ ,  $m$  и  $f$  обозначают соответственно число вершин, ребер и граней графа  $G$ . Тогда*

$$n + f = m + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство проводится индукцией по числу ребер в  $G$ . Если  $m=0$ , то  $n=1$  (так как  $G$  связан) и  $f=1$  (бесконечная грань); итак, в этом случае теорема верна.

Предположим теперь, что теорема верна для любого графа  $G$ , имеющего  $m-1$  ребер, и добавим к  $G$  новое ребро  $e$ . Тогда либо (i)  $e$  является петлей, и в этом случае возникает новая грань, а число вершин остается неизменным, либо (ii)  $e$  соединяет две различные вершины из  $G$ , и в этом случае одна из граней графа  $G$  расщепляется на две, увеличивая число граней на единицу, но оставляя число вершин неизменным, либо (iii)  $e$  инцидентно только одной вершине в  $G$ , и в этом случае необходимо добавить еще одну вершину, увеличивая тем самым число вершин на единицу, но оставляя число граней неизменным. Теорема остается справедливой в каждом из случаев. А так как только эти случаи и возможны, то теорема доказана. //

Полученный результат часто называют «формулой Эйлера для многогранников», поскольку она связывает число вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника. В этом легко убедиться, если спроектировать многогранник на поверхность описанной около него сферы и применить теорему 4В. Полученный плоский граф является связным графом, каждая грань которого ограничена многоугольником; такой граф называется **графом многогранника** (рис. 13.4). Сформулируем теорему 13А для этих графов.

СЛЕДСТВИЕ 13В.

*Если  $G$  — граф многогранника, то во введенных выше обозначениях*

$$n + f = m + 2.$$

Теорему Эйлера легко перенести на несвязные графы:

СЛЕДСТВИЕ 13С.

*Пусть  $G$  — плоский граф с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами,  $f$  гранями и  $k$  компонентами; тогда*

$$n+f=m+k+1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Результат получается непосредственным применением теоремы Эйлера к каждой компоненте по отдельности. При этом бесконечная грань считается только один раз. //

Все упомянутые до сих пор результаты этого параграфа применимы к произвольным плоским графам; далее ограничимся простыми графами.

СЛЕДСТВИЕ 13D.

*Если  $G$  — связный простой планарный граф с  $n$  ( $\geq 3$ ) вершинами, и  $m$  ребрами, то*

$$m \leq 3n - 6.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Без потери общности можно считать  $G$  плоским графом. Так как каждая грань ограничена по крайней мере тремя ребрами, то при подсчете числа ребер вокруг каждой из граней получим, что  $3f \leq 2m$  (множитель 2 появляется оттого, что каждое ребро ограничивает не больше двух граней). Это неравенство в сочетании с теоремой Эйлера и приводит к нужному результату. //

Можно воспользоваться этим следствием и дать другое доказательство теоремы 12А.

СЛЕДСТВИЕ 13Е.

*Графы  $K_5$  и  $K_{3,3}$  не являются планарными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если  $K_5$  планарен, то, применяя следствие 13D, получим:  $10 \geq 9$ , что, очевидно, невозможно. Чтобы показать, что  $K_{3,3}$  непланарен, достаточно заметить, что каждая его грань ограничена по крайней мере четырьмя ребрами (см. упр. 5g) и, следовательно,  $4f \leq 2m$  (т. е.  $2f \leq m$ ). Но этого не может быть, поскольку теорема Эйлера утверждает, что  $f = 5$ . //

## Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Аналогичные рассуждения позволяют доказать следующую теорему, которая окажется полезной, когда мы перейдем к задачам о раскраске графов.

ТЕОРЕМА 13Р.

*В любом простом планарном графе существует вершина, степень которой не больше пяти.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Без потери общности можно считать граф плоским, связным и содержащим по меньшей мере три вершины. Если степень каждой вершины не менее шести, то (в тех же обозначениях, что и выше) получим, что  $6n \leq 2m$  (т. е.  $3n \leq m$ ). Из следствия 13D сразу же вытекает, что  $3n \leq 3n-6$  — очевидное противоречие. //

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о «толщине» графа. В электротехнике иногда части цепей наносят на одну сторону непроводящей пластины (и называют «печатными схемами»). Поскольку проводники не изолированы, они не могут пересекаться, и соответствующие графы должны быть планарными. В случае общей электрической сети важно знать, сколько понадобится печатных схем для комплектования всей сети. С этой целью вводится понятие толщины графа. Назовем **толщиной** графа  $G$  (обозначается  $t(G)$ ) наименьшее число планарных графов, объединение (наложение) которых дает  $G$ . Так же как и число скрещиваний, толщина графа является мерой его «непланарности»; например, толщина планарного графа равна единице, а толщина графов  $K_5$  и  $K_{3,3}$  равна двум.

Как мы увидим, оценку снизу для толщины графа легко получить при помощи теоремы Эйлера. Удивительно, что эта довольно грубая оценка часто оказывается истинным значением толщины. В отдельных случаях это можно проверить прямым построением. При получении этой оценки используются символы  $[x]$  и  $\{x\}$ , которые обозначают соответственно наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , и наименьшее целое число, которое не меньше, чем  $x$  (так, например,  $[3]=\{3\}=3$ ;  $[\pi]=3$ ;  $\{\pi\}=4$ ); заметим, что  $\{x\}=-[-x]$ .

ТЕОРЕМА 13G.

*Пусть  $G$  — простой граф с  $n$  ( $\geq 3$ ) вершинами и  $m$  ребрами. Тогда толщина  $t(G)$  графа  $G$  удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$t(G) \geq \{m/(3n-6)\}; t(G) \geq [(m+3n-7)/(3n-6)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первое неравенство получается непосредственным применением следствия 13D; наличие фигурных скобок объясняется тем фактом, что толщина должна быть целым числом. Второе неравенство следует из первого с помощью легко доказываемого соотношения  $\{a/b\} = [(a+b-1)/b]$ , где  $a$  и  $b$  —

## УПРАЖНЕНИЯ

- (13a) Проверьте теорему Эйлера для (i)  $W_n$ ; (ii) платановых графов; (iii) графа, образованного вершинами, ребрами и гранями шахматной доски размером  $n \times n$ ; (iv)  $K_{2,n}$ .
- (13b) Перерисуйте граф, изображенный на рис. 13.2, так, чтобы бесконечной гранью стала (i)  $f_1$ ; (ii)  $f_2$ .
- (13c) Докажите, что если  $G$  — связный планарный граф, обхват которого равен  $r$ , то в использованных выше обозначениях  $(r-2)m \leq r(n-2)$ . Выведите отсюда, что граф Петерсена непланарен. Докажите еще, что если каждая грань графа ограничена  $r$ -угольником, то неравенство превращается в равенство.
- (13d) Пусть  $G$  — многогранник (или граф многогранника), все грани которого ограничены пятиугольниками и шестиугольниками; что можно сказать о числе пятиугольных граней? Докажите, что если в каждой вершине сходятся в точности три грани, то число пятиугольных граней должно равняться двенадцати.
- (13e) Пусть  $G$  — плоский граф с числом граней, меньшим двенадцати. Покажите, что если степень любой вершины из  $G$  не меньше трех, то в  $G$  существует грань, ограниченная самое большее четырьмя ребрами.
- (13f) Пусть  $G$  — связный кубический простой плоский граф, и пусть  $\varphi_n$  — число его граней, ограниченных  $n$  ребрами. Докажите (подсчетом числа ребер и вершин графа  $G$ ), что

$$12 = 3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - 3\varphi_9 - \dots$$

Как частный случай получите последнее утверждение упр. 13d. Покажите также, что  $G$  содержит по крайней мере одну грань, ограниченную не более чем пятью ребрами.

- (13g) Пусть простой граф  $G$  содержит не менее одиннадцати вершин, и пусть  $\bar{G}$  и его дополнение; покажите, что  $G$  и  $\bar{G}$  не могут оба быть планарными. (На самом деле такой же результат можно доказать для девяти вершин вместо одиннадцати.) Приведите пример графа  $G$  с восемью вершинами, обладающего тем свойством, что оба графа  $G$  и  $\bar{G}$  планарны.
- (13h) Найдите толщину графа Петерсена.
- (13i) Покажите, что всякий непланарный граф гомеоморфен некоторому графу толщины два,
- (13j) Докажите, что толщина графа  $K_n$  удовлетворяет неравенству  $T(K_n) \geq \lceil 1/6(n+7) \rceil$ . Покажите (прямым построением с использованием результата упр. 13g), что при  $n \leq 8$  имеет место равенство, а при  $n=9$  и  $n=10$  — строгое неравенство. (На самом деле известно, что равенство

## Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

имеет место для всех  $n \leq 51$ , кроме этих двух исключений, и для всех  $n$ , не представимых в виде  $6k+4$ ; думается, что оно верно<sup>17</sup> и при остальных значениях  $n$ .)

- (\*13k) Найдите нижнюю оценку для толщины графа, имеющего  $m$  ребер,  $n$  вершин и обхват  $r$ . Покажите, что если  $m$  четно ( $=2k$ ), то  $t(K_{m,n}) \leq k$  и выведите отсюда, что нижняя оценка совпадает с верхней при  $n > \frac{1}{2}(m-2)^2$ . Получите соответствующий результат в случае нечетного  $m$ .
- (\*131) Пусть  $G$  — граф многогранника, и пусть  $W$  обозначает подпространство циклов графа  $G$ . Докажите, что многоугольники, ограничивающие конечные грани графа  $G$ , образуют базис  $W$ , и выведите отсюда следствие 13В. Покажите, как можно распространить этот результат на произвольные плоские графы.

### § 14. ГРАФЫ НА ДРУГИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

▲ В предыдущих двух параграфах мы рассматривали графы, изображенные на плоскости или (что эквивалентно) на сфере. Теперь скажем несколько слов об укладке графов на других поверхностях, например на торе. Легко видеть, что  $K_5$  и  $K_{3,3}$  можно изобразить без пересечений на поверхности тора, и естественно спросить, существуют ли аналогии теоремы Эйлера и теоремы Куратовского для графов, изображенных на этих поверхностях.

Можно представить себе тор как сферу с одной «ручкой» (рис. 14.1). В общем случае говорят, что поверхность имеет род  $g$ , если она топологически гомеоморфна сфере с  $g$  ручками. (Читатель, не знакомый с этими терминами, может представлять себе графы, изображенные на поверхности кренделя с  $g$  дырками.) Род сферы равен нулю, а тора — единице.

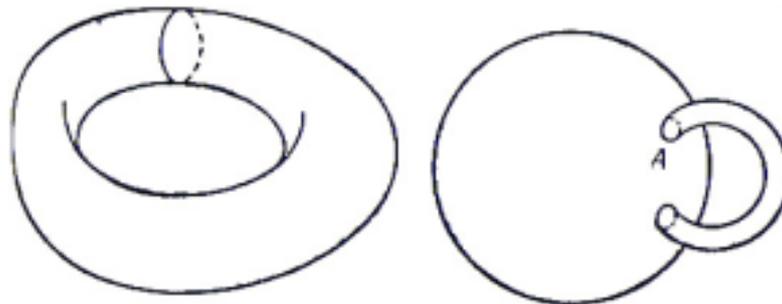


Рис. 14.1.

Граф, который можно изобразить без пересечений на поверхности рода  $g$  и нельзя изобразить без пересечений ни на одной поверхности рода  $g-1$ , называется **графом рода  $g$** . Таким образом,  $K_5$  и  $K_{3,3}$  — графы рода 1 (называемые также **ториальными графами**). Необходимо проверить, что род графа определен корректно.

<sup>17</sup> Недавно В. Б. Алексеев и В. С. Гончаков установили, что  $t(K_{6k+4}) = k+1$  при всех  $k \geq 3$  (см. *Матем. сб.*, 101(143), №2(10)(1976), 212-230). — *Прим. ред.*

ТЕОРЕМА 14А.

*Род графа определен корректно и не превосходит числа скрещиваний.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для доказательства корректности определения рода достаточно найти для рода верхнюю оценку. Это делается путем изображения графа на поверхности сферы так, чтобы количество пересечений было минимальным возможным (и, следовательно, равнялось числу скрещиваний  $c$ ). Для каждого пересечения строим «мост» ([см. рис. 1.2 выше](#)) и одно из ребер проводим по мосту, а другое — под ним. Поскольку всякий такой мост можно рассматривать как ручку, мы получаем укладку нашего графа на сфере с  $c$  ручками. Следовательно, род определен корректно и не превосходит  $c$ . //

В настоящее время (когда пишется эта книга) аналог теоремы Куратовского для поверхностей рода  $g$  неизвестен. Более того, окончательно не установлено даже, существует или нет для каждого значения  $g$  конечная совокупность «запрещенных» подграфов рода  $g$ , аналогичных запрещенным подграфам  $K_5$  и  $K_{3,3}$  для графов рода 0<sup>18</sup>. Теореме Эйлера больше повезло, поскольку существует ее естественное обобщение на графы рода  $g$ . В этом обобщении грань графа рода  $g$  определяется естественным образом в терминах жордановых кривых на данной поверхности.

ТЕОРЕМА 14В.

*Пусть  $G$  — связный граф рода  $g$  с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами и  $f$  гранями. Тогда*

$$n+f=m+(2-2g).$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Выделим основные этапы доказательства, оставляя детали читателю (упр. 14b).

(i) Без потери общности можно считать граф  $G$  изображенным на поверхности сферы с  $g$  ручками. Можно также предположить, что кривые  $A$  ([рис. 14.1](#)), по которым ручки прикрепляются к сфере, в действительности являются циклами графа  $G$  (достаточно стянуть соответствующим образом те циклы, которые содержат эти кривые внутри себя).

(ii) Оторвем теперь один из концов каждой ручки; при этом ручка будет иметь свободный конец  $E$ , а сфера — ее ответствующую дырку  $H$ . Можно считать, что соответствующий концу ручки цикл остается как на конце  $E$ , так и на дырке  $H$ , поскольку требующиеся для этого дополнительные вершины и

<sup>18</sup> Волмерхауз доказал, что для любой ориентируемой поверхности существует лишь конечное число запрещенных подграфов (см. Харари (1, стр. 142)). — *Прим. ред.*

Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ  
ребра в точности «уравновешивают друг друга», оставляя число  $n-m+f$  неизменным.

(iii) Доказательство завершается «сплющиванием» каждой из этих ручек, что приводит к сфере с  $2g$  дырками. Заметим, что этот процесс не изменяет числа  $n-m+f=2$ , а так как для сферы  $n-m+f=2$ , то для сферы с  $2G$  дырками  $n-m+f=2-2g$ . Это и есть требуемый результат. //

СЛЕДСТВИЕ 14С.

*Род  $g(G)$  простого графа  $G$  с  $n(\geq 4)$  вершинами и  $t$  ребрами удовлетворяет неравенству  $g(G) \geq \{(t-3n)/6 + 1\}$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Поскольку каждая грань ограничена по меньшей мере тремя ребрами, имеем (как в доказательстве следствия 13В)  $3f \leq 2t$ . Подставляя это неравенств в теорему 14В и используя то, что род графа — целое число, мы и получим нужный результат. //

Проблема нахождения рода произвольного графа, как и его толщины, весьма далека от своего решения. Обычный метод таков: при помощи следствия 14С получить нижнюю оценку рода, а затем попытаться прямым построением найти искомую укладку.

Особенно важной в историческом аспекте является задача нахождения рода полного графа. Согласно следствию 14С, род  $K_n$  удовлетворяет неравенству

$$g(K_n) \geq \{(1/2n(n-1)-3n)/6 + 1\} = \{(n-3)(n-4)/12\}.$$

В 1890 г. Хивуд выдвинул гипотезу, что данное неравенство в действительности является равенством. Окончательно это было доказано в 1968 г. Рингелем и Янгсом после долгого и упорного труда.

ТЕОРЕМА 14D. (РИНГЕЛЬ И ЯНГС 1968)

$$g(K_n) = \{(n-3)(n-4)/12\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Этот результат здесь доказан не будет; обсуждение этой теоремы читатель может найти у Рингеля [16]. //

Дальнейшие сведения, касающиеся укладки графов на других поверхностях, читатель может найти у Харари [11].

## УПРАЖНЕНИЯ

(14а) Покажите, что поверхность тора можно рассматривать как прямоугольник, в котором противоположные стороны отождествлены (рис. 14.2). Найдите аналогичное представление для сферы с  $g$  ручками.

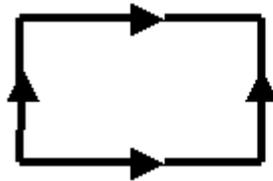


Рис. 14.2

- (14b) Восполните детали доказательства теоремы 14В.
- (14c) Можно ли уложить  $K_5$  и  $K_{3,3}$  на поверхности листа Мёбиуса? Найдите аналог теоремы Эйлера для этой поверхности.
- (14d) Приведите пример графа рода 2.
- (14e) Покажите, что не существует полного графа рода 7. Чему равно следующее целое число, не являющееся родом никакого полного графа?
- (14f) Получите нижнюю оценку для рода графа, обхват которого равен  $r$ . Выведите отсюда, что род  $K_{m,n}$  удовлетворяет неравенству  $g(K_{m,n}) \geq \lfloor (m-2)(n-2)/4 \rfloor$ . (В действительности, как показал Рингель, здесь имеет место равенство.)
- (\*14g) **Тороидальной толщиной**  $t_1(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число тороидальных графов, объединение (наложение) которых дает  $G$ ; покажите, что  $t_1(K_n) \geq \lfloor (n+4)/6 \rfloor$ . Как можно было бы определить более сложные типы толщины, в какой вид приняли бы соответствующие результаты для  $K_n$ ? ▲

## § 15. ДВОЙСТВЕННЫЕ ГРАФЫ

В теоремах 12В и 12С мы дали необходимые и достаточные условия планарности графа, а именно: он не должен содержать подграфов, гомеоморфных или стягиваемых к  $K_5$  или к  $K_{3,3}$ . Теперь нашей целью является обсуждение условий совсем другого вида, а именно условий, включающих понятие двойственности.

Для данного плоского графа  $G$  построим сейчас другой граф  $G^*$ , называемый **(геометрически) двойственным** к  $G$ . Построение проводится в два этапа: (i) внутри каждой грани  $F_i$  графа  $G$  выбираем по одной точке  $v_i^*$  — это вершины графа  $G^*$ ; (ii) каждому ребру  $e$  из  $G$  сопоставляем линию  $e^*$ , пересекающую  $e$  (и никакое другое ребро графа  $G$ ) и соединяющую те вершины  $v_i^*$ , которые лежат в двух (не обязательно различных) гранях  $F_i$  смежных ребру  $e$ , — это ребра графа  $G^*$ . Иллюстрацией этой процедуры служит рис. 15.1, где вершины  $v_i^*$  изображены крестиками, ребра  $e$  графа  $G$  — сплошными линиями, а ребра  $e^*$  графа  $G^*$  — пунктирными. Заметим, что висячая вершина в  $G$  порождает петлю в  $G^*$  (так же, как и любой мост), и если две грани из  $G$  имеют больше одного общего ребра, то граф  $G^*$  содержит кратные ребра.

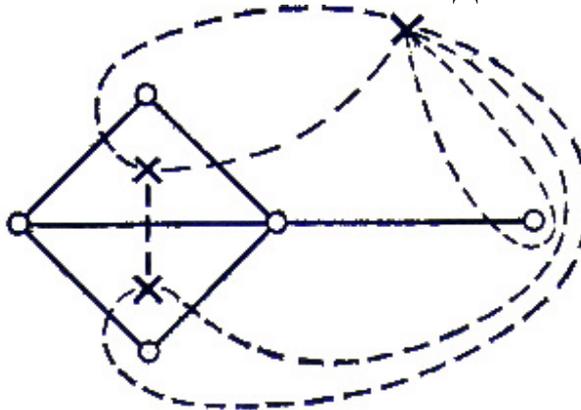


Рис. 15.1.

Очевидно, что любые два графа, полученные таким образом из  $G$ , изоморфны; поэтому двойственный к  $G$  граф  $G^*$  определен однозначно с точностью до изоморфизма. С другой стороны, стоит подчеркнуть, что изоморфность графов  $G$  и  $H$  не влечет за собой изоморфности  $G^*$  и  $H^*$ ; соответствующий пример дан в упр. 15с.

Если граф  $G$  не только плоский, но еще и связный, то и граф  $G^*$  плоский и связный; кроме того, существуют простые соотношения, связывающие число вершин, ребер и граней графов  $G$  и  $G^*$ .

ЛЕММА 15А.

*Пусть  $G$  — плоский связный граф с  $n$  вершинами,  $t$  ребрами и  $f$  гранями, и пусть  $G^*$  — его геометрически двойственный граф, имеющий  $n^*$  вершин,  $t^*$  ребер и  $f^*$  граней; тогда  $n^*=f$ ,  $t^*=t$  и  $f^*=n$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первые два соотношения непосредственно вытекают из определения  $G^*$ . Подставляя их в теорему Эйлера, примененную к обоим графам  $G$  и  $G^*$ , получим третье соотношение. //

Поскольку двойственный плоскому графу  $G$  граф  $G^*$  также является плоским графом, можно тем же способом построить двойственный к  $G^*$  граф  $G^{**}$ . Если граф  $G$  связан, то между  $G^{**}$  и  $G$  имеется особенно простая связь:

ТЕОРЕМА 15В.

*Пусть  $G$  — плоский связный граф; тогда  $G^{**}$  изоморфен  $G$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточно заметить, что построение, при помощи которого  $G^*$  получается из  $G$ , можно обратить и получить  $G$  из  $G^*$ . Так, например, на рис. 15.1 граф  $G$  является двойственным к  $G^*$ . Остается только проверить, что грань графа  $G^*$  не может содержать более одной вершины из  $G$  (одну-то она всегда содержит). Но это сразу следует из соотношений  $n^{**}=f^*=n$ , где  $n^{**}$  — число вершин графа  $G^{**}$ . //

Если  $G$  — произвольный планарный граф, то двойственный к нему граф можно определить следующим образом: возьмем любую укладку данного графа и образуем геометрически двойственный граф; при этом в общем случае единственность не имеет места. Поскольку двойственные графы определены только для планарных графов, то очевидно, что граф является планарным тогда и только тогда, когда он имеет двойственный. С другой стороны, если дан произвольный граф, то приведенные выше рассмотрения не позволяют определить, планарный он или нет. Поэтому желательно найти такое определение двойственности, которое обобщало бы геометрическую двойственность и одновременно позволяло бы (по крайней мере в принципе) узнать, планарен данный граф или нет.

Одно такое определение удастся получить на основе двойственности между циклами и разрезами планарного графа  $G$ . Опишем сначала эту двойственность, а затем используем ее для получения нужного определения; другое определение будет дано в следующем параграфе.

#### ТЕОРЕМА 15С.

*Рассмотрим планарный граф  $G$  и геометрически двойственный ему  $G^*$ ; множество ребер  $G$  образует цикл в  $G$  тогда и только тогда, когда соответствующее множество ребер  $G^*$  образует разрез в  $G^*$ .*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Без потери общности можно считать  $G$  связным плоским графом. Если  $C$  — цикл в  $G$ , то  $C$  ограничивает одну или более конечных граней  $G$  и, следовательно, содержит внутри себя непустое множество  $S$  вершин графа  $G^*$ . Отсюда сразу следует, что те ребра из  $G^*$ , которые пересекают ребра цикла  $C$ , образуют разрез в  $G^*$ , удаление которого разделяет  $G^*$  на два подграфа. Множеством вершин одного из них является  $S$ , другой же содержит те вершины, которые не принадлежат  $S$  (рис. 15.2). Обратное утверждение доказывается простым обращением этого рассуждения. //

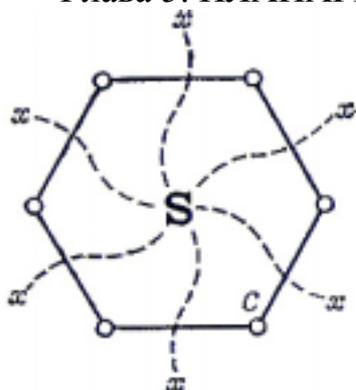


Рис. 15.2.

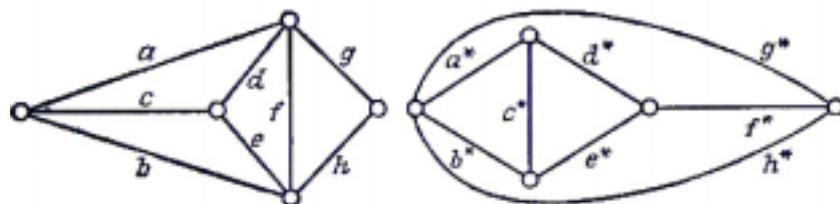


Рис. 15.3.

СЛЕДСТВИЕ 15D.

*Множество ребер графа  $G$  образует разрез в  $G$  тогда и только тогда, когда соответствующее множество ребер графа  $G$  образует цикл в  $G^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Применяя теорему 15C к графу  $G^*$  и используя теорему 15B, мы сразу получаем нужный результат. //

Теперь мы можем дать другое определение двойственности, к которому нас привела теорема 15C. Заметим, что это определение не обращается к каким-либо специальным свойствам планарных графов, а затрагивает лишь отношение между двумя графами.

Будем говорить, что граф  $G^*$  является **абстрактно двойственным** к  $G$ , если между ребрами графов  $G$  и  $G^*$  существует взаимно однозначное соответствие, обладающее тем свойством, что подмножество ребер из  $G$  образует цикл в  $G$  тогда и только тогда, когда соответствующее ему подмножество ребер из  $G^*$  образует разрез в  $G^*$ . Например, на рис. 15.3 изображен граф и абстрактно двойственный к нему граф; соответственные ребра обозначены одной и той же буквой.

Из теоремы 15C ясно, что понятие абстрактной двойственности обобщает понятие геометрической двойственности: если  $G$  — планарный граф, а  $G^*$  — геометрически двойственный к нему, то  $G^*$  является и абстрактно двойственным к  $G$ . Теперь нам хотелось бы получить для абстрактно двойственных графов аналоги некоторых результатов, относящихся к геометрически двойственным графам. Ограничимся здесь одним из таких результатов — аналогом теоремы 15B.

ТЕОРЕМА 15E.

*Если граф  $G^*$  абстрактно двойствен к графу  $G$ , то  $G$  абстрактно двойствен к  $G^*$ .*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Отметим, что мы не требуем связности графа  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть  $C$  — разрез в  $G$ , и пусть  $C^*$  — соответствующее ему множество ребер в  $G^*$ ; достаточно показать, что  $C^*$  является циклом в  $G^*$ . Как следует из первой части [упр. 5i](#), разрез  $C$  имеет четное число общих ребер с любым циклом графа  $G$ ; поэтому  $C^*$  должно иметь четное число общих ребер с любым из разрезов графа  $G^*$ . Из второй части [упр. 5i](#) следует, что  $C^*$  должно быть либо отдельным циклом в  $G^*$ , либо объединением двух или более реберно-непересекающихся циклов; но вторая возможность не имеет места, так как аналогичным образом можно показать, что циклы в  $G^*$  соответствуют объединениям реберно-непересекающихся разрезов в  $G$ , и тогда  $C$  будет объединением двух или более реберно-непересекающихся разрезов, а не отдельным разрезом. //

Хотя на первый взгляд определение абстрактной двойственности кажется странным, оно удовлетворяет нашим требованиям. Мы уже видели (Теорема 15C), что планарный граф имеет абстрактно двойственный (например, любой из геометрически двойственных); покажем теперь, что верно и обратное, а именно, что любой граф, имеющий абстрактно двойственный, планарен. Тем самым мы получим абстрактное определение двойственности, обобщающее понятие геометрической двойственности и характеризующее планарные графы.

В дальнейшем мы увидим, что определение абстрактной двойственности естественным образом вытекает из двойственности в теории матроидов (§ 32).

ТЕОРЕМА 15F.

*Граф является планарный, тогда и только тогда, когда он обладает абстрактно двойственным.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Существует несколько доказательств этого результата. Здесь мы изложим одно особенно простое (принадлежащее Т. Д. Парсонсу), которое опирается на теорему Куратовского.

▲ НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Как было замечено выше, достаточно доказать, что если граф  $G$  обладает абстрактно двойственным графом  $G^*$ , то  $G$  планарен. Доказательство проводится в четыре этапа.

## Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

(i) Сначала замечаем, что если из  $G$  удалить какое-нибудь ребро  $e$ , то абстрактно двойственный граф к оставшемуся графу можно получить из  $G^*$  стягиванием соответствующего ребра  $e^*$ . Повторение этой процедуры приводит к выводу, что если  $G$  обладает абстрактно двойственным графом, то им обладает и любой подграф графа  $G$ .

(ii) Далее устанавливаем, что если  $G$  обладает абстрактно двойственным графом, а  $G'$  гомеоморфен  $G$ , то  $G'$  также обладает абстрактно двойственным графом. Это следует из того, что включение в  $G$  или удаление из  $G$  вершины степени 2 приводит к добавлению или вычеркиванию «кратного ребра» в  $G^*$ .

(iii) Теперь надо показать, что ни  $K_5$ , ни  $K_{3,3}$  не обладают абстрактно двойственными графами. Если граф  $G^*$  является двойственным к  $K_{3,3}$  то, поскольку  $K_{3,3}$  содержит только циклы длины четыре или шесть и не содержит разрезов, состоящих только из двух ребер, граф  $G^*$  не содержит кратных ребер и степень каждой его вершины не меньше четырех. Поэтому граф  $G^*$  обязан содержать по меньшей мере пять вершин и, следовательно, по меньшей мере  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$  ребер, что невозможно. Рассуждение для  $K_5$  проводится аналогично и поэтому предоставляется читателю.

(iv) Предположим теперь, что  $G$  — непланарный граф, обладающий абстрактно двойственным графом  $G^*$ . Тогда, по теореме Куратовского, граф  $G$  содержит подграф  $H$ , гомеоморфный  $K_5$  или  $K_{3,3}$ . Как вытекает из (i) и (ii), подграф  $H$ , а потому  $K_5$  или  $K_{3,3}$ , должен обладать абстрактно двойственным графом, что противоречит (iii). //▲

### УПРАЖНЕНИЯ

- (15a) Покажите, что граф, двойственный колесу, является колесом. Попытайтесь найти другие самодвойственные (т. е. изоморфные своим геометрически двойственным) графы.
- (15b) Найдите графы, двойственные платановым
- (15c) Покажите, что графы, изображенные на рис. 15.4, изоморфны, но графы, геометрически двойственные к ним, не изоморфны.

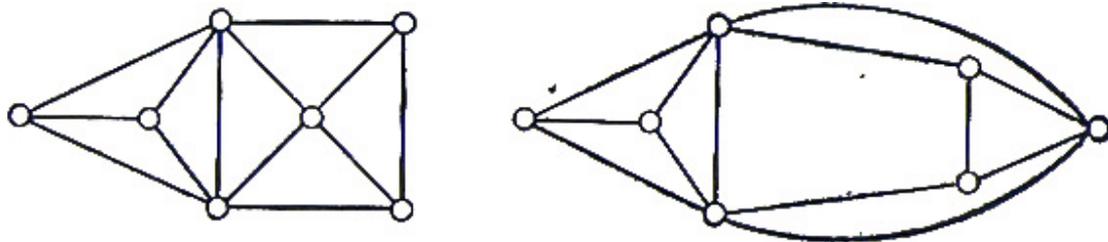


Рис. 15.4.

- (15d) Покажите, что если планарный граф  $G$  несвязен, то его «второй геометрически двойственный» граф  $G^{**}$  не изоморфен  $G$ .
- (15e) При каких условиях граф, геометрически двойственный к планарному, является простым?
- (15f) Попытайтесь найти плоский граф с пятью гранями, обладающий тем

свойством, что любые две его грани имеют общее ребро.

- (15g) Пусть  $G$  — плоский граф; используя [упр. 5g](#) и [следствие 6C](#), покажите, что если  $G$  — двудольный граф, то  $G^*$  эйлеров, и обратно, если  $G$  эйлеров, то граф  $G^*$  двудольный.
- (\*15h) Пусть  $G$  — связный плоский граф, являющийся регулярным степени  $r$  и содержащий по меньшей мере три вершины; покажите, что если двойственный к нему граф  $G^*$  также является регулярным (скажем, степени  $r^*$ ), то  $(r-2)(r^*-2) < 4$ . Покажите, что платоновы графы удовлетворяют этому соотношению, и найдите все другие удовлетворяющие ему графы.
- (\*15i) Докажите, что если граф  $G^*$  является абстрактно двойственным к  $G$ , то любой остовный лес графа  $G$  соответствует дополнению некоторого остовного леса графа  $G^*$ . Найдите выражение для коциклического ранга подграфа графа  $G^*$  через коциклический ранг соответствующего подграфа графа  $G$ .
- (\*15j) Граф  $G^*$  называется **алгебраически двойственным** к графу  $G$ , если между ребрами  $G$  и  $G^*$  существует взаимно однозначное соответствие, обладающее тем свойством, что элементы подпространства циклов графа  $G$  соответствуют элементам подпространства разрезов графа  $G^*$ , и обратно. Докажите, что граф  $G^*$  алгебраически двойствен к графу  $G$  тогда и только тогда, когда  $G^*$  абстрактно двойствен к  $G$ .

## § 16. ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПО УИТНИ

▲ В предыдущем параграфе мы дали абстрактное определение двойственности, которое характеризует планарные графы. Посвятим этот небольшой параграф еще одному определению двойственности, а именно двойственности по Уитни. Хотя это определение на первый взгляд кажется довольно искусственным, мы помещаем его здесь из исторических соображений, поскольку Уитни был первым теоретиком, обратившимся к двойственным графам для описания планарных графов.

Будем говорить, что граф  $G^*$  **двойствен по Уитни** графу  $G$ , если существует взаимно однозначное соответствие между ребрами  $G$  и  $G^*$ , обладающее тем свойством, что, каков бы ни был остовный подграф  $H$  графа  $G$  (т. е. произвольный подграф с тем же множеством вершин, что и  $G$ ), соответствующий ему подграф  $H^*$  в  $G^*$  удовлетворяет равенству

$$\gamma(H) + \chi(\tilde{H}^*) = \chi(G^*),$$

где  $\tilde{H}^*$  — дополнение подграфа  $H^*$  в графе  $G^*$  (т. е. граф, полученный из  $G^*$  удалением ребер из  $H^*$ ), а  $\gamma$  и  $\chi$  определены так же, как в § 9.

Некоторые очевидные следствия этого определения даны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 16А.

*Справедливы равенства*

$$\gamma(G)=\chi(G^*); \gamma(G^*)=\chi(G); \chi(H)+\gamma(\tilde{H}^*)=\chi(G^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первое равенство следует из определения двойственности по Уитни: подставляя  $H=G$  и замечая, что  $\tilde{H}^*$  является вполне несвязным графом, получаем:  $\chi(\tilde{H}^*)=G$ . Второе равенство следует из первого и из равенств

$$\chi(G^*)+\gamma(G^*)=m(G^*)=m(G)=\chi(G)+\gamma(G),$$

где  $m(G)$ ,  $m(G^*)$  обозначают число ребер соответственно в  $G$  и  $G^*$ .

Доказательство третьего равенства можно провести так:

$$\chi(H)+\gamma(\tilde{H}^*)=m(H)-\gamma(H)+m(\tilde{H}^*)-\chi(\tilde{H}^*)=m(H)+m(\tilde{H})-\chi(\tilde{H}^*)=m(G)-\gamma(G)=\chi(G),$$

поскольку  $m(\tilde{H}^*)=m(\tilde{H})$ . //

СЛЕДСТВИЕ 16В.

*Если  $G^*$  двойствен по Уитни графу  $G$ , то  $G$  двойствен по Уитни  $G^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Это сразу следует из третьего равенства теоремы 16А. //

Хотя, как было замечено выше, это определение не кажется слишком наглядным, оно тем не менее обладает требуемыми от него свойствами. Наиболее важное из них установлено в следующей фундаментальной теореме, доказанной Уитни.

ТЕОРЕМА 16С. (УИТНИ 1932)

*Граф является планарным тогда и только тогда, когда он обладает двойственным по Уитни.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Прямое доказательство этого результата довольно сложное (см. Оре [5]), поэтому ограничимся непрямым доказательством, использующим теорему 15F. Именно, мы докажем, что граф  $G^*$  является абстрактно двойственным к  $G$  тогда и только тогда, когда он двойствен по Уитни графу  $G$ . А так как граф является планарным тогда и только тогда, когда он обладает абстрактно двойственным, то отсюда сразу следует нужный результат.

Итак, предположим, что  $G^*$  абстрактно двойствен к  $G$ , Мы докажем, что

## Глава 5. ПЛАНАРНОСТЬ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

$G^*$  двойствен по Уитни к  $G$ , показав, что определяющее двойственность по Уитни равенство остается неизменным при добавлении любого ребра из  $G$  к подграфу  $H$ . Так как это, очевидно, верно для  $H$ , вообще не содержащего ребер, то можно провести индукцию по числу ребер в  $H$ . Допустим, что мы добавили к  $H$  ребро  $e$  и удалили соответствующее ребро  $e^*$  из  $\tilde{H}^*$ . Тогда нужно рассмотреть два случая:

(i) Если при добавлении ребра  $e$  число  $\gamma(H)$  увеличивается на единицу, то число компонент в  $H$  должно остаться неизменным, а поэтому ребро  $e$  должно соединять две вершины из  $H$ , которые уже связаны цепью в  $H$ . Следовательно, добавление ребра  $e$  порождает в  $G$  некоторый цикл  $C$ . Поскольку граф  $G^*$  абстрактно двойствен к  $G$ , множество  $C^*$  ребер из  $G^*$ , соответствующих ребрам из  $C$ , образует разрез в  $G^*$ , содержащий ребро  $e^*$ . Отсюда следует, что при удалении ребра  $e^*$  число компонент в  $\tilde{H}^*$  увеличивается на единицу. Значит,  $\chi(\tilde{H}^*)$  уменьшается на единицу, и тем самым равенство, определяющее двойственность по Уитни, остается справедливым.

(ii) Если  $\gamma(H)$  не меняется при добавлении  $e$ , то число компонент в  $H$  должно уменьшиться на единицу, и поэтому добавление ребра  $e$  не порождает новых циклов в  $G$ . Следовательно, удаление ребра  $e^*$  не порождает новых разрезов в  $G^*$ , а значит, число компонент в  $\tilde{H}^*$  должно остаться неизменным при удалении  $e^*$ . Таким образом,  $\chi(\tilde{H}^*)$  не меняется, и, следовательно, определяющее двойственность по Уитни равенство тоже не нарушается.

Остается только показать, что если  $G^*$  двойствен по Уитни графу  $G$ , то  $G^*$  и абстрактно двойствен к  $G$ . Чтобы установить это, предположим, что граф  $G^*$  имеет  $n$  вершин и  $k$  компонент и что  $C$  — цикл в  $G$ . Тогда  $\gamma(C)=1$ ,  $\chi(G^*)=n-k$ , и поэтому  $\chi(\tilde{C}^*)=n-k-1$ ; следовательно,  $C^*$  — разделяющее множество в  $G^*$ . Тот факт, что  $C^*$  в действительности является разрезом в графе  $G^*$ , вытекает из следующего замечания: если  $E$  строго содержится в  $C$ , то  $\gamma(E)=0$ , и поэтому  $\chi(\tilde{E}^*)=n-k$ , откуда следует, что  $E^*$  не является разделяющим множеством.

Доказательство того, что если  $C^*$  — разрез в  $G^*$ , то  $C$  — цикл в  $G$ , также осуществляется весьма просто и предлагается читателю в качестве упражнения. //

### УПРАЖНЕНИЯ

- (16a) Пусть  $G$  — плоский граф; докажите непосредственно, что если  $G^*$  геометрически двойствен к  $G$ , то  $G^*$  двойствен по Уитни к  $G$ .
- (\*16b) Пусть  $G^*$  двойствен по Уитни к связному графу  $G$ ; покажите, что если граф  $G^*$  не имеет изолированных вершин, то он связан.▲

## 6. РАСКРАШИВАНИЕ ГРАФОВ

Соккрыть хотели

Под светлой краской черные дела.

Вильям Шекспир (Буря)<sup>19</sup>

В этой главе мы исследуем проблему раскрашивания графов и карт, особенно в связи с гипотезой четырех красок и родственными вопросами. Начнем с рассмотрения (в § 17) следующей задачи: при каких условиях вершины графа можно раскрасить так, чтобы каждое ребро было инцидентно вершинам разного цвета? Обсуждению этой задачи посвящен и весь следующий параграф, в котором доказаны две главные теоремы. В § 19 изучается связь между раскрашиванием графов и раскрашиванием карт, а затем в § 20 обе эти задачи сводятся к проблеме раскрашивания ребер графа. По существу весь этот материал носит качественный характер: нас больше интересует вопрос, *какие* графы можно раскрасить с соблюдением определенных условий, чем вопрос, *сколькими способами* можно выполнить это раскрашивание. В заключение в § 21 мы обсудим и этот второй вопрос (используя хроматические многочлены).

### § 17. ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

Пусть граф  $G$  не имеет петель; тогда  $G$  называется  $k$ -раскрашиваемым, если каждой его вершине можно приписать один из  $k$  цветов таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не оказались одного цвета. Если граф  $G$  является  $k$ -раскрашиваемым, но не является  $(k-1)$ -раскрашиваемым, то назовем его  $k$ -хроматическим, а число  $k$  назовем хроматическим числом графа  $G$  и обозначим через  $\chi(G)$ . На рис. 17.1 изображен 4-хроматический (и, следовательно,  $k$ -раскрашиваемый при  $k \geq 4$ ) граф; цвета обозначены греческими буквами. Для удобства будем предполагать, что *все графы, рассматриваемые в § 17 и § 18, не содержат петель*; однако мы будем допускать существование кратных ребер, так как они не влияют на наши рассуждения.

<sup>19</sup> Перевод М. Донского, акт 1, сцена 2. В оригинале:

With colours fairer  
painted their foul ends. – Прим. перев.

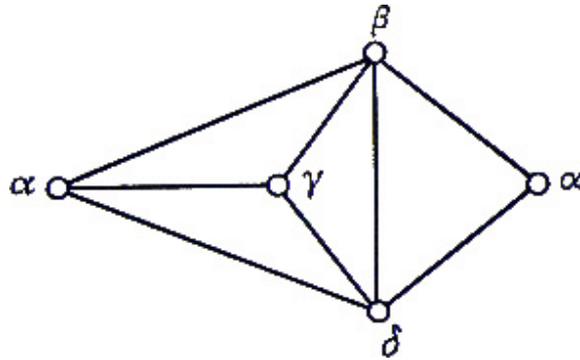


Рис. 17.1.

Ясно, что  $\chi(K_n)=n$ , и, следовательно, легко построить графы со сколь угодно большим хроматическим числом. С другой стороны, нетрудно видеть, что  $\chi(G)=1$  тогда и только тогда, когда  $G$  — вполне несвязный граф, и что  $\chi(G)=2$  тогда и только тогда, когда  $G$  — двудольный граф, отличный от вполне несвязного графа. Из [упр. 5g](#) следует, что если  $G$  не является вполне несвязным графом, то  $\chi(G)=2$  тогда и только тогда, когда  $G$  не содержит циклов нечетной длины. В частности, заметим, что любое дерево, имеющее не менее двух вершин, является 2-хроматическим, и то же верно для любого циклического графа с четным числом вершин.

При каких условиях граф является 3-хроматическим, неизвестно, хотя легко привести примеры таких графов; к ним относятся циклические графы с нечетным числом вершин, колеса с нечетным числом вершин, граф Петерсена. Колеса с четным числом вершин являются 4-хроматическими.

О хроматическом числе произвольного графа мало что можно сказать. Если граф имеет  $n$  вершин, то очевидно, что его хроматическое число не превосходит  $n$ , а если граф содержит в качестве подграфа  $K_r$ , то его хроматическое число не меньше  $r$ , однако на таком запасе сведений далеко не уедешь. Значительного прогресса можно добиться, если известна степень каждой вершины графа.

#### ТЕОРЕМА 17А.

*Если наибольшая из степеней вершин графа  $G$  равна  $\rho$ , то этот граф  $(\rho+1)$ -раскрашиваем.*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведем индукцию по числу вершин в  $G$ . Пусть  $G$  — граф с  $n$  вершинами; если из него удалить произвольную вершину  $v$  вместе с инцидентными ей ребрами, то в оставшемся графе будет  $n-1$  вершин, причем степени вершин по-прежнему не превосходят  $\rho$ . По предположению индукции этот граф  $(\rho+1)$ -раскрашиваем; отсюда получится  $(\rho+1)$ -раскраска для  $G$ , если окрасить вершину  $v$  цветом, отличным от тех, которыми окрашены смежные с ней вершины (а их не более чем  $\rho$ ). //

Проводя рассуждения более аккуратно, можно немного усилить эту теорему и получить следующий результат, известный как **теорема Брукса**;

доказательство будет дано в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 17В. (БРУКС 1941)

*Пусть наибольшая из степеней вершин графа  $G$  равна  $\rho$ . Тогда  $G$  является  $\rho$ -раскрашиваемым, за исключением тех случаев, когда (i)  $G$  содержит в качестве компоненты граф  $K_{\rho+1}$  или (ii)  $\rho=2$  и цикл нечетной длины является компонентой  $G$ . //*

Обе эти теоремы удобно применять тогда, когда степени всех вершин графа примерно одинаковы. Так, из теоремы 17А сразу получается, что всякий кубический граф 4-раскрашиваем, а из теоремы 17В, — что всякий связный кубический граф (кроме  $K_4$ ) на самом деле 3-раскрашиваем. С другой стороны, если граф имеет несколько вершин довольно высокой степени, эти теоремы дают очень мало. Хорошей иллюстрацией служит звездный граф  $K_{1,n}$ , который по теореме Брукса  $n$ -раскрашиваем, а на самом деле является 2-хроматическим. В настоящее время действительно эффективного способа, позволяющего улучшить положение, не существует, хотя метод, предлагаемый в упр. 17g, немного помогает.

Эта довольно безрадостная ситуация сильно облегчается, если ограничиться планарными графами; в этом случае совсем просто доказать следующий весьма сильный результат:

ТЕОРЕМА 17С.

*Любой планарный, граф 6-раскрашиваем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действуем так же, как при доказательстве теоремы 17А. Проводим индукцию по числу вершин; для планарных графов, имеющих меньше семи вершин, результат тривиален. Предположим, что  $G$  — планарный граф с  $n$  вершинами и что все планарные графы с  $n-1$  вершинами 6-раскрашиваемы. Без потери общности можно считать  $G$  простым графом; тогда (по теореме 13F) он содержит вершину  $v$ , степень которой не больше пяти. Удаляя вершину  $v$  вместе с инцидентными ей ребрами, приходим к графу с  $n-1$  вершинами, который 6-раскрашиваем. Тогда 6-раскраска для  $G$  получится, если окрасить вершину  $v$  цветом, отличным от тех, которыми окрашены смежные с ней вершины (которых не более пяти). //

Как и в случае теоремы 17А, этот результат можно усилить с помощью более тщательных рассуждений; в результате получится так называемая **теорема о пяти красках**, которую мы сформулируем здесь, а докажем в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 17D.

*Каждый планарный граф 5-раскрашиваем. //*

Естественно спросить, можно ли этот результат еще усилить; этот вопрос

приводит нас к самой знаменитой нерешенной проблеме теории графов — гипотезе **четырёх красок** (см. [примечание](#)). Сейчас мы приведем чисто формальный вариант этой гипотезы; другая формулировка будет дана в § 19.

ГИПОТЕЗА ЧЕТЫРЕХ КРАСОК.

*Всякий планарный граф 4-раскрашиваем.*

Уже сто лет математики пытаются доказать гипотезу четырех красок, но пока безуспешно. Тем не менее, в этом направлении был достигнут значительный прогресс. Сформулируем здесь без доказательства несколько относящихся к этой проблеме результатов, которые удалось установить; другие появятся позднее в этой главе.

(i) Если гипотеза четырех красок не верна, то любой опровергающий ее пример будет очень сложным; известно, например, что всякий планарный граф, имеющий менее 52 вершин, 4-раскрашиваем.

(ii) Любой не содержащий треугольников планарный граф 3-раскрашиваем (теорема Грѐча).

(iii) Если мы пытаемся доказать гипотезу четырех красок, то достаточно доказать ее для гамильтоновых планарных графов (довольно неожиданный результат Уитни).

## УПРАЖНЕНИЯ

- (17a) Найдите хроматические числа платоновых графов. Что можно сказать о хроматических числах (i) соединения двух графов; (ii) объединения двух графов?
- (17b) Пусть  $G$  — простой граф с  $n$  вершинами, являющийся регулярным степени  $d$ ; покажите, что  $\chi(G) \geq n/(n-d)$ .
- (17c) Пусть  $G$  — простой граф, толщина которого равна  $t$ ; найдите верхнюю оценку суммы степеней всех его вершин и выведите из нее, что  $\chi(G) \leq 6t$ . Покажите, что если, кроме того, обхват графа  $G$  равен  $r$ , то  $\chi(G) \leq 2rt(r-2)$ , и выведите отсюда, что каждый простой планарный граф, не имеющий треугольников, 4-раскрашиваем.
- (17d) Граф называется **критическим**, если удаление любой из его вершин (вместе с инцидентными ей ребрами) приводит к графу с меньшим хроматическим числом. Покажите, что (1)  $K_n$  является критическим для всех  $n > 1$ ; (2)  $C_n$  является критическим тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно. Покажите также, что если  $n$  нечетно, то соединение  $C_n + C_n$  является критическим графом, хроматическое число которого равно шести.
- (17e) Докажите, что всякий критический граф, являющийся  $k$ -хроматическим, обладает следующими свойствами: (i) он связан; (ii) степень каждой его вершины не меньше  $k-1$ ; (iii) не существует вершины, удаление которой приводит к несвязному графу. Докажите также, что всякий  $6$ -хроматический граф ( $k > 1$ ) содержит в качестве подграфа критический  $k$ -хроматический граф, и найдите такой подграф для графа, изображенного

на [рис. 17.1](#).

- (17f) Известна одна гипотеза (**гипотеза Хадвигера**), которая утверждает, что если связный граф  $G$  является  $k$ -хроматическим, то он стягиваем  $K_k$ . Докажите эту гипотезу для случаев  $k=2$  и  $k=3$  и покажите, что ее истинность в случае  $k=5$  влечет за собой истинность гипотезы четырех красок.
- (\*17g) Пусть  $G$  — связный простой граф, не являющийся ни полным графом, ни циклическим графом с нечетным числом вершин; можно доказать, что если  $\lambda$  — наибольшее характеристическое число графа  $G$  ([см. упр. 3m](#)), то  $\chi(G) \leq \{\lambda\}$ . Воспользовавшись этим, получите верхнюю оценку для хроматических чисел (i) звездного графа; (ii)  $K_{2,n}$ , (iii) кубического графа. Сравните эти верхние оценки с оценками, полученными с помощью теоремы Брукса.
- (\*17h) Пусть каждый конечный подграф счетного графа  $G$   $k$ -раскрашиваем; докажите, что  $G$  тоже  $k$ -раскрашиваем, и выведите отсюда, что каждый счетный планарный граф 5-раскрашиваем.
- (17i) Обозначим через  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  хроматические числа простого графа  $G$  с  $n$  вершинами и его дополнения  $\bar{G}$ . Покажите, что  $\chi \bar{\chi} \geq n$ , и выведите отсюда, что  $\chi + \bar{\chi} \geq 2\sqrt{n}$ . Используя индукцию по  $n$ , докажите, что  $\chi + \bar{\chi} \leq n+1$ , и выведите затем неравенство  $\chi \bar{\chi} \leq \frac{1}{4}(n+1)^2$ . Приведите примеры графов, для которых указанные границы достигаются.
- (\*17j) Какую часть материала из этого параграфа можно обобщить на случай  $k$ -графов?

## § 18. ДВА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

▲ Чтобы не нарушать последовательность изложения, мы отложили доказательства теорем 17B и 17D; приведем эти доказательства здесь.

ТЕОРЕМА 17D.

*Каждый планарный граф 5-раскрашиваем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Метод этого доказательства аналогичен примененному при доказательстве теоремы 17C, хотя детали несколько сложнее. Проведем индукцию по числу вершин; для планарных графов, имеющих меньше шести вершин, результат очевиден. Предположим, что  $G$  — планарный граф с  $n$  вершинами и что все планарные графы с  $n-1$  вершинами 5-раскрашиваемы. Можно считать, что  $G$  — простой плоский граф и что (по теореме 13F) он содержит вершину  $v$ , степень которой не больше пяти. Как и раньше, удаление вершины  $v$  и всех инцидентных ей ребер приводит нас к графу с  $n-1$  вершинами, который, следовательно, 5-раскрашиваем. Наша задача состоит в том, чтобы окрасить  $v$  в один из пяти цветов и завершить тем самым 5-раскрашивание графа  $G$ .

## Глава 6. РАСКРАШТВАННИЕ ГРАФОВ

Если  $\rho(v) < 5$ , то вершину  $v$  можно окрасить в любой цвет, не участвующий в окраске смежных вершин (которых не более четырех), и в этом случае доказательство закончено. Поэтому предположим, что  $\rho(v) = 5$  и что смежные с  $v$  вершины  $v_1, \dots, v_5$  располагаются вокруг  $v$  по часовой стрелке, как показано на рис. 18.1.

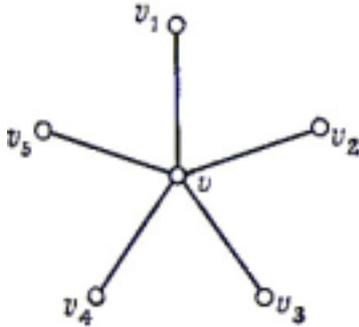


Рис. 18.1.

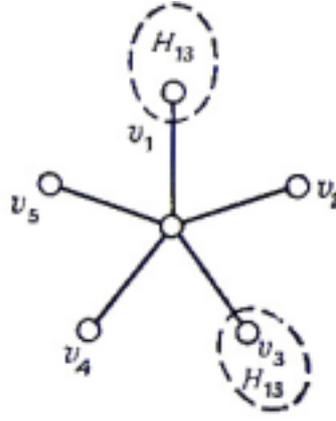


Рис. 18.2.

Если каким-нибудь двум вершинам  $v_i$  присвоен одинаковый цвет, то на этом доказательство закончено, поскольку тогда  $v$  можно окрасить в цвет, не использованный ни для одной из вершин  $v_i$ . Итак, мы пришли к последнему случаю, когда всем вершинам  $v_i$  присвоены различные цвета; допустим, что  $v_i$  окрашена в цвет  $c_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ). Определим  $H_{ij}$  как подграф графа  $G$ , вершинами которого являются все вершины цвета  $c_i$  или  $c_j$ , а ребрами — все ребра, соединяющие вершину цвета  $c_i$  с вершиной цвета  $c_j$ . Теперь имеются две возможности:

(i)  $v_1$  и  $v_3$  не принадлежат одной и той же компоненте графа  $H_{13}$  (рис. 18.2); в этом случае можно поменять цвета всех вершин той компоненты  $H_{13}$ , которая содержит вершину  $v_1$  (т. е. цвет  $c_1$  заменить на  $c_3$ , и наоборот). В результате вершина  $v_1$  приобретет цвет  $c_3$ , что позволит окрасить вершину  $v$  в цвет  $c_1$  и тем самым завершить доказательство теоремы в этом случае.

(ii)  $v_1$  и  $v_3$  лежат в одной компоненте графа  $H_{13}$  (рис. 18.3);

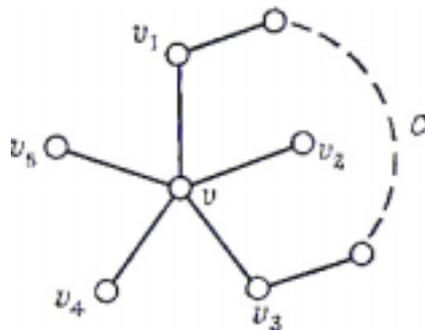


Рис. 18.3.

в этом случае существует цикл  $C$  вида  $v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_3 \rightarrow v$  часть которого, заключенная между  $v_1$  и  $v_3$ , целиком лежит в  $H_{13}$ . Так как  $v_2$ , находится внутри цикла  $C$ , а  $v_4$  — вне его, то не существует простой цепи из  $v_2$  в  $v_4$ , целиком лежащей в  $H_{24}$ ; поэтому мы можем поменять цвета всех вершин компоненты подграфа  $H_{24}$ , содержащей вершину  $v_2$ . При этом вершина  $v_2$  приобретет цвет

$c_4$ , что позволит окрасить вершину  $v$  в  $c_2$ . На этом наше доказательство заканчивается. //

Докажем теперь теорему Брукса; мы установим ее в форме, которая несколько отличается от теоремы 17В, хотя легко видеть, что эти два утверждения эквивалентны.

ТЕОРЕМА 18А.

*Пусть  $G$  — простой связный граф, не являющийся полным; если наибольшая из степеней его вершин равна  $\rho$  ( $\rho \geq 3$ ), то он  $\rho$ -раскрашиваем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как обычно, проведем индукцию по числу вершин графа  $G$ . Предположим, что  $G$  имеет  $n$  вершин; если при этом степень какой-нибудь его вершины меньше  $\rho$ , дальше можно рассуждать, как в доказательстве теоремы 17А, и все будет закончено. Поэтому без потери общности можно считать граф  $G$  регулярным степени  $\rho$ .

Выберем теперь произвольную вершину  $v$  и удалим ее (вместе с инцидентными ей ребрами); останется граф с  $n-1$  вершинами, в котором наибольшая из степеней вершин не превосходит  $\rho$ . По предположению индукции этот граф  $\rho$ -раскрашиваем. Теперь нам предстоит окрасить вершину  $v$  в один из имеющихся  $\rho$  цветов; как и раньше, считаем, что смежные с  $v$  вершины  $v_1, \dots, v_\rho$  расположены вокруг  $v$  по часовой стрелке и окрашены в различные цвета  $c_1, \dots, c_\rho$ .

Определяя подграфы  $H_{ij}$  ( $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq \rho$ ) так же, как в доказательстве предыдущей теоремы, можно скопировать случай (i) из ее доказательства, т. е. тот случай, когда  $v_i$  и  $v_j$  лежат в разных компонентах графа  $H_{ij}$ . Таким образом, можно считать, что при любых данных  $i$  и  $j$  вершины  $v_i$  и  $v_j$  связаны простой цепью, целиком лежащей в  $H_{ij}$ . Обозначим компоненту графа  $H_{ij}$ , содержащую вершины  $v_i$  и  $v_j$  через  $C_{ij}$ .

Ясно, что если вершина  $v_i$  смежна более чем с одной вершиной цвета  $c_i$ , то существует цвет (отличный от  $c_j$ ), не приписанный никакой из вершин, смежных с  $v_i$ . Тогда вершину  $v_i$  можно окрасить в этот цвет, что в свою очередь позволит окрасить вершину  $v$  в цвет  $c_i$ , и закончить на этом доказательство теоремы. Если этот случай не имеет места, то используем аналогичное рассуждение, чтобы показать, что каждая вершина из  $C_{ij}$  (отличная от  $v_i$  и от  $v_j$ ) должна иметь степень 2. Предположим, что  $w$  — первая вершина простой цепи из  $v_i$  в  $v_j$ , которая имеет степень, большую 2; тогда  $w$  можно перекрасить в цвет, отличный от  $c_i$  или  $c_j$ , нарушая тем самым свойство, что  $v_i$  и  $v_j$  связаны простой цепью, целиком лежащей в  $C_{ij}$ . Поэтому мы можем считать, что для любых  $i$  и  $j$  компонента  $C_{ij}$  состоит только из простой цепи, соединяющей вершину  $v_i$  с  $v_j$ .

Заметим теперь, что две простые цепи вида  $C_{ij}$  и  $C_{ij}$  (где  $i \neq l$ ) можно считать

пересекающимися только в вершине  $v_j$ , так как если  $w$  — другая точка пересечения, то ее можно перекрасить в цвет, отличный от  $c_i$  или  $c_j$ , или  $c_l$ , а это противоречит тому факту, что  $v_i$  и  $v_j$  связаны простой цепью.

Для завершения доказательства выберем (если это возможно) две несмежные вершины  $v_i$  и  $v_j$  и допустим, что  $w$  — вершина цвета  $c_j$ , смежная с  $v_i$ . Поскольку  $C_{ij}$  — простая цепь (для любого  $l \neq j$ ), можно поменять между собой цвета вершин в этой цепи, не затрагивая раскраску остальной части графа. Но это приводит к противоречию, потому что тогда  $w$  будет общей вершиной простых цепей  $C_{ij}$  и  $C_{il}$ . Отсюда следует, что нельзя выбрать две вершины  $v_i$  и  $v_j$  несмежными, и поэтому  $G$  должен быть полным графом  $K_{p+1}$ . А так как это не допускается условием теоремы, то мы рассмотрели тем самым все возможные случаи. //

## УПРАЖНЕНИЕ

(18a) Постарайтесь доказать гипотезу четырех красок, используя приведенное выше доказательство теоремы о пяти красках. В каком месте это доказательство не проходит? ▲

## § 19. РАСКРАШИВАНИЕ КАРТ

Возникновение гипотезы четырех красок исторически связано с раскрашиванием географических карт. Если у нас имеется карта с изображением нескольких стран, то интересно узнать, сколько понадобится цветов для такой раскраски этих стран, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один и тот же цвет. Возможно, самая привычная форма гипотезы четырех красок такова: любую карту можно раскрасить с помощью только четырех красок.

Чтобы сделать это утверждение точным, надо определить, что означает слово «карта». Поскольку в рассматриваемых нами задачах о раскраске требуется, чтобы страны, расположенные по обе стороны ребра, были разного цвета, нам придется исключить карты, обладающие мостом. Таким образом, нам удобно определить **карту** как связный плоский граф, не содержащий мостов. (Заметим, что при таком определении карты мы не исключаем петель или кратных ребер, хотя, как мы увидим ниже, исключение мостов соответствует тому исключению петель, о котором говорилось в § 17.)

Назовем теперь карту  **$k$ -раскрашиваемой**, если ее грани можно раскрасить  $k$  красками так, чтобы никакие две смежные грани (т. е. грани, границы которых имеют общее ребро) не были одного цвета. Там, где можно запутаться, будем использовать термин «вершинно  $k$ -раскрашиваемый», имея в виду  $k$ -раскрашиваемость в описанном выше смысле. К примеру заметим, что граф, изображенный на рис. 19.1, является 3-раскрашиваемым и вершинно 4-раскрашиваемым.

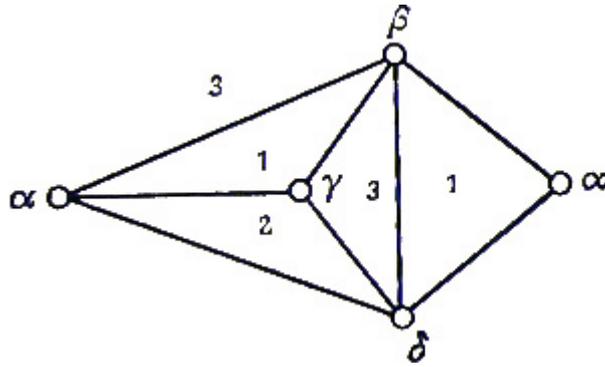


Рис. 19.1.

Теперь можно сформулировать **гипотезу четырех красок для карт**: всякая карта 4-раскрашиваема. Эквивалентность приведенных двух форм гипотезы четырех красок мы установим в следствии 19С. А пока исследуем, при каких условиях карту можно раскрасить двумя красками. Оказывается, эти условия имеют особенно простой вид.

**ТЕОРЕМА 19А.**

*Карта  $G$  является 2-раскрашиваемой тогда и только тогда, когда  $G$  представляет собой эйлеров граф.*

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$  Любую вершину  $v$  из  $G$  должно окружать четное число граней, так как их можно раскрасить в два цвета. Отсюда следует, что степень каждой вершины четна, и поэтому, в силу теоремы 6В,  $G$  — эйлеров граф.

$\Leftarrow$  Опишем метод, дающий нужную раскраску граней графа  $G$ . Выберем произвольную грань  $F$  и окрасим ее в красный цвет; проведем жорданову кривую из точки  $x$  грани  $F$  в некоторую точку любой другой грани, причем так, чтобы эта кривая не проходила ни через какую вершину графа  $G$ . Если на пути от точки  $x$  до точки  $y$  грани  $F'$  наша кривая пересечет четное число ребер, окрасим грань  $F'$  в красный цвет; в противном случае — в синий (рис. 19.2).

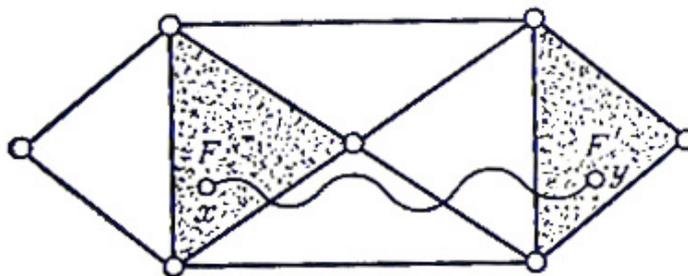


Рис. 19.2.

Нетрудно показать, что раскрашивание определено корректно: берем «цикл», состоящий из двух таких жордановых кривых (т. е. замкнутую жорданову кривую), и показываем, что он пересекает четное число ребер графа  $G$  (надо использовать индукцию по числу вершин, находящихся внутри цикла, и тот факт, что каждой вершине графа  $G$  инцидентно четное число ребер). //

## Глава 6. РАСКРАШТВАНИЕ ГРАФОВ

Другое доказательство теоремы 19А можно получить, если перейти от граней исходного графа к вершинам двойственного графа. Сначала мы докажем теорему, обосновывающую такой переход, а затем проиллюстрируем ее, приведя другое доказательство теоремы 19А и доказав эквивалентность двух форм гипотезы четырех красок.

ТЕОРЕМА 19В.

*Пусть  $G$  — планарный граф без петель, а  $G^*$  — геометрически двойственный к  $G$ . При этих предположениях граф  $G$  вершинно  $k$ -раскрашиваем тогда и только тогда, когда граф  $G^*$   $k$ -раскрашиваем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$  Можно считать граф  $G$  плоским и связным, так что  $G^*$  является картой. Поскольку любая грань в  $G^*$  содержит единственную вершину из  $G$ , то вершинная  $k$ -раскраска графа  $G$  определяет  $k$ -раскраску в  $G^*$ : каждая грань «наследует» цвет содержащейся в ней вершины. При этом никакие две смежные грани в  $G^*$  не окажутся одного цвета, ибо содержащиеся в них вершины графа  $G$  смежны в  $G$  и поэтому окрашены в разные цвета. Таким образом, граф  $G^*$  является  $k$ -раскрашиваемым.

$\Leftarrow$  Теперь предположим, что задана  $k$ -раскраска графа  $G^*$ . Так как любая вершина графа  $G$  содержится в некоторой грани карты  $G^*$ , то эта  $k$ -раскраска определяет вершинную  $k$ -раскраску графа  $G$ : каждая вершина «наследует» цвет содержащей ее грани. Тот факт, что никакие две смежные вершины графа  $G$  не оказываются одинакового цвета, немедленно получается с помощью тех же рассуждений, что и выше. //

Из этого результата следует, что любой теореме о раскраске вершин планарного графа соответствует двойственная теорема о раскраске граней карты, и наоборот. В качестве примера рассмотрим теорему 19А.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как (см. упр. 15g) граф, двойственный эйлерову планарному графу, является двудольным, и наоборот, то достаточно показать, что планарный граф без петель 2-раскрашиваем тогда и только тогда, когда он двудолен; но это очевидно. //

Подобным же образом можно доказать эквивалентность двух форм гипотезы четырех красок.

СЛЕДСТВИЕ 19С.

*Гипотеза четырех красок, для карт эквивалентна гипотезе четырех красок для планарных графов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

## Глава 6. РАСКРАШТВАНИЕ ГРАФОВ

$\Rightarrow$  Пусть  $G$  — планарный граф без петель; без потери общности будем считать его плоским и связным. Тогда геометрически двойственный к нему граф  $G^*$  является картой. По теореме 19В вершинная 4-раскрашиваемость графа  $G$  непосредственно вытекает из 4-раскрашиваемости карты  $G^*$ .

$\Leftarrow$  Обратно, пусть  $G$  — карта, а  $G^*$  — граф, геометрически двойственный к ней. Тогда  $G^*$  — планарный граф без петель и, следовательно, он вершинно 4-раскрашиваем. Отсюда сразу вытекает, что карта  $G$  4-раскрашиваема. //

Соображения двойственности полезны также при доказательстве следующей теоремы:

### ТЕОРЕМА 19D.

*Пусть  $G$  — кубическая карта; она 3-раскрашиваема тогда и только тогда, когда каждая ее грань ограничена четным числом ребер.*

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$  Возьмем произвольную грань  $F$  карты  $G$ ; при этом цвета окружающих  $F$  граней из  $G$  должны чередоваться. Отсюда следует, что их должно быть четное число, а поэтому каждая грань ограничена четным числом ребер.

$\Leftarrow$  Будем доказывать двойственный результат: если  $G$  — связный плоский граф без петель, каждая грань которого представляет собой треугольник, а каждая вершина имеет четную степень (т. е.  $G$  — эйлеров граф), то он вершинно 3-раскрашиваем. Обозначим три цвета через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Поскольку  $G$  — эйлеров граф, по теореме 19А его грани можно раскрасить двумя цветами, скажем красным и синим. Требуемая 3-раскраска вершин графа  $G$  получается следующим образом: сначала раскрасим вершины некоторой красной грани так, чтобы цвета  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  шли по часовой стрелке, а затем раскрасим вершины окружающих граней, располагая цвета  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  по часовой стрелке вокруг грани в том и только в том случае, если эта грань красная (рис. 19.3). Легко видеть, что такое раскрашивание вершин можно выполнить для всего графа, что и доказывает нашу теорему. //

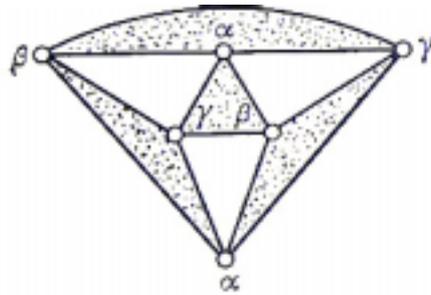


Рис. 19.3.

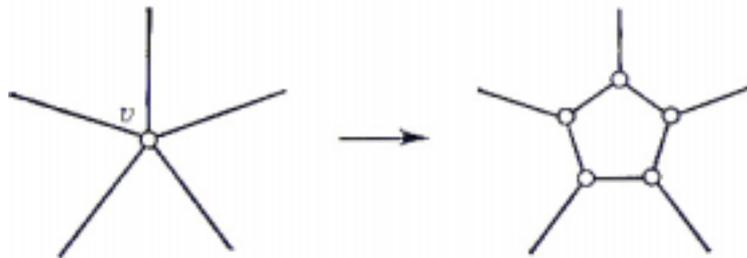


Рис. 19.4.

В доказанной теореме карта предполагается кубической; в действительности мы можем часто, не теряя общности, снимать это условие. Хорошим примером этому является следующая

ТЕОРЕМА 19Е.

*Гипотеза четырех красок для планарных графов верна тогда и только тогда, когда всякая кубическая карта*

*4-раскрашиваема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В силу следствия 19С достаточно показать, что 4-раскраска всякой кубической карты определяет 4-раскраску любой карты.

Допустим, что  $G$  — произвольная карта; если она содержит какие-либо вершины степени 2, то их можно удалить<sup>20</sup>, что не изменит раскраску. Таким образом, остается показать, как избавиться от вершин, степень которых больше или равна четырем. Пусть  $v$  — такая вершина; мы можем наклеить на нее «заплату» (т. е. нарисовать вокруг  $v$  замкнутую жорданову кривую, не заключающую внутри других вершин, кроме  $v$ ; см. рис. 19.4). Повторяя эту процедуру для каждой вершины, степень которой больше трех, мы получим кубический граф, который по предположению 4-раскрашиваем. Искомая 4-раскраска граней карты  $G$  получается теперь стягиванием каждой «заплаты» в точку и восстановлением всех вершин степени 2. //

## УПРАЖНЕНИЯ

(19а) Покажите (непосредственно и используя двойственность), что с помощью не более чем шести красок можно так раскрасить страны на географической карте, чтобы соседние страны были окрашены в разные

<sup>20</sup> Точнее, два ребра, инцидентные вершине степени 2, заменяются ребром. — Прим. ред.

цвета.

- (\*19b) Решите предыдущую задачу, заменяя в ней «шесть» на «пять».
- (19c) Разобьем плоскость на конечное число областей, проводя бесконечные прямые линии произвольным образом. Докажите (тремя различными способами), что эти области допускают 2-раскраску.
- (19d) Пусть  $G$  — простой плоский граф, имеющий менее двенадцати граней, и предположим, что степень каждой вершины в  $G$  не меньше трех. Используя [упр. 13е](#), докажите, что  $G$  является 4-раскрашиваемым (по граням). Докажите также двойственное утверждение.
- (19e) Что можно сказать о плоском графе, который одновременно 2-раскрашиваем и вершинно 2-раскрашиваем?
- (9f) Докажите, что если тороидальный граф уложен на поверхности тора, то его грани можно раскрасить с помощью семи цветов. Докажите также, что существуют такие графы, для раскраски которых потребуются все семь цветов.
- (\*19g) Покажите, что всякий граф рода  $g$  ( $g \geq 1$ ) является  $h$ -раскрашиваемым (по граням), где  $h = \lceil \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48g}) \rceil$ . (Тот факт, что существуют графы рода  $G$ , которым необходимо именно это число красок, был доказан в 1968 г. Рингелем и Янгсом (см. Рингель [16]). Как жаль, что этот результат не был доказан для графов рода 0!)

## § 20. РЕБЕРНАЯ РАСКРАСКА

Этот небольшой параграф мы посвятим изучению раскрашивания ребер графа. Оказывается, гипотеза четырех красок для планарных графов эквивалентна некоторой гипотезе, касающейся реберной раскраски кубических карт.

Граф  $G$  называется **реберно  $k$ -раскрашиваемым**, если его ребра можно раскрасить  $k$  красками таким образом, что никакие два смежных ребра не окажутся одного цвета. Если граф  $G$  реберно  $k$ -раскрашиваем, но не является реберно  $(k-1)$ -раскрашиваемым, то  $k$  называется **хроматическим классом** (или **хроматическим индексом**)<sup>21</sup>, графа  $G$ ; при этом используется запись  $\chi_e(G) = k$ . На рис. 20.1 изображен граф  $G$ , для которого  $\chi_e(G) = 4$ .

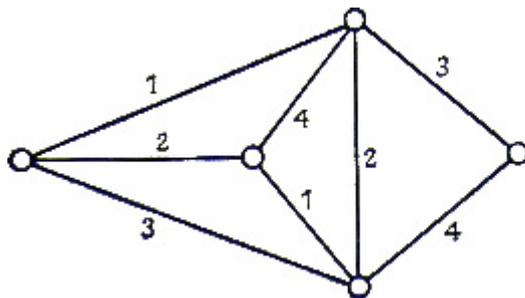


Рис. 20.1.

<sup>21</sup> Или **реберно-хроматическим числом**. — Прим. ред.

Ясно, что если наибольшая из степеней вершин графа  $G$  равна  $\rho$ , то  $\chi_e(G) \geq \rho$ . Следующий результат, известный как **теорема Визинга**, дает удивительно точные оценки для хроматического класса графа  $G$ ; доказательство этой теоремы можно найти у Оре [5].

ТЕОРЕМА 20А. (ВИЗИНГ 1964)

*Пусть в графе  $G$ , не имеющем петель, наибольшая из степеней вершин равна  $\rho$ ; тогда  $\rho \leq \chi_e(G) \leq \rho + 1$ . //*

Задача, состоящая в выяснении того, какие графы имеют хроматический класс  $\rho$ , а какие  $\rho + 1$ , не решена; однако в некоторых частных случаях соответствующие результаты находятся легко. Например,  $\chi_e(C_n) = 2$  или 3 в зависимости от того, четно  $n$  или нечетно, а  $\chi_e(W_n) = n - 1$  (при  $n \geq 4$ ); как мы сейчас покажем, хроматические классы полных графов и полных двудольных графов вычисляются тоже довольно просто.

ТЕОРЕМА 20В.

$$\chi_e(K_{m,n}) = \rho = \max(m, n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ.

Оказывается, хроматический класс любого двудольного графа равен  $\rho$ ; Доказательство этого результата будет дано в § 27.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Без потери общности можно считать, что  $m \geq n$  и что граф  $K_{m,n}$  изображен так, как на рис. 20.2:  $n$  вершин расположены на горизонтальной линии под  $m$  вершинами. Тогда искомая реберная раскраска получается последовательным окрашиванием ребер, инцидентных этим  $n$  вершинам, с использованием следующих групп красок:

$$\{1, 2, \dots, m\}; \{2, 3, \dots, m, 1\}; \dots; \{n, \dots, m, 1, \dots, n - 1\};$$

при этом краски из каждой группы располагаются по часовой стрелке (вокруг соответствующей вершины). //

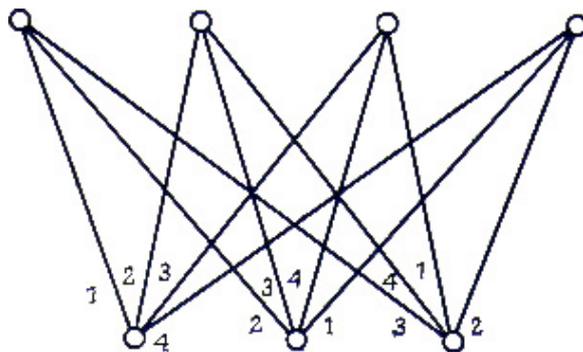


Рис. 20.2.

ТЕОРЕМА 20С.

$\chi_e(K_n)=n$ , если  $n$  нечетно ( $n \neq 1$ ), и  $\chi_e(K_n)=n-1$ , если  $n$  четно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В случае нечетного  $n$  расположим вершины графа  $K_n$  в виде правильного  $n$ -угольника; тогда его ребра можно раскрасить следующим образом: сначала окрашиваем каждую сторону  $n$ -угольника в свой цвет, а затем каждое из оставшихся ребер (диагонали  $n$ -угольника) окрашиваем в тот же цвет, что и параллельная ему сторона (рис. 20.3). То, что граф  $K_n$  не является реберно  $(n-1)$ -раскрашиваемым, сразу же следует из того, что максимально возможное число ребер одного цвета равно  $(n-1)/2$ .

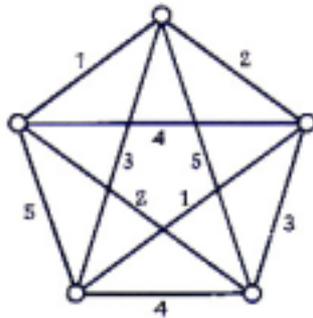


Рис. 20.3.

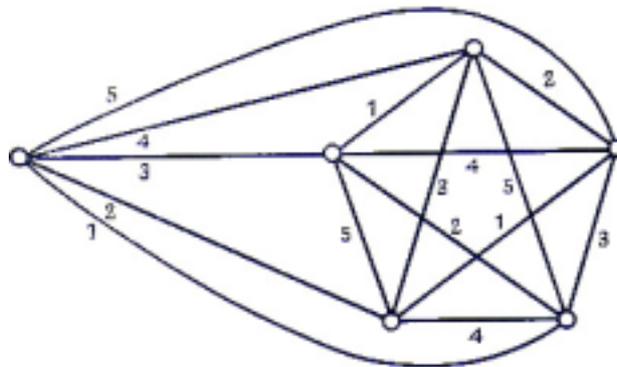


Рис. 20.4.

В случае четного  $n$  ( $\geq 4$ ) граф  $K_n$  можно рассматривать как соединение полного  $(n-1)$ -графа  $K_{n-1}$  и отдельной вершины. Если в  $K_{n-1}$  окрасить ребра описанным выше способом, то для каждой вершины останется один неиспользованный цвет, причем все эти неиспользованные цвета будут различными. Таким образом, чтобы получить реберную раскраску  $K_n$ , достаточно окрасить оставшиеся ребра в соответствующие «неиспользованные» цвета (рис. 20.4). //

Продemonстрируем теперь связь между гипотезой четырех красок и реберной раскраской графа; именно наличием этой связи и объясняется интерес к реберной раскраске.

ТЕОРЕМА 20D.

*Гипотеза четырех красок, верна в том и только в том случае, если  $\chi_e(G)=3$  для каждой кубической карты  $G$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$\Rightarrow$  Допустим, что задана 4-раскраска граней карты  $G$ , и обозначим цвета через  $\alpha=(1, 0)$ ,  $\beta=(0,1)$ ,  $\gamma=(1,1)$ ,  $\delta=(0, 0)$ . Тогда 3-раскраску ребер карты  $G$  можно получить окрашиванием каждого ребра  $e$  в цвет, соответствующий сумме (по модулю 2) цветов двух примыкающих к  $e$  граней. Например, если к ребру  $e$  примыкают две грани: цвета  $\alpha$  и цвета  $\gamma$ , то  $e$  окрашивается в цвет  $\beta$ , ибо  $(1, 0)+(1, 1)=(0, 1)$ . Заметим, что цвет  $\delta$  не встречается при такой раскраске ребер, поскольку две примыкающие к ребру грани должны быть разного цвета.

Более того, ясно, что любые два смежных ребра не могут быть одного цвета. Таким образом, мы имеем требуемую реберную раскраску (рис. 20.5).

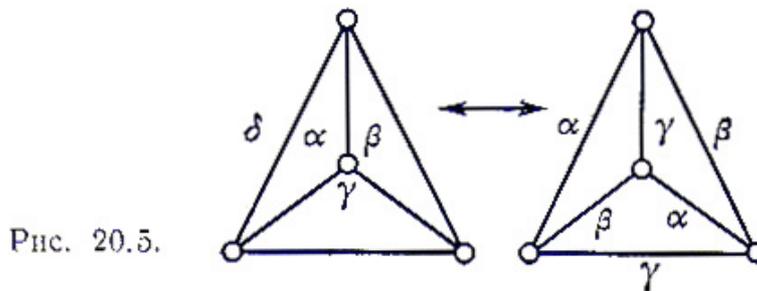


Рис. 20.5.

$\Leftarrow$  Допустим теперь, что задана 3-раскраска ребер карты  $G$ ; тогда из любой вершины выходит ребро каждого из цветов.

Подграф, определяемый теми ребрами, которые окрашены цветом  $\alpha$  или  $\beta$ , регулярен степени 2, а поэтому его грани можно раскрасить двумя красками; назовем их 0 и 1 (здесь мы воспользовались очевидным расширением теоремы 19А на случай несвязных графов). Подобным же образом грани подграфа, определяемого теми ребрами, которые окрашены цветом  $\alpha$  или  $\gamma$ , могут быть раскрашены красками 0 и 1. Следовательно, мы можем приписать каждой грани карты  $G$  две координаты  $(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  равны 0 или 1. А так как координаты, приписанные двум смежным граням в  $G$ , должны отличаться по меньшей мере в одной позиции, то, следовательно, эти координаты  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 0)$  и дают искомую 4-раскраску граней  $G$ . //

### УПРАЖНЕНИЯ

- (20a) Вычислите хроматические классы платоновых графов и графа Петерсена.
- (20b) Покажите, что если  $G$  не является вполне несвязным графом, то хроматический класс  $G$  совпадает с хроматическим числом его реберного графа  $L(G)$ . Найдите все графы, хроматические классы которых равны 2.
- (20c) Проверьте теорему 20D в случае графа, соответствующего додекаэдру.
- (20d) Пусть  $G$  представляет собой кубическую карту, в которой число ребер, ограничивающих каждую грань, кратно трем; покажите, что карта  $G$

4-раскрашиваема (по граням).

(\*20e) Пусть  $G$  — произвольный граф, полученный из  $K_{2n+1}$  удалением не более чем  $n-1$  ребер; докажите, что  $\chi_e(G)=2n+1$ .

## § 21. ХРОМАТИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

▲ Завершая эту главу, бросим беглый тоскующий взгляд на проблему раскраски вершин. В этом параграфе мы свяжем с каждым графом некоторую функцию, которая, помимо всего прочего, будет содержать информацию о том, является ли граф 4-раскрашиваемым или нет. Можно надеяться, что исследование этой функции даст некоторые полезные сведения о гипотезе четырех красок. Не теряя общности, ограничимся рассмотрением простых графов.

Пусть  $G$  — простой граф, и пусть  $P_G(k)$  — число способов, которыми можно окрасить вершины графа  $G$ , используя  $k$  красок и соблюдая условие: никакие две смежные вершины не должны иметь один и тот же цвет. Будем (времененно) называть  $P_G$  **хроматической функцией** графа  $G$ . Например, если  $G$  — граф, изображенный на рис. 21.1,



Рис. 21.1.

то  $P_G(k)=k(k-1)^2$ , так как среднюю вершину можно окрасить  $k$  способами и, следовательно, каждую из концевых вершин — любым из  $k-1$  способов. Этот результат можно обобщить и показать, что если  $T$  — произвольное дерево с  $n$  вершинами, то  $P_T(k)=k(k-1)^{n-1}$ . Аналогично, если  $G$  — полный граф  $K_3$ , то  $P_G(k)=k(k-1)(k-2)$ . Этот результат можно обобщить и получить формулу  $P_G(k)=k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$ , если в качестве графа  $G$  взять граф  $K_n$ .

Ясно, что если  $k < \chi(G)$ , то  $P_G(k)=0$ , а при  $k \geq \chi(G)$  справедливо неравенство  $P_G(k) > 0$ . Отметим также, что гипотеза четырех красок эквивалентна утверждению: если  $G$  — простой планарный граф, то  $P_G(4) > 0$ .

Если задан произвольный простой граф, то в общем случае трудно получить его хроматическую функцию чисто умозрительным путем. Доказываемые ниже теорема и следствие дают систематический метод получения хроматической функции простого графа в виде суммы хроматических функций полных графов.

### ТЕОРЕМА 21 А.

*Пусть  $G$  — простой граф, а  $v$  и  $w$  — его несмежные вершины. Пусть граф  $G_1$  получен из  $G$  путем соединения ребром вершин  $v$  и  $w$ , а граф  $G_2$  — путем отождествления вершин  $v$  и  $w$  (и кратных ребер, если они при этом получаются). Тогда*

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k).$$

(Пусть, например,  $G$  — граф, изображенный на рис. 21.2. Соответствующие графы  $G_1$  и  $G_2$  изображены на рис. 21.3, и теорема утверждает, что

$$k(k-1)(k-2)^2 = k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2).$$

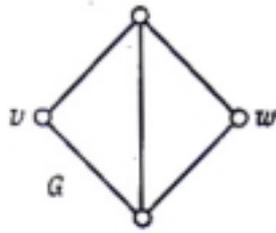


Рис. 21.2.

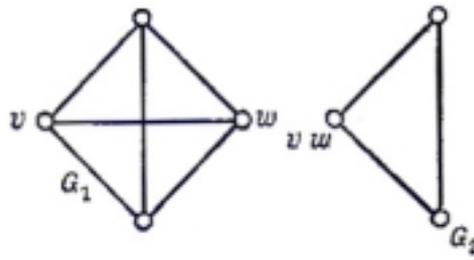


Рис. 21.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

При любой допустимой раскраске вершин графа  $G$  либо  $v$  и  $w$  имеют разные цвета, либо они окрашены одинаково. Число раскрасок, при которых  $v$  и  $w$  имеют разные цвета, не изменится, если дорисовать ребро, соединяющее  $v$  и  $w$ ; следовательно, оно равно  $P_{G_1}(k)$ . Аналогично, число раскрасок, при которых  $v$  и  $w$  окрашены одним цветом, не изменится, если отождествить  $v$  и  $w$ ; следовательно, оно равно  $P_{G_2}(k)$ . //

## СЛЕДСТВИЕ 21В.

*Хроматическая функция простого графа представляет собой многочлен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Повторим процедуру, описанную в предыдущей теореме, выбирая несмежные вершины в  $G_1$  и в  $G_2$  и соединяя и отождествляя их, как было описано выше; в результате получим четыре новых графа. Повторим еще раз описанную выше процедуру для этих новых графов, и т. д. Процесс оканчивается, когда все пары вершин в каждом графе смежны — другими словами, когда каждый граф является полным. Поскольку хроматическая функция полного графа представляет собой многочлен, то, применяя последовательно теорему 21А, получим, что хроматическая функция графа  $G$  является суммой многочленов и поэтому сама должна быть многочленом. (Иллюстрирующий это рабочий пример будет приведен позднее.) //

Теперь мы будем называть  $P_G$  **хроматическим многочленом** графа  $G$ . Из приведенного доказательства легко вывести, что если граф  $G$  имеет  $n$  вершин, то степень многочлена  $P_G(k)$  равна  $n$ , так как на каждом шаге не возникает никаких новых вершин. Более того, поскольку описанная нами конструкция порождает только один полный граф с  $n$  вершинами, коэффициент при  $k^n$  равен единице. Можно также показать (см. упр. 21d), что коэффициент при  $k^{n-1}$  равен  $-t$ , где через  $t$  обозначено число ребер в графе  $G$ , и что знаки коэффициентов чередуются. Если у нас совсем нет красок, то мы не можем раскрасить граф, и поэтому постоянный член хроматического многочлена должен равняться нулю.

Теперь самое время привести пример, иллюстрирующий изложенную выше теорию. Применим теорему 21А для нахождения хроматического многочлена графа  $G$ , изображенного на рис. 21.4, и убедимся, что этот многочлен имеет вид

$k^5 - 7k^4 + ak^3 - bk^2 + ck$  ( $a, b, c$  — положительные константы), как это утверждается в предыдущем абзаце).

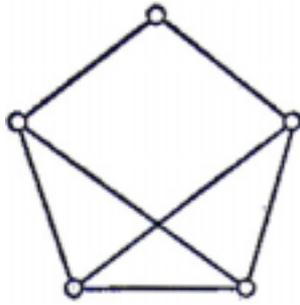


Рис. 21.4.

Обычно на каждом шаге рисуют сам граф, а не выписывают его хроматический многочлен. Например, вместо записи  $P_G(k) = P_{G_1}(k) + P_{G_2}(k)$ , где  $G, G_1$  и  $G_2$  — графы, изображенные на рис. 21.2 и 21.3, удобно представлять это «уравнение» так, как показано на рис. 21.5.

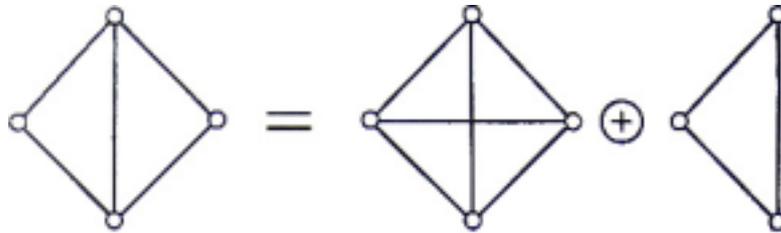
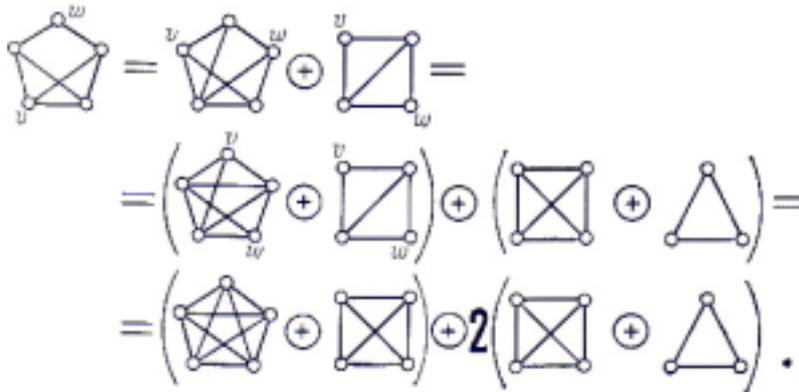


Рис. 21.5.

Используя это соглашение, имеем:



Таким образом,

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4) + 3k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2)(k^2 - 4k + 5) = k^5 - 7k^4 + 19k^3 - 23k^2 + 10k.$$

(Заметим, что отсюда сразу можно вывести, что  $G$  является 3-хроматическим графом.)

В заключение этой главы скажем несколько слов о том, как связаны хроматические многочлены и раскрашиваемость с задачей составления расписания. Предположим, к примеру, что нам надо выбрать время проведения лекций по разным предметам с учетом того, что некоторые из них не могут читаться одновременно (так как найдутся студенты, желающие посещать и те и

другие). Наша задача — выяснить, можно ли составить расписание так, чтобы принять во внимание подобные условия. Это достигается путем построения графа, вершины которого обозначают лекции по различным предметам, а ребра соединяют те пары лекций, которые не должны быть назначены на одно и то же время. Если каждому приемлемому для лекции времени сопоставить некоторый цвет, то раскраска вершин такого графа будет соответствовать правильному расписанию. При этом хроматический многочлен такого графа сразу покажет нам, можно ли составить расписание требуемым образом, и если да, то сколькими способами.

## УПРАЖНЕНИЯ

- (21a) При помощи теоремы 21А найдите хроматический многочлен графа, соответствующего октаэдру.
- (21b) Найдите хроматические многочлены графов  $K_{1,n}$ ,  $K_{2,n}$  и  $K_{3,n}$ ; попытайтесь обобщить эти результаты.
- (21c) Что можно сказать о хроматических многочленах (i) объединения двух простых графов; (ii) соединения двух простых графов? Покажите, что если  $G$  — несвязный простой граф, то  $P_G$  равен произведению хроматических многочленов его компонент; что в этом случае можно сказать о степени наименьшего ненулевого члена?<sup>22</sup>
- (\*21d) Пусть  $G$  — простой граф с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами; дайте подробное доказательство того, что (i)  $P_G$  является приведенным многочленом<sup>23</sup> степени  $n$ ; (ii) коэффициент при  $k^{n-1}$  равен  $-m$ ; (iii) знаки коэффициентов чередуются.
- (21e) Докажите, что  $G$  является деревом с  $n$  вершинами тогда и только тогда, когда  $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ ; выведите отсюда, что данный многочлен может быть хроматическим многочленом более чем одного графа. Можно ли найти многочлен, удовлетворяющий условиям упр. 21d, но не являющийся хроматическим многочленом никакого графа?
- (\*21f) Пусть  $G$  — простой граф с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами, и пусть  $P_G(<r)$  — хроматический многочлен графа  $G$ ; докажите, что коэффициент при  $k^r$  в  $P_G(k)$  равен  $\sum_{s=0}^m (-1)^s N(r, S)$ , где через  $N(r, S)$  обозначено число подграфов графа  $G$ , содержащих  $n$  вершин,  $r$  компонент и  $S$  ребер.
- (\*21g) Попробуйте определить реберно-хроматический и грани-хроматический

<sup>22</sup> То есть такого члена (слагаемого)  $a_j k^j$  в  $P_G$ , у которого  $a_j \neq 0$ , и при этом  $j$  — наименьший показатель, удовлетворяющий указанному условию. — Прим. ред.

<sup>23</sup> То есть коэффициент при  $k^n$  равен  $+1$ . — Прим. ред.

Глава 6. РАСКРАШТВАНИЕ ГРАФОВ  
многочлены и исследуйте их свойства. ▲

## 7. ОРГРАФЫ

С кривых путей выходим на прямой.

Вильям Шекспир (Гамлет)<sup>24</sup>

В этой и следующей главах изучается теория орграфов и некоторые ее приложения. Вначале (§ 22) мы вводим основные определения, а затем выясняем, при каких условиях можно так «направить» ребра графа, чтобы получившийся в результате граф стал сильно связным. Вслед за этим в § 23 рассматриваются эйлеровы и гамильтоновы ориентированные цепи и циклы и особо выделяются турниры. В заключение главы изучается классификация состояний цепи Маркова с точки зрения орграфов.

### § 22. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сначала напомним некоторые определения из § 2. **Орграфом**  $D$  называется пара  $(V(D), A(D))$ , где  $V(D)$  — непустое конечное множество элементов, называемых **вершинами**, и  $A(D)$  — конечное семейство упорядоченных пар элементов из  $V(D)$ , называемых **дугами**;  $V(D)$  и  $A(D)$  называются соответственно **множеством вершин** и **семейством дуг** орграфа  $D$ . Так, на рис. 22.1 представлен орграф, дугами которого являются  $(u, v)$ ,  $(v, v)$ ,  $(v, w)$ ,  $(v, w)$ ,  $(w, v)$ ,  $(w, u)$  и  $(z, w)$ ; порядок вершин на дуге указан стрелкой. Граф, полученный из орграфа  $G$  «удалением стрелок» (т.е. заменой каждой дуги вида  $(v, w)$  на соответствующее ребро  $\{v, w\}$ ), называется **основанием** орграфа  $D$  (рис. 22.2).

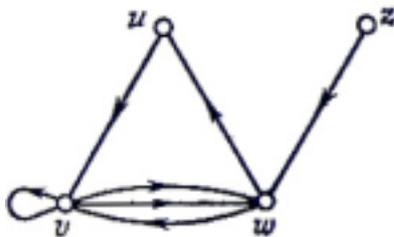


Рис. 22.1.

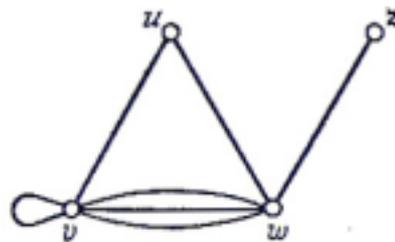


Рис. 22.2.

Многие определения, данные для графов в § 2, можно перенести на оргграфы. К примеру, две вершины  $v$  и  $w$  орграфа  $D$  называются **смежными**, если в  $A(D)$  существует дуга вида  $(v, w)$  или  $(w, v)$ ; при этом вершины  $v$  и  $w$  называются **инцидентными** любой такой дуге (а дуга — **инцидентной** соответствующим вершинам). Два оргграфа называются **изоморфными**, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

<sup>24</sup> Перевод Б. Пастернака, акт второй, сцена первая. В оригинале этот эпиграф звучит так:  
By indirections find directions out. — Прим. ред.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 22.3.

Заметим, в частности, что орграфы, изображенные на [рис. 2.3](#) и 22.1, не изоморфны. **Матрицей смежности** орграфа с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$  является матрица  $A=(a_{ij})$ , в которой  $a_{ij}$  равно числу дуг вида  $(v_i, v_j)$  в семействе  $A(D)$ . Матрица, показанная на рис. 22.3, является матрицей смежности для орграфа, изображенного на рис. 22.1. **Простой орграф** определяется очевидным образом.

Некоторые определения, данные в § 5, также допускают естественные обобщения на случай орграфов. **Ориентированный маршрут** в орграфе  $D$  представляет собой конечную последовательность дуг вида  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{m-1}, v_m)$ . Иногда мы будем записывать эту последовательность в виде  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  и говорить об **ориентированном маршруте из  $v_0$  в  $v_m$** . Аналогичным образом можно определить ориентированные цепи, ориентированные простые цепи и ориентированные циклы, или (как мы будем их называть) **орцепи, простые орцепи и орциклы**. Заметим, что хотя орцепь не может содержать данную дугу  $(v, w)$  более одного раза, она может содержать одновременно  $(v, w)$  и  $(w, v)$ ; например, на рис. 22.1  $z \rightarrow w \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$  и является орцепью.

Теперь мы в состоянии определить связность. Точнее, мы определим здесь два наиболее естественных и полезных типа связности орграфов, которые возникают в соответствии с тем, хотим мы или нет принимать во внимание ориентацию дуг. Эти определения являются естественными обобщениями на орграфы двух определений связности, данных в § 3 и 5.

Говорят, что  $D$  **связен** (или **орграф слабо связный**), если он не может быть представлен в виде объединения двух различных орграфов (определенного обычным образом); это эквивалентно тому, что связно основание орграфа  $D$ . Предположим дополнительно, что для любых двух вершин  $v$  и  $w$  орграфа  $D$  существует простая орцепь из  $v$  в  $w$ ; тогда  $D$  называется **сильно связным** (этот термин настолько устоялся, что мы использовали его вместо более естественного «орсвязный»). Ясно, что любой сильно связный граф связен, но обратное неверно: на рис. 22.1 изображен связный орграф, не являющийся сильно связным (так как не существует простой орцепи из  $v$  в  $z$ ).

Различие между связным и сильно связным орграфом станет яснее, если мы рассмотрим план города, по всем улицам которого допускается только одностороннее движение. Тогда связность соответствующего орграфа означает, что мы можем проехать из любой части города в любую другую, не обращая внимания на правила одностороннего движения; если же этот орграф сильно связен, то мы можем проехать из любой части города в любую другую, следуя всегда «правильным путем» вдоль улиц с односторонним движением.

Важно, чтобы система с односторонним движением была сильно связной, и

естественно возникает вопрос: при каких условиях карту улиц можно превратить в систему с односторонним движением таким способом, чтобы можно было проехать из любой части города в любую другую? Если, к примеру, город состоит из двух частей, связанных одним мостом, то мы никогда не сможем сделать все его улицы односторонними, поскольку какое бы направление мы ни приписали мосту, одна часть города будет отрезана. (Заметим, что сюда включается и тот случай, когда в городе имеется тупик.) С другой стороны, если мостов нет, то всегда найдется подходящая односторонняя система; это и есть основной результат данного параграфа, который будет установлен в теореме 22А.

Для удобства будем называть граф  $G$  **ориентируемым**, если каждое его ребро (рассматриваемое как пара вершин) может быть упорядочено таким образом, что полученный в результате орграф будет сильно связным. Этот процесс упорядочения ребер будем называть «заданием ориентации графа» или «приписыванием направлений ребрам». Если, например,  $G$  — граф, изображенный на рис. 22.4, то его можно ориентировать и получить сильно связный орграф, изображенный на рис. 22.5.

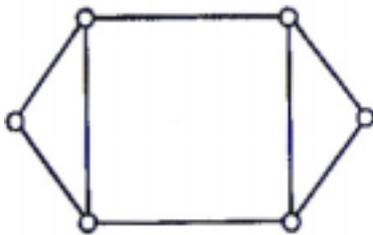


Рис. 22.4.

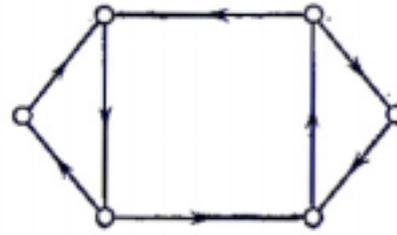


Рис. 22.5.

Легко видеть, что любой эйлеров граф ориентируем, поскольку достаточно пройти по любой эйлеровой цепи, ориентируя ребра в направлении движения по ним. Дадим теперь (принадлежащее Роббинсу) необходимое и достаточное условие ориентируемости графа.

#### ТЕОРЕМА 22А.

*Пусть  $G$  — связный граф; он ориентируем тогда и только тогда, когда каждое его ребро содержится по крайней мере в одном цикле.*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость условия очевидна. Чтобы доказать достаточность, выберем любой цикл  $C$  и ориентируем его ребра в направлении какого-либо обхода этого цикла. Если каждое ребро из  $G$  содержится в  $C$ , то доказательство завершено; если нет, то возьмем любое ребро  $e$ , не принадлежащее  $C$ , но смежное некоторому ребру из  $C$ . По предположению ребро  $e$  содержится в каком-то цикле  $C'$ ; ребрам цикла  $C'$  можно приписать ориентацию в направлении какого-либо обхода этого цикла (за исключением тех ребер, которые уже были ориентированы, т. е. тех ребер из  $C$ , которые принадлежат

также циклу  $C$ ). Нетрудно убедиться в том, что описанная процедура за конечное число шагов приводит к сильно связному орграфу. //

На рис. 22.6 продемонстрированы два шага построения соответствующей ориентации для некоторого графа. Пунктирными линиями обозначены ребра, принадлежащие циклу  $C'$ .

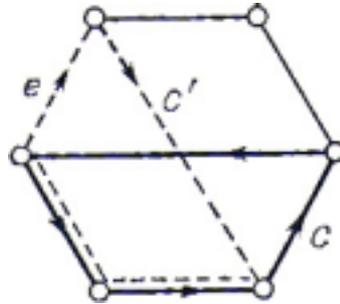


Рис. 22.6.

## УПРАЖНЕНИЯ

- (22a) Пусть  $D$  — простой орграф с  $n$  вершинами и  $m$  дугами; покажите, что если  $D$  связан, но не сильно связан, то  $n-1 \leq m \leq (n-1)(n-2)$ , а если  $D$  сильно связан, то  $n \leq m \leq n(n-1)$ .
- (22b) Пусть  $D$  — орграф; для любых двух вершин  $v$  и  $w$  положим  $v \leq w$  тогда и только тогда, когда существует простая орцепь из  $v$  в  $w$ . Покажите, что отношение  $\leq$  является частичным упорядочением в том и только в том случае, если  $D$  не содержит орциклов. Как можно было бы охарактеризовать сильно связный орграф на языке отношения  $\leq$ ?
- (22c) **Обратный к  $D$**  орграф получается из  $D$  переменной направления каждой дуги орграфа  $D$ . Приведите пример орграфа  $D$ , изоморфного своему обратному. Что можно сказать о матрицах смежности орграфа и обратного к нему орграфа?
- (22d) Пусть  $A$  — матрица смежности орграфа с множеством вершин  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Докажите, что  $(i, j)$ -й элемент из  $A^k$  равен числу ориентированных маршрутов длины  $k$  из  $v_i$  и  $v_j$ . Какой смысл можно придать суммам строк и суммам столбцов матрицы  $A$ ?
- (\*22e) Три миссионера и три людоеда находятся на одном берегу реки, через которую им надо переправиться; к несчастью, их лодка выдерживает только двух человек, и если все миссионеры умеют грести, из людоедов на это способен только один. Используя результат предыдущего упражнения, найдите, сколько раз им придется пересечь реку, чтобы все они переправились на другой берег; при этом, конечно, ни на секунду нельзя допускать, чтобы на каком-то из берегов число людоедов превысило число миссионеров (за исключением, разумеется, случая, когда там вообще нет миссионеров).
- (22f) Определите группу автоморфизмов орграфа и докажите, что группы

автоморфизмов любого орграфа и обратного к нему совпадают.

- (22g) Докажите, не используя теорему 22А, что любой гамильтонов граф ориентируем. Кроме того, докажите, что  $K_n$  ( $n \geq 3$ ) и  $K_{m,n}$  ( $m, n \geq 2$ ) ориентируемы, и найдите в явном виде ориентацию в каждом из этих случаев. Найдите ориентации графа Петерсена и платоновых графов.
- (\*22h) Покажите, как описать свойства<sup>25</sup> симметрической группы третьей степени (с образующими  $a, b$  и соотношениями  $a^3=b^2=abab=1$ ) с помощью орграфа, изображенного на рис. 22.7.

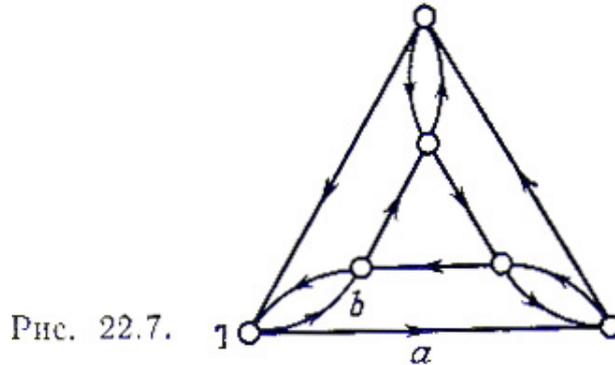


Рис. 22.7.

Найдите подобные орграфы, описывающие симметрическую группу четвертой степени и диэдральные группы порядков восемь и десять.

## § 23. ЭЙЛЕРОВЫ ОРГРАФЫ И ТУРНИРЫ

В этом параграфе мы попытаемся получить для орграфов аналоги некоторых результатов, изложенных в § 6 и 7. Это приведет нас к изучению гамильтоновых орциклов в орграфах специального вида, называемых турнирами.

Связный орграф  $V$  называется **эйлеровым**, если в нем существует замкнутая орцепь, содержащая каждую его дугу; такая орцепь называется **эйлеровой орцепью**. Например, граф, изображенный на рис. 23.1, не является эйлеровым, хотя его основание — эйлеров граф.

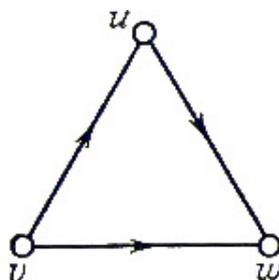


Рис. 23.1.

Наша первая задача — найти условие (аналогичное приведенному в теореме

<sup>25</sup> Здесь речь идет о таких свойствах, как порождение одних элементов группы другими, неприводимость той или иной системы образующих, порядки различных элементов группы и т. д.- *Прим. ред.*

6B), необходимое и достаточное для того, чтобы связный оргграф был эйлеровым. Легко видеть, что необходимым условием эйлеровости оргграфа является его сильная связность.

Нам понадобится несколько предварительных определений. Если  $v$  — вершина оргграфа  $D$ , то назовем **полустепенью исхода**  $v$  (обозначается  $\vec{p}(v)$ ) — стрелка «направлена от»  $v$ ) число дуг оргграфа  $D$ , имеющих вид  $(v, w)$ ; аналогично, **полустепенью захода**  $v$  (обозначается  $\bar{p}(v)$ ) назовем число дуг из  $D$  вида  $(v, w)$ . Отсюда сразу следует, что сумма полустепеней захода всех вершин оргграфа  $D$  равна сумме их полустепеней исхода, поскольку каждая дуга из  $D$  «участвует» в каждой сумме ровно один раз. Будем называть этот результат **орлеммой о рукопожатиях!**

Для дальнейшего полезно ввести еще два понятия; **источником** оргграфа  $D$  назовем вершину, у которой полустепень захода равна нулю; **стоком** оргграфа  $D$  назовем вершину, у которой полустепень исхода равна нулю. Так, на рис. 23.1 вершина  $v$  является источником, а  $w$  — стоком. Заметим, что эйлеров оргграф (кроме тривиального оргграфа, не содержащего дуг) не может иметь ни источников, ни стоков.

Теперь можно сформулировать основную теорему об эйлеровых оргграфах.

ТЕОРЕМА 23А.

*Связный оргграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда  $\vec{p}(v) = \bar{p}(v)$  для каждой его вершины  $v$ .*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 6B и предлагается читателю в качестве упражнения. //

Предоставим читателю дать определение полуэйлерова оргграфа и доказать результаты, аналогичные следствиям 6C и 6D.

Как можно было ожидать, соответствующее изучение гамильтоновых орциклов оказывается гораздо менее успешным. Оргграф  $D$  называется **гамильтоновым**, если в нем существует орцикл, включающий каждую его вершину. Оргграф, содержащий простую орцепь, проходящую через каждую вершину, называется **полугамильтоновым**. О гамильтоновых оргграфах известно очень мало; к тому же, некоторые теоремы о гамильтоновых графах, по-видимому, нелегко (если вообще возможно) обобщить на оргграфы. Естественно спросить, обобщается ли на оргграфы теорема Дирака (теорема 7А). Одно такое обобщение принадлежит Гуйя-Ури; доказательство этого утверждения значительно сложнее, чем доказательство теоремы Дирака, и выходит за рамки этой книги.<sup>26</sup>

ТЕОРЕМА 23В.

*Пусть  $D$  — сильно связный оргграф, имеющий  $n$  вершин. Если*

<sup>26</sup> Доказательство этой теоремы можно найти в книге С. Berge, Graphs and hypergraphs, North-Holland, 1973, p. 196.- Прим. ред.

$\bar{r}(v) \geq n/2$  и  $\bar{r}(v) \geq n/2$  для любой его вершины  $v$ , то  $D$  является гамильтоновым орграфом. //

Кажется, что получать результаты в этом направлении не очень просто, поэтому ограничимся рассмотрением вопроса о том, какие типы орграфов являются гамильтоновыми. В этом аспекте широко известен один тип орграфов — турниры; для них соответствующие результаты принимают особенно простую форму.

**Турниром** называется орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной дугой (рис. 23.2). Основанием для выбора такого названия служит то, что подобные орграфы можно использовать для записи результатов теннисных или любых других турниров, в которых не разрешены ничьи. Например, на рис. 23.2 представлены результаты турнира, в котором команда  $z$  нанесла поражение команде  $w$ , но проиграла команде  $v$ , и т. д.

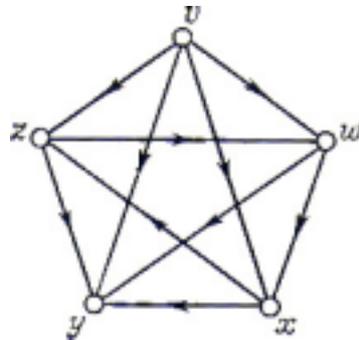


Рис. 23.2

Поскольку турнир может обладать источником или стоком, турниры не являются в общем случае гамильтоновыми орграфами. Однако следующая Теорема (принадлежащая Редери и Камиону) показывает, что всякий турнир «почти гамильтонов».

ТЕОРЕМА 23С.

(i) *Всякий турнир полугамильтонов;* (ii) *всякий сильно связный турнир гамильтонов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

(i) Если турнир имеет меньше четырех вершин, то утверждение, очевидно, верно. Проведем индукцию по числу вершин. Предположим, что любой турнир с  $n$  вершинами полугамильтонов. Пусть  $T$  — турнир с  $n+1$  вершинами, и пусть турнир  $T'$  с  $n$  вершинами получен из  $T$  удалением некоторой вершины  $v$  вместе со всеми инцидентными ей дугами. Тогда по предположению индукции  $T'$  обладает полугамильтоновой простой цепью  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ .

Рассмотрим три случая.

(1) Если  $(v, v_1)$  — дуга в  $T$ , то искомой простой орцепью является

$$v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n.$$

(2) Если  $(v, v_l)$  не является дугой в  $T$  (это означает, что дугой является  $(v_l, v)$ ) и если существует такое  $i$ , что  $(v, v_l)$  дуга в  $T$ , то, выбирая первое  $i$  с таким свойством, получим, что искомой простой орцепью является (см. рис. 23.3)  $v_l \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v \rightarrow v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_n$ .

(3) Если в  $T$  не существует дуги вида  $(v, v_l)$ , то искомой простой орцепью является  $v_l \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$ .

(ii) Докажем более сильный результат, состоящий в том, что сильно связный турнир  $T$  с  $n$  вершинами содержит орциклы длины 3, 4, ...,  $n$ .

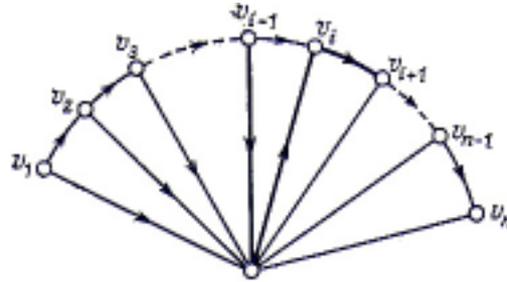


Рис. 23.3.

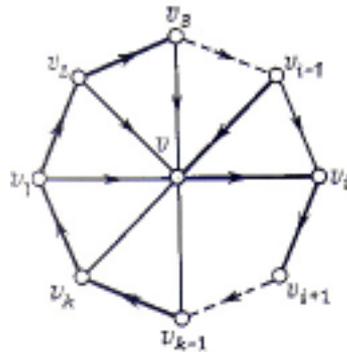


Рис. 23.4.

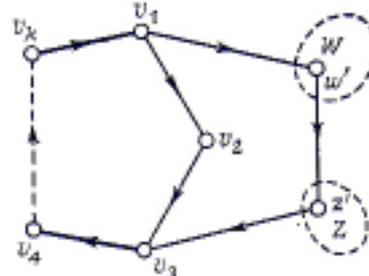


Рис. 23.5.

Сначала покажем, что  $T$  содержит орцикл длины три. Для этого выберем в  $T$  произвольную вершину  $v$  и обозначим через  $W$  множество всех вершин  $w$ , таких, что  $(v, w)$  — дуга в  $T$ , а через  $Z$  — множество всех вершин  $z$ , таких, что  $(z, v)$  — дуга в  $T$ . Так как  $T$  сильно связан, то оба множества  $W$  и  $Z$  непусты, и поэтому в  $T$  найдется дуга вида  $(w', z')$ , где  $w'$  принадлежит  $W$ ,  $z'$  принадлежит  $Z$ . Тогда требуемым циклом длины три является  $v \rightarrow w' \rightarrow z' \rightarrow v$ .

Осталось только показать, что если существует орцикл длины  $k$  ( $k < n$ ), то существует и орцикл длины  $k+1$ . Пусть  $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$  — орцикл длины  $k$ . Предположим сначала, что в  $T$  существует вершина  $v$ , не принадлежащая этому орциклу и обладающая тем свойством, что в  $T$  содержатся дуги вида  $(v, v_i)$  и вида  $(v_j, v)$ . Тогда должна существовать такая вершина  $v_i$ , что и  $(v_{i-1}, v)$  и  $(v, v_i)$  являются дугами в  $T$ ; при этом требуемым орциклом является (рис. 23.4)

$$v_l \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v \rightarrow v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_l$$

Если не существует вершин, обладающих указанным выше свойством, то множество вершин, не содержащихся в орцикле, можно разбить на два непересекающихся множества  $W$  и  $Z$ , где  $W$  есть множество таких вершин  $w$ ,

что  $(v_i, w)$  для любого  $i$  является дугой, а  $Z$ , есть множество таких вершин  $z$ , что  $(z, v_i)$  для любого  $i$  является дугой. Так как  $T$  сильно связан, то оба множества  $W$  и  $Z$ , непусты, и поэтому в  $T$  найдется дуга вида  $(w', z')$ , где  $w'$  принадлежит  $W$ , а  $z'$  принадлежит  $Z$ . Тогда требуемым орциклом будет (рис. 23.5)  $v_1 \rightarrow w' \rightarrow z' \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_k \rightarrow v_1$ . //

## УПРАЖНЕНИЯ

- (23a) В турнире, изображенном на рис. 23.6, найдите (i) орциклы длин три, четыре, пять; (ii) эйлерову орцепь; (iii) гамильтонов орцикл.

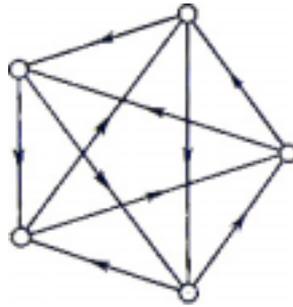


Рис. 23.6.

- (23b) Покажите, что в турнире не может содержаться больше одного источника и больше одного стока.
- (23c) Найдите такую циклическую расстановку девяти единиц, девяти двоек и девяти троек, в которой каждое из двадцати семи трехзначных чисел, составленных из единиц, двоек и троек (например, 111, 233 и т. д.) встречается ровно один раз. (Указание: постройте граф, вершинами которого являются пары целых чисел, а дуги соединяют  $ij$  с  $kl$  в том и только в том случае, если  $j=k$ ; найдите в нем эйлерову орцепь.)
- (23d) Пусть  $T$  — турнир с  $n$  вершинами; обозначим через  $\Sigma$  суммирование по всем вершинам  $v$  из  $T$ ; докажите, что (i)  $\Sigma \vec{\rho}(v) = \Sigma \bar{\rho}(v)$ ; (ii)  $\Sigma (\vec{\rho}(v))^2 = \Sigma (\bar{\rho}(v))^2$ .
- (23e) Турнир  $T$  называется **несводимым**, если множество его вершин нельзя разбить на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$  так, чтобы каждая дуга турнира  $T$ , соединяющая вершины из разных множеств ( $V_1$  и  $V_2$ ) была направлена из  $V_1$  в  $V_2$ . Докажите, что турнир несводим тогда и только тогда, когда он сильно связан.
- (23f) Турнир  $T$  называется **транзитивным**, если существование дуг  $(u, v)$  и  $(v, w)$  влечет за собой существование дуги  $(u, w)$ . Дайте интерпретацию этого определения на языке теннисных турниров и покажите, что в случае транзитивного турнира команды можно упорядочить «по силе»: каждая конкретная команда сильнее всех остальных, следующих за ней в данном упорядочении.
- (23g) Используя результат предыдущего упражнения, докажите, что (i) итранзитивный турнир, имеющий по крайней мере две вершины, не может быть сильно связным; (ii) каждый транзитивный турнир обладает

единственной полугамильтоновой простой орцепью.

(23h) **Выигрышем**<sup>27</sup> вершины турнира назовем ее полустепень исхода; набором выигрышей турнира назовем набор выигрышей его вершин, расположенных в неубывающем порядке (так, например, **набор выигрышей** турнира, изображенного на рис. 23.2, имеет вид  $(0, 2, 2, 2, 4)$ ). Докажите, что если  $(s_1, \dots, s_n)$  — набор выигрышей турнира  $T$ , то (i)  $s_1 + \dots + s_n = n(n-1)/2$ ; (ii) для любого положительного целого  $k < n$  имеем  $s_1 + \dots + s_k \geq k(k-1)/2$ , причем строгое неравенство для любого значения  $k$  имеет место тогда и только тогда, когда  $T$  — сильно связный турнир; (iii) для любого  $k$  имеем  $(k-1)/2 \leq s_k \leq (n+k-2)/2$ ; (iv)  $T$  транзитивен тогда и только тогда, когда  $s_k = k-1$  для всех  $k$ .

(\*23i) Докажите, что порядок группы автоморфизмов турнира должен быть нечетным.

(\*23j) Пусть  $T_n$  — турнир с  $n$  вершинами, и пусть  $c(T_n)$  обозначает число орциклов длины три в  $T_n$ . Докажите, что если выигрыш вершины  $v_i$  равен  $s_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), то

$$c(T_n) = C_n^3 - \sum_{i=1}^n C_{s_i}^2 = \frac{1}{24}(n^3 - n) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( s_i - \frac{1}{2}(n-1) \right)^2.$$

Выведите отсюда, что  $c(T_n) \leq (n^3 - n)/24$  при нечетном  $n$ , и получите соответствующую оценку для четного  $n$ .

(\*23k) **Двудольным турниром** называется орграф, полученный из полного двудольного графа приписыванием направления каждому ребру. Выясните (доказав или приведя контрпримеры), переносится ли на двудольные турниры теорема 23С.

## § 24. ЦЕПИ МАРКОВА

▲ Как можно было ожидать, орграфы возникают во многих «жизненных» ситуациях. Не пытаясь охватить большое число таких ситуаций, ограничимся рассмотрением двух из них, а читателя, интересующегося дальнейшими приложениями, отошлем к гл. 6 книги Басакера и Саати [2]. Те два приложения, которые мы здесь рассмотрим, были выбраны отчасти потому, что они интересны сами по себе, а частично из-за того, что их изложение не требует предварительного введения большого числа новых терминов. Начнем с не очень глубокого, но тем не менее поучительного приложения теории орграфов к изучению цепей Маркова; другое приложение — изучение потоков в сетях — будет обсуждаться в следующей главе.

Рассмотрим сначала хорошо известную задачу о пьянице, стоящем точно между двумя своими любимыми кабачками: «Золотая цепь» и «Источник и сток» (рис. 24.1).

<sup>27</sup> Используется также термин «количество очков». — Прим. ред.

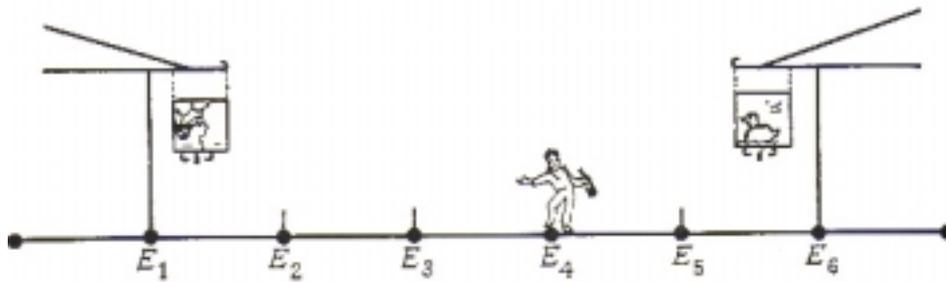


Рис. 24.1.

Каждую минуту он либо передвигается на десять метров в сторону первого кабачка (с вероятностью  $1/2$ ), либо в сторону второго кабачка (с вероятностью  $1/3$ ), либо остается там, где стоял (с вероятностью  $1/6$ ); такое поведение называется одномерным **случайным блужданием**. Будем также предполагать, что оба кабачка являются «поглощающими» в том смысле, что если пьяница попадает в один из них, то он там и остается. Зная расстояние между двумя кабачками и начальное положение пьяницы, можно поставить несколько вопросов, например: в каком кабачке он очутится с большей вероятностью и какое наиболее вероятное время ему понадобится, чтобы попасть туда?

Чтобы исследовать эту задачу подробнее, предположим, что расстояние между кабачками равно пятидесяти метрам и что наш пьяница находится в двадцати метрах от кабачка «Источник и сток». Если места, где он может остановиться, обозначить через  $E_1, \dots, E_6$  ( $E_1$  и  $E_6$  — сами кабачки), то его начальное положение  $E_4$  можно задать вектором  $x = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ ,  $i$ -я компонента которого равна вероятности того, что он первоначально находится в  $E_i$ . Далее, по прошествии одной минуты вероятности его местоположения описываются вектором  $(0, 0, 1/2, 1/6, 1/3, 0)$ , а через две минуты — вектором  $(0, 1/4, 1/6, 13/36, 1/9, 1/9)$ . Ясно, что непосредственное вычисление вероятности его нахождения в заданном месте по прошествии  $k$  минут становится затруднительным. Оказалось, что удобнее всего ввести для этого матрицу перехода.

Пусть  $p_{ij}$  — вероятность того, что он переместится из  $E_i$  в  $E_j$  за одну минуту; например,  $p_{23} = 1/3$  и  $p_{24} = 0$ . Эти вероятности  $p_{ij}$  называют **вероятностями перехода**, а  $(6 \times 6)$ -матрицу  $P = (p_{ij})$  называют **матрицей перехода** (см. рис. 24.2);

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 24.2.

заметим, что каждый элемент матрицы  $P$  неотрицателен и что сумма элементов любой из строк равна единице. Из всего этого следует, что если  $x$  — начальный вектор-строка, определенный выше, то местоположение пьяницы по прошествии одной минуты описывается вектором-строкой  $xP$ , а после  $k$

минут — вектором  $xP^k$ . Другими словами, 1-я компонента вектора  $xP^k$  определяет вероятность того, что по истечении  $k$  минут пьяница оказался в  $E_l$ .

Можно несколько обобщить эти понятия. Назовем **вектором вероятностей** вектор-строку, все компоненты которого неотрицательны и дают в сумме единицу. Тогда **матрица перехода** определяется как квадратная матрица, в которой каждая строка является вектором вероятностей. Теперь мы можем определить **цепь Маркова** (или просто **цепь**) как пару  $(P, x)$ , где  $P$  есть  $(n \times n)$ -матрица перехода, а  $x$  есть  $(1 \times n)$ -вектор-строка. Если каждый элемент  $p_{ij}$  из  $P$  рассматривать как вероятность перехода из позиции  $E_i$  в позицию  $E_j$ , а  $x$  — как начальный вектор вероятностей, то мы приходим к классическому понятию дискретной стационарной цепи Маркова, которое можно найти в книгах по теории вероятностей (см., например, Феллер [14]). Позиции  $E_i$  обычно называются **состояниями** цепи, и цель этого параграфа — описать различные способы их классификации.

В оставшейся части параграфа нас главным образом будет интересовать следующее: можно ли попасть из одного данного состояния в другое, и если да, то за какое наименьшее время (например, в задаче о пьянице из  $E_4$  в  $E_1$  можно попасть за три минуты и вообще нельзя попасть из  $E_1$  в  $E_4$ ). Следовательно, мы в основном будем интересоваться не самими вероятностями  $p_{ij}$  а тем, положительны они или нет. Тогда появляется надежда, что все эти данные удастся представить в виде орграфа, вершины которого соответствуют состояниям, а дуги указывают на то, можно ли перейти из одного состояния в другое за одну минуту. Более точно, если каждое состояние  $E_i$  представлено соответствующей ему вершиной  $v_i$ , то, проводя дугу из  $v_i$  в  $v_j$  для тех и только тех вершин, для которых  $p_{ij} \neq 0$ , мы и получим требуемый орграф. Кроме того, этот орграф можно определить при помощи его матрицы смежности, если заменить каждый ненулевой элемент матрицы  $P$  на единицу. Мы будем называть этот орграф **ассоциированным орграфом** данной цепи Маркова; ассоциированный орграф одномерного случайного блуждания, связанного с задачей о пьянице, изображен на рис. 24.3. Другой пример: если цепь Маркова имеет матрицу перехода, приведенную на рис. 24.4, то ассоциированный орграф этой цепи выглядит так, как показано на рис. 24.5.

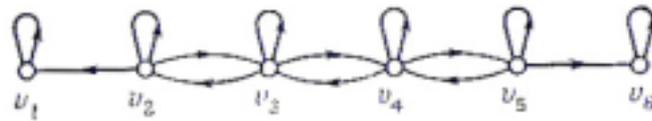


Рис. 24.3.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 24.4.

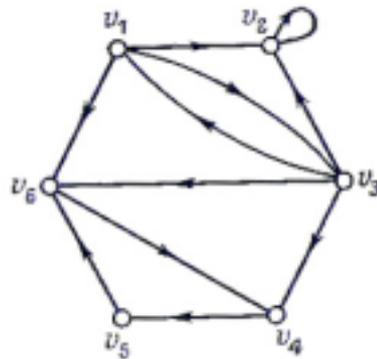


Рис. 24.5.

Теперь ясно, что в цепи Маркова из состояния  $E_i$  в состояние  $E_j$  у можно попасть в том и только в том случае, если в ассоциированном орграфе существует орцепь из  $v_i$  в  $v_j$ , и что наименьшее возможное время попадания равно длине кратчайшей из таких орцепей. Цепь Маркова, в которой из любого состояния можно попасть в любое другое, называется **неприводимой**. Ясно, что цепь Маркова неприводима тогда и только тогда, когда ее ассоциированный орграф сильно связан. Заметим, что ни одна из описанных выше цепей не является неприводимой.

При дальнейших исследованиях принято различать те состояния, в которые мы продолжаем возвращаться независимо от продолжительности процесса, и те, в которые мы попадаем несколько раз и никогда более не возвращаемся. Более точно это выглядит так: если начальное состояние есть  $E_i$  и вероятность возвращения в  $E_i$  на некотором более позднем шаге равна единице, то  $E_i$  называется **возвратным** (или **рекуррентным**) состоянием; в противном случае состояние  $E_i$  называется **невозвратным**. В задаче о пьянице, например, очевидно, что состояния  $E_1$  и  $E_6$  являются возвратными, тогда как все другие состояния невозвратны. В более сложных примерах вычисление нужных вероятностей становится очень хитрым делом, и поэтому проще бывает классифицировать состояния, анализируя ассоциированный орграф цепи. Нетрудно понять, что состояние  $E_i$  возвратно тогда и только тогда, когда существование простой орцепи из  $v_i$  в  $v_j$  в ассоциированном орграфе влечет за собой существование простой орцепи из  $v_j$  в  $v_i$ . В орграфе, изображенном на рис. 24.5, существует простая орцепь из  $v_1$  в  $v_4$ , но нет ни одной орцепи из  $v_4$  в  $v_1$ : следовательно, состояние  $E_1$  и аналогично  $E_3$  невозвратны ( $E_2$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  и  $E_6$  возвратны). Состояние (такое, как  $E_2$ ), из которого нельзя попасть ни в какое другое, называется **поглощающим состоянием**.

Другой прием классификации состояний опирается на понятие периодичности состояний. Состояние  $E_i$  цепи Маркова называется **периодическим с периодом  $t$  ( $t \neq 1$ )**, если в  $E_i$  можно вернуться только по

истечении времени, кратного  $t$ ; если такого  $t$  не существует, то состояние  $E_i$  называется **непериодическим**. Очевидно, что каждое состояние  $E_i$ , для которого  $p_{ij} \neq 0$ , непериодическое; следовательно, каждое поглощающее состояние непериодическое. В задаче о пьянице не только поглощающие состояния  $E_1$  и  $E_6$ , но и все остальные являются непериодическими. С другой стороны, во втором примере (рис. 24.5) поглощающее состояние  $E_2$ , — единственное непериодическое состояние, поскольку  $E_1$  и  $E_3$  имеют период два, а  $E_4$ ,  $E_5$ , и  $E_6$  — период три. Используя терминологию орграфов, легко показать, что состояние  $E_i$  является периодическим с периодом  $t$  тогда и только тогда, когда в ассоциированном орграфе длина каждой замкнутой орцепи, проходящей через  $v_i$  кратна  $t$ .

И, наконец, для полноты изложения введем еще одно понятие: назовем состояние цепи Маркова **эргодическим**, если оно одновременно возвратно и непериодично; если любое состояние цепи Маркова является эргодическим, то назовем ее **эргодической цепью**. Эргодические цепи очень важны во многих отношениях. Пример такой цепи дан в упр. 24е.

## УПРАЖНЕНИЯ

- (24a) Допустим, что в задаче о пьянице введено дополнительное условие: из одного кабачка его выгоняют сразу, как только он туда попадет, и он оказывается в соседней с этим кабачком точке. Как это отразится на классификации состояний? Изменится ли ответ, если то же самое будет происходить обоих кабачках?
- (24b) Сформулируйте задачу о двумерном случайном блуждании и классифицируйте состояния соответствующей цепи Маркова.
- (24c) Покажите, что если  $P$  и  $Q$  — матрицы перехода, то  $PQ$  тоже будет матрицей перехода; что можно сказать об орграфах, ассоциированных с  $P$ ,  $Q$  и  $PQ$ ?
- (24d) Покажите, как можно определить бесконечные цепи Маркова и постройте одну такую цепь, в которой каждое состояние невозвратно. Покажите также, что любая конечная цепь Маркова имеет по меньшей мере одно возвратное состояние; выведите отсюда, что если конечная цепь Маркова неприводима, то каждое ее состояние возвратно.
- (24e)  $n$  человек, сидящих за круглым столом, играют в кости. Если у игрока, бросающего кость, выпадает нечетное число очко то он отдает ее своему соседу слева; если выпадает 2 или 4 очка, то он отдает кость игроку, сидящему справа от не через одного; если выпадает 6 очков, то он оставляет кость себе и бросает ее снова. Докажите, что цепь Маркова, соответствующая такой игре, эргодична.
- (24f) Что можно сказать о состояниях цепи Маркова, если ее ассоциированный орграф является (i) гамильтоновым орграфом; (ii) турниром? ▲

## 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

Они лепили из него все, что хотели, —

все, что начинается на букву М...

Льюис Кэрролл<sup>28</sup>

Результаты этой главы носят более комбинаторный характер, чем результаты всех предыдущих глав, хотя, как мы увидим, они тесно связаны с теорией графов. Сначала мы обсудим хорошо известную «теорему о свадьбах», принадлежащую Филипу Холлу, и некоторые приложения этой теоремы к таким вопросам, как построение латинских квадратов и составление расписаний. Затем в § 28 будет изложена теорема Менгера о числе попарно непересекающихся простых цепей графа, связывающих данную пару вершин. В §29 мы приведем другую формулировку теоремы Менгера, известную как теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Эта теорема чрезвычайно важна в связи с изучением потоков в сетях и исследованием транспортных задач.

### § 25. ТЕОРЕМА ХОЛЛА О СВАДЬБАХ

Теорема о свадьбах, доказанная Филипом Холлом в 1935 г., отвечает на следующий вопрос, известный под названием **задачи о свадьбах**: рассмотрим некоторое конечное множество юношей, каждый из которых знаком с несколькими девушками; спрашивается, при каких условиях можно женить юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке? (Будем считать, что полигамия не разрешена; «общий случай» будет рассмотрен в упр. 25d) Например, если имеется четверо юношей  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  и пять девушек  $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ , а отношения знакомства между ними показаны в таблице на рис. 25.1, то возможно следующее решение:  $b_1$  женится на  $g_4$ ,  $b_2$  — на  $g_1$ ,  $b_3$  — на  $g_3$ , а  $b_4$  — на  $g_2$ .

---

<sup>28</sup> «Приключения Алисы в стране чудес», пересказ Б. Захадера. Выбор такого эпиграфа объясняется тем, что данная глава в английском оригинале называется «Matching, Marriage and Menger's Theorem». — Прим. ред.

юноша	девушки, с которыми знаком юноша
$b_1$	$g_1, g_4, g_5$
$b_2$	$g_1$
$b_3$	$g_2, g_3, g_4$
$b_4$	$g_2, g_4$

Рис. 25.1.

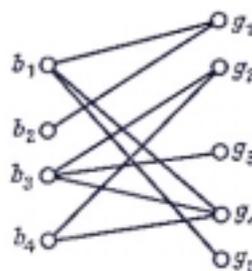


Рис. 25.2.

Эту задачу можно представить графически, взяв двудольный граф  $G$  с множеством вершин, разделенным на два непересекающихся подмножества  $V_1$  и  $V_2$  (представляющих юношей и девушек соответственно), и соединив ребром каждого юношу со знакомой ему девушкой. На рис. 25.2 изображен граф  $G$ , соответствующий ситуации, показанной на рис. 25.1.

**Совершенным паросочетанием** из  $V_1$  в  $V_2$  в двудольном графе  $G(V_1, V_2)$  называется взаимно однозначное соответствие между вершинами из  $V_1$  и подмножеством вершин из  $V_2$ , обладающее тем свойством, что соответствующие вершины соединены ребром. Ясно, что задачу о свадьбах можно выразить в терминах теории графов следующим образом: если  $G=G(V_1, V_2)$  — двудольный граф, то при каких условиях в  $G$  существует совершенное паросочетание из  $V_1$  в  $V_2$ ?

Используя прежнюю «матримониальную» терминологию, можно сформулировать следующее очевидное утверждение: необходимое условие для существования решения в задаче о свадьбах состоит в том, что любые  $k$  юношей из данного множества должны быть знакомы (в совокупности) по меньшей мере с  $k$  девушками (для всех целых  $k$ , удовлетворяющих неравенствам  $1 \leq k \leq m$ , где через  $m$  обозначено общее число юношей). Необходимость этого условия сразу вытекает из того, что если оно не верно для какого-нибудь множества из  $k$  юношей, то мы не сможем женить требуемым способом даже этих  $k$  юношей, не говоря уже об остальных.

Поразительно, что это очевидное необходимое условие является в то же время и достаточным. В этом и состоит **теорема Холла о свадьбах**; вследствие ее важности мы дадим три доказательства теоремы Холла. Первое из них принадлежит Халмошу и Вогену.

ТЕОРЕМА 25А. (Ф. Холл 1935)

*Решение задачи о свадьбах существует тогда и только тогда, когда любые  $k$  юношей из данного множества знакомы в совокупности по меньшей мере с  $k$  девушками ( $1 \leq k \leq m$ ).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как было отмечено выше, необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности воспользуемся индукцией и допустим, что утверждение справедливо, если число юношей меньше  $m$ . (Ясно, что при

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

$m=1$  теорема верна.) Предположим теперь, что число юношей равно  $m$ , и рассмотрим два возможных случая.

(i) Сначала будем считать, что любые  $k$  юношей ( $1 \leq k < m$ ) в совокупности знакомы по меньшей мере с  $k+1$  девушками (т. е. что наше условие всегда выполняется «с одной лишней девушкой»). Тогда, если взять любого юношу и женить его на любой знакомой ему девушке, для других  $m-1$  юношей останется верным первоначальное условие. По предположению индукции мы можем женить этих  $m-1$  юношей; тем самым доказательство в первом случае завершено.

(ii) Предположим теперь, что имеются  $k$  юношей ( $k < m$ ), которые в совокупности знакомы ровно с  $k$  девушками. По индуктивному предположению этих  $k$  юношей можно женить. Остаются еще  $m-k$  юношей, но любые  $h$  из них ( $1 \leq h \leq m-k$ ) должны быть знакомы по меньшей мере с  $h$  девушками из оставшихся, поскольку в противном случае эти  $h$  юношей вместе с уже выбранными  $k$  юношами будут знакомы меньше, чем с  $h+k$  девушками, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, для этих  $m-k$  юношей выполнено первоначальное условие, и по предположению индукции мы можем их женить так, чтобы каждый был счастлив. Доказательство теоремы закончено. //

Теорему Холла можно также сформулировать на языке паросочетаний в двудольном графе; напомним читателю, что число элементов множества  $S$  обозначается через  $|S|$ .

**СЛЕДСТВИЕ 25В.**

*Пусть  $G=G(V_1, V_2)$  — двудольный граф, и для любого подмножества  $A$  множества  $V_1$  пусть  $\varphi(A)$  — множество тех вершин из  $V_2$ , которые смежны по крайней мере с одной вершиной из  $A$ . Тогда совершенное паросочетание из  $V_1$  в  $V_2$ , существует в том и только в том случае, если  $|A| \leq |\varphi(A)|$  для каждого подмножества  $A$  из  $V_1$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство этого следствия является просто переводом изложенного выше доказательства на язык теории графов. //

## УПРАЖНЕНИЯ

(25a) Строительному управлению для выполнения работы требуются каменщик, плотник, водопроводчик и слесарь. На эти должности имеются пять претендентов: один может работать каменщиком, другой — плотником, третий — каменщиком и водопроводчиком и еще двое имеют по две специальности — водопроводчика и слесаря. Можно ли охватить

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

весь фронт работ (используя четверых из этих пяти рабочих<sup>29</sup>)? Если да, то подробно проверьте выполнение условия теоремы Холла.

(25b) Найдите еще три «примера из жизни» на применение теоремы Холла.

(25c) Дайте полное доказательство следствия 25В.

(25d) («Задача о гареме».) Обозначим через  $V$  некоторое множество юношей и предположим, что каждый юноша из  $V$  желает взять в жены более чем одну знакомую девушку. Найдите необходимые и достаточные условия существования решения этой задачи. (*Указание:* замените каждого юношу несколькими тождественными ему экземплярами и примените затем теорему Холла.)

(25e) Покажите, что если каждый юноша дружит с  $r$  девушками, а каждая девушка дружит с  $r$  юношами ( $r \geq 1$ ), то задача о свадьбах имеет решение; выведите отсюда, что регулярный двудольный граф обладает совершенным паросочетанием.

(\*25f) Предположим, что выполнено условие теоремы о свадьбах и что каждый из  $m$  юношей знаком по меньшей мере с  $t$  девушками; докажите индукцией по  $m$ , что супружеские пары могут быть составлены по крайней мере  $t!$  способами, если  $t \leq m$  и по крайней мере  $t!/(t-m)!$  способами, если  $t > m$ .

(\*26g) Допустим, что условие теоремы о свадьбах не выполнено; найдите выражение для максимального числа юношей, которые могут жениться на знакомых им девушках.

## § 26. ТЕОРИЯ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

Данный параграф посвящен еще одному доказательству теоремы Холла, использующему язык теории трансверсалей. Перевод этого доказательства в «матримониальную» терминологию мы предоставляем читателю.

Напомним, что в примере из предыдущего параграфа (см. рис. 25.1) мы имели следующие множества девушек, знакомых четверем юношам:  $\{g_1, g_4, g_5\}$ ,  $\{g_1\}$ ,  $\{g_2, g_3, g_4\}$ ,  $\{g_2, g_4\}$ . Решение этой задачи было получено нахождением четырех различных девушек, по одной из каждого такого множества. В общем случае, если  $E$  — непустое конечное множество и  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$  — семейство (не обязательно различных) непустых его подмножеств, **трансверсалью** (или **системой различных представителей**) для  $\mathcal{S}$  называется подмножество множества  $E$ , состоящее из  $m$  элементов: по одному из каждого множества  $S_i$ .

Рассмотрим другой пример. Предположим, что  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , а  $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$ ,  $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$ ,  $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$ . Здесь невозможно найти пять различных элементов из  $E$  — по одному из каждого подмножества  $S_i$ , другими словами, это семейство  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_5)$  не имеет трансверсали. Заметим, однако,

<sup>29</sup> Предполагается, естественно, что на каждое свободное место можно принять только одного рабочего, имеющего соответствующую специальность. — *Прим. ред.*

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

что его подсемейство  $\mathcal{F}=(S_1, S_2, S_3, S_5)$  имеет трансверсаль, например  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Трансверсаль произвольного подсемейства семейства  $\mathcal{F}$  будем называть **частичной трансверсалью** для  $\mathcal{F}$ ; в нашем примере семейство  $\mathcal{F}$  имеет несколько частичных трансверсалей (например,  $\{1, 2, 3, 6\}$ ,  $\{2, 3, 6\}$ ,  $\{1, 5\}$ ,  $\emptyset$  и т. д.). Ясно, что любое подмножество частичной трансверсали само является частичной трансверсалью.

Естественно спросить: при каких условиях данное семейство подмножеств некоторого множества имеет трансверсаль? Легко увидеть связь между этой задачей и задачей о свадьбах, если взять за  $E$  множество девушек, а за  $S_i$  — множество девушек, знакомых юноше  $b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ); трансверсалью в этом случае является множество из  $m$  девушек, такое, что каждому юноше соответствует ровно одна (знакомая ему) девушка. Следовательно, теорема 25А дает необходимое и достаточное условие существования трансверсали для данного семейства множеств. Сформулируем теорему Холла для этого случая и дадим другое ее доказательство, принадлежащее Р. Радо.

### ТЕОРЕМА 26А.

*Пусть  $E$  — непустое конечное множество и  $\mathcal{F}=(S_1, \dots, S_m)$  — семейство непустых его подмножеств; тогда  $\mathcal{F}$  имеет трансверсаль в том и только в том случае, если для любых  $k$  подмножеств  $S_i$  их объединение содержит по меньшей мере  $k$  элементов ( $1 \leq k \leq m$ ).*

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности установим, что если одно из подмножеств (скажем,  $S_1$ ) содержит более одного элемента, то можно удалить один элемент из  $S_1$ , не нарушив условия теоремы. Повторением этой процедуры мы добьемся сведения задачи к тому случаю, когда каждое подмножество содержит только один элемент. Тогда утверждение станет очевидным.

Осталось обосновать законность этой «процедуры сведения». Предположим, что  $S_1$  содержит элементы  $x$  и  $y$ , удаление каждого из которых нарушает условие теоремы. Тогда существуют подмножества  $A$  и  $B$  множества  $\{2, 3, \dots, m\}$ , обладающие тем свойством, что

$$|\bigcup_{j \in A} S_j \cup (S_1 - \{x\})| \leq |A| \quad \text{и} \quad |\bigcup_{j \in B} S_j \cup (S_1 - \{y\})| \leq |B|.$$

Но эти два неравенства приводят к противоречию, поскольку

$$|A| + |B| + 1 = |A \cup B| + |A \cap B| + 1 \leq \bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_1 + \bigcup_{j \in A \cap B} S_j \leq (\text{по условию})$$

$$\leq \bigcup_{j \in A} S_j \cup (S_1 - \{x\}) + \bigcup_{j \in B} S_j \cup (S_1 - \{y\}) \leq (\text{так как } |S_1| \geq 2) \leq |A| + |B|$$

(по предположению). //

Прелесть этого доказательства в том, что оно проводится по существу

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

лишь в один шаг в отличие от доказательства Халмоша — Вогена, которое предполагает исследование двух отдельных случаев. (Однако доказательство Радо труднее перевести на весьма наглядный и привлекательный «матримониальный» язык!)

Прежде чем перейти к некоторым приложениям теоремы Холла, удобно, как нам кажется, доказать два следствия, которые понадобятся позже (§ 33).

**СЛЕДСТВИЕ 26В.**

*В тех же обозначениях, что и выше,  $\mathcal{S}$  имеет частичную трансверсаль мощности  $t$  тогда и только тогда, когда для любых  $k$  подмножеств  $S_i$  их объединение содержит по меньшей мере  $k+t$  элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Требуемый результат можно получить, применив теорему 26А к семейству  $\mathcal{S}' = S_1 \cup \dots, S_m \cup D$ , где  $D$  — произвольное множество, не пересекающееся с  $E$  и состоящее из  $m-t$  элементов. Заметим, что  $\mathcal{S}$  имеет частичную трансверсаль мощности  $t$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{S}'$  имеет трансверсаль. //

**СЛЕДСТВИЕ 26С.**

*Если  $E$  и  $\mathcal{S}$  такие же, как и прежде, а  $X$  — любое подмножество из  $E$ , то  $X$  содержит частичную трансверсаль мощности  $t$  для  $\mathcal{S}$  тогда и только тогда, когда для каждого подмножества  $A$  множества  $\{1, \dots, m\}$*

$$|(\bigcup_{j \in A} S_j) \cap X| \geq |A| + t - m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточно применить предыдущее следствие к семейству  $\mathcal{S}_X = (S_1 \cap X, \dots, S_m \cap X)$ . //

### УПРАЖНЕНИЯ

(26а) Какие из следующих семейств подмножеств множества  $E = \{1, \dots, 5\}$  имеют трансверсали:

(1)  $(\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, 5\})$ ;

(2)  $(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 5\})$ ;

(3)  $(\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{3\})$ ;

(4)  $(\{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\})$ ?

(26б) Пусть  $E$  — множество букв в слове MATROIDS; сколько трансверсалей имеет следующее семейство подмножеств из  $E$ : (STAR, ROAD, MOAT,

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА RIOT, RIDS, DAMS, MIST)?

- (26c) Перепишите доказательство теоремы Холла, данное Халмошем и Вогеном, на языке теории трансверсалей; перепишите также доказательство Радо на языке (i) паросочетаний в двудольном графе; (ii) свадеб.
- (26d) Пусть  $A$  — данное подмножество множества  $E$  и  $\mathcal{F}$  — семейство непустых подмножеств из  $E$ . Докажите, что трансверсаль для  $\mathcal{F}$ , содержащая  $A$ , существует тогда и только тогда, когда (i)  $\mathcal{F}$  имеет трансверсаль и (ii)  $A$  является частичной трансверсалью для  $\mathcal{F}$ . (Решение этого упражнения, использующее теорию матроидов, будет дано в § 33.)
- (\*26e) Пусть  $E$  и  $\mathcal{F}$  имеют обычный смысл; докажите, что если  $T_1$  и  $T_2$  — трансверсали для  $\mathcal{F}$  и  $x$  — элемент из  $T_1$ , то существует элемент  $y$  из  $T_2$ , обладающий тем свойством, что  $(T_1 - \{x\}) \cup \{y\}$  (множество, полученное из  $T_1$  заменой элемента  $x$  на  $y$ ) тоже является трансверсалью для  $\mathcal{F}$ . Можно ли усмотреть какую-либо связь между этим результатом и [упр. 9g](#)?
- (\*26f) Рангом  $\rho(A)$  подмножества  $A$  из  $E$  называется число элементов в наибольшей частичной трансверсали для семейства  $\mathcal{F}$ , содержащей  $A$ ; покажите, что (i)  $0 \leq \rho(A) \leq |A|$ ; (ii) если  $A \subseteq B \subseteq E$ , то  $\rho(A) \leq \rho(B)$ ; (iii) для любых  $A, B \subseteq E$  имеем  $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ . Эти результаты нам чем-то знакомы, не правда ли?
- (\*26g) Пусть  $E$  — счетное множество, и пусть  $\mathcal{F} = (S_1, S_2, \dots)$  — счетное семейство непустых конечных подмножеств из  $E$ . Определяя трансверсаль для  $\mathcal{F}$  естественным образом, докажите (используя лемму Кёнига), что  $\mathcal{F}$  имеет трансверсаль тогда и только тогда, когда для любых  $k$  подмножеств  $S_i$ , их объединение содержит по меньшей мере  $k$  элементов (для всех конечных  $k$ ). На примере  $E = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $S_1 = \{E\}$ ,  $S_2 = \{1\}$ ,  $S_3 = \{2\}$ ,  $S_4 = \{3\}$ , ... покажите, что этот результат перестает быть верным, если не все  $S_i$  конечны.

### § 27. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ ХОЛЛА

▲ В этом параграфе мы рассмотрим приложения теоремы Холла в четырех различных областях, а именно: (i) при построении латинских квадратов; (ii) при исследовании одной проблемы, касающейся матриц из нулей и единиц; (iii) при раскрашивании ребер двудольного графа; (iv) при изучении вопроса о существовании общей трансверсали для семейств подмножеств некоторого множества (будет вскрыта также связь этой задачи с задачами о составлении расписаний).

#### (1) ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ.

**Латинским**  $(m \times n)$ -прямоугольником называется  $(m \times n)$ -матрица  $M = (m_{ij})$ , элементами которой являются целые числа, удовлетворяющие условиям: (1)

## Глава 8. ПАРСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

$1 \leq m_{ij} \leq n$ , (2) все элементы в каждой строке и в каждом столбце различны. Заметим, что из условий (1) и (2) следует, что  $m \leq n$ ; если  $m = n$ , то латинский прямоугольник называется **латинским квадратом**. К примеру, на рис. 27.1 и 27.2 изображены латинский  $(3 \times 5)$ -прямоугольник и латинский  $(5 \times 5)$ -квадрат. Можно задать следующий вопрос: если дан латинский  $(m \times n)$ -прямоугольник, где  $m < n$ , когда можно присоединить к нему  $n - m$  новых строк так, чтобы получился латинский квадрат? Удивительно, что ответ на этот вопрос: «всегда»!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Рис. 27.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис. 27.2.

**ТЕОРЕМА 27А.**

*Пусть  $M$  — латинский  $(m \times n)$ -прямоугольник, причем  $m < n$ ; тогда  $M$  можно расширить до латинского квадрата добавлением  $n - m$  новых строк.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Докажем, что  $M$  можно расширить до латинского  $(m+1) \times n$ -прямоугольника; повторяя эту процедуру, мы придем к латинскому квадрату.

Пусть  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  и  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$ , где через  $S_i$  обозначено множество, состоящее из тех элементов множества  $E$ , которые не встречаются в  $i$ -м столбце матрицы  $M$ . Если мы сможем доказать, что  $\mathcal{S}$  имеет трансверсаль, то тем самым мы докажем теорему, поскольку элементы этой трансверсали и образуют дополнительную строку. По теореме Холла достаточно доказать, что объединение любых  $k$  множеств  $S_i$  содержит по меньшей мере  $k$  различных элементов. А это очевидно, ибо любое такое объединение содержит  $(n - m)k$  элементов (включая повторения), и если бы в нем было менее  $k$  различных элементов, то по крайней мере один из них повторялся бы более чем  $n - m$  раз, что невозможно. //

### (II) (0, 1)-МАТРИЦЫ.

Другой подход к изучению трансверсалей семейства  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$  непустых подмножеств множества  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  состоит в исследовании **матрицы инцидентий** этого семейства, т. е.  $(m \times n)$ -матрицы  $A = (a_{ij})$ , в которой  $a_{ij} = 1$ , если  $e_j \in S_i$  и  $a_{ij} = 0$  в противном случае. (Любую такую матрицу, все элементы которой равны 0 или 1, мы называем  **$(0, 1)$ -матрицей**.) Назовем **словарным рангом** матрицы  $A$  наибольшее число единиц в  $A$ , никакие две из которых не

лежат в одной и той же строке или в одном и том же столбце. Тогда  $\mathcal{Z}$  имеет трансверсаль в том и только в том случае, если словарный ранг матрицы  $A$  равен  $m$ . Более того, словарный ранг матрицы  $A$  равен в точности числу элементов частичной трансверсали, обладающей наибольшей возможной мощностью. В качестве второго приложения теоремы Холла докажем сейчас известный результат о  $(0,1)$ -матрицах, называемый **теоремой Кёнига-Эгервари**.

ТЕОРЕМА 27В. (КЁНИГ-ЭГЕРВАРИ 1931)

*Словарный ранг  $(0, 1)$ -матрицы  $A$  равен минимальному числу  $\mu$  строк и столбцов, которые в совокупности содержат все единицы из  $A$ .*

ЗАМЕЧАНИЕ.

В качестве иллюстрации этой теоремы рассмотрим матрицу, приведенную на рис. 27.3, которая является матрицей инцидентий семейства  $\mathcal{Z}$ , второго из описанных выше(см.). Ясно, что и ее словарный ранг, и число  $(A$  равны четырем.

$$\begin{matrix}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
 S_1 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 S_2 & 1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 S_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 S_4 & 0 & 1 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\
 S_5 & 1 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 1
 \end{matrix}$$

Рис. 27.3

$$\begin{matrix}
 \overbrace{\quad}^{n-s} & \overbrace{\quad}^s \\
 \left( \begin{array}{cc} M & B \\ \hline O & N \end{array} \right) & \left. \begin{array}{l} \} r \\ \} m-r \end{array} \right.
 \end{matrix}$$

Рис. 27.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Очевидно, что словарный ранг не может превосходить числа  $\mathcal{Z}$ . Чтобы доказать равенство, можно без потери общности предположить, что все единицы из  $A$  содержатся в  $r$  строках и  $s$  столбцах (где  $r+s=\mu$ ) и что строки и столбцы расположены в таком порядке, что в нижнем левом углу матрицы  $A$  находится  $(m-r) \times (n-s)$ -подматрица, полностью состоящая из нулей (рис. 27.4). Если  $i \leq r$ , то определим  $S_i$ , как множество целых чисел  $j \leq n-s$ , таких, что  $a_{ij}=1$ . Нетрудно проверить, что объединение любых  $k$  множеств  $S_i$  содержит по меньшей мере  $k$  целых чисел; поэтому семейство  $\mathcal{Z}=(S_1, \dots, S_r)$  имеет трансверсаль. Отсюда следует, что подматрица  $M$  из  $A$  содержит множество из  $r$  единиц, никакие две из которых не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу. Аналогично, матрица  $N$  содержит множество из  $s$  единиц, обладающих тем же свойством. Таким образом, матрица  $A$  содержит множество из  $r+s$  единиц, никакие две из которых не принадлежат одной и той же строке или одному и тому же столбцу. Тем самым показано, что  $\mu$  не превосходит словарного ранга. //

Мы только что доказали теорему Кёнига-Эгервари с помощью теоремы Холла, а доказательство теоремы Холла о помощью теоремы Кёнига-Эгервари и того проще (см. упр. 27с). Следовательно, эти две теоремы в некотором смысле эквивалентны. Позднее в этой главе мы докажем теорему Менгера и теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе, каждая из которых тоже эквивалентна теореме Холла.

### (III) РЕБЕРНАЯ РАСКРАСКА ГРАФОВ.

В § 20 мы установили, что если  $G$  — полный двудольный граф, наибольшая из степеней вершин которого равна  $\rho$ , то его хроматический класс равен  $\rho$ . Используя один результат из этой главы, покажем, что сформулированное утверждение справедливо и для произвольного двудольного графа.

ТЕОРЕМА 27С.

*Если  $G$  — двудольный граф, наибольшая из степеней вершин которого равна  $\rho$ , то  $\chi_e(G) = \rho$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из результата упр. 3G следует, что существует двудольный граф  $G' = G'(V_1, V_2)$ , который регулярен степени  $\rho$  и содержит  $G$  в качестве подграфа, причем  $|V_1| = |V_2|$ . Из [упр. 25е](#) выводим, что  $G'$  имеет совершенное паросочетание; заметим, что это паросочетание включает каждую вершину графа  $G'$  и что в этом паросочетании любая вершина из  $G$  степени  $\rho$  соответствует другой вершине из  $G$ .

Чтобы доказать, что хроматический класс графа  $G$  равен  $\rho$ , достаточно взять это паросочетание в  $G'$  и окрасить первым цветом те ребра из  $G'$ , которые лежат в  $G$  и инцидентны вершине из  $G$  степени  $\rho$ . Тогда оставшаяся часть графа  $G$  будет двудольным графом с наибольшей из степеней вершин, равной  $\rho - 1$ , и мы можем по индукции установить осуществимость раскраски этой части графа  $G$  в остальные  $\rho - 1$  цветов. Тем самым доказательство завершено. //

### (IV) ОБЩИЕ ТРАНСВЕРСАЛИ.

В заключение этого параграфа коротко обсудим вопрос об общих трансверсалиях. Если  $E$  — непустое конечное множество, а  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$  и  $\zeta = (T_1, \dots, T_m)$  — два семейства его непустых подмножеств, то интересно знать, когда существует **общая трансверсаль** для  $\zeta$  и  $\mathcal{S}$ , т. е. множество, состоящее из  $m$  различных элементов множества  $E$  и являющееся трансверсалью и для  $\zeta$ , и для  $\mathcal{S}$ . Рассмотрим, например, задачу о составлении расписаний. Пусть  $E$  — множество отрезков времени, в которые могут читаться те или иные лекции; обозначим через  $S_i$  множества отрезков времени, в которые данные  $m$  профессоров желают читать лекции, а через  $T_i$  — множества отрезков времени, в которые свободны  $m$  лекционных аудиторий. Тогда, найдя общую трансверсаль

## Глава 8. ПАРСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

для  $\zeta$  и  $\mathcal{S}$ , мы сможем предоставить каждому профессору свободную аудиторию в удобное для него время.

Сформулируем необходимое и достаточное условие для того, чтобы два семейства  $\zeta$  и  $\mathcal{S}$  имели общую трансверсаль; заметим, что теорема 27D сводится к теореме Холла, если положить  $T_j = E$  для  $1 \leq j \leq m$ .

ТЕОРЕМА 27D.

Пусть  $E$  — непустое конечное множество, а  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$  и  $\zeta = (T_1, \dots, T_m)$  — два семейства его непустых подмножеств. Тогда  $\zeta$  и  $\mathcal{S}$  имеют общую трансверсаль в том и только в том случае, если для всех подмножеств  $A$  и  $B$  множества  $\{1, 2, \dots, m\}$

$$|(\bigcup_{i \in A} S_i) \cap (\bigcup_{j \in B} T_j)| \geq |A| + |B| - m.$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

Рассмотрим семейство  $\mathcal{K} = \{U_i\}$  подмножеств множества  $E \cup \{1, \dots, m\}$  (считаем, что  $E$  и  $\{1, \dots, m\}$  не пересекаются), где множеством индексов также является  $E \cup \{1, \dots, m\}$  и где  $U_i = S_i$ , если  $i \in \{1, \dots, m\}$ , и  $U_i = \{i\} \cup \{j : i \in T_j\}$ , если  $i \in E$ .

Нетрудно проверить, что  $\zeta$  и  $\mathcal{S}$  имеют общую трансверсаль тогда и только тогда, когда имеет трансверсаль семейство  $\mathcal{K}$ . Применяя затем теорему Холла к семейству  $\mathcal{K}$ , получаем нужный результат. //

Условия, при которых существует общая трансверсаль для трех семейств непустых подмножеств некоторого множества, пока что не известны, и задача нахождения таких условий кажется очень трудной. Многие попытки решения этой задачи используют теорию матроидов; и действительно, как мы увидим в следующей главе, некоторые задачи теории трансверсалей (например, [упр. 26d](#) и теорема 27D) становятся почти тривиальными, если рассматривать их с точки зрения теории матроидов. Дальнейшие результаты по теории трансверсалей можно найти также у Мирского [10].

### УПРАЖНЕНИЯ

- (27a) Покажите, каким образом таблицу умножения в группе можно рассматривать как латинский квадрат. Приведите пример латинского квадрата, который нельзя получить таким способом.
- (27b) Докажите, что существует по крайней мере  $n!(n-1)! \dots 1!$  латинских  $(n \times n)$ -квадратов. Получите соответствующую нижнюю оценку для числа латинских  $(m \times n)$ -прямоугольников.
- (27c) Покажите, как с помощью теоремы Кёнига-Эгервари вывести теорему Холла.

(27d) С помощью теоремы 27D покажите, что если  $G$  — конечная группа,  $H$  — ее подгруппа и  $G = x_1 H \cup x_2 H \cup \dots \cup x_m H = H y_1 \cup H y_2 \cup \dots \cup H y_m$  — левостороннее и правостороннее разложения группы  $G$  по подгруппе  $H$ , то в  $G$  существуют элементы  $z_1, \dots, z_m$  обладающие тем свойством, что

$$G = z_1 H \cup z_2 H \cup \dots \cup z_m H = H z_1 \cup H z_2 \cup \dots \cup H z_m.$$

(\*27e) Докажите, что если  $A$  является  $(0, 1)$ -матрицей, в которой сумма элементов каждой из строк или каждого из столбцов равна  $k$ , то ее можно представить в виде суммы  $k$  матриц, каждая из которых содержит ровно одну единицу в каждой строке и в каждом столбце. Получите отсюда в качестве следствия первую часть [упр. 25е](#). ▲

## § 28. ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

Здесь мы обсудим одну теорему, тесно связанную с теоремой Холла, которая имеет далеко идущие практические применения. Эта теорема, принадлежащая Менгеру, касается числа простых цепей, соединяющих две данные вершины  $v$  и  $w$  графа  $G$ . К примеру, нас может интересовать, каково максимальное число простых цепей из  $v$  в  $w$ , никакие две из которых не имеют общего ребра, — такие простые цепи называются **реберно непересекающимися**. Или может возникнуть другой вопрос: каково максимальное число простых цепей из  $v$  в  $w$ , никакие две из которых не имеют общей вершины (кроме, разумеется,  $v$  и  $w$ ), — такие цепи называются **вершинно непересекающимися**. (Так, в графе, изображенном на рис. 28.1, имеется четыре реберно непересекающиеся и две вершинно непересекающиеся простые цепи из  $v$  в  $w$ .)

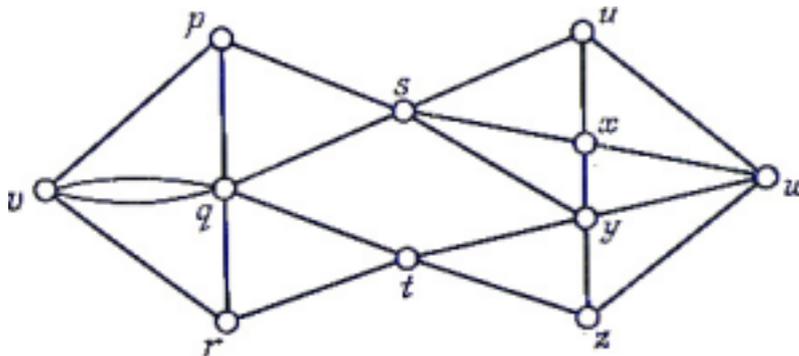


Рис. 28.1.

Аналогично, можно спросить, чему равно максимальное число вершинно непересекающихся или непересекающихся по дугам простых орцепей (определенных очевидным образом), соединяющих две вершины  $v$  и  $w$  некоторого орграфа. В этом случае мы можем, не теряя общности, считать  $v$  источником, а  $w$  — стоком. В основном мы будем иметь дело с графами, а соответствующие рассуждения для орграфов предоставим читателю.

Для исследования этих задач нам понадобится еще несколько определений; всюду здесь будем считать, что  $G$  — связный граф, а  $v$  и  $w$  — две различные

его вершины.

Назовем  $vw$ -разделяющим множеством в  $G$  множество  $E$  ребер графа  $G$ , обладающее тем свойством, что любая простая цепь из  $v$  в  $w$  содержит ребро из  $E$ ; заметим, что всякое  $vw$ -разделяющее множество является и разделяющим множеством в  $G$ . Аналогично,  $vw$ -отделяющим множеством в  $G$  назовем множество  $S$  его вершин (не содержащее  $v$  и  $w$ ), обладающее тем свойством, что любая простая цепь из  $v$  в  $w$  проходит через вершину из  $S$ . Например, на рис. 28.1 множества  $E_1 = \{\{p, s\}, \{q, s\}, \{t, y\}, \{t, z\}\}$  и  $E_2 = \{\{u, w\}, \{x, w\}, \{y, w\}, \{z, w\}\}$  являются  $vw$ -разделяющими, а множества  $V_1 = \{s, t\}$  и  $V_2 = \{p, q, y, z\}$  являются  $vw$ -отделяющими.

Для того чтобы подсчитать число реберно непересекающихся простых цепей из  $v$  в  $w$ , заметим сначала, что если какое-нибудь  $vw$ -разделяющее множество  $E$  содержит  $k$  ребер, то число реберно непересекающихся простых цепей не превосходит  $k$ , поскольку в противном случае некоторое ребро из  $E$  принадлежало бы более чем одной простой цепи. Если к тому же  $E$  является  $vw$ -разделяющим множеством наименьшей возможной мощности, то число реберно непересекающихся простых цепей оказывается в точности равными и, следовательно, каждая такая цепь содержит ровно одно ребро из  $E$ . Этот результат известен как реберная форма теоремы Менгера, хотя в действительности он был впервые доказан Фордом и Фалкерсоном в 1955 г.

ТЕОРЕМА 28А.

*Максимальное число реберно непересекающихся простых цепей, соединяющих две различные вершины  $v$  и  $w$  связного графа  $G$ , равно минимальному числу  $N$  ребер в  $vw$ -разделяющем множестве.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Доказательство, которое мы собираемся предложить, не является конструктивным в том смысле, что оно не дает ни способа получения  $k$  реберно непересекающихся простых цепей для заданного графа  $G$ , ни даже способа нахождения величины  $k$ . Алгоритм, позволяющий решить эти задачи, будет описан в следующем параграфе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как мы установили выше, максимальное число реберно непересекающихся простых цепей, соединяющих  $v$  и  $w$ , не превосходит минимального числа ребер в  $vw$ -разделяющем множестве. Чтобы доказать, что эти числа равны, воспользуемся индукцией по числу ребер в  $G$ . Предположим, что  $G$  содержит  $m$  ребер и что Теорема верна для всех графов, у которых число ребер меньше чем  $m$ . Рассмотрим два возможных случая.

(i) Допустим, что существует  $vw$ -разделяющее множество  $E$  минимальной мощности  $k$ , обладающее тем свойством, что не все его ребра инцидентны  $v$  и не все инцидентны  $w$ . Например, в графе, изображенном на рис. 28.1, таким  $vw$ -разделяющим множеством является множество  $E_1 = \{\{p, s\}, \{q, s\}, \{t, y\},$

$\{t, z\}$ . После удаления из  $G$  ребер, принадлежащих  $E$ , остаются два непересекающихся подграфа  $V$  и  $W$ , содержащие соответственно  $v$  и  $w$ . Определим теперь два новых графа  $G_1$  и  $G_2$ :  $G_1$  получается из  $G$  стягиванием каждого ребра из  $V$  (т. е. сжиманием  $V$  до  $v$ ), а  $G_2$  получается аналогичным стягиванием каждого ребра из  $W$ . (Графы  $G_1$  и  $G_2$ , полученные из графа, изображенного на рис. 28.1, показаны на рис. 28.2; пунктирными линиями обозначены ребра множества  $E_1$ ).

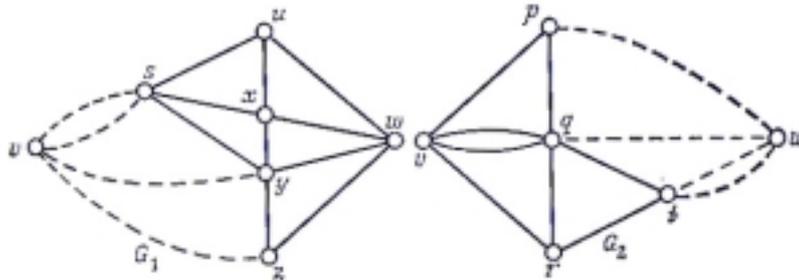


Рис. 28.2.

Поскольку число ребер в  $G_1$  и в  $G_2$  меньше, чем в  $G$ , и поскольку ясно, что  $E$  является  $vw$ -разделяющим множеством минимальной мощности для обоих графов  $G_1$  и  $G_2$ , то по предположению индукции в  $G_1$  существует  $k$  реберно непересекающихся простых цепей из  $v$  и в  $w$ , и то же самое верно для графа  $G_2$ . Комбинируя очевидным образом эти простые цепи, мы получим  $k$  искомым реберно непересекающихся простых цепей в  $G$ .

(ii) Теперь допустим, что каждое  $vw$ -разделяющее множество минимальной мощности  $k$  состоит либо из таких ребер, каждое из которых инцидентно  $v$ , либо только из ребер, инцидентных вершине  $w$ . Таким  $vw$ -разделяющим множеством на рис. 28.1 является, например, множество  $E_1$ . Без потери общности можно считать, что каждое ребро графа  $G$  содержится в некотором  $vw$ -разделяющем множестве мощности  $k$ , так как в противном случае удаление соответствующего ребра не повлияет на величину  $k$  и позволит нам воспользоваться индуктивным предположением, чтобы получить  $k$  реберно непересекающихся простых цепей. Следовательно, любая простая цепь  $C$  из  $v$  в  $w$  должна состоять либо из единственного ребра, либо из двух ребер, и поэтому может содержать не больше одного ребра из любого  $vw$ -разделяющего множества мощности  $k$ . Удаляя из  $G$  ребра, принадлежащие  $C$ , мы получим граф, содержащий по крайней мере  $k-1$  реберно непересекающихся простых цепей (по индуктивному предположению). Вместе с  $C$  эти простые цепи и дают искомые  $A$  простых цепей в  $G$ . //

Обратимся теперь к другой задаче, упомянутой в начале этого параграфа: к нахождению числа вершинно непересекающихся простых цепей из  $v$  в  $w$ . (Сам Менгер решал именно эту задачу, хотя обычно его имя связывают с обеими теоремами 28А и 28В.) На первый взгляд кажется удивительным, что не только решение этой задачи имеет вид, подобный теореме 28А, но и само доказательство теоремы 28А претерпевает лишь незначительные изменения,

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

состоящие главным образом в замене таких терминов, как «реберно непересекающийся» и «инцидентный», на термины «вершинно непересекающийся» и «смежный». Сформулируем теперь вершинную форму теоремы Менгера, а доказательство предоставим читателю.

ТЕОРЕМА 28В. (МЕНГЕР 1927)

*Максимальное число вершинно непересекающихся простых цепей, соединяющих две различные несмежные вершины  $v$  и  $w$  графа  $G$ , равно минимальному числу вершин в  $vw$ -отделяющем множестве. //*

Мы уже говорили выше, что проведенные рассмотрения можно модифицировать для случая орграфов и получить число вершинно непересекающихся и непересекающихся по дугам простых орцепей. В этом случае  $vw$ -разделяющим множеством называется множество  $A$  дуг орграфа, обладающее тем свойством, что всякая простая орцепь из  $v$  в  $w$  содержит ребро из  $A$ . Соответствующая теорема опять-таки очень похожа на теорему 28А, и ее доказательство почти дословно совпадает с доказательством теоремы 28А. Сформулируем эту теорему и назовем ее **теоремой о целочисленности** (причина такого названия выяснится в следующем параграфе).

ТЕОРЕМА 28С. (ТЕОРЕМА О ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ)

*Максимальное число непересекающихся по дугам простых орцепей, соединяющих две различные вершины  $v$  и  $w$  орграфа  $D$ , равно минимальному числу дуг  $vw$ -разделяющего множества. //*

Проиллюстрируем эту теорему на примере орграфа, изображенного на рис. 28.3. Непосредственно проверяется, что у него 6 непересекающихся по дугам простых орцепей из  $v$  в  $w$ ; соответствующее  $vw$ -разделяющее множество обозначено пунктирными линиями.

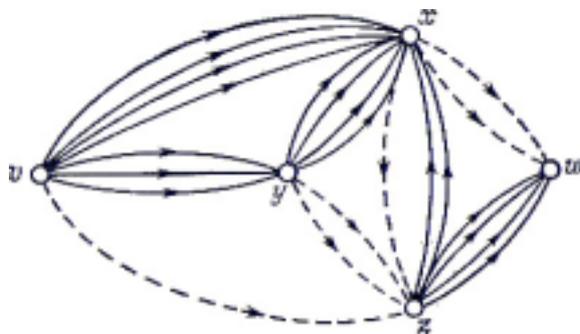


Рис. 28.3.

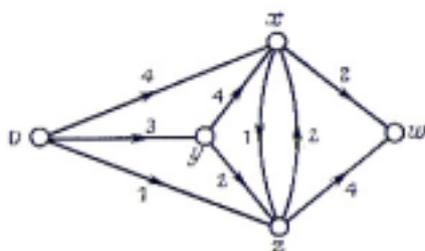


Рис. 28.4.

## Глава 8. ПАРСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

Как мог заметить читатель, с ростом числа дуг, соединяющих пары смежных вершин, диаграммы становятся довольно громоздкими. Это неудобство можно преодолеть следующим образом: нарисуем только одну дугу и напишем на ней, сколько таких дуг на самом деле (рис. 28.4). Это, казалось бы, совсем незначительное усовершенствование играет важную роль при исследовании потоков в сетях и транспортных задач (которые мы обсудим в следующем параграфе). Данный параграф мы завершим доказательством того, что теорему Холла можно вывести из теоремы Менгера. Здесь будет доказан вариант теоремы Холла, представленный в [следствии 25В](#).

ТЕОРЕМА 28D.

*Из теоремы Менгера следует теорема Холла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть  $G=G(V_1, V_2)$  — двудольный граф; нам надо доказать, что если  $|A| \leq |\varphi(A)|$  для любого подмножества  $A$  из  $V_1$  (используются обозначения из [следствия 25В](#)), то существует совершенное паросочетание из  $V_1$  в  $V_2$ . Сделаем это, применяя вершинную форму теоремы Менгера (теорема 28В) к графу, полученному присоединением к  $G$  вершины  $v$ , смежной каждой вершине из  $V_1$ , и вершины  $w$ , смежной каждой вершине из  $V_2$  (рис. 28.5).

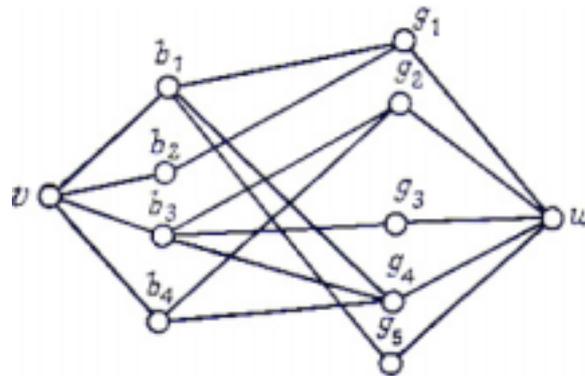


Рис. 28.5.

Так как совершенное паросочетание из  $V_1$  в  $V_2$  существует тогда и только тогда, когда число вершинно непересекающихся простых цепей из  $v$  в  $w$  равно числу вершин в  $V_1$  (скажем,  $k$ ), то достаточно показать, что каждое  $vw$ -отделяющее множество содержит по меньшей мере  $k$  вершин.

Пусть  $S$  есть  $vw$ -отделяющее множество, состоящее из подмножества  $A$  множества  $V_1$  и подмножества  $B$  множества  $V_2$ . Поскольку  $A \cup B$  есть  $vw$ -отделяющее множество, не существует ребер, соединяющих вершину из  $V_1 - A$  с вершиной из  $V_2 - B$ , и, значит,  $\varphi(V_1 - A) \subseteq B$ . Следовательно,  $|V_1 - A| \leq |\varphi(V_1 - A)| \leq |B|$ , и поэтому  $|S| = |A| + |B| \geq |V_1| = k$ , что и требовалось. //

### УПРАЖНЕНИЯ

(28a) Убедитесь в том, что и реберная форма, и вершинная форма теоремы

Менгера верны для графа Петерсена (при всяком возможном выборе вершин  $v$  и  $w$ ).

- (28b) Дайте подробное доказательство теоремы 28В и проверьте ее для кубического графа, изображенного на рис. 28.6.

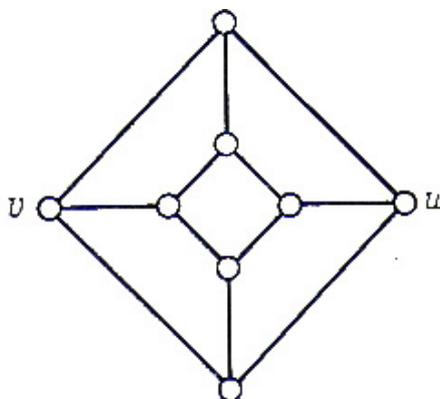


Рис. 28.6.

- (28c) Покажите, каким образом вершинная и реберная формы теоремы Менгера могут быть выведены одна из другой.
- (28d) Граф  $G$  называется  $k$ -связным, если  $k$  — наибольшее из чисел, таких, что каждая пара несмежных вершин соединена не менее чем  $k$  вершинно непересекающимися простыми цепями. Покажите, что (i) граф  $W_n$  ( $n \geq 4$ ) 3-связен; (ii)  $W_n$   $k$ -связен, где  $k = \min(m, n)$ ; (iii) если  $G$   $k$ -связен, то степень каждой его вершины не меньше  $k$ ; (iv)  $G$  двусвязен тогда и только тогда, когда каждая пара его вершин содержится в некотором цикле; (v)  $G \neq (K_2)$   $k$ -связен тогда и только тогда, когда и равно наименьшему числу вершин, удаление которых делает  $G$  несвязным.
- (\*28e) Покажите, как вывести из теоремы Менгера [теоремы 27В](#) и [27D](#).
- (\*28f) Покажите, как распространить теорему Менгера на бесконечные графы.

## § 29. ПОТОКИ В СЕТЯХ

Деятельность современного общества тесно связана с разного рода сетями — возьмите, к примеру, транспорт, коммуникации, распределение товаров и т. п. Поэтому математический анализ таких сетей стал предметом фундаментальной важности. В этом параграфе мы попытаемся на простых примерах показать, что анализ сетей по существу эквивалентен изучению орграфов.

Изготовитель электрических массажных щеток хотел бы послать на данный рынок несколько ящиков своей продукции. Предположим, что эти ящики можно послать по нескольким различным каналам, показанным на рис. 29.1 (где  $v$  представляет изготовителя,  $w$  — рынок, а числа на диаграмме обозначают максимальные грузы, которые могут быть посланы по соответствующим каналам). Ясно, что изготовителя интересует, какое максимальное число ящиков он может послать по этой сети, не превышая допустимую пропускную способность каждого канала.

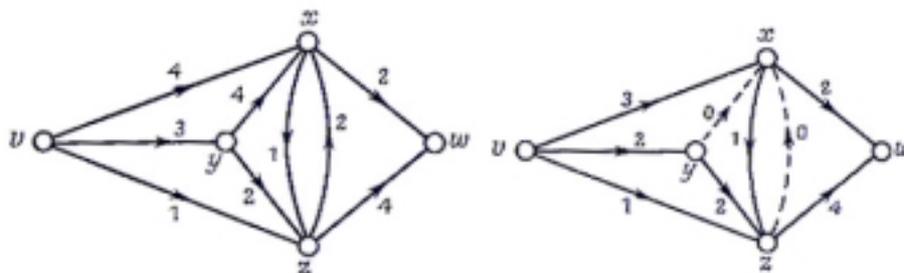


Рис. 29.1.

Рис. 29.2.

Рис. 29.1 может описывать и другие ситуации. Например, если каждая дуга этого орграфа представляет улицу с односторонним движением, а сопоставленное каждой улице число обозначает максимальный возможный поток транспорта (число машин в час) по этой улице, то хотелось бы найти наибольшее возможное число машин, которые могут проехать из  $v$  в  $w$  за один час. Эту диаграмму можно рассматривать и как схему электрической цепи, и тогда задача состоит в нахождении максимального тока, который можно пропустить по этой цепи при условии, что заданы предельные токи отдельных проводов.

Отправляясь от этих примеров, определим теперь **сеть**  $N$  как орграф, каждой дуге  $a$  которого приписано неотрицательное действительное число  $\phi(a)$ , называемое ее **пропускной способностью**. Другое определение сети, эквивалентное первому, звучит так: сеть представляет собой пару  $(D, \phi)$ , где  $D$  — орграф, а  $\phi$  — функция, отображающая множество дуг орграфа  $D$  в множество неотрицательных действительных чисел. **Полустепень исхода**  $\bar{p}(x)$  вершины  $x$  определяется тогда как сумма пропускных способностей дуг вида  $(x, z)$ , и аналогичным образом определяется **полустепень захода**  $\bar{p}(x)$ . Например, в сети, изображенной на рис. 29.1,  $\bar{p}(v)=8$  и  $\bar{p}(x)=10$ . Ясно, что аналог орлеммы о рукопожатиях принимает следующий вид: сумма полустепеней исхода всех вершин в сети равна сумме их полустепеней захода. В дальнейшем будем предполагать (если не оговорено противное), что орграф  $D$  содержит ровно один источник  $v$  и один сток  $w$ ; общий случай, когда имеется несколько источников и стоков (в разобранном выше первом примере это соответствует более чем одному изготовителю и более чем одному рынку), легко свести к этому частному (см. упр.29b).

Для данной сети  $N=(D, \phi)$  определим **поток через**  $N$  как функцию  $\varphi$ , сопоставляющую каждой дуге  $a$  из  $D$  неотрицательное действительное число  $\varphi(a)$  (называемое **поток через**  $a$ ) таким образом, что (i)  $\varphi(a) \leq \phi(a)$  для любой дуги  $a$ ; (ii) по отношению к сети  $(D, \phi)$  полустепень исхода и полустепень захода любой вершины (отличной от  $v$  и  $w$ ) равны между собой. Говоря неформально, это означает, что поток через любую дугу не превосходит ее пропускной способности и что «полный поток», входящий в любую вершину (отличную от  $v$  и  $w$ ), равен «полному потоку», выходящему из нее. На рис. 29.2 показан возможный поток для сети, изображенной на рис. 29.1; другим потоком является **нулевой поток**, при котором поток через каждую дугу равен нулю

## Глава 8. ПАРСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

(любой другой поток называется ненулевым). Для удобства назовем дугу  $a$ , для которой  $\varphi(a)=\phi(a)$ , **насыщенной** (на рис. 29.2 насыщенными являются дуги  $(v, z)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ ,  $(x, w)$  и  $(z, w)$ ); остальные дуги называются **ненасыщенными**.

Из орлеммы о рукопожатиях следует, что сумма потоков через дуги, инцидентные  $v$ , равна сумме потоков через дуги, инцидентные  $w$ ; эта сумма называется **величиной потока**. Помня о примерах, рассмотренных в начале параграфа, мы будем в первую очередь интересоваться потоками, имеющими наибольшую возможную величину, — так называемыми **максимальными потоками**. Читатель без труда может проверить, что поток, изображенный на рис. 29.2, является максимальным потоком через сеть, изображенную на рис. 29.1, и что его величина равна шести. Заметим, что в общем случае сеть может иметь несколько различных максимальных потоков, однако их величины должны совпадать.

Изучение максимальных потоков через сеть  $N=(D, \phi)$  тесно связано с понятием **разреза**, т. е. такого множества  $A$  дуг орграфа  $D$ , которое обладает тем свойством, что любая простая орцепь из  $v$  в  $w$  проходит через дугу, принадлежащую  $A$ . Другими словами, разрезом в сети является не что иное, как  $vw$ -разделяющее множество соответствующего орграфа  $D$ . **Пропускной способностью разреза** называется сумма пропускных способностей принадлежащих ему дуг. Мы будем рассматривать главным образом такие разрезы, которые обладают наименьшей возможной пропускной способностью, — так называемые **минимальные разрезы**. На рис. 29.1 примером минимального разреза является множество дуг  $(v, z)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$  и  $(x, w)$ ; пропускная способность этого разреза равна шести.

Легко видеть, что величина любого потока не превышает пропускной способности любого разреза, и, следовательно, величина любого максимального потока не превышает пропускной способности любого минимального разреза. Однако сразу не ясно, что два последних числа всегда равны между собой; этот замечательный результат называется **теоремой о максимальном потоке и минимальном разрезе**. Впервые она была доказана Фордом и Фалкерсоном в 1955 г. Мы дадим здесь два доказательства; первое из них показывает, что эта теорема по существу эквивалентна теореме Менгера, а второе является прямым доказательством.

### ТЕОРЕМА 29А.

*(Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе). Во всякой сети величина любого максимального потока равна пропускной способности любого минимального разреза.*

### ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Предположим сначала, что пропускная способность любой дуги является целым числом.

В этом случае можно рассматривать сеть как орграф  $\tilde{D}$ , в котором

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

пропускные способности представляют число дуг, соединяющих различные вершины (рис. 28.3 и 28.4). Тогда величина максимального потока соответствует в  $\tilde{D}$  полному числу непересекающихся по дугам простых орцепей из  $v$  в  $w$ , а пропускная способность минимального разреза — минимальному числу дуг в  $vw$ -разделяющем множестве. Применяя теперь теорему о целочисленности (Теорема 28С), мы сразу получаем нужный результат.

Чтобы перенести этот результат на сети с рациональными пропускными способностями, умножаем все пропускные способности на подходящее целое число  $d$  (например, наименьшее общее кратное всех знаменателей), чтобы получились целые числа. Тогда приходим к случаю, описанному в предыдущем абзаце, и нужный результат получаем после деления на  $d$  соответствующей величины максимального потока и пропускной способности минимального разреза.

Наконец, если некоторые из пропускных способностей иррациональны, то теорема доказывается с использованием аппроксимации этих чисел рациональными (с любой заданной точностью) и применением предыдущего результата. При этом аппроксимирующие рациональные числа можно подобрать так, чтобы разность между величиной любого максимального потока и пропускной способностью любого минимального разреза можно было сделать сколь угодно малой. Мы предлагаем читателю самостоятельно провести это рассуждение во всей строгости. Конечно, на практике иррациональные пропускные способности встречаются крайне редко, поскольку обычно пропускные способности задаются в десятичной форме. //

### ◀ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Теперь мы дадим прямое доказательство теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе. Заметим, что поскольку величина любого максимального потока не превышает пропускной способности любого минимального разреза, достаточно доказать существование разреза, пропускная способность которого равна величине данного максимального потока.

Пусть  $\varphi$  — максимальный поток. Определим два множества  $V$  и  $W$  вершин сети: пусть через  $G$  обозначено основание орграфа  $D$  соответствующего рассматриваемой сети; тогда вершина  $z$  сети содержится в  $V$  в том и только в том случае, если в  $G$  существует простая цепь  $v = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow v_m = z$ , обладающая тем свойством, что любое ее ребро  $\{v_i, v_{i+1}\}$  соответствует либо ненасыщенной дуге  $(v_i, v_{i+1})$ , либо дуге  $(v_i, v_{i+1})$ , через которую проходит ненулевой поток. (Заметим, что вершина  $v$ , очевидно, содержится в  $V$ ). Множество  $W$  состоит из всех тех вершин, которые не принадлежат  $V$ . Например, на рис. 29.2 множество  $V$  состоит из вершин  $v, x$  и  $y$ , а множество  $W$  из вершин  $z$  и  $w$ .

Покажем теперь, что  $W$  непусто и, в частности, содержит вершину  $w$ . Если это не так, то  $w$  принадлежит  $V$ , и тогда в  $G$  существует простая цепь

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

$v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-1} \rightarrow w$ , обладающая указанным выше свойством. Выберем положительное число  $\varepsilon$ , удовлетворяющее следующим двум условиям: (i) оно не превышает ни одного из чисел, необходимых для насыщения дуг первого типа; (ii) оно не превышает потока через любую из дуг второго типа. Легко видеть, что если потоки через дуги первого типа увеличить на  $\varepsilon$ , а потоки через дуги второго типа уменьшить на  $\varepsilon$ , то величина потока  $\varphi$  увеличится на  $\varepsilon$ . Но это противоречит нашему предположению о том, что  $\varphi$  — максимальный поток, и следовательно,  $w$  содержится в  $W$ .

Для завершения доказательства обозначим через  $E$  множество всех дуг вида  $(x, z)$ , где  $x$  принадлежит  $V$ , а  $z$  принадлежит  $W$ . Ясно, что  $E$  является разрезом. Более того, легко видеть, что каждая дуга  $(x, z)$  из  $E$  насыщена, так как в противном случае вершина  $z$  также принадлежала бы  $V$ . Следовательно, пропускная способность множества  $E$  должна равняться величине потока  $\varphi$ , а поэтому  $E$  и есть искомый разрез. // ▲

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе позволяет проверять, максимален данный поток или нет, но только для достаточно простых сетей. Разумеется, на практике приходится иметь дело с большими и сложными сетями, и в общем случае трудно найти максимальный поток простым подбором. Поэтому в заключение этого параграфа мы опишем один алгоритм нахождения максимального потока в любой сети с целочисленными пропускными способностями. Перенесение этого алгоритма на сети с рациональными пропускными способностями осуществляется тривиальным образом и предоставляется читателю.

Предположим, что задана сеть  $N=(D, \varphi)$ ; нахождение максимального потока через  $N$  осуществляется в три шага.

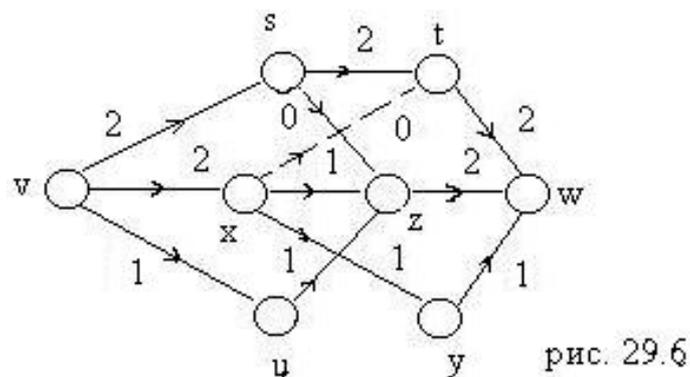
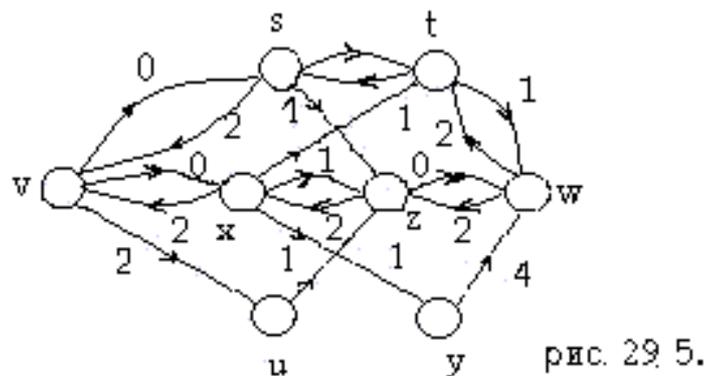
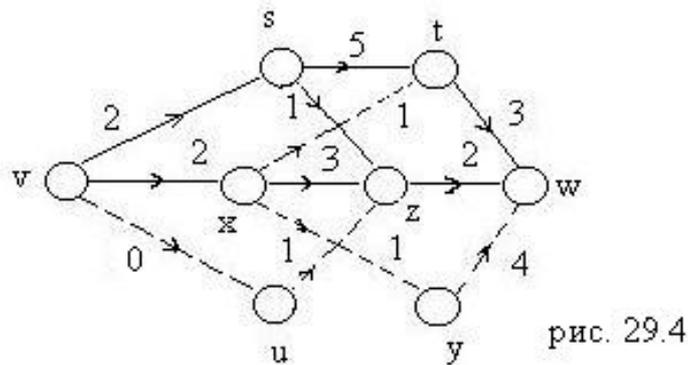
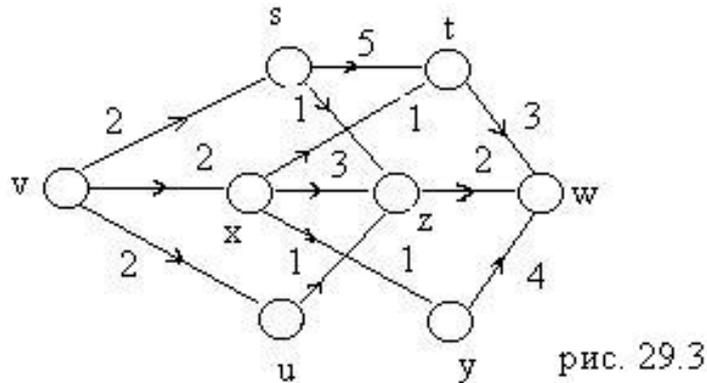
*Шаг 1.* Сначала подберем поток  $\varphi$ , обладающий ненулевой величиной (если такой поток существует). Например, если  $N$  — сеть, представленная на рис. 29.3, то подходящим будет поток, изображенный на рис. 29.4. Стоит отметить, что чем больше величина выбранного нами начального потока  $\varphi$ , тем проще будут последующие шаги.

*Шаг 2.* Исходя из  $N$ , строим новую сеть  $N'$  путем изменения направления потока  $\varphi$  на противоположное. Более точно, любая дуга  $a$ , для которой  $\varphi(a)=0$ , остается в  $N'$  со своей первоначальной пропускной способностью, а любая дуга  $a$ , для которой  $\varphi(a) \neq 0$ , заменяется дугой  $a$  с пропускной способностью  $\varphi(a)-\varphi(a)$  и противоположно направленной дугой с пропускной способностью  $\varphi(a)$ . Сеть  $N'$  в нашем частном примере показана на рис. 29.5; заметим, что в  $N'$  вершина  $v$  не является уже источником, а  $w$  — стоком.

*Шаг 3.* Если в сети  $N'$  мы сможем найти ненулевой поток из  $v$  в  $w$ , то его можно добавить к первоначальному потоку  $\varphi$  и получить в  $N$  новый поток  $\varphi'$  большей величины. Теперь можно повторить шаг 2, используя при построении сети  $N'$  новый поток  $\varphi'$  вместо  $\varphi$ . Повторяя эту процедуру, мы в конце концов придем к сети  $N'$ , не содержащей ненулевых потоков; тогда соответствующий поток  $\varphi$  будет максимальным потоком, в чем читатель легко может убедиться

## Глава 8. ПАРОСОЧЕТАНИЯ, СВАДЬБЫ И ТЕОРЕМА МЕНГЕРА

сам. Например, на рис. 29.5 существует ненулевой поток, в котором потоки через дуги  $(v, u)$ ,  $(u, z)$ ,  $(z, x)$ ,  $(x, y)$  и  $(y, w)$  равны единице, а потоки через остальные дуги равны нулю. Добавляя этот поток к потоку на рис. 29.4, получим поток, изображенный на рис. 29.6; повторяя шаг 2, легко показать, что это и есть максимальный поток. Таким образом, мы получили искомый максимальный поток.



В данном параграфе мы смогли лишь слегка коснуться этого многогранного и важного направления; читатель, желающий продолжить изучение затронутых вопросов, может обратиться к книге Форда и Фалкерсона [11].

### УПРАЖНЕНИЯ

- (29a) Покажите, что потоки на рис. 29.2 и 29.6 являются максимальными потоками для сетей, изображенных соответственно на рис. 29.1 и 29.3, и проверьте справедливость теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе в каждом из этих случаев.
- (29b) Покажите, каким образом анализ потоков в сети с несколькими источниками и стоками можно свести к стандартному случаю с помощью введения двух дополнительных вершин. Как свести к стандартному случаю задачу о сети, в которой (i) некоторые дуги заменены ребрами, через которые поток может проходить в любом из двух направлений; (ii) некоторые вершины тоже имеют пропускные способности, показывающие, какие максимальные потоки могут проходить через эти вершины?
- (29c) Проверьте справедливость теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе для сети, изображенной на рис. 29.7 (отсутствие стрелки на дуге указывает на то, что поток разрешен в любом из направлений).
- (29d) Придумайте алгоритм нахождения максимального числа непересекающихся по дугам простых орцепей, соединяющих две данные вершины орграфа.
- (\*29e) Предположим, что поток через любую дугу некоторой сети ограничен снизу, а не сверху пропускной способностью; получите соответствующую теорему о «минимальном потоке и максимальном разрезе». Что можно сказать, если поток через каждую дугу ограничен и сверху, и снизу?
- (\*29f) Покажите, как можно использовать теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе для доказательства (i) теоремы Холла; (ii) теоремы 27D о существовании общих трансверсалей; (iii) теоремы 23A об эйлеровых орграфах.
- (\*29g) Предположим, что числа на рис. 29.7 обозначают расстояния между соответствующими вершинами;

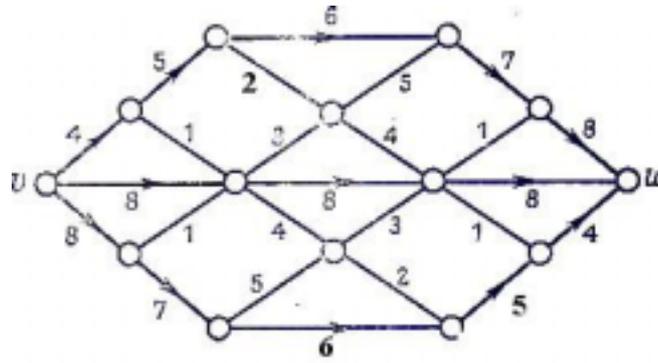


Рис. 29.7.

найдите кратчайший путь от  $v$  до  $w$ . (*Указание.* Рассматривайте сеть на рис. 29.7 как планарный граф  $G$ ; образуйте двойственный ему граф  $G^*$  и припишите каждому ребру из  $G^*$  ту же пропускную способность, что и у соответствующего ему ребра в  $G$ . Затем примените к  $G^*$  теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе.)

## 9. ТЕОРИЯ МАТРОИДОВ

Все обобщения опасны, и даже это.

Александр Дюма (сын)

В этой главе мы исследуем довольно неожиданное сходство, которое обнаружилось между результатами теории графов и теории трансверсалей (см., например, [упр. 9g](#) и [26e](#) или [упр. 9j](#) и [26f](#)). Для этого удобно ввести в рассмотрение новый объект—матроид, который представляет собой по существу множество с определенной на нем «структурой независимости». Как мы увидим, это понятие независимости обобщает не только независимость в графах (определенную в [упр. 5j](#)), но также и линейную независимость в векторных пространствах; связь с теорией трансверсалей устанавливается в [упр. 26e](#). В § 32 мы покажем, как надо определить двойственность матроидов, чтобы объяснить сходство между свойствами циклов и разрезов в графе, и тогда выяснится, что довольно искусственные определения абстрактной двойственности и двойственности по Уитни (§15 и 16) возникают совершенно естественно из двойственности матроидов. В последнем параграфе мы покажем, как можно использовать матроиды для получения «легких» доказательств некоторых результатов теории трансверсалей, и в заключение приведем матроидные доказательства двух глубоких результатов теории графов.

### § 30. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МАТРОИДОВ

В § 9 мы определили остовное дерево связного графа как связный подграф графа  $G$ , не содержащий циклов и включающий каждую вершину из  $G$ . Ясно, что остовное дерево не может содержать в качестве собственного подграфа другое остовное дерево. Можно также показать ([см. упр. 9g](#)), что если  $B_1$  и  $B_2$  — остовные деревья графа  $G$  и  $e$  — любое ребро из  $B_1$ , то можно найти такое ребро  $f$  из  $B_2$ , что  $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$  (т. е. граф, полученный из  $B_1$  заменой  $e$  на  $f$ ), также является остовным деревом в  $G$ .

Аналогичные результаты имеют место в теории векторных пространств и в теории трансверсалей. Если  $V$  — векторное пространство, а  $B_1$  и  $B_2$  — его базисы, то для любого элемента  $e$  из  $B_1$  найдется элемент  $f$  из  $B_2$ , обладающий тем свойством, что множество  $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$  также является базисом в  $V$ . Соответствующий результат из теории трансверсалей сформулирован в [упр. 26e](#). Отправляясь от этих трех примеров, дадим теперь наше первое определение матроида.

**Матроидом**  $M$  называется пара  $(E, B)$ , где  $E$  — непустое конечное множество, а  $B$  — непустая совокупность его подмножеств (называемых базами), удовлетворяющая следующим условиям:

( $B_i$ ) никакая база не содержит в качестве собственного подмножества другую

базу;

$(B_{ii})$  если  $B_1$  и  $B_2$  — базы и  $e$  — любой элемент из  $B_1$ , то существует элемент  $f$  из  $B_2$ , обладающий тем свойством, что  $(B_1 - \{e\}) \cup \{f\}$  также является базой.

Применяя достаточное число раз свойство  $(B_{ii})$ , можно показать (это несложное упражнение), что любые две базы матроида  $M$  содержат одинаковое число элементов; это число называется **рангом**  $M$ .

Как указывалось выше, с любым графом  $G$  можно естественным образом связать некоторый матроид, взяв в качестве  $E$  множество ребер графа  $G$ , а в качестве баз — ребра остовных лесов графа  $G$ . По причинам, которые выяснятся позднее, этот матроид называется **циклическим матроидом** графа  $G$  и обозначается через  $M(G)$ . Аналогично, если  $E$  — конечное множество векторов в векторном пространстве  $V$ , то можно задать матроид на  $E$ , взяв в качестве баз всевозможные линейно независимые подмножества из  $E$ , порождающие то же подпространство, что и  $E$ . Матроид, полученный таким образом, называется **векторным матроидом**. Позднее мы рассмотрим такие матроиды более подробно.

Подмножество множества  $E$  называется **независимым**, если оно содержится в некоторой базе матроида  $M$ . Следовательно, базы  $M$  являются в точности максимальными независимыми множествами, т. е. такими независимыми множествами, которые не содержатся ни в каких более крупных независимых множествах.

Таким образом, любой матроид однозначно определяется своими независимыми множествами. В случае векторного матроида подмножество из  $E$  независимо тогда и только тогда, когда его элементы, рассматриваемые как векторы в векторном пространстве, линейно независимы. Если  $G$  — граф, то независимыми множествами в  $M(G)$  являются те множества ребер из  $G$ , которые не содержат циклов, другими словами, множества ребер лесов, содержащихся в  $G$ .

Так как матроид можно полностью описать перечислением его независимых множеств, то возникает вопрос: нельзя ли проще определить матроид в терминах его независимых множеств? Сейчас мы дадим одно из таких определений; заинтересованный читатель найдет доказательство эквивалентности этого определения данному выше в книге Уитни [15].

**Матроидом**  $M$  называется пара  $(E, \mathcal{J})$ , где  $E$  — пустое конечное множество, а  $\mathcal{J}$  — непустая совокупность подмножеств из  $E$  (называемых **независимыми множествами**, удовлетворяющая следующим условиям:

$(\mathcal{J}_i)$  любое подмножество независимого множества независимо;

$(\mathcal{J}_{ii})$  если  $I$  и  $J$  — независимые множества, содержащие соответственно  $k$  и  $k+1$  элементов, то существует элемент  $e$ , принадлежащий  $J$  и не принадлежащий  $I$ , такой, что  $I \cup \{e\}$  независимо.

(Заметим, что если исходить из этого определения, то **базой** следует называть любое максимальное независимое множество; многократно используя свойство  $(\mathcal{J}_{ii})$ , можно показать, что любое независимое множество можно расширить до базы.)

Если матроид  $M=(E, \mathcal{J})$  определен в терминах независимых множеств, то подмножество множества  $E$  называют **зависимым**, когда оно не является независимым; минимальное зависимое множество называется **циклом**. Заметим, что если  $M(G)$  — циклический матроид некоторого графа  $G$ , то циклами в  $M(G)$  являются как раз циклы графа  $G$ . Понятно, что подмножество из  $E$  независимо тогда и только тогда, когда оно не содержит циклов; поэтому матроид можно определить и в терминах его циклов. Одно такое определение, обобщающее на матроиды результат [упр. 5f](#), приводится в упр. 30е.

Прежде чем перейти к некоторым примерам матроидов, удобно дать еще одно определение матроида в терминах ранговой функции  $\rho$ ; именно это определение приводится в работе Уитни [15] — первой работе на эту тему (1935 г.).

Если матроид  $M=(E, \mathcal{J})$  определен в терминах своих независимых множеств и если  $A$  — подмножество из  $E$ , то мощность наибольшего содержащегося в  $A$  независимого множества называется **рангом**  $A$  и обозначается  $\rho(A)$ . Заметим, что определенный ранее ранг матроида  $M$  равняется  $\rho(E)$ . Поскольку подмножество  $A$  из  $E$  независимо тогда и только тогда, когда  $\rho(A)=|A|$ , то отсюда следует, что матроид можно определить в терминах его ранговой функции. Сейчас мы это и покажем.

#### ТЕОРЕМА 30А.

*Матроид можно определить как пару  $(E, \rho)$ , где  $E$  — непустое конечное множество, а  $\rho$  — принимающая целые значения функция, определенная на множестве подмножеств множества  $E$  и удовлетворяющая таким условиям:*

- $(\rho_i)$   $0 \leq \rho(A) \leq |A|$  для каждого подмножества  $A$  из  $E$ ;
- $(\rho_{ii})$  если  $A \subseteq B \subseteq E$ , то  $\rho(A) \leq \rho(B)$ ;
- $(\rho_{iii})$   $\rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$  для любых  $A, B \subseteq E$ .

#### ЗАМЕЧАНИЕ.

Это определение является перенесением на матроиды результатов [упр. 9j](#) и [26f](#).

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Предположим сначала, что матроид  $M=(E, \mathcal{J})$  определен в терминах своих независимых множеств; нам надо доказать свойства  $(\rho_i)$  —  $(\rho_{iii})$ . Свойства  $(\rho_i)$  и  $(\rho_{ii})$  тривиально выполняются, а чтобы доказать  $(\rho_{iii})$ , обозначим через  $X$  базу (т. е. максимальное независимое подмножество) множества  $A \cap B$ ; так как  $X$  — независимое подмножество в  $A$ , то  $X$  можно расширить до базы  $Y$  множества  $A$  и (аналогичным образом) до базы  $Z$ , множества  $A \cup B$ . Поскольку  $X \cup (Z - Y)$ , очевидно, является независимым подмножеством в  $B$ , отсюда следует, что

$$\rho(B) \geq \rho(X \cup (Z - Y)) = |X| + |Z| - |Y| = \rho(A \cap B) + \rho(A \cup B) - \rho(A),$$

что и требовалось.

Обратно, пусть матроид  $M=(E, \rho)$  определен в терминах ранговой функции  $\rho$ . Назовем независимыми те и только те подмножества  $A$  из  $E$ , для которых  $\rho(A)=|A|$ .

Свойство  $(\hat{J})$  доказывается непосредственно. Чтобы доказать  $(\hat{J}_{ii})$ , обозначим через  $I$  и  $J$  независимые множества, содержащие  $k$  и  $k+1$  элементов соответственно, и предположим, что для любого элемента  $e$ , принадлежащего  $J$  и не принадлежащего  $I$ ,  $\rho(I \cup e)=k$ . Если  $e$  и  $f$  — два таких элемента, то  $\rho(I \cup e \cup f) \leq \rho(I \cup e) + \rho(I \cup f) - \rho(I) = k$ ; отсюда следует, что  $\rho(I \cup e \cup f)=k$ . Продолжим эту процедуру, добавляя каждый раз по одному новому элементу из  $J$ , так как на каждом шаге ранг равен  $k$ , то получаем, что  $\rho(I \cup J)=k$ , следовательно (согласно  $(\rho_{ii})$ ),  $\rho(J) \leq k$ , что невозможно. Значит, существует элемент  $f$ , принадлежащий  $J$ , не принадлежащий  $I$  и обладающий тем свойством, что  $\rho(I \cup f)=k+1$ . //

В заключение этого параграфа дадим два простых определения. **Петлей матроида**  $M=(E, \rho)$  называется элемент  $e$  из  $E$ , удовлетворяющий равенству  $\rho(\{e\})=G$ ; **парой параллельных элементов матроида**  $M$  называется пара  $\{e, f\}$  элементов из  $E$ , не являющихся петлями и удовлетворяющих равенству  $\rho(\{e, f\})=1$ . Читателю следует проверить, что если  $M$  — циклический матроид некоторого графа  $G$ , то петли и параллельные элементы в  $M$  соответствуют петлям и кратным ребрам в  $G$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

- (30a) Покажите, что любые две базы матроида на множестве  $E$  содержат одинаковое количество элементов; более того, если  $A$  — произвольное подмножество из  $E$ , то любые два максимальных независимых подмножества из  $A$  содержат одинаковое число элементов.
- (30b) Воспользуйтесь [упр. 9j](#) и покажите, что ранговая функция циклического матроида графа  $G$  равна в точности коциклическому ранг  $\chi$ .
- (30c) Пусть  $E$  — конечное непустое множество и  $\mathcal{I}$  — семейство его непустых подмножеств; докажите, что частичные трансверсали для  $\mathcal{I}$  являются независимыми множествами матроида на  $E$ . Выведите отсюда результат [упр. 26d](#) (см. также § 33).
- (30d) Пусть  $M=(E, \rho)$  — матроид с ранговой функцией  $\rho$ . Докажите, что  $M^*=(E, \rho^*)$ , где  $\rho^*$  определяется равенством  $\rho^*(A)=|A|+\rho(E-A)-\rho(E)$ , также является матроидом. Покажите также, что  $B$  является базой  $M$  тогда и только тогда, когда  $E-B$  является базой  $M^*$ . (Это упражнение будет решено в § 32.)
- (\*30e) Покажите, что матроид  $M$  можно определить как пару  $(E, C)$ , где  $E$  —

непустое конечное множество, а  $C$  — совокупность его подмножеств (называемых **циклами**), удовлетворяющая следующим условиям: (i) никакой цикл не содержит в качестве собственного подмножества другой цикл; (ii) если  $C_1$  и  $C_2$  — два различных цикла, каждый из которых содержит элемент  $e$ , то в  $C_1 \cup C_2$  существует цикл, не содержащий  $e$ .

(\*30f) Докажите, что разрезы графа  $G$  удовлетворяют условиям предыдущего упражнения; каково соотношение между ранговой функцией соответствующего матроида и ранговой функцией циклического матроида графа  $G$ ?

(30g) Если  $M=(E, \rho)$  — матроид, то **замыканием**  $\varphi(A)$  подмножества  $A$  из  $E$  называется совокупность всех элементов  $e$  множества  $E$ , обладающих тем свойством, что  $\rho(A \cup \{e\}) = \rho(A)$ ; докажите, что (i)  $A \subseteq \varphi(A) = \varphi(\varphi(A))$ ; (ii) если  $A \subseteq B \subseteq E$ , то  $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ ; (iii) если  $e$  содержится в  $\varphi(A \cup \{f\})$  и не содержится в  $\varphi(A)$ , то  $f$  содержится в  $\varphi(A \cup \{e\})$ . Назовем множество  $A$  **замкнутым**, если  $\varphi(A) = A$ ; покажите, что пересечение двух замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли аналогичное утверждение для объединения двух замкнутых множеств?

(\*30h) Пусть  $M_1=(E, \mathcal{J}_1)$  и  $M_2=(E, \mathcal{J}_2)$  — два матроида, определенные на одном и том же множестве  $E$ ; покажите, что множество всех объединений  $I \cup J$  по всем независимым множествам  $I$  из  $M_1$  и независимым множествам  $J$  из  $M_2$  образует множество независимых подмножеств нового матроида. (Этот матроид называется **объединением**  $M_1$  и  $M_2$  и обозначается  $M_1 \cup M_2$ ; его ранговая функция будет вычислена в § 33.)

(30i) Покажите, как расширить на матроиды определение фундаментальной системы циклов графа; а как расширить определение фундаментальной системы разрезов?

(\*30j) Покажите, как распространить определение матроида на бесконечные множества  $E$ , и исследуйте свойства таких матроидов.

## § 31 ПРИМЕРЫ МАТРОИДОВ

В этом параграфе мы рассмотрим несколько важных типов матроидов.

### ТРИВИАЛЬНЫЕ МАТРОИДЫ.

На любом данном непустом конечном множестве  $E$  можно определить матроид, единственным независимым множеством которого является пустое множество. Этот матроид называется **тривиальным матроидом** на  $E$ ; ясно, что его ранг равен нулю.

### ДИСКРЕТНЫЕ МАТРОИДЫ.

Другим крайним случаем является **дискретный матроид** на  $E$ , в котором каждое подмножество из  $E$  независимо; заметим, что дискретный матроид на  $E$  имеет только одну базу, а именно само  $E$ , и что ранг любого подмножества  $A$

равен числу элементов в  $A$ .

### ОДНОРОДНЫЕ МАТРОИДЫ.

Оба предыдущих примера являются частными случаями  $k$ -**однородного** матроида на  $E$ , базами которого являются все подмножества из  $E$ , содержащие каждое ровно  $k$  элементов. Следовательно, независимыми множествами являются те подмножества из  $E$ , которые содержат не более  $k$  элементов, а ранг любого подмножества  $A$  равен меньшему из чисел  $|A|$  и  $k$ . Заметим, что тривиальный матроид на  $E$  является 0-однородным, а дискретный матроид  $|E|$ -однородным.

Прежде чем развивать примеры, описанные в предыдущих абзацах, удобно формализовать идею изоморфизма между матроидами. Два матроида  $M_1=(E, \mathcal{J}_1)$  и  $M_2=(E, \mathcal{J}_2)$  называются **изоморфными**, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами  $E_1$  и  $E_2$ , сохраняющее независимость, или, другими словами, если множество элементов из  $E_1$  независимо в  $M_1$  тогда и только тогда, когда соответствующее множество элементов из  $E_2$ , независимо в  $M_2$ . В качестве примера отметим, что циклические матроиды трех графов, изображенных на рис. 31.1, изоморфны между собой; подчеркнем тот факт, что, хотя изоморфизм матроидов сохраняет циклы, разрезы и число ребер в графе, он, вообще говоря, *не сохраняет* связность, число вершин и их степени. С помощью данного выше определения изоморфизма можно теперь определить графические, трансверсальные и представимые матроиды.

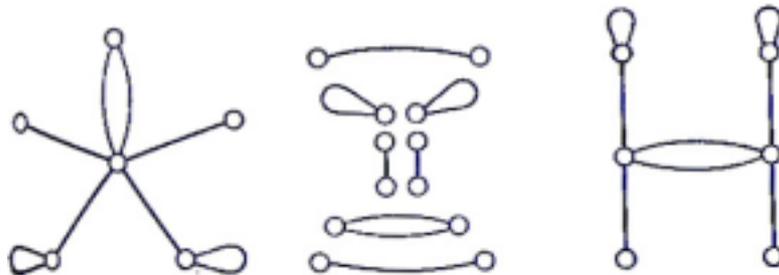


Рис. 31.1.

### ГРАФИЧЕСКИЕ МАТРОИДЫ.

Как мы видели в предыдущем параграфе, матроид  $M(G)$  можно определить на множестве ребер графа  $G$ , взяв в качестве циклов матроида циклы графа  $G$ ; при этом  $M(G)$  называется **циклическим матроидом** графа  $G$ , и его ранговая функция равна коциклическому рангу  $\chi$  (см. упр. 30b). Закономерен следующий вопрос: является ли данный матроид  $M$  циклическим матроидом некоторого графа — другими словами, существует ли такой граф  $G$ , что матроид  $M$  изоморфен  $M(G)$ ? Такие матроиды называются **графическими матроидами**; мы охарактеризуем их в следующем параграфе. В качестве примера графического матроида рассмотрим матроид  $M$  на множестве  $\{1, 2, 3\}$ , независимыми множествами которого являются  $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}$  и  $\{1, 3\}$ ; ясно, что матроид  $M$  изоморфен циклическому матроиду графа, изображенного

на рис. 31.2.

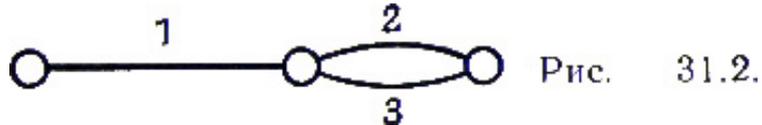


Рис. 31.2.

С другой стороны, можно показать, что существуют неграфические матроиды; простейшим примером является 2-однородный матроид на множестве из четырех элементов (в чем читатель может легко убедиться).

#### КОГРАФИЧЕСКИЕ МАТРОИДЫ.

Циклический матроид  $M(G)$  данного графа  $G$  — это не единственный матроид, который можно определить на множестве ребер графа  $G$ . Аналогия между свойствами циклов и свойствами разрезов в графе позволяет надеяться, что можно построить матроид, взяв в качестве его циклов разрезы графа  $G$ . В упр. 30f требовалось показать, что такое построение и в самом деле определяет матроид, который мы будем называть **коциклическим матроидом (матроидом разрезов)** графа  $G$  и обозначать через  $M^*(G)$ ; заметим, что при этом множество ребер графа  $G$  независимо тогда и только тогда, когда оно не содержит разрезов графа  $G$ . Матроид  $M$  назовем **кографическим**, если существует такой граф  $G$ , что матроид  $M$  изоморфен  $M^*(G)$ ; позднее станет понятно, почему мы его так назвали.

#### ПЛАНАРНЫЕ МАТРОИДЫ.

Матроид, являющийся одновременно графическим и кографическим, называется **планарным**.

Связь между планарными матроидами и планарными графами будет выявлена в следующем параграфе.

#### ПРЕДСТАВИМЫЕ МАТРОИДЫ.

Поскольку определение матроида частично мотивировано понятием линейной независимости в векторных пространствах, интересно исследовать те матроиды, которые возникают как векторные матроиды, связанные с некоторым множеством векторов в векторном пространстве над данным полем. Более точно, данный матроид  $M$  на множестве  $E$  будем называть **представимым над полем  $F$** , если существуют векторное пространство  $V$  над  $F$  и отображение  $\varphi$  из  $E$  в  $V$ , обладающее тем свойством, что подмножество  $A$  из  $E$  независимо тогда и только тогда, когда  $\varphi$  взаимно однозначно на  $A$  и  $\varphi(A)$  линейно независимо в  $V$ . (Заметим, что если игнорировать петли и параллельные элементы, то сказанное выше означает, что  $M$  изоморфен векторному матроиду, определенному в некотором векторном пространстве над  $F$ .) Особенно интересны те матроиды, которые представимы над полем целых чисел по модулю два, — такие матроиды называются **бинарными**. Для удобства мы будем называть  $M$  **представимым матроидом**, если существует такое поле  $F$ , что  $M$  представим над  $F$ . Оказывается, некоторые матроиды представимы над любым полем (это так называемые **регулярные матроиды**), некоторые не представимы ни над каким полем, а другие представимы лишь

над некоторым ограниченным классом полей.

Нетрудно показать, что если  $G$  — граф, то его циклический матроид  $M(G)$  является бинарным. Чтобы убедиться в этом, сопоставим каждому ребру из  $G$  соответствующую ему строку в матрице инцидентий графа  $G$  (упр. 2f), рассматривая ее как вектор, каждая компонента которого равна нулю или единице. Заметим, что если какое-нибудь множество ребер из  $G$  образует цикл, то сумма (по модулю два) соответствующих этим ребрам векторов равна нулю.

Пример бинарного матроида, не являющегося ни графическим, ни кографическим, приводится в упр. 31i.

### ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ МАТРОИДЫ.

Наш следующий пример устанавливает связь между теорией матроидов и теорией трансверсалей. Напомним читателю, что, как утверждается в упр. 26e, 26f и 30c, если  $E$  — непустое конечное множество, а  $\mathcal{F}=(S_1, \dots, S_m)$  — семейство непустых его подмножеств, то частичные трансверсали для  $\mathcal{F}$  можно взять в качестве независимых множеств матроида на  $E$ . Любой матроид, полученный таким образом (при подходящем выборе  $E$  и  $\mathcal{F}$ ), называется **трансверсальным матроидом** и обозначается  $M(S_1, \dots, S_m)$ . Например, описанный выше графический матроид  $M$  является трансверсальным матроидом на множестве  $\{1, 2, 3\}$ , так как его независимые множества служат частичными трансверсальными для семейства  $\mathcal{F}=(S_1, S_2)$ , где  $S_1=\{1\}$ , а  $S_2=\{2, 3\}$ . Заметим, что ранг подмножества  $A$  из  $E$  равен мощности наибольшей частичной трансверсали, содержащейся в  $A$ . Пример матроида, не являющегося трансверсальным, приводится в упр. 31d.

Не так давно было доказано, что всякий трансверсальный матроид представим над некоторым полем и что он бинарен тогда и только тогда, когда является графическим. Дальнейшие результаты, относящиеся к трансверсальным матроидам, будут рассмотрены в § 33.

### ОГРАНИЧЕНИЯ И СУЖЕНИЯ.

Часто в теории графов удается исследовать граф, рассматривая его подграфы или граф, полученный стягиванием некоторых его ребер. Удобно ввести соответствующие понятия и в теории матроидов. Пусть матроид  $M$  определен на множестве  $E$ , и пусть  $A$  — подмножество из  $E$ ; назовем **ограничением** матроида  $M$  на  $A$  (обозначается  $M \times A$ ) матроид, циклами которого являются те и только те циклы из  $M$ , которые содержатся в  $A$ . Аналогично, определим **сужение** матроида  $M$  на  $A$  (обозначается  $M.A$ ) как матроид, циклы которого получаются взятием минимальных элементов совокупности  $\{C_i \cap A\}$ , где  $C_i$  — циклы матроида  $M$ . (Более простое определение дается в упр. 32b.) Предоставляем читателю убедиться в том, что так определенные объекты действительно являются матроидами и что они соответствуют графам с вычеркнутыми или стянутыми ребрами. Матроид, полученный из  $M$  в результате конечнократного перехода к ограничениям и сужениям, называется **мином** матроида  $M$ .

ДВУДОЛЬНЫЕ И ЭЙЛЕРОВЫ МАТРОИДЫ.

В заключение этого параграфа, покажем, как определить двудольные и эйлеровы матроиды. Поскольку обычные определения двудольных и эйлеровых графов (см. § 3, 6) не подходят для обобщения на матроиды, нам придется найти другие характеристики этих графов. В случае двудольных графов нас выручит [упр. 5g](#) — **двудольным матроидом** назовем матроид, каждый цикл которого содержит четное число элементов. Для описания эйлеровых графов воспользуемся [следствием 6D](#); матроид на множестве  $E$  назовем эйлеровым матроидом, если множество  $E$  может быть представлено в виде объединения попарно непересекающихся циклов. В следующем параграфе мы увидим, что понятия **эйлеровых матроидов** и двудольных матроидов двойственны (в каком смысле — мы уточним позднее).

**УПРАЖНЕНИЯ**

- (31a) Покажите, что с точностью до изоморфизма существует ровно четыре матроида на множестве из двух элементов и восемь матроидов на множестве из трех элементов. Сколько их на множестве из четырех элементов? ([См. приложение.](#))
- (31b) Покажите, что с точностью до изоморфизма число матроидов на множестве из  $n$  элементов равно самое большее  $2^{2^n}$ , а число трансверсальных матроидов равно самое большее  $2^{n^2}$ .
- (31c) Докажите, что каждый  $k$ -однородный матроид трансверсален.
- (31d) Докажите, что циклический матроид для  $K_4$  не трансверсален, и найдите другой нетрансверсальный матроид на множестве из шести элементов.
- (31e) Пусть  $M$  — матроид ранга  $r$  на множестве из  $n$  элементов, и пусть  $b$  и  $c$  обозначают соответственно число его баз и циклов; покажите, что  $b \leq C_n^r$  и  $c \leq C_n^{r+1}$ .
- (31f) Докажите, что циклические матроиды  $M(K_5)$  и  $M(K_{3,3})$  являются графическими, но не кографическими; найдите два кографических матроида, не являющихся графическими.
- (31g) Пусть  $M$  — матроид на множестве  $E$ , и пусть  $A \subseteq B \subseteq E$ , докажите, что (i)  $(M \times B) \times A = M \times A$ ; (ii)  $(M.B).A = M.A$ ; (iii)  $(M.B) \times A = (M \times (E - (B - A))).A$ ; (iv)  $(M \times B).A = (M.(E - (B - A))) \times A$ .
- (31h) Покажите, что если матроид  $M$  удовлетворяет любому из следующих условий, то ему удовлетворяет и любой минор матроида  $M$ ; матроид  $M$  (i) графический; (ii) кографический; (iii) бинарный; (iv) регулярный.
- (\*31i) **Матроидом Фано**  $F$  называется матроид, определенный на множестве  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , базами которого являются подмножества из  $E$ , содержащие три элемента за исключением подмножеств  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 4, 5)$ ,

$(1, 6, 7)$ ,  $(2, 4, 7)$ ,  $\{2, 5, 6\}$ ,  $(3, 4, 6)$  и  $(3, 5, 7)$  Покажите, что матроид  $F$  можно изобразить так, как показано на рис. 31.3;

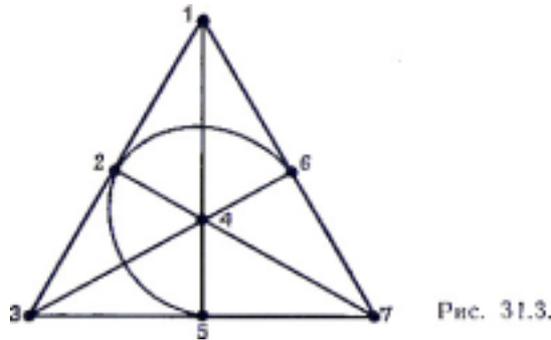


Рис. 31.3.

базами  $F$  являются в точности те множества из трех элементов, которые не лежат на одной прямой. Покажите также, что матроид  $F$  является (i) бинарным; (ii) нерегулярным; (iii) нетрансверсальным; (iv) неграфическим и некографическим; (v) эйлеровым.

(\*31j) Если  $M$  — матроид на множестве  $E$ , то нетривиальное подмножество  $A$  из  $E$  называется **отделяющим подмножеством**, если  $M \times A = M \cdot A$ ; докажите, что следующие условия эквивалентны: (i)  $A$  является отделяющим подмножеством; (ii) каждый цикл из  $M$  содержится либо в  $A$ , либо в  $E - A$ , (iii)  $\rho(A) + \rho(E - A) = \rho(E)$ . Что можно сказать о графе, циклический матроид которого не содержит отделяющих подмножеств?

(\*31k) Пусть  $D$  — орграф без петель, и пусть  $E$  и  $Y$  — два непересекающихся множества вершин орграфа  $G$ . Подмножество  $A$  из  $E$  называется **независимым**, если существует  $|A|$  вершинно непересекающихся простых орцепей из  $A$  в  $Y$ . Докажите, что эти независимые множества задают некоторый матроид на  $E$ . Докажите также, что всякий трансверсальный матроид можно получить описанным способом (Такой матроид называется **гаммоидом**.)

## § 32. МАТРОИДЫ И ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Приступим к изучению двойственности в матроидах; покажем, что в этом свете некоторые результаты, изложенные ранее в этой книге, оказываются гораздо более естественными. Например, мы увидим, что довольно искусственные определения абстрактной двойственности и двойственности по Уитни для планарных графов (см. § 15, 16) являются прямыми следствиями соответствующего определения двойственности для матроидов. Мысль, которую мы хотим здесь провести, заключается в том, что различные понятия теории матроидов не только обобщают свои аналоги из теории графов, но часто и упрощают их.

Напомним читателю, что в предыдущем параграфе мы построили кографический матроид  $M^*(G)$  на множестве ребер графа  $G$  — для этого мы брали в качестве циклов  $M^*(G)$  разрезы графа  $G$ . В свете [теоремы 15C](#) кажется разумным выбор такого определения двойственного матроида, которое сделает

матроид  $M^*(G)$  двойственным циклическому матроиду  $M(G)$  графа  $G$ .

Этого можно достичь следующим образом: пусть матроид  $M=(E, \rho)$  определен в терминах его ранговой функции; назовем **двойственным матроидом** для  $M$  (обозначается  $M^*$ ) матроид на  $E$ , ранговая функция которого  $\rho^*$  определяется равенством

$$\rho^*(A)=|A|+\rho(E-A)-\rho(E) \quad (A\subseteq E).$$

Необходимо сначала проверить, что  $\rho^*$  действительно является ранговой функцией матроида на  $E$ .

ТЕОРЕМА 32А.

$M^*=(E, \rho^*)$  является матроидом на  $E$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Нам надо убедиться в том, что функция  $\rho^*$  удовлетворяет условиям  $(\rho_i)$ ,  $(\rho_{ii})$  и  $(\rho_{iii})$ , перечисленные в § 30.

Чтобы доказать  $(\rho_i)$ , заметим, что  $\rho(E-A)\leq\rho(E)$  и, следовательно,  $\rho^*(A)\leq|A|$ . Кроме того (согласно свойству  $(\rho_{iii})$ , примененному к функции  $\rho$ ), имеем  $\rho(E)+\rho(\emptyset)\leq\rho(A)+\rho(E-A)$ , и поэтому  $\rho(E)-\rho(E-A)\leq\rho(A)\leq|A|$ . Отсюда сразу вытекает, что  $\rho^*(A)\geq 0$ . Доказательство свойства  $(\rho_{ii})$  тоже проводится непосредственно и предлагается читателю в качестве упражнения. Докажем  $(\rho_{iii})$ . Для любых  $A, B\subseteq E$  имеем

$$\begin{aligned} \rho^*(A\cup B)+\rho^*(A\cap B) &= |A\cup B|+|A\cap B|+\rho(E-(A\cup B))+\rho(E-(A\cap B))-2\rho(E)= \\ &= |A|+|B|+\rho((E-A)\cap(E-B))+\rho((E-A)\cup(E-B))-2\rho(E)\cup|A|+|B|+\rho(E-A)+ \\ &\quad +\rho(E-B)-2\rho(E)=\rho^*(A)+\rho^*(B) \end{aligned}$$

(согласно свойству  $(\rho_{iii})$ , примененному к  $\rho$ ), что и требовалось. //

Это, казалось бы, замысловатое определение позволяет, как мы сейчас покажем, очень просто описать базы матроида  $M^*$  в терминах баз матроида  $M$ .

ТЕОРЕМА 32В.

*Базами матроида  $M^*$  являются в точности дополнения баз матроида  $M$ .*

ЗАМЕЧАНИЕ.

На самом деле этот результат можно использовать для определения  $M^*$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Покажем, что если  $B^*$  — база в  $M^*$ , то  $E-B^*$  является базой в  $M$ ; обратный результат получается простым обращением рассуждений. Так как  $B^*$  независимо в  $M^*$ , то  $|B^*|=\rho^*(B^*)$  и, следовательно,  $\rho(E-B^*)=\rho(E)$ . Таким

образом, осталось только доказать, что  $E-B^*$  независимо в  $M$ . Но это сразу следует из равенства  $\rho^*(B^*) = \rho^*(E)$  (и надо применить еще указанное выше выражение для  $\rho^*$ ). //

Непосредственным следствием данного выше определения является то, что (в отличие от планарных графов) каждый матроид имеет двойственный и этот двойственный единствен. Из теоремы 32В также сразу следует, что матроид, двойственный  $M^*$ , т. е.  $M^{**}$ , равен  $M$ . В действительности, как мы увидим, этот совсем тривиальный результат является естественным обобщением на матроиды (нетривиальных) результатов: [теорем 15В](#) и [15Е](#) и [следствия 16В](#). А сейчас мы покажем, что коциклический матроид  $M^*(G)$  графа  $G$  двойствен его циклическому матроиду  $M(G)$ .

ТЕОРЕМА 32С.

*Для любого графа  $G$  имеем  $M^*(G) = (M(G))^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как циклы в  $M^*(G)$  являются разрезами в  $G$ , то мы должны проверить, что  $C^*$  является циклом в  $(M(G))^*$  тогда и только тогда, когда  $C^*$  является разрезом в  $G$ . Предположим сначала, что  $C^*$  — разрез в  $G$ . Если множество  $C^*$  независимо в  $(M(G))^*$ , то его можно расширить до базы  $B^*$  в  $(M(G))^*$ . Следовательно,  $C^* \cap (E-B^*)$  пусто, что противоречит [теореме 9С](#), поскольку  $E-B^*$  является остовным лесом графа  $G$ . Отсюда  $C^*$  — зависимое множество в  $(M(G))^*$ , и поэтому оно содержит цикл из  $(M(G))^*$ .

С другой стороны, если  $D^*$  является циклом в  $(M(G))^*$ , то  $D^*$  не содержится ни в какой базе из  $(M(G))^*$ . Следовательно,  $D^*$  пересекается с каждой базой из  $M(G)$ , т. е. с каждым остовным лесом графа  $G$ . Из [упр. 9h](#) вытекает, что  $D^*$  содержит разрез. Отсюда и следует нужный результат. //

Прежде чем продолжить наше изложение, удобно ввести еще несколько терминов. Будем говорить, что множество элементов матроида  $M$  образует **коцикл** в  $M$ , если это множество является циклом в  $M^*$ . Заметим, что по теореме 32С коциклами циклического матроида графа  $G$  являются в точности разрезы графа  $G$ . Аналогично, назовем **кобазой** в  $M$  множество, являющееся базой в  $M^*$ . Соответствующие определения можно дать для **коранга**, **конезависимого множества** и т. д. Будем также называть матроид  $M$  **кографическим** тогда и только тогда, когда двойственный ему матроид  $M^*$  является графическим; по теореме 32С это определение согласуется с данным в предыдущем параграфе. Введение таких «коназваний» обусловлено тем, что они позволяют нам ограничиться рассмотрением одного матроида  $M$ , не обращаясь к  $M^*$ .

Для иллюстрации докажем аналог [теоремы 9С](#).

ТЕОРЕМА 32D.

*Всякий коцикл матроида пересекается с любой из его баз.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть  $C^*$  — коцикл матроида  $M$ , и пусть существует база  $B$  в  $M$ , обладающая тем свойством, что  $C^* \cap B$  пусто. Тогда  $C^*$  содержится в  $E-B$  поэтому является циклом в  $M^*$ , содержащимся в базе матроида  $M^*$ . Это противоречие и доказывает нужный результат. //

СЛЕДСТВИЕ 32E.

*Всякий цикл матроида пересекается с любой кобазой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Применим теорему 32D к матроиду  $M^*$ . //

Заметим, что с матроидной точки зрения два утверждения [теоремы 9C](#) оказываются двойственными формами одного и того же утверждения. Таким образом, вместо доказательства двух утверждений в теории графов (что нам пришлось делать в § 9), достаточно доказать единственный результат в теории матроидов и применить затем принцип двойственности. Это не только дает значительную экономию времени и усилий, но и позволяет глубже проникнуть в сущность некоторых проблем, уже встречавшихся нам в этой книге. Одним из примеров является уже много раз упомянутая аналогия между свойствами циклов и разрезов; другим — более глубокое понимание двойственности планарных графов.

В качестве следующего примера упрощения, которое дает теория матроидов, рассмотрим еще раз [упр. 5f](#).

Прямое доказательство этого результата требует выделения двух случаев — нужно дать доказательство для циклов и другое доказательство для разрезов. Однако если мы докажем матроидный аналог этого результата для циклов (сформулированный в [упр. 30e](#)), то, применив его к матроиду  $M^*(G)$ , мы сразу же получим соответствующий результат для разрезов; и наоборот, используя двойственность, можно вывести этот результат для циклов из результата для разрезов.

Обратимся теперь к планарным графам и, в частности, покажем, что определения геометрической двойственности, абстрактной двойственности и двойственности по Уитни для графов являются следствиями определения двойственности для матроидов. Начнем с абстрактной двойственности.

ТЕОРЕМА 32F.

*Если граф  $G^*$  абстрактно двойствен графу  $G$ , то матроид  $M(G^*)$  изоморфен  $(M(G))^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Так как граф  $G^*$  абстрактно двойствен графу  $G$ , то существует взаимно однозначное соответствие между их ребрами, обладающее тем свойством, что циклы в  $G$  соответствуют разрезам в  $G^*$ , и наоборот. Отсюда сразу вытекает, что циклы в  $M(G)$  соответствуют коциклам в  $M(G^*)$  и, следовательно, по теореме 32С,  $M(G^*)$  изоморфен  $(M(G))^*$ , что и требовалось. //

СЛЕДСТВИЕ 32G.

*Если граф  $G^*$  геометрически двойствен связному планарному графу  $G$ , то  $M(G^*)$  изоморфен  $(M(G))^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Этот результат сразу следует из теорем 32F и [15C](#). //

Заметим, что (как указывалось ранее) планарный граф может иметь несколько различных двойственных графов, тогда как матроид имеет только один двойственный матроид. Это объясняется тем, что, как легко проверить, если  $G^*$  и  $G^x$  — два (возможно, неизоморфных) двойственных графа для  $G$ , то циклические матроиды для  $G^*$  и  $G^x$  изоморфны. Теперь мы подошли к двойственности по Уитни.

ТЕОРЕМА 32H.

*Если граф  $G^*$  двойствен по Уитни графу  $G$ , то  $M(G^*)$  изоморфен  $(M(G))^*$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как видно из доказательства [теоремы 16C](#), граф  $G^*$  двойствен по Уитни графу  $G$  тогда и только тогда, когда  $G^*$  абстрактно двойствен графу  $G$ . Поэтому наше утверждение сразу следует из теоремы 32F. Можно рассуждать и по-другому: определяющее соотношение для двойственности по Уитни нетрудно вывести из формулы для  $\rho^*$ , данной в следствии 32В. Детали этого рассуждения мы предоставляем читателю. //

В заключение этого параграфа ответим на следующий вопрос: при каких условиях данный матроид  $M$  является графическим? Нетрудно найти необходимые условия. Например, из нашего обсуждения представимых матроидов ([§ 31](#)) следует, что такой матроид должен быть бинарным. Более того, из упр. 31f и 31i ясно, что  $M$  не содержит в качестве минора никакой из матроидов  $M^*(K_5)$ ,  $M^*(K_{3,3})$ ,  $F$  или  $F^*$  (где  $F$  — матроид Фано). В глубокой теореме Татта, которую мы сейчас сформулируем, утверждается, что эти необходимые условия на самом деле являются и достаточными; доказательство этого результата слишком сложно и поэтому здесь не приводится.

ТЕОРЕМА 32I. (ТАТТ 1959)

*Матроид  $M$  является графическим тогда и только тогда, когда он бинарен и не содержит ни одного минора, изоморфного  $M^*(K_5)$ ,  $M^*(K_{3,3})$ ,  $F$  или  $F^*$ . //*

Применяя теорему 32I к  $M^*$  и используя тот факт (см. упр. 32с), что матроид, двойственный бинарному, тоже бинарен, мы сразу получаем необходимые и достаточные условия для того, чтобы матроид был кографическим.

СЛЕДСТВИЕ 32J.

*Матроид  $M$  является кографическим тогда и только тогда, когда он бинарен и не содержит ни одного минора, изоморфного  $M(K_5)$ ,  $M(K_{3,3})$ ,  $F$  или  $F^*$ . //*

Татт, кроме того, доказал, что бинарный матроид регулярен тогда и только тогда, когда он не содержит минора, изоморфного  $F$  или  $F^*$ . Этот результат в сочетании с теоремой 32I и следствием 32J позволяет немедленно вывести следующий матроидный аналог [теоремы 12С](#):

ТЕОРЕМА 32К.

*Матроид является планарным тогда и только тогда, когда он регулярен и не содержит миноров, изоморфных  $M(K_5)$ ,  $M(K_{3,3})$  или двойственным им матроидам. //*

## УПРАЖНЕНИЯ

- (32a) Покажите на примере, что матроид, двойственный трансверсальному матроиду, не обязательно трансверсален.
- (32b) Покажите, что если  $M$  — матроид на множестве  $E$  и  $A$  — подмножество из  $E$ , то сужение  $M.A$  представляет собой матроид, коциклами которого являются те и только те коциклы из  $M$ , которые содержатся в  $A$ . Покажите также, что  $(M.A)^* = M^* \times A$  и  $(M \times A)^* = M^*.A$ , и выведите отсюда, что если  $A$  — отделяющее подмножество в  $M$ , то  $A$  является отделяющим подмножеством в  $M^*$ , и наоборот.
- (32c) Докажите, что для любого цикла  $C$  и любого коцикла  $C^*$  матроида  $M$  имеем  $|C \cap C^*| \neq 1$ . (Этот результат обобщает на случай матроидов [упр. 5i](#).) Более того, докажите, что  $M$  бинарен тогда и только тогда, когда  $|C \cap C^*|$  чётно, и выведите отсюда, что матроид, двойственный бинарному, сам бинарен.
- (\*32d) Пусть  $M$  — бинарный матроид на множестве  $E$ . Используя результат предыдущего упражнения, докажите, что если  $M$  эйлеров, то  $M^*$  двудолен; докажите также (применив индукцию по  $|E|$ ), что верно и обратное. Рассмотрев 5-однородный матроид на множестве из одиннадцати элементов, покажите, что условие бинарности матроида  $M$  не может быть опущено. (Это упражнение обобщает на случай матроидов [упр. 15g](#).)

- (\*32e) Покажите, как, имитируя [упр. 2j](#), определить **векторное пространство**  $V$ , **ассоциированное с матроидом**  $M$  на множестве  $E$ . Докажите, что если матроид  $M$  бинарен, то сумму любых двух подмножеств из  $E$  можно представить в виде объединения непересекающихся циклов в  $M$ ; выведите отсюда, что множество всех объединений непересекающихся циклов в  $M$  образует подпространство в  $V$  (называемое **циклическим подпространством** матроида  $M$ ). Воспользовавшись двойственностью, получите соответствующий результат для коциклов и сравните эти результаты с теми, которые приведены в [упр. 6h](#) и [6i](#).
- (\*321) Покажите, что для бинарных матроидов определение двойственного матроида обобщает определение алгебраически двойственного графа (которое дано в [упр. 15j](#)).

### § 33. МАТРОИДЫ И ТЕОРИЯ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ

В предыдущем параграфе было показано, что существует тесная связь между результатами теории матроидов и теории графов; здесь мы рассмотрим связь между теорией матроидов и теорией трансверсалей. Сначала покажем, как можно существенно упростить доказательства некоторых приведенных ранее утверждений из теории трансверсалей переходом на матроидно-теоретическую точку зрения.

Напомним читателю, что если  $E$  — непустое конечное множество и  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$  — семейство его непустых подмножеств, то частичные трансверсали для  $\mathcal{S}$  можно взять в качестве независимых множеств матроида на  $E$ , обозначаемого через  $M(S_1, \dots, S_m)$ . Для этого матроида ранг под множества  $A$  из  $E$  равен мощности наибольшей частичной трансверсали для  $\mathcal{S}$ , содержащейся в  $A$ .

Нашим первым примером использования матроидов в теории трансверсалей будет доказательство утверждения из [упр. 26d](#) о том, что семейство  $\mathcal{S}$  подмножеств из  $E$  обладает трансверсалью, содержащей заданное подмножество  $A$ , том и только в том случае, если (i)  $\mathcal{S}$  обладает трансверсалью и (ii)  $A$  является частичной трансверсалью для  $\mathcal{S}$ . Ясно, что оба эти условия необходимы; для доказательства и достаточности заметим, что если  $A$  — частичная трансверсаль для  $\mathcal{S}$ , то  $A$  должно быть независимым множеством в трансверсальном матроиде  $M$ , определяемом семейством  $\mathcal{S}$ , и поэтому его можно расширить до базы в  $M$ . Так как  $\mathcal{S}$  обладает трансверсалью, то каждая база в  $M$  должна быть трансверсалью для  $\mathcal{S}$ . Отсюда сразу вытекает нужное утверждение. Тот, кто проработал [упр. 26d](#), оценит, насколько проще данное рассуждение.

Прежде чем показать, как с помощью теории матроидов можно упростить доказательство теоремы 27D о существовании общей трансверсали для двух семейств подмножеств множества  $E$ , докажем результат, являющийся естественным обобщением на матроиды теоремы Холла. Напомним, что теорема Холла дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы некоторое семейство  $\mathcal{S}$  подмножеств множества  $E$  имело трансверсаль. Если на

$E$  определена также структура матроида, то возникает вопрос, существует ли соответствующее условие, обеспечивающее существование **независимой трансверсали**, т. е. такой трансверсали для  $\mathcal{S}$ , которая является в то же время независимым множеством в матроиде. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, известная как **теорема Радо**.

ТЕОРЕМА 33А. (РАДО 1942)

*Пусть  $M$  — матроид на множестве  $E$ , и пусть  $\mathcal{S}=(S_1, \dots, S_m)$  — семейство непустых подмножеств из  $E$ ; тогда  $\mathcal{S}$  имеет независимую трансверсаль в том и только в том случае, если для любых  $k$  подмножеств  $S_i$  их объединение содержит независимое множество мощности, не меньшей  $k$  ( $1 \leq k \leq m$ ).*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Если  $M$  является дискретным матроидом на  $E$ , то эта теорема сводится к теореме Холла, сформулированной как теорема 26А.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Будем действовать так же, как и при доказательстве теоремы 26А. Как и раньше, необходимость условия очевидна, и поэтому достаточно доказать, что если одно из подмножеств (скажем,  $S_l$ ) содержит более одного элемента, то можно удалить некоторый элемент из  $S_l$  не нарушив при этом справедливость условия теоремы. Повторяя эту процедуру, мы в конце концов сведем первоначальную задачу к случаю, когда каждое подмножество содержит только один элемент; после этого доказательство становится тривиальным.

Чтобы установить законность такой процедуры сведения предположим, что  $S_l$  содержит элементы  $x$  и  $y$  и что удаление любого из них нарушает справедливость условия. Тогда существуют подмножества  $A$  и  $B$  множества  $\{2, 3, \dots, n\}$ , обладающие тем свойством, что

$$\rho\left(\bigcup_{j \in A} S_j \cup (S_l - \{x\})\right) \leq |A| \text{ и } \rho\left(\bigcup_{j \in B} S_j \cup (S_l - \{y\})\right) \leq |B|.$$

Но эти два неравенства приводят к противоречию, так как

$$\begin{aligned} |A| + |B| + 1 &= |A \cup B| + |A \cap B| + 1 \leq \rho\left(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j \cup S_l\right) + \rho\left(\bigcup_{j \in A \cap B} S_j\right) \leq (\text{по условию}) \\ &\leq \rho\left(\bigcup_{j \in A} S_j \cup (S_l - \{x\})\right) + \rho\left(\bigcup_{j \in B} S_j \cup (S_l - \{y\})\right) \leq \text{так как } |S_l| \geq 2 \\ &\leq |A| + |B|. \text{ (по предположению)} // \end{aligned}$$

Действуя так же, как и при доказательстве следствия 26В мы сразу получаем такой результат (в котором используются введенные выше обозначения):

СЛЕДСТВИЕ 33В.

*Семейство  $\mathcal{S}$  обладает независимой частичной трансверсалью мощности  $t$  тогда и только тогда, когда для любых  $k$  подмножеств  $S_i$ , их объединение содержит независимое множество мощности не меньше  $k+t-m$ .*

Теперь дадим матроидно-теоретическое доказательство теоремы 27D о существовании общей трансверсали для двух семейств подмножеств данного множества.

ТЕОРЕМА 27D.

*Пусть  $E$  — непустое, конечное семейство, и пусть  $\mathcal{S}=(S_1, \dots, S_m)$  и  $\zeta=(T_1, \dots, T_m)$  — с семейства непустых подмножеств из  $E$ ; тогда  $\mathcal{S}$  и  $\zeta$  обладают общей трансверсалью в том и только в том случае, если для любых подмножеств  $A$  и  $B$  множества  $\{1, 2, \dots, m\}$*

$$|(\bigcup_{i \in A} S_i) \cap (\bigcup_{j \in B} T_j)| \geq |A| + |B| - m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть независимыми множествами матроида  $M=(E, \rho)$  являются в точности частичные трансверсали семейства  $\mathcal{S}$ . Тогда  $\mathcal{S}$  и  $\zeta$  имеют общую трансверсаль в том и только в том случае, если  $\zeta$  имеет независимую трансверсаль. По теореме 33А  $\zeta$  имеет независимую трансверсаль тогда и только тогда, когда объединение любых  $k$  множеств  $T_i$  содержит независимое множество мощности не меньше  $k$  (для  $1 \leq k \leq m$  от), т. е. тогда и только тогда, когда объединение любых  $k$  множеств  $T_i$  содержит частичную трансверсаль для  $\mathcal{S}$  мощности  $k$ . Теперь результат вытекает из следствия 26С. //

Наше следующее приложение относится к объединению матроидов. Напомним читателю ([см. упр. 30h](#)), что если  $M_1$  и  $M_2$  — два матроида на множестве  $E$ , то можно определить новый матроид  $M_1 \cup M_2$ , взяв в качестве независимых множеств всевозможные объединения независимого множества из  $M_1$  и независимого множества из  $M_2$ . Найдем теперь ранг этого матроида.

ТЕОРЕМА 33С.

*Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — ранговые функции матроидов  $M_1$  и  $M_2$ , тогда ранг  $\rho(E)$  объединения  $M_1 \cup M_2$ , определяется равенством*

$$\rho(E) = \min_{A \subseteq E} \{ \rho_1(A) + \rho_2(A) + |E - A| \}.$$

▲ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим сначала, что если  $A$  — любое подмножество из  $E$ , а  $B$  — любая база из  $M_1 \cup M_2$ , то очевидно, что

$$\rho(E) = |B| = |B \cap A| + |B \cap (E - A)| \leq \rho_1(A) + \rho_2(A) + |E - A|.$$

Для того чтобы получить нижнюю оценку для  $\rho(E)$ , положим  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ , и пусть  $F$  — любое множество  $\{f_1, \dots, f_n\}$ , имеющее пустое пересечение с  $E$ ; тогда на множестве  $F$  очевидным образом можно определить матроид  $\tilde{M}_2$ , изоморфный матроиду  $M_2$ . Отсюда сразу следует, что  $M_1 \cup \tilde{M}_2$  — матроид на множестве  $E \cup F$ , ранговая функция которого задается равенством  $\tilde{\rho}(A) = \rho_1(A) + \rho_2(A)$ , где  $A$  — любое подмножество из  $E \cup F$ .

Рассмотрим семейство  $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_m)$  подмножеств множества  $E \cup F$ , где  $S_i = \{e, f_{ij}\}$ ; ясно, что в матроиде  $M_1 \cup M_2$  любого подмножества  $B$  из  $E$  не меньше  $t$  в том и только том случае, если подмножества  $(S_i: e_i \in B)$  имеют частичную трансверсаль мощности  $t$ , независимую в  $M_1 \cup \tilde{M}_2$ . Но, согласно следствию 33В, это так тогда и только тогда, когда в матроиде  $M_1 \cup \tilde{M}_2$  ранг объединения любых  $k$  таких подмножеств равен по меньшей мере  $k + t - |B|$ . Отсюда следует, что если  $U$  — такое объединение и  $A$  — множество соответствующих элементов из  $B$ , то  $\rho_1(U) = \rho_1(A)$  и  $\rho_2(U) = \rho_2(A)$ . Поэтому ранг  $B$  не меньше  $t$  в том и только в том случае, если  $\rho_1(A) + \rho_2(A) = \tilde{\rho}(U) \geq |A| + t - |B|$ .

Так как ранг  $E$  меньше  $\rho(E) + 1$ , то, полагая  $B = E$  и  $t = \rho(E) + 1$ , получим, что

$$\rho(E) + 1 > \rho_1(A) + \rho_2(A) + |E - A|.$$

Отсюда и вытекает нужный результат. // ▲

Пользуясь индукцией, легко перенести этот результат на объединение  $k$  матроидов; выражение для ранговой функции такого объединения дано в приводимом ниже следствии.

СЛЕДСТВИЕ 33D.

Если  $M_1, \dots, M_k$  — матроиды на множестве  $E$ , ранговые функции которых равны соответственно  $\rho_1, \dots, \rho_k$ , то ранговая функция  $\rho$  матроида  $M_1 \cup \dots \cup M_k$  определяется равенством

$$\rho(X) = \min_{A \subset X} \{ \rho_1(A) + \dots + \rho_k(A) + |X - A| \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как только что упоминалось, расширение теоремы 33С с двух матроидов

до  $k$  матроидов осуществляется простой индукцией. При этом ранг любого подмножества  $X$  из  $E$  получается ограничением этого объединения на  $X$  с учетом легко проверяемого соотношения

$$(M_1 \cup \dots \cup M_k) \times X = (M_1 \times X) \cup \dots \cup (M_k \times X). //$$

В заключение этой главы покажем, как при помощи только что доказанных утверждений можно получить два глубоких результата теории графов. Для этого выведем сна несколько простых следствий из следствия 33D.

СЛЕДСТВИЕ 33E.

*Матроид  $M=(E, \rho)$  содержит  $k$  непересекающихся баз тогда и только тогда, когда для любого подмножества  $A$  из  $E$*

$$k\rho(A) + |E-A| \geq k\rho(E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Матроид  $M$  содержит  $k$  непересекающихся баз тогда и только тогда, когда ранг объединения  $k$  экземпляров матроида  $M$  не меньше  $k\rho(E)$ ; теперь утверждение непосредственно вытекает из следствия 33D. //

СЛЕДСТВИЕ 33F.

*Пусть  $M=(E, \rho)$  — матроид;  $E$  можно представить в виде объединения не более чем  $k$  независимых, множеств тогда и только тогда, когда  $k\rho(A) \geq |A|$  для любого подмножества  $A$  из  $E$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В этом случае ранг объединения  $k$  экземпляров матроида  $M$  равен  $|E|$ . Отсюда и из следствия 33D сразу вытекает, что  $k\rho(A) + |E-A| \geq |E|$ , что и требовалось. //

Применяя теперь два последних следствия к циклическому матроиду  $M(G)$  связного графа  $G$ , мы сразу получим необходимые и достаточные условия для того, чтобы  $G$  содержал  $k$  реберно непересекающихся остовных деревьев, и для того, чтобы  $G$  можно было разбить на  $k$  деревьев.

ТЕОРЕМА 33G.

*Связный граф  $G$  содержит  $k$  реберно непересекающихся остовных деревьев тогда и только тогда, когда для любого его подграфа  $H$*

$$k(\chi(G) - \chi(H)) \leq m(G) - m(H),$$

где через  $m(H)$  и  $m(G)$  обозначено число ребер в  $H$  и  $G$

*соответственно. //*

ТЕОРЕМА 33Н.

*Связный граф  $G$  можно разбить на не более чем  $k$  деревьев тогда и только тогда, когда  $k\chi(H) \geq t(H)$  для любого его подграфа  $H$ . //*

Прямыми методами эти результаты получаются совсем не так просто, и тем самым мы еще раз продемонстрировали большие возможности теории матроидов при решении задач теории графов.

### УПРАЖНЕНИЯ

- (33a) Покажите, как модифицировать доказательство теоремы Холла, предложенное Халмошем и Вогеном, чтобы получить доказательство теоремы 33А.
- (33b) Докажите, что в трансверсальном матроиде  $M=M(S_1, \dots, S_m)$  ранга  $r$  существует  $r$  таких множеств  $S_i$  (скажем,  $S_{i_1}, \dots, S_{i_r}$ ), что  $M=M(S_{i_1}, \dots, S_{i_r})$ .
- (33c) Докажите, что матроид  $M$  трансверсален тогда и только тогда, когда его можно представить в виде объединения матроидов ранга один.
- (33d) Пусть  $M_1=(E, \rho_1)$  и  $M_2=(E, \rho_2)$  — матроиды на множестве  $E$ . Докажите, что  $M_1$  и  $M_2$  имеют общее независимое множество мощности  $k$  тогда и только тогда, когда для любого подмножества  $A$  из  $E$

$$\rho_1(A) + \rho_2(E-A) \geq k.$$

- (33e) Сформулируйте утверждения, двойственные теоремам 33G и 33Н, получив тем самым еще два результата теории графов.
- (\*33f) Используя следствие 33F, получите условие, при котором конечное множество векторов векторного пространства можно разбить на  $k$  попарно непересекающихся линейно независимых подмножеств. Выведите соответствующий результат из следствия 33E.
- (\*33g) Пусть  $\mathcal{S}$  — семейство непустых подмножеств множества  $E$ ; найдите условие, при котором  $\mathcal{S}$  содержит  $t$  попарно непересекающихся частичных трансверсалей мощностей  $r_1, \dots, r_t$ .

**ПОСЛЕСЛОВИЕ**

Совсем немного дописать

Осталось строчек,

Затем спокойно лягу спать,

Сказав всем: «Доброй ночи».

**Роберт Геррик(1591-1674)<sup>30</sup>**

Хотя мы подошли к концу книги, это совсем не означает, что исчерпан предмет нашего изложения. Надеемся, что многие читатели захотят продолжить изучение теории графов; поэтому, желая им помочь, мы наметим здесь направления для дальнейшего чтения.

Тому, кто интересуется в основном «чистой» теорией графов, советуем посмотреть книгу Харари [1], которая представляет собой целый клад всевозможных сведений и является превосходным справочником. Стоит также прочитать работы Муна [7] о деревьях, Оре [5] о планарности и проблемах раскрашивания и Рингеля [16] о задачах, связанных с родом графа. Обсуждение различных приложений теории графов можно найти у Басакера и Саати [2], Бержа [3] или у Форда и Фалкерсона [11]. Последняя книга обязательна для всех, кто хочет серьезно заняться теорией потоков в сетях. Общее и всестороннее введение в комбинаторную теорию, включающее в себя не только теорию графов и потоки в сетях, но и интересное изложение техники перечисления, линейного программирования, построение блок-схем, дает прекрасная книга Ли [6]. Подробное изложение теории трансверсалей, охватывающее большой материал по трансверсальным матроидам, можно найти в недавно вышедшей книге Мирского [10].

Рано или поздно (чем раньше, тем лучше) читателю придется обратиться уже не к книгам, а к математическим журналам. Существует много журналов, часто помещающих статьи по теории графов и смежным областям, и среди них даже есть два: *Journal of Combinatorial Theory*(Academic Press) и *Discrete Mathematics* (North-Holland), которые целиком предназначены для специалистов в этих областях. Наконец, упомянем, что в конце книги [9], вышедшей под редакцией Харари, помещен список более чем 1700 статей книг по теории графов, опубликованных до 1968 г.; работы в нем упорядочены по содержанию и по фамилиям авторов. Очень советуем читателю потратить некоторое время на ознакомление с этим списком.

<sup>30</sup> Роберт Геррик (1591-1674) – английский поэт. – *Прим. ред.*

ПОСЛЕСЛОВИЕ  
Конец, конец, огарок догорел.

**Вильям Шекспир (Макбет<sup>31</sup>)**

---

<sup>31</sup> Перевод Б. Пастернака, акт 5, сцена 5. — *Прим. ред.*

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

В таблице приведены числа графов и орграфов различных типов с данным числом вершин  $n$ . Числа, большие одного миллиона, представлены одной значащей цифрой.

Типы графов	$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
Простые графы		1	2	4	11	34	156	1044	12346
Связные простые графы		1	1	2	6	21	112	853	11120
Эйлеровы простые графы		1	0	1	1	4	8	37	184
Гамильтоновы простые графы		1	0	1	3	8	48	?	?
Деревья		1	1	1	2	3	6	11	23
Помеченные деревья		1	1	3	16	125	1296	16807	262144
Связные простые планарные графы		1	1	2	6	20	105	?	?
Простые орграфы		1	3	16	218	9608	$\sim 2 \cdot 10^6$	$\sim 9 \cdot 10^8$	$\sim 2 \cdot 10^{12}$
Связные простые орграфы		1	2	13	199	9364	$\sim 2 \cdot 10^6$	$\sim 9 \cdot 10^8$	$\sim 2 \cdot 10^{12}$
Сильно связные простые орграфы		1	1	5	90	?	?	?	?
Турниры		1	1	2	4	12	56	456	6880
Матроиды(на множестве из $n$ элементов)		2	4	8	17	38	?	?	?

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.**

Много книг составлять — конца не будет,

И много читать утомительно для плоти.

**Экклезиаст<sup>32</sup>**

1. Апостол (Apostol T. M.), *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.
2. Басакер Р., Саати Т., *Конечные графы и сети*, «Наука», М., 1974.
3. Берж К., *Теория графов и ее применение*, ИЛ, М., 1962.
4. Кэрролл Л., *Приключения Алисы в стране чудес*, «Детская литература», М., 1974.
5. Ли (Liu C. L.), *Introduction to combinatorial mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
6. Мирский (Mirsky L.), *Transversal theory*, Academic Press, New York, 1971.
7. Мун (Moon J. W.), *Counting labelled trees*, Canadian Math. Congress, Montreal, 1970.
8. Оре О. (Ore O.), *The four-color problem*, Academic Press, New York, 1967.
9. Оре О., *Теория графов*, «Наука» М., 1968.
10. Рингель Г., *Теорема о раскраске карт*, «Мир», М., 1977.
11. Уитни (Whitney H.), *On the abstract properties of linear dependence*, Amer. J. Math., 57 (1935), 509-533.
12. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. I, «Мир», М., 1967.
13. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р., *Потоки в сетях*, «Мир», М., 1966.
14. Харари Ф., *Теория графов*, «Мир», М., 1973.

---

<sup>32</sup> Перевод И. Дьяконова, БВЛ, поэзия и проза Древнего Востока. – *Прим. ред.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 15.** Харари (Harary F.) (ed.), Proof techniques in graph theory, Academic Press, New York, 1969.
- 16.** Харрис (Harris B.) (ed.), Graph Theory and its applications, Academic Press, New York, 1970.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- (0,1)-матрица [§ 27](#)  
автоморфизм [§ 3](#)  
 $k$ -граф [§ 2](#)  
алгоритм Краскала [§ 11](#)  
алгоритм Флёрри [§ 6](#)  
база [§ 30](#)  
валентность [§ 2](#)  
вектор вероятностей [§ 24](#)  
векторное пространство, ассоциированное с матроидом [§ 32](#)  
векторное пространство, связанное с графом [§ 2](#)  
величина потока [§ 29](#)  
вероятность перехода [§ 24](#)  
вершина висячая [§ 2](#)  
вершина изолированная [§ 2](#)  
вершина конечная [§ 5](#)  
вершина концевая [§ 2](#)  
вершина начальная [§ 5, § 7](#)  
вершина [§ 2, § 8, § 22](#)  
вершины эквивалентные [§ 5](#)  
выигрыш [§ 23](#)  
гамильтонов цикл [§ 7](#)  
гаммоид [§ 31](#)  
гипотеза Хадвигера [§ 17](#)  
гипотеза четырех красок для карт [§ 19](#)  
гипотеза четырех красок [§ 1, § 17](#)  
гомеоморфные графы [§ 12](#)  
грань бесконечная [§ 13](#)  
грань [§ 13](#)  
грань, содержащая точку [§ 13](#)  
граф  $k$ -раскрашиваемый [§ 17](#)  
граф  $k$ -связный  $k$ -хроматический [§ 17](#)  
граф  $k$ -связный счетный [§ 8](#)  
граф  $k$ -связный тороидальный [§ 14](#)  
граф  $k$ -связный трехвалентный [§ 3](#)  
граф  $k$ -связный циклический [§ 3](#)  
граф  $k$ -связный эйлеров [§ 6](#)  
граф  $k$ -связным [§ 28](#)  
граф бесконечный [§ 2](#)  
граф бесконечный [§ 8](#)  
граф вполне несвязный [§ 3](#)  
граф гамильтонов [§ 1](#)  
граф гамильтонов [§ 7](#)  
граф двойственный [§ 15](#)  
граф двудольный [§ 3](#)  
граф звездный [§ 3](#)  
граф изоморфный [§ 10](#)  
граф критический [§ 17](#)  
граф кубический [§ 3](#)  
граф локально конечный [§ 8](#)  
граф локально счетный [§ 8](#)  
граф многогранника [§ 13](#)  
граф несвязный [§ 3, § 5](#)  
граф общий [§ 2](#)  
граф ориентированный [§ 1](#)  
граф ориентируемый [§ 22](#)  
граф Петерсена [§ 3](#)  
граф планарный [§ 4](#)  
граф планарный [§ 1, § 12](#)  
граф плоский [§ 12](#)  
граф полный [§ 3](#)  
граф полугамильтонов [§ 7](#)  
граф полуэйлеров [§ 6, § 8](#)  
граф помеченный [§ 10](#)  
граф произвольно вычерчиваемый [§ 6](#)  
граф простой [§ 1, § 2](#)  
граф пустой [§ 3](#)  
граф реберно  $k$ -раскрашиваемый [§ 20](#)  
граф реберный [§ 2](#)  
граф регулярный [§ 3](#)  
граф регулярный, степени  $r$  [§ 3](#)  
граф рода  $g$  [§ 14](#)  
граф самодополнительный [§ 3](#)  
граф связный [§ 1, § 3, § 5](#)  
граф эйлеров [§ 1](#)  
граф [§ 1, § 2](#)  
группа автоморфизмов графа [§ 3](#)

- двойственность геометрическая [§15](#)  
двойственность абстрактная [§15](#)  
двойственность алгебраическая [§14](#)  
двойственность по Уитни [§16](#)  
двойственность [§1](#)  
дерево остовное [§9](#)  
дерево [§1](#), [§5](#), [§9](#)  
диаметр [§5](#)  
дополнение графа [§3](#), [§9](#)  
дуга насыщенная [§29](#)  
дуга ненасыщенная [§29](#)  
дуга [§2](#), [§22](#)  
жорданова дуга [§4](#)  
задача о коммивояжере [§11](#)  
задача о минимальной связке [§11](#)  
задача о свадьбах [§25](#)  
задача о соединении городов [§11](#)  
замыкание [§30](#)  
изоморфные графы [§1](#), [§2](#)  
изоморфные матроиды [§31](#)  
индекс хроматический [§20](#)  
инцидентная дуга [§22](#)  
инцидентная ребру вершина [§22](#)  
источник орграфа [§23](#)  
карта  $k$ -раскрашиваемая [§19](#)  
карта [§19](#)  
класс хроматический [§20](#)  
кобаза [§32](#)  
колесо [§3](#)  
компонента связности [§3](#)  
компонента связности [§5](#)  
конезависимое множество [§32](#)  
коранг [§32](#)  
коцикл [§32](#)  
латинский  $(m \times n)$ -прямоугольник [§27](#)  
латинский квадрат [§27](#)  
лемма о рукопожатиях [§2](#)  
лес [§9](#)  
лес остовной [§9](#)  
линия [§2](#)  
маршрут бесконечный [§8](#)  
маршрут конечный [§8](#)  
маршрут ориентированный [§22](#)  
маршрут [§5](#)  
матрица инцидентий [§2](#), [§27](#)  
матрица перехода [§24](#)  
матрица смежности [§2](#), [§22](#)  
матричная теорема о деревьях [§10](#)  
матроид векторный [§30](#)  
матроид  $k$ -однородный [§31](#)  
матроид бинарный [§31](#)  
матроид графический [§31](#)  
матроид двойственный [§32](#)  
матроид двудольный [§31](#)  
матроид дискретный [§31](#)  
матроид кографический [§31](#), [§32](#)  
матроид коциклический [§31](#)  
матроид планарный [§31](#)  
матроид представимый [§31](#)  
матроид разрезов [§31](#)  
матроид трансверсальный [§31](#)  
матроид тривиальный [§31](#)  
матроид Фано [§31](#)  
матроид циклический [§30](#)  
матроид эйлеров [§31](#)  
матроид [§30](#)  
матроид, представимый над полем [§31](#)  
матроиды регулярные [§31](#)  
мера [§11](#)  
метка [§10](#)  
минор [§31](#)  
многочлен хроматический [§21](#)  
множество вершин  $v$ -отделяющее [§28](#)  
множество вершин  $v$ -разделяющее [§28](#)  
множество вершин зависимое [§30](#)  
множество вершин независимое [§30](#)  
множество вершин [§2](#)  
множество замкнутое [§30](#)  
множество разделяющее [§5](#)  
множество ребер независимое [§5](#)  
множество ребер [§2](#)  
множеством вершин [§22](#)  
мост [§5](#)  
набор выигрышей [§23](#)

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- независимое подмножество [§ 31](#)  
 обхват [§ 5](#)  
 объединение [§ 30](#)  
 ограничение матроида [§ 31](#)  
 орграф полугамильтонов [§ 23](#)  
 орграф ассоциированный [§ 24](#)  
 орграф гамильтонов [§ 23](#)  
 орграф обратный [§ 22](#)  
 орграф простой [§ 22](#)  
 орграф связный [§ 22](#)  
 орграф сильно связный [§ 22](#)  
 орграф эйлеров [§ 23](#)  
 орграф [§ 1, § 2, § 22](#)  
 орграфы изоморфные [§ 22](#)  
 орлемма о рукопожатиях [§ 23](#)  
 орцепь простая [§ 22](#)  
 орцепь эйлерова [§ 23](#)  
 орцепь [§ 22](#)  
 орцикл [§ 22](#)  
 основание [§ 22](#)  
 отделяющее подмножество [§ 31](#)  
 пара параллельных элементов  
 матроида [§ 30](#)  
 пересечение [§ 4](#)  
 перешеек [§ 5](#)  
 петля матроида [§ 30](#)  
 петля [§ 2](#)  
 платонов граф [§ 3](#)  
 подграф [§ 2](#)  
 подпространство разрезов [§ 6](#)  
 подпространство циклическое [§ 32](#)  
 подпространство циклов [§ 6](#)  
 полустепень захода [§ 23, § 29](#)  
 полустепень исхода [§ 23, § 29](#)  
 поток максимальный [§ 29](#)  
 поток нулевой [§ 29](#)  
 поток [§ 29](#)  
 пропускная способность разреза  
[§ 29](#)  
 пропускная способность сети [§ 29](#)  
 радиус [§ 5](#)  
 размерность [§ 4](#)  
 разрез минимальный [§ 29](#)  
 разрез [§ 5, § 29](#)  
 ранг коциклический [§ 9](#)  
 ранг матроида [§ 30](#)  
 ранг разреза [§ 9](#)  
 ранг словарный [§ 27](#)  
 ранг циклический [§ 9](#)  
 ранг [§ 26, § 30](#)  
 распределение меток [§ 10](#)  
 расстояние [§ 5](#)  
 реберно-хроматическое число [§ 20](#)  
 ребро инцидентное [§ 2](#)  
 ребро ориентированное [§ 2](#)  
 ребро [§ 1, § 2, § 8](#)  
 связанные вершины [§ 5](#)  
 связка [§ 10](#)  
 семейство дуг [§ 22](#)  
 семейство [§ 2](#)  
 сеть [§ 29](#)  
 система различных представителей  
[§ 26](#)  
 случайное блуждание [§ 24](#)  
 смежные вершины [§ 2, § 22](#)  
 совершенное паросочетание [§ 25](#)  
 состояние цепи Маркова  
 возвратное [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова  
 невозвратное [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова  
 непериодическое [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова  
 периодическое с периодом [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова  
 поглощающее [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова  
 рекуррентное [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова  
 эргодическое [§ 24](#)  
 состояние цепи Маркова [§ 24](#)  
 степень [§ 1, § 2, § 8](#)  
 сток орграфа [§ 23](#)  
 стягиваемый граф [§ 12](#)  
 стягивание элементарное [§ 12](#)  
 сужение матроида [§ 31](#)  
 сумма мер [§ 11](#)  
 теорема Брукса [§ 17](#)  
 теорема Визинга [§ 20](#)  
 теорема Дирака [§ 7](#)

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- теорема Жордана о кривой [§ 4](#)  
теорема Кёнига-Эгервари. [§ 27](#)  
теорема Куратовского [§ 12](#)  
теорема Кэли [§ 10](#)  
теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе [§ 29](#)  
теорема о пяти красках [§ 17](#)  
теорема о целочисленности [§ 28](#)  
теорема Радо [§ 33](#)  
теорема Турана экстремальная [§ 5](#)  
теорема Холла о свадьбах [§ 25](#)  
теорема Эйлера [§ 13](#)  
теория матроидов [§ 1](#)  
тождественные с точностью до вершин степени 2 графы [§ 12](#)  
толщина [§ 13](#)  
тороидальная толщина [§ 14](#)  
точка дизъюнктивная [§ 4](#)  
трансверсаль независимая [§ 33](#)  
трансверсаль общая [§ 27](#)  
трансверсаль частичная [§ 26](#)  
трансверсаль [§ 26](#)  
треугольник [§ 5](#)  
турнир двудольный [§ 23](#)  
турнир несводимый [§ 23](#)  
турнир транзитивный [§ 23](#)
- турнир [§ 23](#)  
узел [§ 2](#)  
укладка [§ 4](#)  
фундаментальная система разрезов [§ 9](#)  
фундаментальная система циклов [§ 9](#)  
функция хроматическая [§ 21](#)  
центр [§ 5](#)  
цепь вершинно непересекающаяся [§ 28](#)  
цепь замкнутая [§ 5](#)  
цепь Маркова неприводимая [§ 24](#)  
цепь Маркова [§ 24](#)  
цепь простая реберно непересекающаяся [§ 28](#)  
цепь простая [§ 5](#)  
цепь эйлера [§ 6, § 8](#)  
цепь эргодическая [§ 24](#)  
цепь [§ 1, § 5, § 24](#)  
цикл [§ 1, § 3, § 5, § 30](#)  
число скрещиваний [§ 12](#)  
число характеристическое [§ 3](#)  
число хроматическое [§ 17](#)  
число цикломатическое [§ 9](#)