О.И. Мельников

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

Учебно-методическое пособие

Издание второе, стереотипное

Рекомендовано Научно-методическим центром учебной книги и средств обучения Министерства образования Республики Беларусь в качестве учебно-методического пособия для общеобразовательных школ

МИНСК
НТООО «ТетраСистемс»
2001

УДК 372.800.26.046.14
ББК 74.263.2
М48

Автор:
кандидат физико-математических наук, лауреат Государственной премии Республики Беларусь, доцент **О. И. Мельников**

Мельников О. И.
М48 Занимательные задачи по теории графов: Учеб.-метод. пособие / О. И. Мельников. – Изд-е 2-е, стереотип. – Мн.: «ТетраСистемс», 2001. – 144 с.
ISBN 985-6577-91-8.

В книге в занимательной форме изложены основы теории графов. Изучение этой дисциплины на факультативе в средней школе будет способствовать развитию дискретного математического мышления учеников и облегчит им освоение вычислительной техники. Элементы теории графов включены в программу углубленного изучения информатики в 10-11-х классах общеобразовательной средней школы.

Книга предназначена для школьников и учителей, задачи из нее могут быть использованы на математических олимпиадах различных уровней. Будет полезна абитуриентам, поступающим в вузы с повышенными требованиями по математике.

УДК 372.800.26.046.14
ББК 74.263.2

Учебное издание

МЕЛЬНИКОВ Олег Исидорович

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

Учебно-методическое пособие

Редактор Е. Ю. Бобкова.
Корректор С. В. Процко.
Дизайн обложки А. М. Соколова и С. В. Юшко.
Ответственный за выпуск А. Ф. Мясников.

Подписано в печать с готовых диапозитивов 26.09.2001.
Формат 60×84 1/16. Бумага книжно-журнальная офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Печ.л. 9. Усл.печ.л. 14,58. Тираж 3100 экз. Заказ 6460.

Налоговая льгота – Общегосударственный классификатор Республики Беларусь ОКРБ 007-98, ч. 1; код 22.11.20.600

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью «ТетраСистемс».
Лицензия ЛВ № 76 от 19.11.97 до 19.11.02.
220116, г. Минск-116, а/я 139 (тел. 286-13-93; E-mail: books@tut.by; http://www.ts.by).

Отпечатано с готовых диапозитивов заказчика
в Витебской областной укрупненной типографии.
210015, г. Витебск, ул. Щербакова-Набережная, 4.

ISBN 985-6577-91-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условное разделение задач по степеням сложности

Первая степень: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 45, 46, 53, 64, 86, 116, 120, 122, 123, 124, 129.

Вторая степень: 3, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 40, 41, 42, 44, 49, 52, 54, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 67, 72, 73, 75, 76, 77, 78, 80, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 100, 101, 112, 114, 117, 121, 126, 127, 128, 130, 131, 132.

Третья степень: 32, 47, 48, 50, 51, 55, 58, 65, 66, 68, 71, 74, 79, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 99, 106, 113, 125, 125, 133, 134.

Четвертая степень: 69, 70, 85, 95, 97, 102, 103, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111, 115, 118, 119, 135, 136.

Введение

Предлагаемая книга посвящена изложению в занимательной форме элементов одного из важных разделов дискретной математики – теории графов. За последние десятилетия теория графов превратилась в один из наиболее бурно развивающихся разделов математики. Это связано с тем, что теория графов, родившаяся при решении головоломок и занимательных задач, стала в настоящее время простым, доступным и мощным средством решения вопросов, относящихся к широкому кругу проблем. В виде графов можно интерпретировать, например, схемы дорог и электронные схемы, географические карты и молекулы химических соединений, связи между людьми и многое другое. Это привело к широкому использованию теории графов в физике и кибернетике, химии и биологии, экономике и статистике и других науках. Особенна важна роль теории графов в современном программировании.

В книге предлагается более ста занимательных задач и их решение. В начале книги задано условное деление задач по степеням трудности. Большинство из этих задач придумано или интерпретировано автором. Некоторые задачи (например, три дома и три колодца, обход мостов, задача о рукопожатиях и т.д.) относятся к математическому фольклору. Есть в сборнике задачи, заимствованные автором из различных книг. Для некоторых из них предложены новые решения.

Автор сознательно выделяет фрагменты решения некоторых задач в виде теорем. Цель этого, во-первых, в использовании этих теорем при решении последующих задач, во-вторых, в желании развития у школьников абстрактного мышления.

Для решения задач достаточно знаний по математике в объеме неполной средней школы. Лишь несколько задач автор решил с помощью математической индукции. Знак $|X|$ всюду обозначает число элементов в множестве X. Часто вводимые понятия используются при решении нескольких задач. Поэтому в конце книги помещен словарь, в котором для каждого определения указана страница, на которой это определение вводится.

Изучение элементов теории графов, по мнению автора, повысит общую математическую культуру школьников и облегчит им освоение вычислительной техники.

Кроме того, книга будет полезна учителям математики для использования на кружках, факультативах и олимпиадах.

Задачи

1. Спортивное соревнование проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.

2. В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь школьников. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима – по три, Семен и Илья – по две, Женя – одну. С кем сыграл Леша?

3. В соревнованиях по круговой системе с пятью участниками только Ваня и Леша сыграли одинаковое число встреч, а все остальные – различное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

4. В соревновании по круговой системе с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько встреч было сыграно?

5. Чемпионат лагеря по футболу проводился по круговой системе. За победу в матче давалось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных мячей. Чемпион набрал семь очков, второй призер – пять, третий – три. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место.

6. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

7. В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

8. Известно, что в компании каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.

9. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

10. У каждого из депутатов парламента не более трех противников. (Если депутат A – противник депутата B, то депутат B – противник депутата A.) Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.

11. В теннисном турнире каждый игрок команды "синих" встречается с каждым игроком команды "красных". Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. "Синие" выиграли в четыре раза больше встреч, чем "красные". Сколько человек в каждой из команд?

12. Каждый из учеников 9"а" класса дружит с тремя учениками 9"б" класса, а каждый ученик 9"б" класса дружит с тремя учениками 9"а" класса. Докажите, что число учеников в этих классах одинаково.

13. Каждый из учеников 9"а" класса дружит не менее, чем с половиной учеников 9"б" класса, а каждый из учеников 9"б" класса дружит не более, чем с половиной учеников 9"а" класса. Докажите, что каждый из учеников 9"а" класса дружит ровно с половиной учеников 9"б" класса, а каждый из учеников 9"б" класса дружит ровно с половиной учеников 9"а" класса.

14. Десять кандидатов готовятся к двум космическим экспедициям на Марс. Поскольку экспедиции будут продолжаться несколько лет, а их участники окажутся в замкнутом пространстве небольшого объема, то важное значение приобретает психологическая совместимость членов экипажа. Путем тестирования были установлены пары кандидатов, присутствие которых в одной и той же экспедиции было бы нежелательным. Результаты тестирования отражены в таблице. (Если на пересечении i-ой строки и j-го столбца таблицы находится знак "+", то участие i-го и j-го кандидатов в одной экспедиции нежелательно). Разделите кандидатов на две группы для участия в экспедициях.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+	+	+						
2	+				+					
3	+						+			
4	+					+				
5		+						+		
6				+						+
7			+					+		+
8					+		+		+	
9								+		+
10						+	+		+	

15. В школе три девятых класса: 9"а", 9"б" и 9"в". Известно, что среди учеников 9"а" класса есть такие, которые дружат более чем с половиной учеников 9"б" класса и более чем с половиной учеников 9"в". Кроме того, число учеников 9"б" класса, каждый из которых дружит более чем с половиной учеников 9"в" класса, больше половины всех учеников 9"б" класса. Докажите, что из каждого класса можно выбрать по ученику так, чтобы они дружили друг с другом.

16. В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

17. Летом Иван отдыхал в молодежном лагере "Восход", где вместе с ним находилось 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т.е. существует цепочка из школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

18. Маша отдыхала в молодежном лагере "Росинка", где вместе с ней находилось 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она не обменивалась адресами. Докажите, что с помощью отдыхающих в лагере Маша может найти адрес Ирины (см. предыдущую задачу).

19. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех братьев. Докажите, что все мальчики – братья.

20. В одной стране каждая пара городов соединена только одним транспортным маршрутом: или железнодорожным, или автобусным. Докажите, что существует вид транспорта, которым можно доехать из любого города страны в любой другой (возможно с пересадками).

21. Докажите, что в группе из шести человек всегда найдутся три человека, знакомые между собой, или три человека, не знакомые между собой.

22. В международном фестивале участвовало несколько сотен делегатов из разных стран мира. Выяснилось, что из трех любых делегатов по крайней мере двое могут объясниться между собой на каком-то языке. Докажите, что найдется тройка делегатов, в которой каждый может объясниться с каждым.

23. Каждый из 17 ученых переписывается с остальными коллегами. Каждые двое переписываются на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом на одном и том же языке.

24. В некоторой компании любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этой компании все имеют одинаковое число знакомых.

25. Про некоторую компанию известно, что если два человека из нее знакомы, то они имеют одинаковое в этой компании число знакомых, а если незнакомы – то разное. Докажите, что в компании из семидесяти человек обязательно найдется один, имеющий не менее одиннадцати знакомых.

26. Про некоторую компанию известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми, и для любой группы из шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?

27. В лагере отдыхают 50 школьников. Известно, что среди любых четырех школьников найдется по крайней мере один, знакомый с тремя остальными. Докажите, что найдется школьник, знакомый со всеми остальными школьниками.

28. На конгресс собрались ученые, среди которых есть знакомые. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих на конгрессе равное число знакомых, не имеют общих знакомых. Докажите, что найдется ученый, который имеет только одного знакомого.

29. В трехмерном пространстве 9 точек расположены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками ровно с четырьмя другими. Докажите, что найдутся три отрезка, образующие треугольник.

30. Любые два жителя города либо дружат, либо враждуют, причем среди любых трех либо все трое дружат, либо все трое враждуют, либо дружат только двое. Докажите, что если не все жители города друзья, то найдется горожанин, у которого врагов больше, чем друзей.

31. В городе среди любых трех человек либо никто не враждует, либо враждуют все трое, либо только двое. Какое наименьшее число жителей может быть в городе, если известно, что каждый из половины жителей имеет ровно 70 врагов, а каждый из второй половины – ровно 90.

32. В некоторой стране любые два города связаны друг с другом непосредственно одним из следующих средств сообщения: автобусом, поездом или самолетом, причем в стране существуют все три вида транспорта. Известно, что нет города, обеспеченного всеми тремя видами транспорта, и в то же время не существует трех таких городов, любые два из которых связаны одним и тем же средством сообщения. Сколько городов в стране?

33. Группа, в составе которой Петр совершил туристскую поездку состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия, Петр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

34. Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться так, что каждый получит открытки именно от тех, кому напишет сам.

35. Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

36. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четное.

37. В Стране чудес Диснейленд на заколдованном озере семь островов, из каждого из них ведет один, три или пять мостов. Докажите, что хотя бы один из мостов ведет на берег.

38. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно три дороги, быть ровно 100 дорог между городами?

39. Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний – одна, а из каждого из остальных городов – по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно с пересадками).

40. В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех участников по крайней мере двое не сыграли друг с другом. Докажите, что сыграно не более 30 партий.

41. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой.

42. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Оказалось, что нет ни одной такой тройки мушкетеров, в которой все должны драться между собой. Докажите, что найдется четверка мушкетеров, в которой нет ни одной пары поссорившихся.

43. В парке "Лотос" невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.

44. Администрация парка "Лотос" (см. предыдущую задачу) решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик – шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

45. Докажите, что между любыми двумя перекрестками или тупиками парка "Лотос" (см. предыдущие задачи) существует единственный маршрут для прогулок, в котором нет повторяющихся дорожек.

46. Какое наибольшее количество разрезов можно сделать в волейбольной сетке (5 × 10) (см. рис. 1) так, чтобы она не распалась?

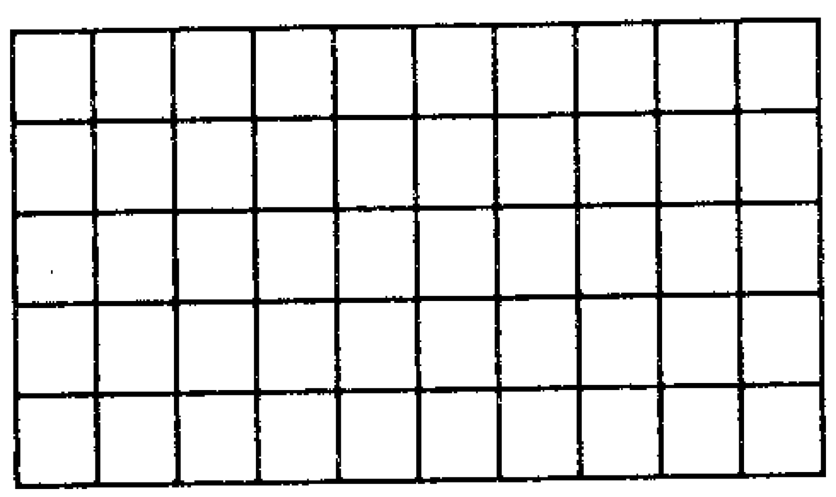

Рис. 1

47. Несколько авиакомпаний решили связать авиалиниями 100 городов так, чтобы выполнялось два условия: 1) любые два города были соединены беспересадочной линией не более чем одной компании, 2) любая авиакомпания, пользуясь своими линиями, могла бы доставить пассажира из любого города в любой другой (возможно с пересадками).

При каком наибольшем числе авиакомпаний такое решение осуществимо?

48. Шахматная доска раскрашена 10 красками так, что клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, причем все 10 красок использованы. Две краски называются соседними, если существуют окрашенные ими соседние клетки, т.е. клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

49. Государство Филиппины расположено на островах. Между некоторыми из островов ежедневно курсируют теплоходы (один рейс в одном направлении и один – в противоположном). С любого острова можно добраться на любой другой, возможно с пересадками. Полиция Филиппин пригласила Крутого Уокера для помощи в поимке опасного преступника. Преступник суеверен и не плывет на теплоходе 13 числа каждого месяца и каждый понедельник. Уокер не суеверен. Кроме того, он с помощью агентуры всегда знает на каком острове находится преступник.

Докажите, что если Уокер и преступник будут пользоваться только теплоходами, то Уокер, в конце концов, окажется на одном острове с преступником.

50. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям.

Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно сообщить всем им какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

51. Есть две страны: Обычная и Зазеркалье. У каждого города в Обычной стране есть двойник в Зазеркалье и наоборот. Однако, если в Обычной стране какие-то два города соединены авиалинией, то в Зазеркалье эти города не соединены, а два любых несоединенных в Обычной стране города обязательно соединены авиалинией в Зазеркалье. В Обычной стране Алиса не может добраться из города А в город В, сделав менее двух пересадок.

Докажите, что в Зазеркалье Алиса сможет перелететь из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

52. Андрей пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Андрей делает пять выстрелов и за каждое попадание получает право еще на два выстрела. Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

53. Борцовский турнир с 13 участниками проводится по олимпийской системе, при которой проигравший выбывает. На одну встречу, с учетом подготовки к ней и отдыха участников, отводится час. Сколько времени нужно, чтобы провести турнир, если в распоряжении организаторов только 5 борцовских ковров?

54. Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляющиеся бактерии могут делиться на 4 бактерии, могут делиться на две, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерий. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на две в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на четыре.

55. Из одной бактерии в результате деления получились 1000 бактерий: вначале бактерия разделилась на две, затем какая-то из них вновь разделилась на две, затем одна из трех бактерий снова разделилась на две и т.д. Докажите, что в некоторый момент существовала бактерия, число потомков которой в самом конце, т.е. среди 1000 бактерий, не меньше 100 и не более 199.

56. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C, имеющего валентность 4, и водорода H, имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

57. Некоторые из сорока городов страны попарно соединены авиалиниями, принадлежащими одной из десяти авиакомпаний. Из каждого города можно перелететь в любой другой без пересадок, и каждая авиалиния действует в обоих направлениях.

Докажите, что существует компания, которая может обеспечить путешествие с началом и концом в одном и том же городе, с числом перелетов не менее трех, причем каждый промежуточный город в путешествии будет посещаться только один раз.

58. На строительном участке нужно создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки. Для того, чтобы телефонные линии не мешали строительству, их решили проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рис. 2, где бытовкам соответствуют вершины графа и указаны длины дорог между ними.

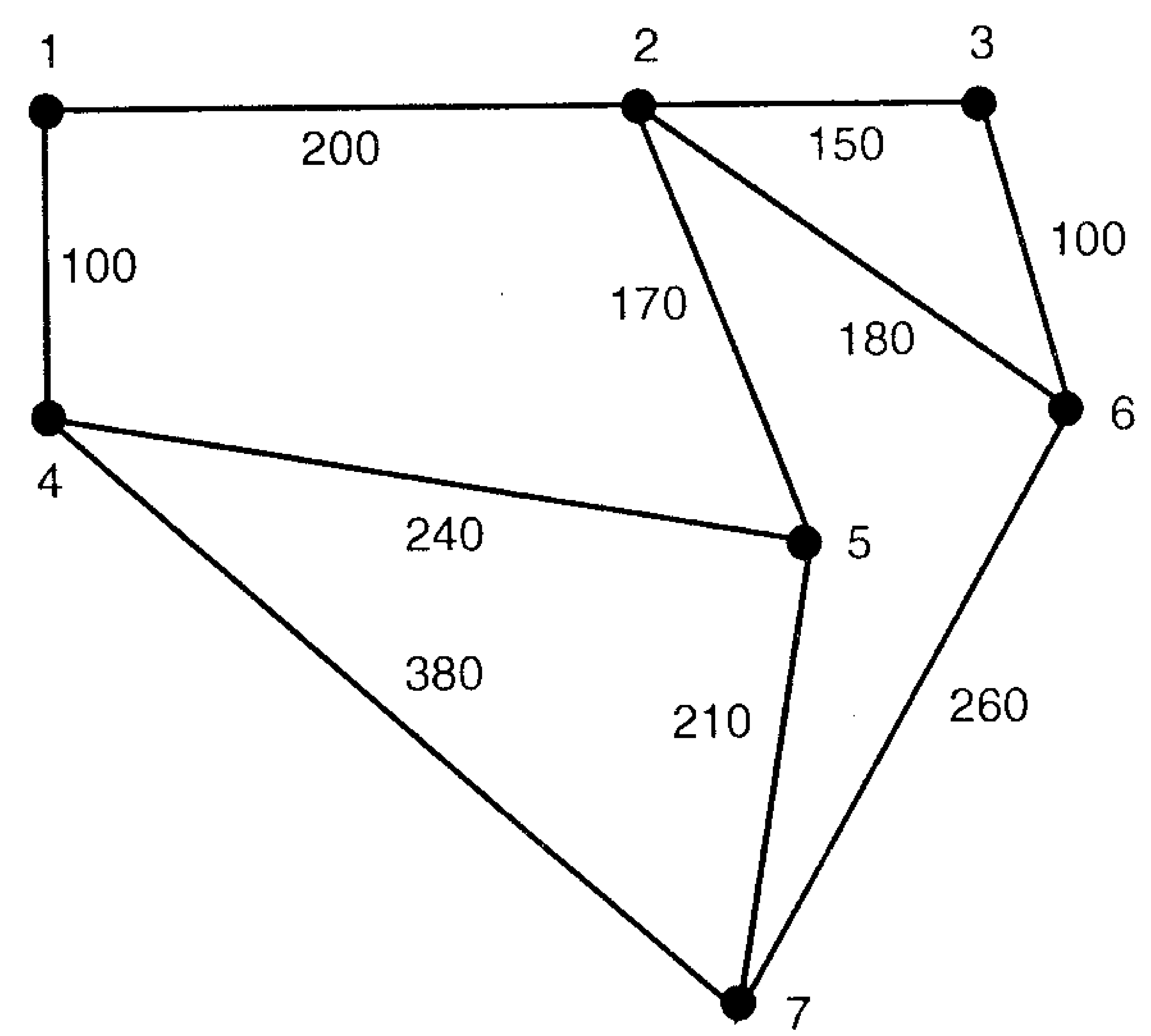

Рис. 2

Каким образом провести телефонные линии, чтобы их общая длина была минимальной?

59. В городе с любой станции метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы из любой оставшейся станции можно было проехать на любую другую.

60. Город имеет форму квадрата ($100n \times 100n$) метров с (n+1) прямолинейной улицей, идущей параллельно одной стороне квадрата, и (n+1) прямолинейной улицей, идущей параллельно другой стороне. Расстояние между любыми двумя соседними параллельными улицами – 100 метров, длина каждой улицы – $100n$ метров. Мэр города решил выполнить свое предвыборное обещание: заасфальтировать за свой счет улицы так, чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать по асфальту. Конечно, мэр хочет истратить, как можно меньше своих денег. Какой наименьшей длины асфальтовое покрытие улиц может сделать мэр?

61. Шесть островов на реке в парке "Лотос" соединены мостами.

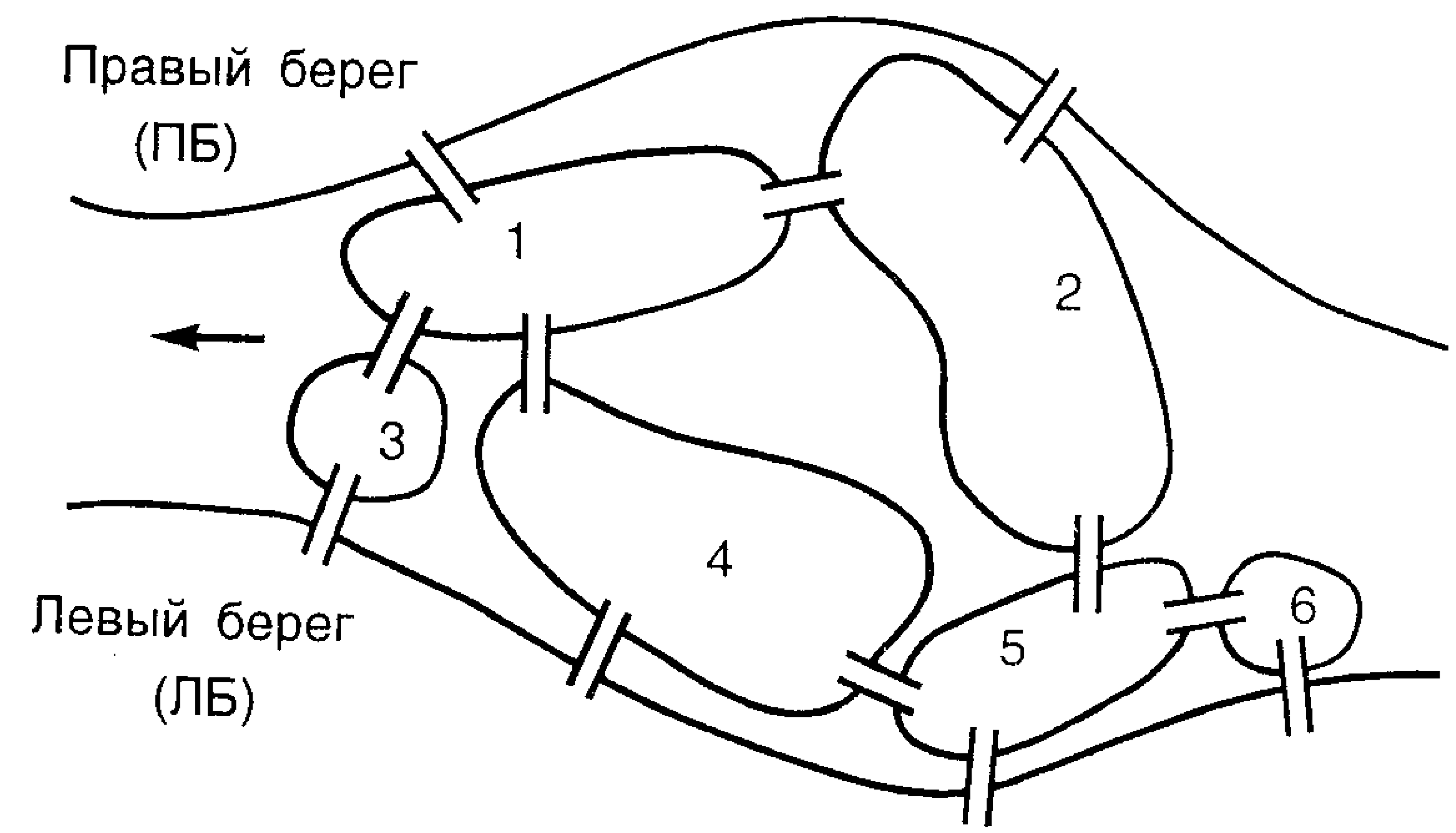

Рис. 3

Можно ли, начав прогулку на одном из островов, пройти по каждому из мостиков ровно один раз и вернуться на тот же остров? В случае отрицательного ответа определите, сколько мостиков и между какими островами нужно построить, чтобы такая прогулка стала возможной.

62. В парке "Лотос" (см. предыдущую задачу) построили мостик, соединяющий острова 2 и 4. Найдите маршрут прогулки, который начинается и оканчивается в одном и том же месте и проходит каждый мостик ровно один раз.

63. Экспозиция картинной галереи представляет собой систему коридоров, на обоих стенах которых развешаны картины (схему коридоров смотри на рис. 4).

Можно ли предложить такой маршрут осмотра экспозиции, при котором посетитель проходит вдоль каждой стены ровно один раз?

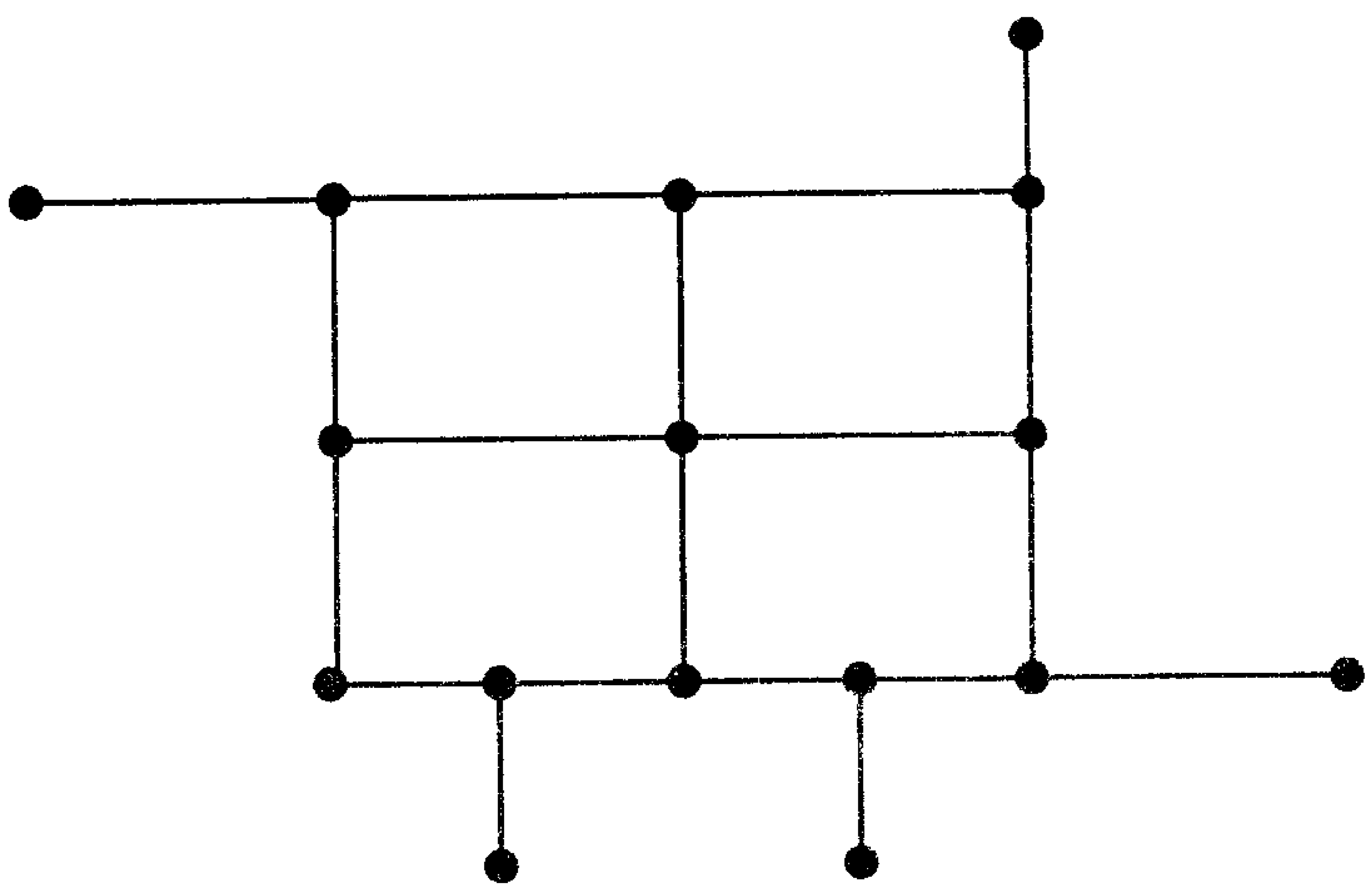

Рис. 4

64. Можно ли нарисовать фигуру, изображенную на рис. 5, не отрывая карандаша от бумаги, причем каждую линию фигуры карандаш должен проходить только один раз?

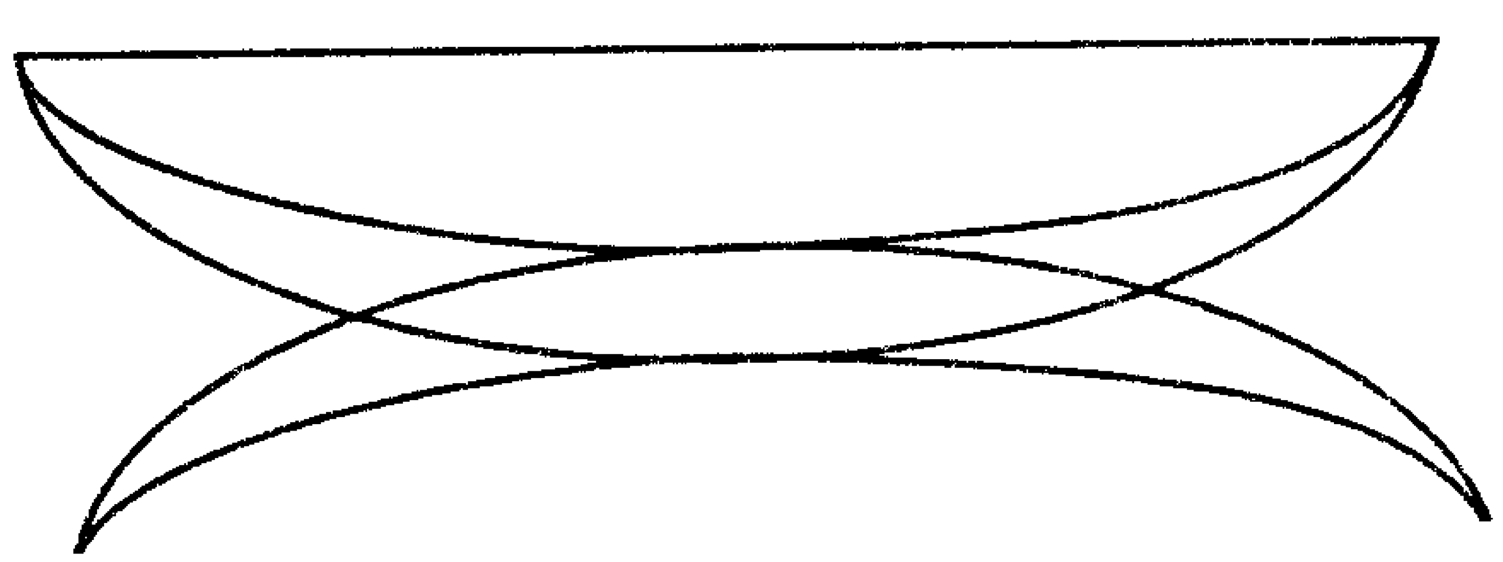

Рис. 5

65. Турист, который приехал в Минск на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на площади Бангалор, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

66. В Зеленом городе (см. карту) решили пустить автобус.

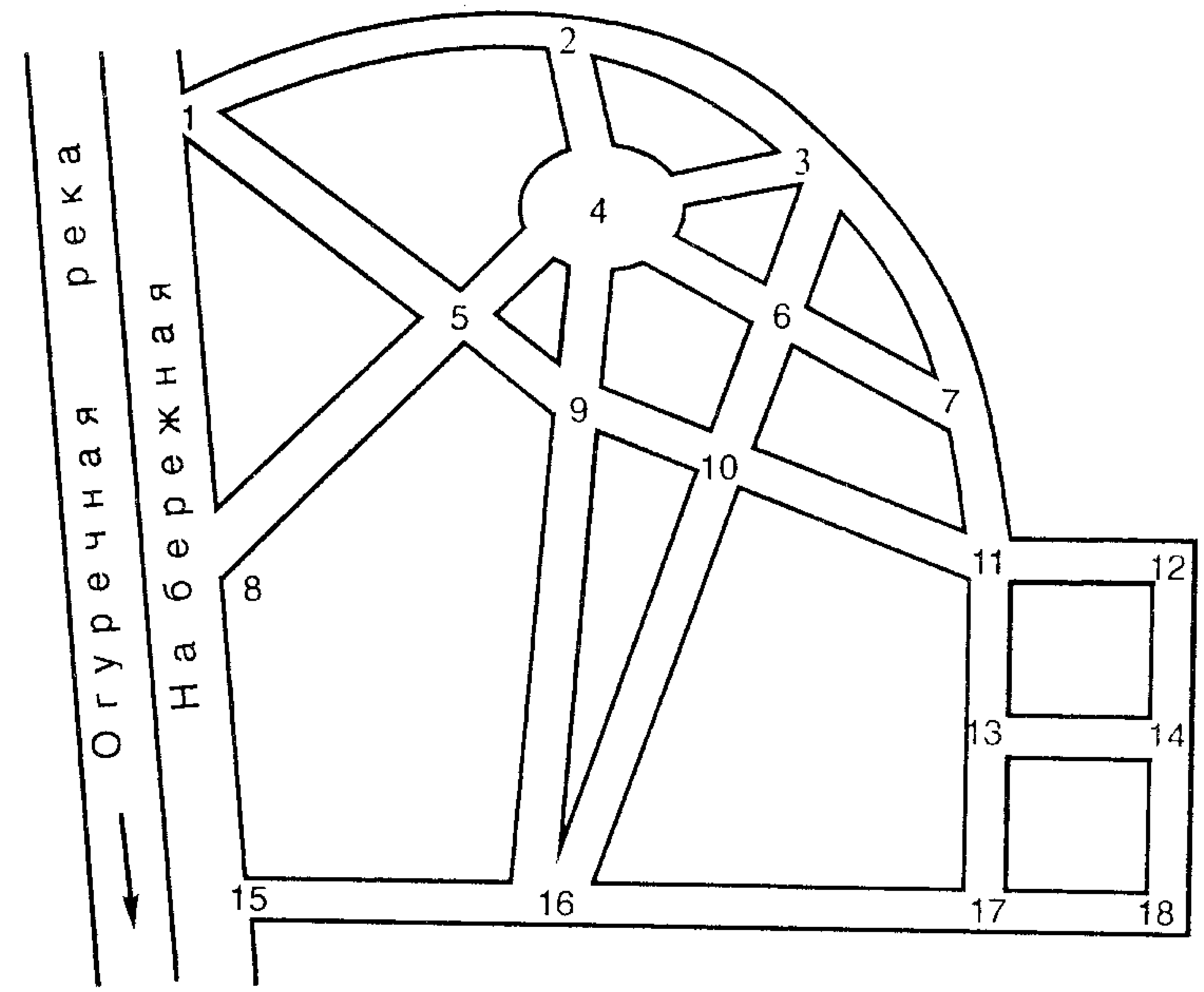

Рис. 6

По решению мэрии по каждой улице, за исключением набережной, должен проходить автобусный маршрут и притом только один. Определите наименьшее число маршрутов, удовлетворяющих этому условию. Найдите сами маршруты.

67. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас куба? (Толщина всех ребер каркаса должна быть одинаковой).

68. Почтальон должен разнести почту по всем улицам своего участка. (Схема участка изображена на рисунке 7. На схеме указаны расстояния между перекрестками. Буквой П обозначена почта). Найдите кратчайший маршрут почтальона.

69. В стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, причем каждый город соединен не менее, чем с половиной других городов. Докажите, что можно найти такой маршрут облета городов, который начинается и заканчивается в одном и том же городе и каждый город посещает ровно один раз.

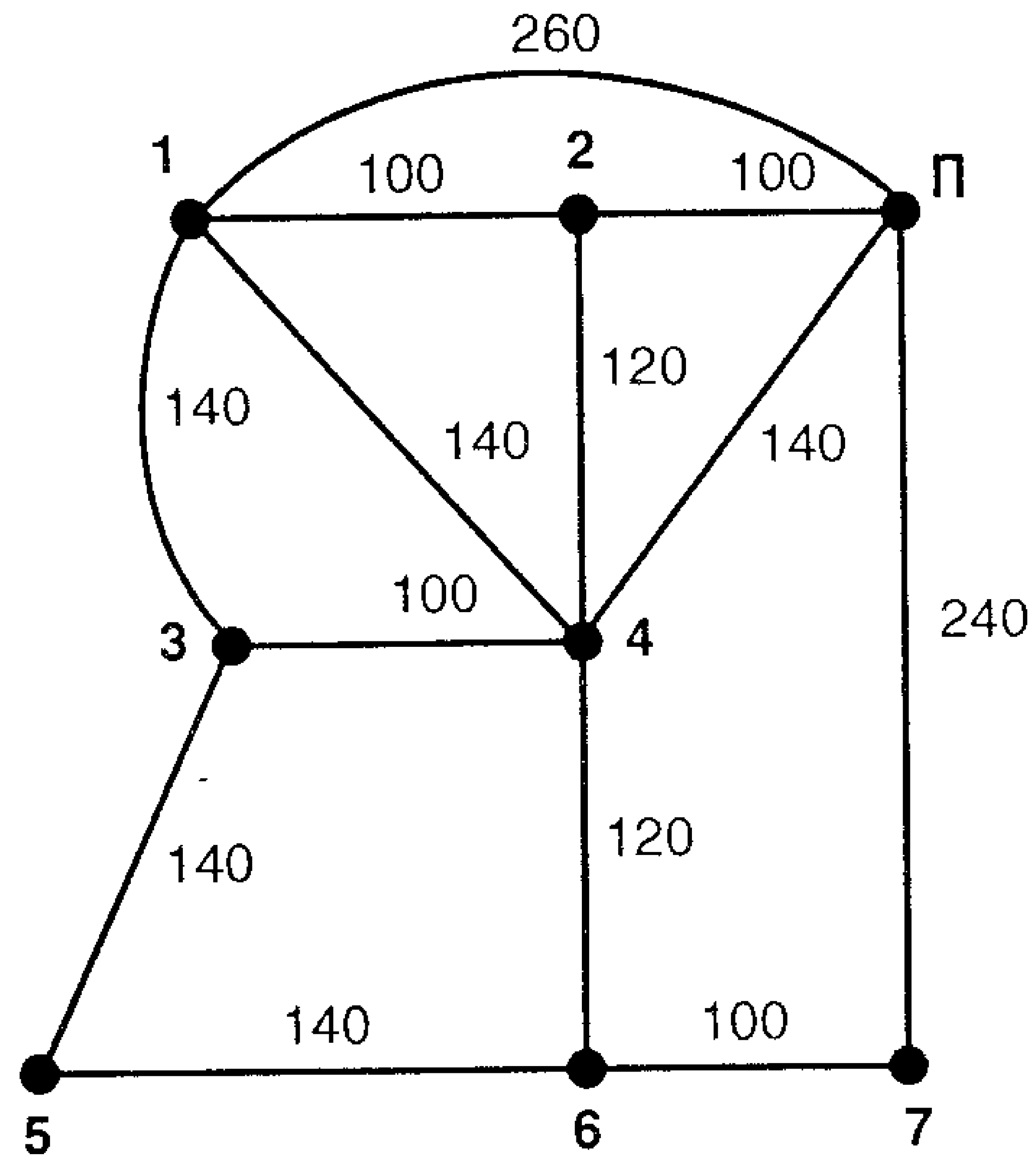

Рис. 7

70. На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

71. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

72. Можно ли перевести шахматного коня с клетки $a1$ на клетку $h8$, побывав при этом на каждой клетке шахматной доски ровно один раз? (Клетки $a1$ и $h8$ – крайние клетки большой диагонали шахматной доски.)

73. Имеются три дома и три колодца. Каждый хозяин пользуется любым из трех колодцев. В некоторый момент обитатели домов поссорились и решили проложить свои дорожки до колодцев так, чтобы дорожки не пересекались. Возможно ли это?

74. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?

75. Разумные муравьи с планеты Тямти-Лямти живут в колониях. Колонии состоят из ячеек, которые муравьи строят из палочек. В одной ячейке живет один муравей. Каждая ячейка представляет собой многоугольник (см. рис. 8). Палочки соединяются между собой с помощью специального раствора, причем можно соединять только концы палочек. Известно, что для создания колонии муравьи использовали 58 палочек, которые скрепили в 30 местах. Сколько муравьев живет в колонии?

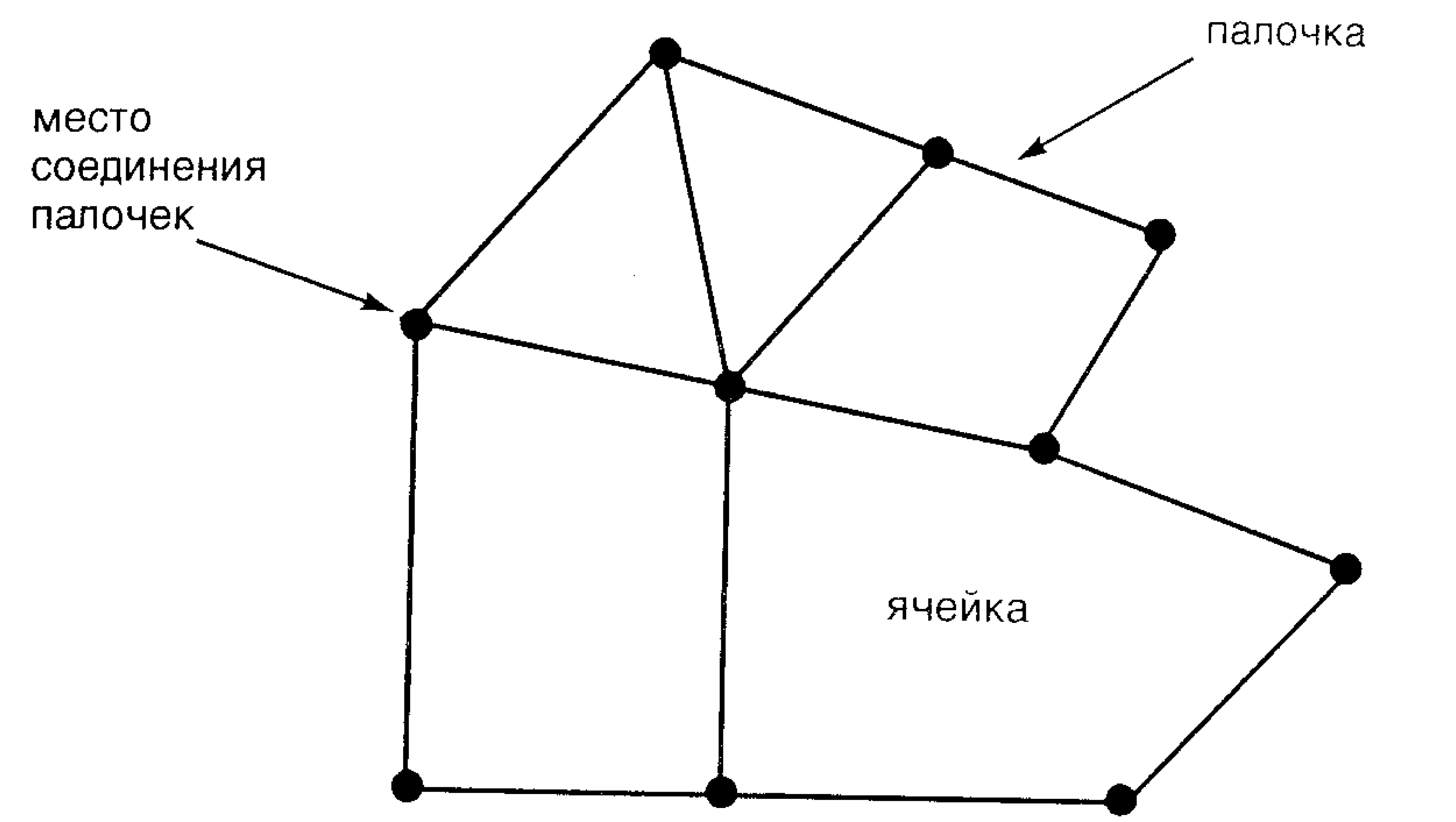

Рис. 8

76. На острове Щекотан планеты Тямти-Лямти расположено 5 колоний разумных муравьев (см. предыдущую задачу). Известно, что эти колонии составлены из 1200 палочек и имеют 300 мест их соединения. Сколько муравьев живет на острове?

77. Из-за недостатка земли и строительного материала на острове Болтай каждая ячейка в колонии разумных муравьев (см. предыдущие задачи) построена из трех палочек. Сколько палочек нужно для построения колонии и сколько муравьев живет в ней, если колония имеет 1200 мест соединения палочек, а снаружи ограничена 500 палочками?

78. Докажите, что число вершин (n), ребер (m) и граней (f) любого выпуклого многогранника связано формулой

$$n - m + f = 2.$$

79. Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлические дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то одну из дорожек переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, что все проводники будут расположены на одной ее стороне?

80. Можно ли так соединить дорожками 5 домов, чтобы дорожки не пересекались и каждая пара домов была соединена одной дорожкой? (Две дорожки считаются пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)

81. Инженер Иванов (см. задачу 79) усовершенствовал свою плату. Теперь она имеет 9 приборов и 17 проводников (схему платы см. на рис. 9). Можно ли изготовить плату так, чтобы все проводники разместились на одной ее стороне?

82. При изготовлении некоторой однослойной платы по технологическим условиям один заданный проводник обязательно должен находиться на краю платы. Докажите, что это всегда можно сделать.

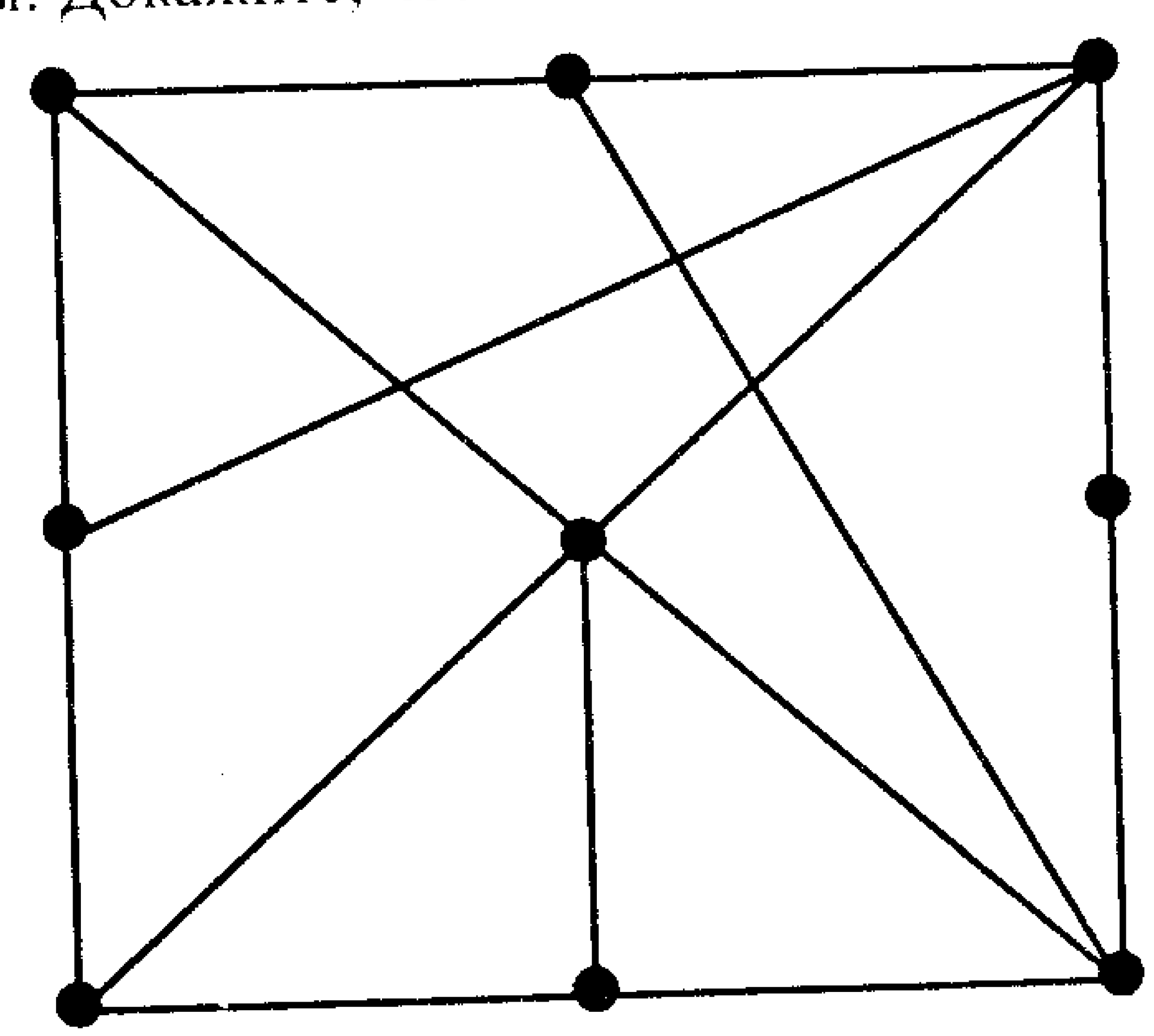

Рис. 9

83. Инженер Иванов придумал схему печатной суперплаты, которая может заменить целый компьютер. Плата состоит из 200 приборов и 2000 проводников. Ясно, что для реализации такой схемы нужно будет использовать многослойную плату, на которой проводники будут размещены в разных слоях. Докажите, что разработанную инженером Ивановым схему нельзя изготовить в виде трехслойной платы.

84. Докажите, что в любой схеме, изготовленной в виде однослойной платы, есть прибор, соединенный не более, чем с пятью другими приборами.

85. Имеется информационная сеть, состоящая из центров хранения и переработки информации. Некоторые пары центров соединены каналами связи. Обмен информацией между любыми двумя центрами осуществляется либо непосредственно по соединяющему их каналу, либо через другие каналы и центры. Сеть считается исправной, если каждая пара центров в состоянии обмениваться информацией.

Известно, что в информационной сети каждый из n центров непосредственно связан каналом с каждым другим центром. Какое наименьшее число каналов связи надо разрушить, чтобы сеть стала неисправной?

86. В информационной сети (см. предыдущую задачу) каждый центр соединен каналами связи с четным числом центров. Докажите, что после уничтожения любого канала сеть не выйдет из строя.

87. Нефтяная компания имеет несколько перекачивающих станций, которые соединены нефтепроводами. Группа диверсантов должна вывести из строя систему нефтепроводов, взорвав несколько станций так, чтобы образовались хотя бы две станции, между которыми нельзя было перекачать нефть. Докажите, что для этой цели достаточно взорвать не более пяти станций.

88. Может ли существовать такая пятерка государств, в корой каждая пара государств соседствует друг с другом? (Граница каждого государства является замкнутой кривой. Соседними считаются государства, имеющие общую границу ненулевой длины.)

89. На карте Англии нет точек, в которых сходятся границы более, чем трех графств. Докажите, что:

а) четное число графств имеет нечетное число соседей;

б) существует графство, которое имеет не более пяти соседей.

90. Любимым занятием малолетнего хулигана Вадима во время прогулки по парку является лазание через заборы и живые изгороди. Может ли Вадим во время прогулки по парку и его окрестностям зайти в парк через один вход, перелезть через каждую из 16 изгородей ровно один раз и выйти через другой вход? (Схема парка изображена на рис. 10.)

91. Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер.

92. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани шестиугольники.

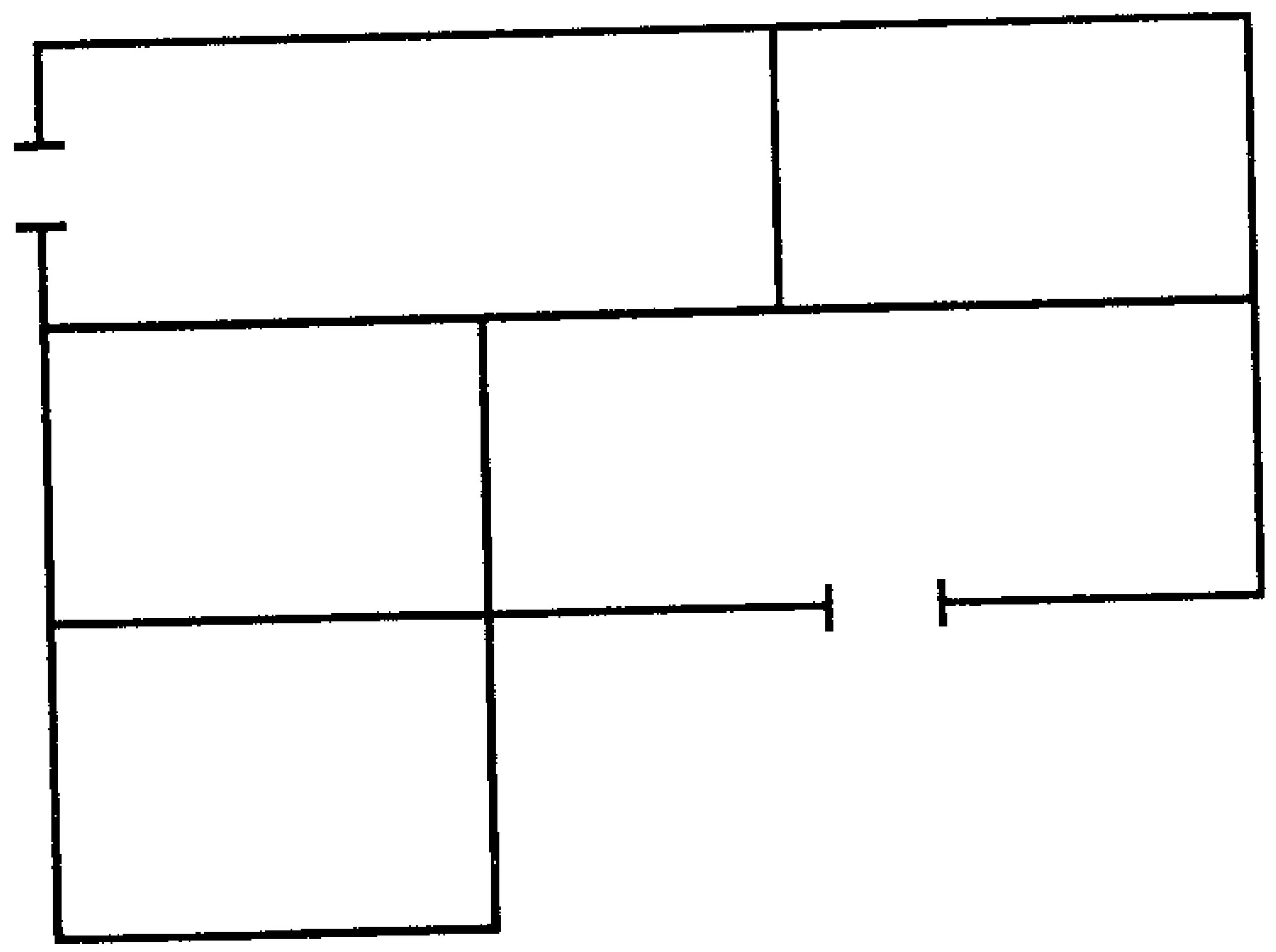

Рис. 10

93. Коробка скоростей – механизм для изменения частоты вращения ведомого вала при неизменной частоте вращения ведущего. Это изменение происходит за счет того, что находящиеся внутри коробки шестерни (зубчатые колеса) вводятся в зацепление специальным образом. Одна из задач, стоящая перед конструктором коробки, заключается в минимизации ее размеров, а это часто сводится к минимизации числа валов, на которых размещаются шестерни.

Некоторые шестерни не должны находиться на одном валу, например, они могут быть в зацеплении или их общий вес велик для одного вала и т.д. В таблице крестиками указаны такие пары шестерен. Найдите минимальное число валов, на которые можно поместить шестерни.

	1	2	3	4	5	6	7
1		+		+	+		+
2	+		+		+		+
3		+			+	+	
4	+					+	
5	+	+	+				+
6			+	+			+
7	+	+			+	+	

94. Образовавшийся коммерческий университет арендует здание для проведения занятий. В четверг проводится 7 лекций: право, английский язык, французский язык, экономика, менеджмент, маркетинг, этикет. Чтение каждой лекции в отдельности занимает один час, но некоторые лекции не могут читаться одновременно, например, их читает один и тот же лектор, или есть студенты, которые должны посещать разные лекции, или для их проведения нужна одна и та же аудитория и т.д. (В таблице крестиком отмечены лекции, которые не могут читаться одновременно).

Определите минимальное время, за которое могут быть прочитаны лекции в четверг.

	Право	Англ. язык	Франц. язык	Экономика	Менеджмент	Маркетинг	Этикет
Право		+		+			+
Англ. язык	+		+		+	+	
Фран. язык		+			+	+	+
Экономика	+				+	+	
Менеджмент		+	+	+		+	
Маркетинг		+	+	+	+		
Этикет	+		+				

95. Пять лекций, каждая из которых длится час можно прочитать или в первую смену за 3 часа с 9.00 до 12.00, или во вторую смену за 4 часа с 14.00 до 18.00. Невозможность одновременного чтения лекций задана таблицей.

Найдите число вариантов распределения лекций по промежуткам времени в первую и во вторую смену.

	Матаматика	Программир.	Физика	Биология	Химия
Математика		+	+	+	
Программир.	+		+	+	+
Физика	+	+			+
Биология	+	+			+
Химия		+	+	+	

96. Докажите, что для раскраски произвольной географической карты, при которой две любые соседние страны окрашены в различные цвета, достаточно шести красок. (Рассматриваются карты, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой линии, а соседними считаются страны, имеющие общую границу ненулевой длины).

97. Докажите, что для раскраски произвольной географической карты (см. предыдущую задачу) достаточно пяти красок.

98. Все страны, расположенные на острове имеют форму треугольников, причем любые две граничащие страны имеют целую общую сторону (т.е. вершина одного треугольника не лежит на стороне другого). Докажите, что для раскраски карты этого острова (см. предыдущие задачи) достаточно трех красок.

99. Известно, что на карте одной области нет точек, в которых сходятся границы нечетного числа районов .Докажите, что такую карту можно раскрасить двумя красками так, что любые два соседние района будут покрашены разными красками. (См. предыдущие задачи).

100. Докажите, что для раскраски карты, получающейся при пересечении прямых или окружностей на плоскости (см. предыдущие задачи), достаточно двух цветов.

101. На острове расположено несколько стран. Можно ли разбить некоторые из этих стран на меньшие так, чтобы все старые границы сохранились, а получившуюся карту острова можно было раскрасить двумя красками (см. предыдущие задачи)?

102. Дорожная полиция для наблюдения за порядком в городе собирается установить телекамеры на его перекрестках. Каждая телекамере контролирует перекресток, на котором она установлена, все улицы, выходящие из этого перекрестка, включая и соседние перекрестки. Сколько нужно установить телекамер, если в городе 75 перекрестков, а наибольшее число телекамер, которые можно установить так, чтобы ни одна из них не наблюдала за другой, равно 30.

103. Дорожная полиция установила 30 телекамер на перекрестках города (см. предыдущую задачу). Известно, что это наибольшее количество камер, которые можно расставить так, чтобы ни одна из них не наблюдала другую. Докажите, что можно так проложить не более тридцати маршрутов патрулирования, чтобы каждый перекресток посещался только одной патрульной машиной и каждый маршрут содержал любой отрезок улицы между двумя перекрестками не более одного раза. (Некоторые участки улиц могут не посещаться патрульными машинами.)

104. Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на перекрестках улиц города, который имеет 282 отрезков улиц. Решено было не устанавливать более одной колонки на соседних перекрестках. Известно, что в городе на каждом перекрестке сходится не менее четырех улиц. Докажите, что при этих условиях компания не сможет установить более 70 колонок.

105. Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на улицах города, так чтобы на отрезках улиц, выходящих из одного перекрестка, было не более одной колонки. Известно, что в городе 210 отрезков улиц, и на одном перекрестке сходится самое большее 6 улиц. Докажите, что при этих условиях может быть установлено не менее 20 колонок.

106. Полицейские участки размещаются на перекрестках города, причем для любого перекрестка участок находится или на этом перекрестке, или на соседнем. Известно, что в городе 155 перекрестков и на каждом из них сходится не более шести улиц. Докажите, что в городе не менее 23 полицейских участков.

107. На вечере собралось несколько юношей и девушек. При этом оказалось, что для любой группы юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из юношей этой группы, будет не меньше числа юношей в группе. Докажите, что все юноши могут одновременно танцевать в парах со знакомыми девушками.

108. На вечере среди собравшихся было 20 юношей. Оказалось, что для любых k юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из юношей, не меньше, чем $(k–10)$. Докажите, что не менее половины юношей могут одновременно танцевать в паре со знакомой девушкой.

109. На вечере первые два танца каждый из юношей танцевал с одной из своих знакомых девушек, возможно, первый танец с одной, а второй – с другой. Некоторые танцевали два танца, некоторые – один, а очень застенчивые не танцевали ни разу. Докажите, что третий танец могут танцевать все юноши, танцевавшие первый танец, и все девушки, танцевавшие второй.

110. Среди участников вечера несколько юношей и девушек имеют одинаковое наибольшее число знакомых противоположного пола. Докажите, что все они могут одновременно танцевать в паре со своими знакомыми.

111. Среди участников вечера несколько юношей и девушек имеют одинаковое наибольшее число знакомых противоположного пола: по 6. Докажите, что наименьшее число танцев, за которое могут перетанцевать все знакомые пары, равно шести.

112. На математической олимпиаде предлагалось 16 задач. Оказалось, что каждый из 16 школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач.

113. На математической олимпиаде предлагалось n задач. Оказалось, что каждый из n школьников решил k задач и каждую задачу решили k школьников. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных задач и все задачи будут разобраны.

114. Для участия в водном походе руководитель должен рассадить 10 туристов по пяти двухместным лодкам. Однако у него возникли некоторые проблемы. Оказалось, что нельзя посадить в одну лодку двух неопытных участников, или двух девушек, или двух слишком тяжелых туристов, или людей, несимпатичных друг другу и т.д. Пары, которые могут плыть в одной лодке, определены таблицей (см. стр. 25):

Докажите, что как бы руководитель не старался, ему не удастся составить 5 экипажей.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+			+					
2	+				+	+				
3				+		+	+			
4			+				+			
5	+	+				+				
6		+	+		+		+	+	+	
7			+	+		+				
8						+			+	+
9						+		+		+
10								+	+	

115. Руководитель водного похода сформировал 6 двухместных экипажей. Из оставшихся туристов он не может составить еще хотя бы одну пару, так как некоторые участники не могут плыть в одной лодке. Докажите, что как бы руководитель не старался, ему не удастся составить более 12 экипажей.

116. Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.

117. Можно ли соединить нечетное число приборов разноцветными проводами так, чтобы из каждого прибора выходили провода разных цветов и цветов было на один меньше, чем приборов.

118. В шахматном турнире принимают участие 7 школьников. Может ли быть так, чтобы:

а) Ваня сыграл 7 партий, Толя – 5, Леша и Дима – по 4, Семен и Илья – по 3, Женя – 2;

б) Ваня сыграл 5 партий, Толя, Леша и Дима – по 4, Семен и Илья – по 3, Женя – 2;

в) Ваня сыграл 6 партий, Толя, Леша и Дима – по 4, Семен – 2, Илья и Женя – по одной;

г) Ваня сыграл 5 партий, Толя и Леша – по 4, Дима – 3, Семен, Илья и Женя – по 2?

119. Может ли существовать шахматный турнир, в какой-то момент которого есть игроки, сыгравшие только 7, 5, 3, 2 партии? Какое наименьшее число игроков может участвовать в таком турнире?

120. Из города A в город B ведут несколько дорог (карту дорог см. на рис.11). Найдите число маршрутов автомобильного путешествия из A в B, учитывая, что при движении автомобиль должен все время приближаться к B.

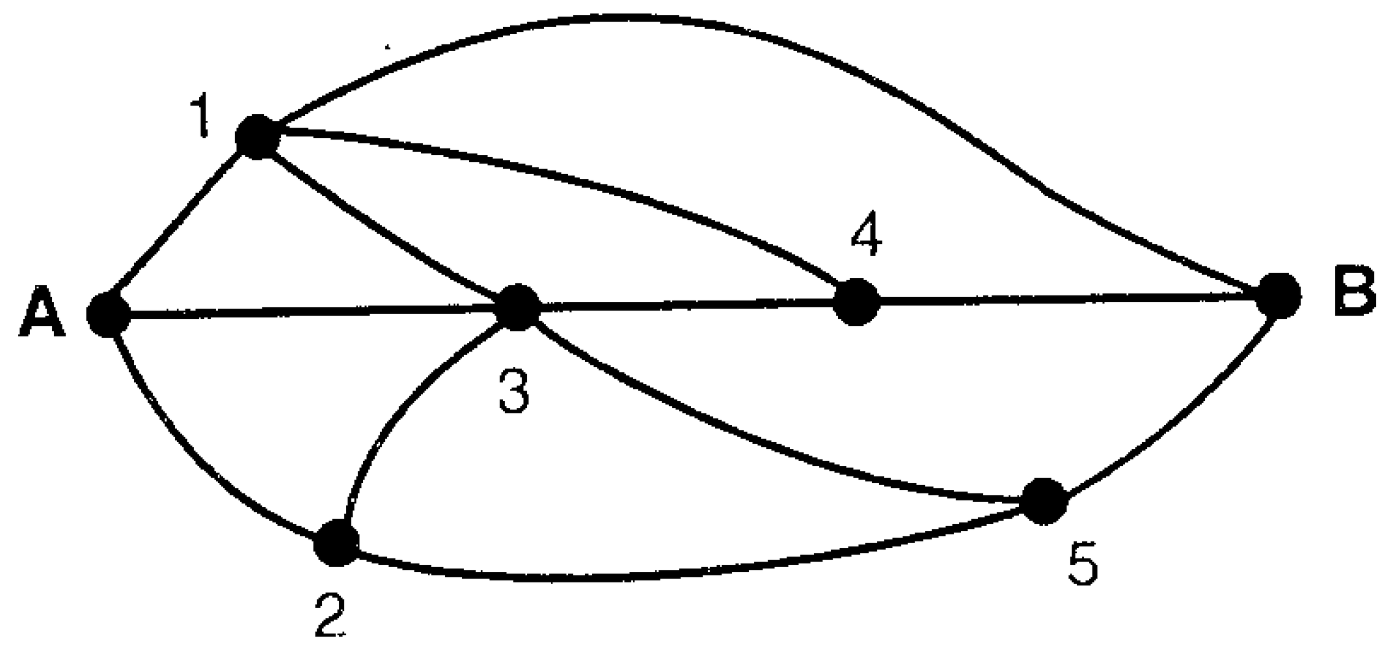

Рис. 11

121. В школе учатся 1000 учеников. Каждому из них нравятся ровно k учеников из остальных. При каких значениях k можно утверждать, что обязательно найдутся два ученика школы, которые или оба нравятся, или оба не нравятся друг другу?

122. В одном приморском курортном городе улицы настолько узкие, что в городе установлено одностороннее транспортное движение. Тем не менее, из каждой точки города можно проехать в любую другую. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования для полицейской машины, который начинается и оканчивается в одном и том же месте и проходит через каждый участок улиц между двумя перекрестками, по крайней мере, один раз.

123. В приморском курортном городе (см. предыдущую задачу) после установления одностороннего движения оказалось, что число улиц, по которым можно въехать на каждый перекресток, равно числу улиц, по которым можно из него выехать. Докажите, что можно предложить такой маршрут патрулирования, который начинается и оканчивается в одном месте и проходит через каждый участок улиц ровно один раз.

124. На плоскости отмечено конечное число точек. Некоторые пары точек являются началами и концами векторов, причем число векторов, входящих в любую точку равно числу векторов, выходящих из нее. Найдите сумму векторов.

125. Король Людовик не доверяет своим придворным. Он составил их список и приказал каждому следить за одним из остальных. При этом первый придворный следит за тем, кто следит за вторым, второй следит за тем, кто следит за третьим и т.д., предпоследний следит за тем, кто следит за последним, последний следит за тем, кто следит за первым. Докажите, что у Людовика нечетное число придворных.

126. В национальном парке посетители знакомятся с жизнью диких животных из окон автомобиля. На дорогах парка установлено одностороннее движение. В парк можно попасть через ворота A и ворота B. Известно, что число дорог, по которым можно отъехать от ворот A, на одну больше, чем дорог, по которым можно приехать к ним, число дорог, по которым можно приехать к воротам B, на одну больше, чем число дорог, по которым можно отъехать от них, а для любого другого перекрестка парка число входящих дорог равно числу выходящих.

Можно ли заехать в парк через ворота A, проехать по каждой дороге ровно один раз и выехать из парка через ворота B?

127. Докажите, что можно так установить одностороннее движение по улицам любого города, что число улиц, по которым можно въехать на любой перекресток, не более, чем на одну отличается от числа улиц, по которым можно уехать с него.

128. В городе двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую. Докажите, что в городе можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города можно будет проехать в любую.

129. Сетевой график задает порядок выполнения работ. Он представляет собой ориентированный граф, вершины которого обозначают работы, а дуга (u, v) существует в орграфе тогда и только тогда, когда выполнение работы v может начаться непосредственно после окончания выполнения работы u.

Докажите, что выполняемые работы можно занумеровать так, что если выполнение работы u будет предшествовать выполнению работы v, то вершина u будет иметь номер меньше, чем вершина v.

130. Докажите, что если победитель турнира по волейболу, проведенного по круговой системе, проиграл команде B, то существует команда C, выигравшая у B, у которой выиграл победитель. (Напомним, что при игре в волейбол нет ничьих.)

131. Чемпионат по волейболу прошел по круговой системе. Докажите, что если какие-нибудь две команды одержали одинаковое число побед, то найдутся три такие команды A, B и C, что команда A выиграла у B, B – у C, C – у A.

132. Докажите, что после окончания волейбольного турнира, проведенного по круговой системе, можно или упорядочить команды таким образом, что первая выиграла у второй, вторая – у третьей, третья – у четвертой и т.д., предпоследняя – у последней, а последняя – у первой, или добиться этого после изменения результата всего одной игры.

133. После завершения волейбольного турнира, проведенного по круговой системе оказалось, что никакая команда не проиграла всех встреч. Докажите, что существуют такие три команды A, B и C, что команда A выиграла у команды B, B – у C, C – у A.

134. В круговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. По окончании турнира оказалось возможным разбить команды на несколько групп: в первой – одна команда, во второй – 2 команды и т.д., в k-й – k команд; при этом суммарное число очков, набранных командами каждой группы одно и то же. Сколько команд участвовало в турнире?

135. Король одной сказочной страны пригласил на пир людоедов, живущих в его стране. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего, третий – четвертого и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет съесть никого другого.

136. В волейбольном турнире, проводимом по круговой системе, участвуют 7 команд. Может ли оказаться, что команды одержали:

а) первая – 6 побед, вторая и третья – по 5, четвертая и пятая – по 2, шестая и седьмая – по одной победе;

б) первая, вторая и третья – по 5 побед, четвертая – 4, пятая и шестая – по одной, седьмая – ни одной победы?

Решения задач

1. Пусть задано некоторое непустое множество V и множество E пар различных элементов из V. Элементы множества V называются ***вершинами*** графа, элементы множества E называются ***ребрами*** графа, а пара (V,E), т.е. множество вершин и множество ребер, называется ***графом***.

В дальнейшем мы будем часто использовать геометрическое представление графа. Вершины графа изображаются в виде точек на плоскости. Если две вершины образуют ребро, то соответствующую пару точек соединяют линией.

Например, на рис.0.1 изображен граф G, заданный множеством вершин $V=\{1,2,3,4,5\}$ и множеством ребер $E=\{(1,2),(2,3),(4,2),(4,3)\}$.

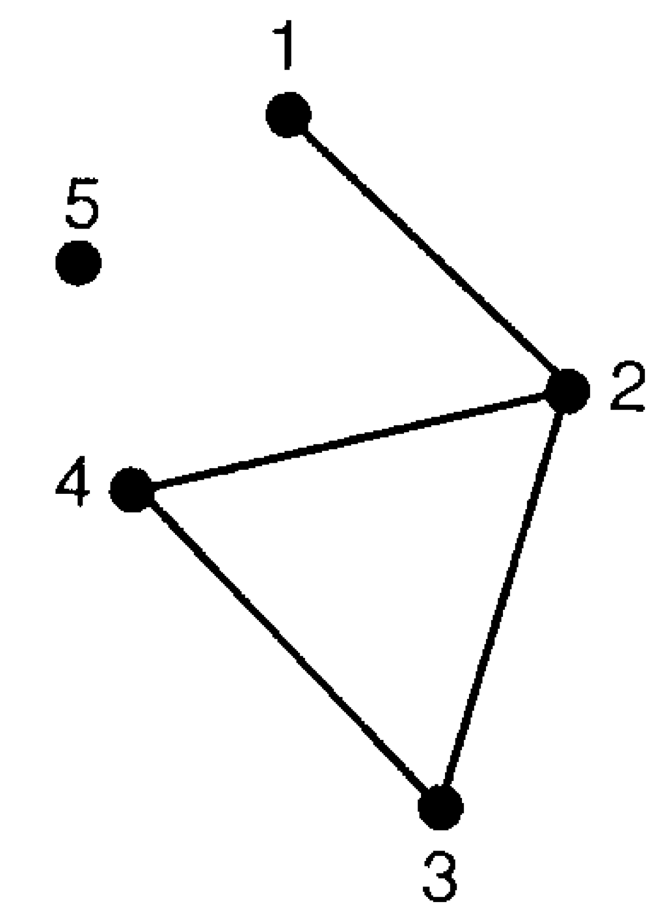

Рис.0.1

Если две вершины графа соединены ребром, то такие вершины называются ***смежными***. Вершины, которые соединены ребром, называются его ***концами***. Число ребер, выходящих из вершины v, называется ***степенью*** вершины v и обозначается $d(v)$. Для графа, изображенного на рис. 0.1, $d(1)=1$, $d(2)=3$, $d(3)=2$, $d(4)=2$, $d(5)=0$. Вершина степени 0 называется ***изолированной***, вершина степени 1 — ***висячей***. Очевидно, что для степени любой вершины v выполняется соотношение $0 \le d(v) \le n-1$, где n – число вершин графа.

Поставим в соответствие каждому игроку точку плоскости — вершину графа. Если два игрока встретились между собой, то соединим соответствующие вершины линией — ребром графа. Таким образом, мы построили ***граф встреч*** игроков. Нам нужно доказать, что существуют два игрока, проведших одинаковое количество, т.е. в графе встреч обязательно найдутся две вершины, степени которых одинаковы.

Докажем это утверждение от противного. Допустим, что существует граф H, степени всех n вершин которого различны. В промежутке от 0 до $n-1$ существует ровно n целых чисел: $0,1,2,\ldots,\ n-2,\ n-1$. С другой стороны степени n вершин графа тоже расположены в в этом промежутке. Поэтому должны существовать такие вершины $v_1, v_2, \ldots, v_n$, что $d(v_1)=0$, $d(v_2)=1$, ... , $d(v_n)=n-1$.

Рассмотрим вершины v_1 и v_n. Степень вершины v_1 равна нулю, это значит, что вершина v_1 не соединена ребром ни с одной другой вершиной. Степень вершины v_n равна $n-1$, это значит, что эта вершина соединена ребрами со всеми остальными вершинами, в том числе и с вершиной v_1, что противоречит предыдущему. Следовательно, существование графа H, у которого все вершины имеют различную степень, не возможно.

Это означает, что хотя бы два игрока в турнире проведут одинаковое число встреч.

2. Граф H называется ***подграфом*** графа G, если вершины и ребра H принадлежат G. Подграф H графа G называется ***подграфом, порожденным множеством вершин*** $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, если он содержит вершины $v_1, v_2, \ldots, v_p$ и все ребра графа G, соединяющие эти вершины.

На рис.0.2 изображен граф G и два его подграфа H_1 и H_2, причем подграф H порожден множеством вершин $\{1, 2, 4, 5\}$.

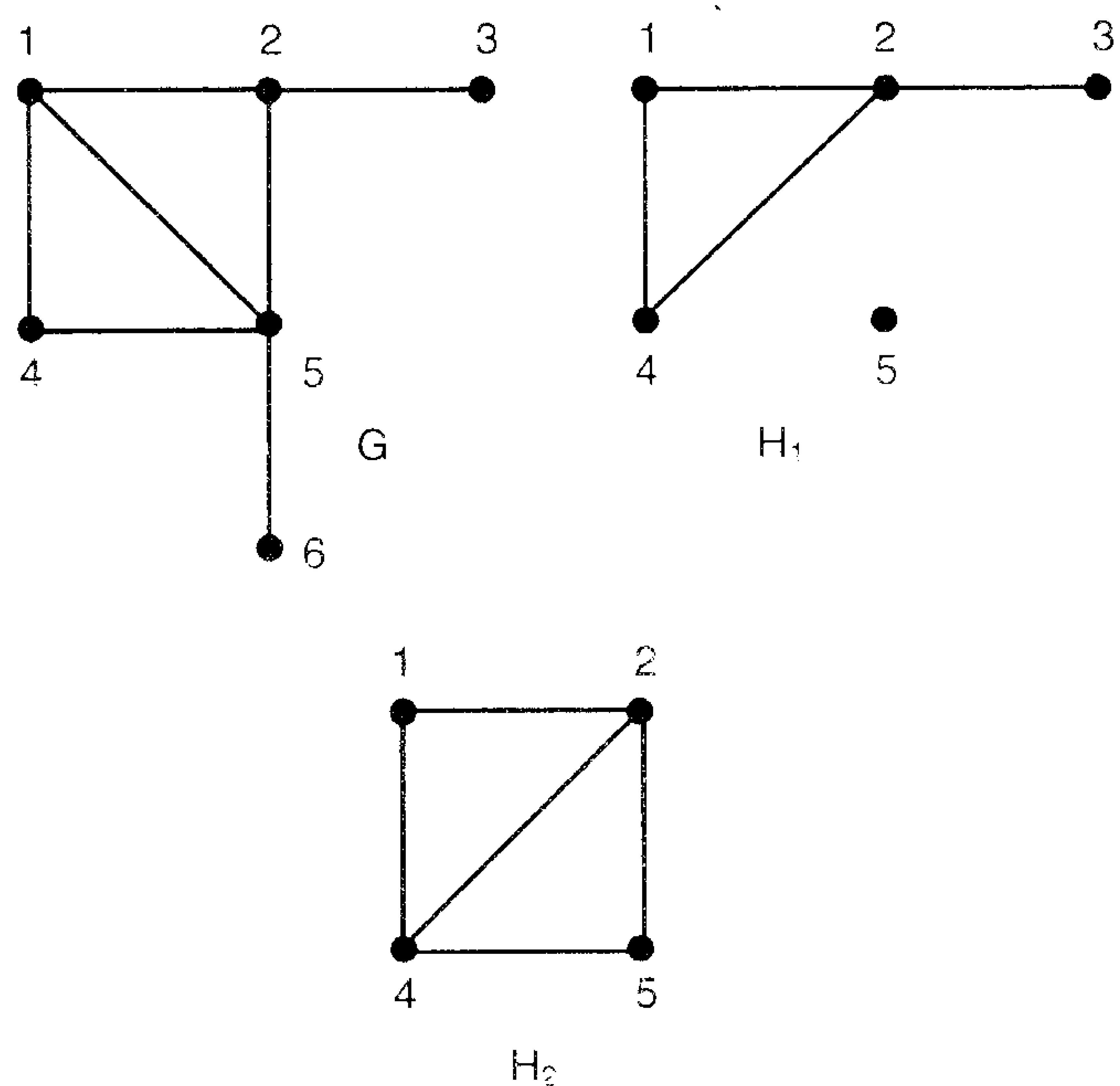

Рис.0.2

Пусть G — граф встреч игроков (см. задачу 1), в котором вершина 1 соответствует Ване, вершина 2 — Толе, вершина 3 — Леше, вершина 4 — Диме, вершина 5 — Семену, вершина 6 — Илье и вершина 7 — Жене.

Поскольку степень вершины 1 равна шести, то эта вершина соединена со всеми вершинами графа G, а так как вершина 7 имеет степень один, то она смежна только с вершиной 1. Рассмотрим подграф H_1, порожденный множеством вершин $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. Этот подграф получается из графа G удалением вершин 1 и 7 и всех ребер, выходящих из этих вершин. Поэтому в графе H_1, который имеет 5 вершин, степени вершин будут $d(2)=4$, $d(3)=d(4)=2$, $d(5)=d(6)=1$. В графе H_1 вершина 2 будет смежной со всеми вершинами, а вершины 5 и 6 — только с вершиной 2. Рассмотрим граф H_2, порожденный множеством вершин $\{3, 4\}$. Этот граф получается из графа H_1 после удаления вершин 2, 5, 6 и всех ребер, выходящих из этих вершин. В графе H_2 степени вершин 3 и 4 равны единице. Это означает, что граф H_2 имеет вид:

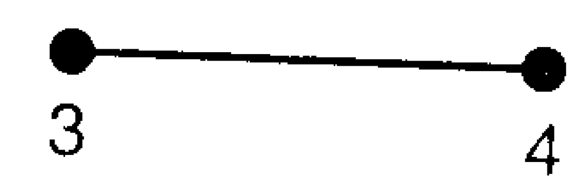

Рис.0.3

Возвратив удаленные вершины 2, 5, 6, получим граф H:

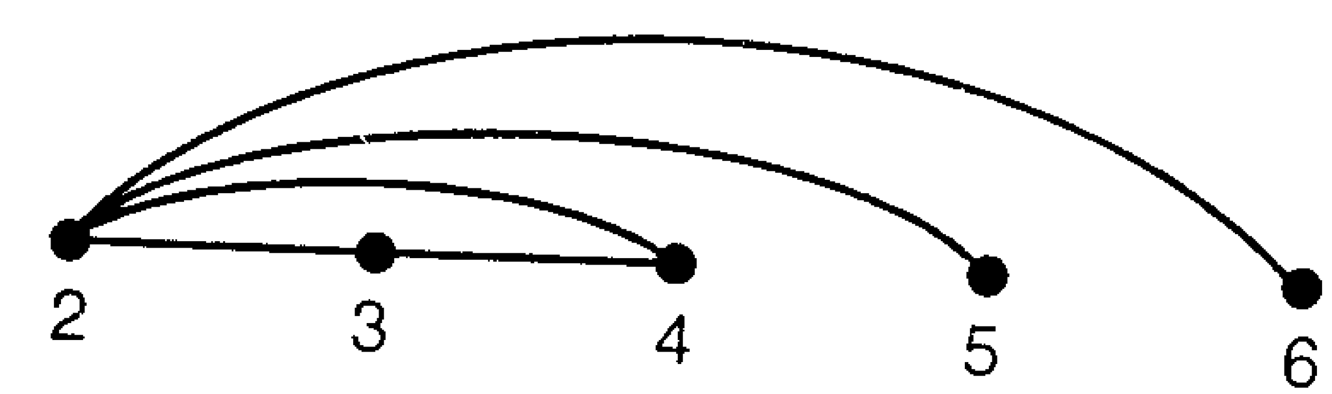

Рис.0.4

Возвратив теперь удаленные вершины 1 и 7, получим исходный граф G.

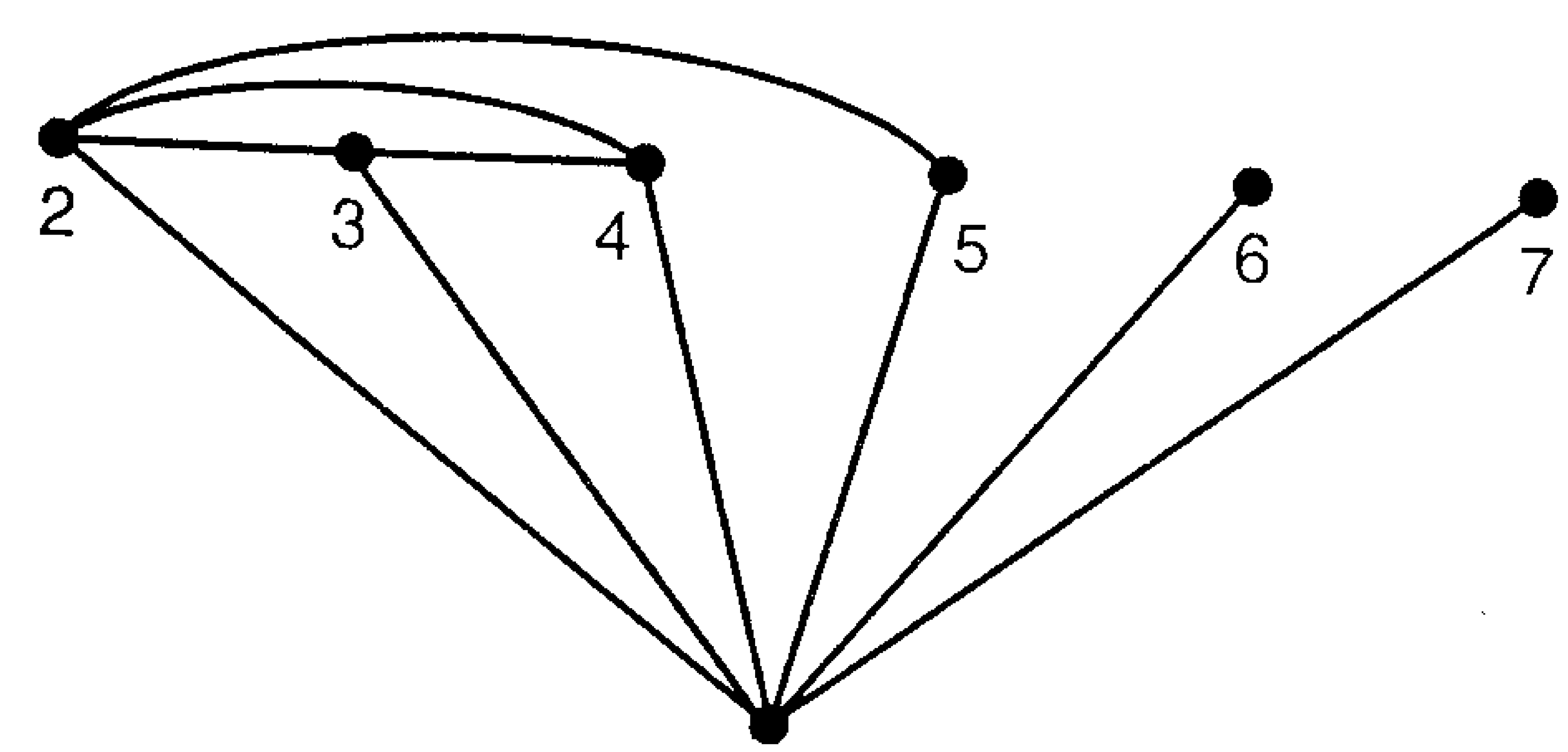

Рис.0.5

Этот граф описывает встречи школьников. Поэтому Леша, которому соответствует вершина 3, встретился с Ваней, Толей и Димой, которым соответствуют вершины 1, 2 и 4. По этому графу можно также определить, с кем встречались остальные школьники.

3. Построим граф G встреч игроков так же, как в предыдущих задачах. По условию в этом графе ровно две вершины (пусть вершины u и v) имеют одинаковые степени, а степени остальных вершин различны. Занумеруем вершины так, чтобы $d(1)\leq d(2)\leq\ldots\leq d(5)$. Каждая из степеней вершин графа принадлежит множеству $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Очевидно, что в графе одновременно не могут присутствовать вершина степени 0 и вершина степени 4.

Пусть в графе нет вершины степени 0. Тогда в графе обязательно есть вершина любой степени из множества $\{1, 2, 3, 4\}$, так как в противном случае в графе было бы больше, чем две вершины с одинаковой степенью. Следовательно, $d(1)=1$, $d(5)=4$. В графе не может быть двух вершин степени 4, поскольку в противном случае в графе не было бы вершины степени 1, так как любая вершина степени 4 будет смежной со всеми вершинами графа.

Граф G_1 получаем из графа G удалением вершин 1 и 5 вместе со всеми выходящими из них ребрами. Граф G_1 будет порожден множеством вершин $\{2, 3, 4\}$, а степени его вершин принадлежат множеству $\{0, 1, 2\}$. Так как в графе G обязательно были вершины степени 2 и 3, то в графе G_1 обязательно есть вершины степеней 1 и 2. Поэтому в графе G_1 нет вершины степени 0, иначе мы бы получили граф с вершинами различных степеней. Поэтому степени вершин 2 и 4 в графе G_1: $d(2)=1$, $d(4)=2$. Для вершины 3 существует только одна возможность: ее степень в графе G_1 равна 1, и граф G_1 имеет вид:

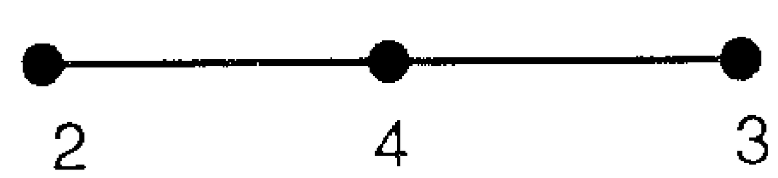

Рис.0.6

Вернув ранее удаленные вершины 1 и 5, получим граф G:

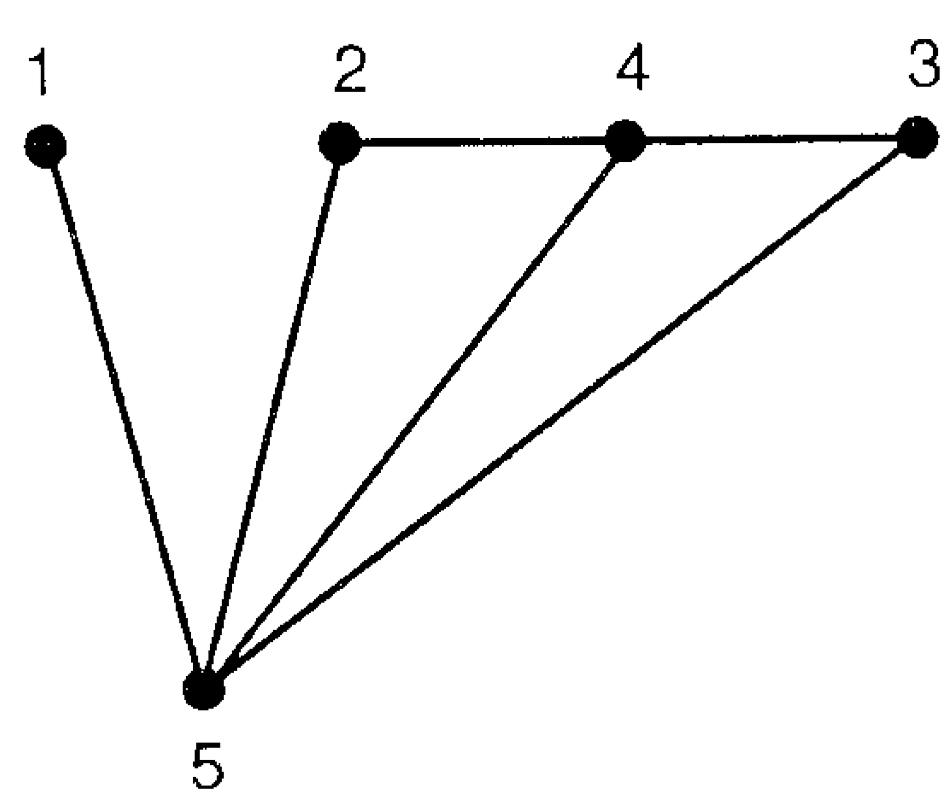

Рис.0.7

Аналогично рассматриваем случай, когда в графе G нет вершины степени 4. Тогда граф G имеет вид:

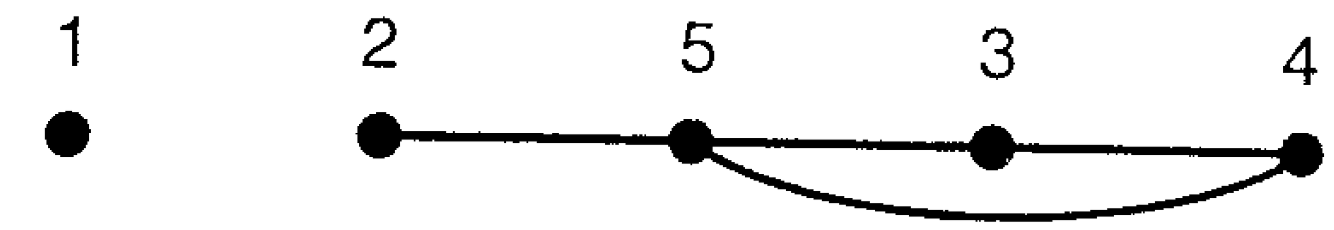

Рис.0.8

В обоих случаях Ваня и Леша сыграли по две партии.

4. Построим граф встреч игроков так, как и в предыдущих задачах. Поскольку каждая пара игроков встретилась между собой, то в графе каждая пара вершин будет соединена ребром. Граф, у которого каждая пара вершин соединена ребром, называется ***полным*** графом. Полный граф с n вершинами обозначается K_n. Мы должны найти число ребер в графе K_{12}.

Из каждой вершины графа выходит 11 ребер. В произведении 12×11 каждое ребро учтено дважды, поэтому граф K_{12} имеет $(12\times11):2 = 66$ ребер.

Следовательно, в соревновании было сыграно 66 встреч.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что граф K_n содержит $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

Противоположностью полному графу является пустой граф. Граф, который не имеет ни одного ребра, называется ***пустым*** . Пустой граф с n вершинами обозначается O_n.

5. Пусть в чемпионате лагеря участвовало n команд. Построим граф G встреч. Поскольку команды провели все встречи, то граф G полный. Он имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Вне зависимости от исхода матча в любом матче разыгрывается два очка. Это значит , что во время всего чемпионата было разыграно $n(n-1)$ очков. На долю трех призеров приходится 15 очков, на долю всех остальных участников — $n(n-1)-15$. Каждая из остальных $(n-3)$ команд, не ставших призерами, не может набрать более трех очков. Поэтому

$$n(n-1)-15\leq3(n-3),$$

$$(n-2)^2\leq10,\ n\leq5.$$

Если бы в чемпионате участвовало 3 или 4 команды, то они набрали бы в сумме меньше 15 очков. Поэтому в чемпионате участвовало 5 команд, которые в сумме набрали 20 очков. На долю двух последних приходится 5 очков. Одна из них набрала 3, другая — 2 очка. (При другом делении очков, например, 4 и 1, изменится состав призеров.)

Следовательно, команда, занявшая последнее место набрала 2 очка.

6. Построим граф G встреч команд. По условию степень каждой вершины графа равна 8. Нужно доказать, что в графе существуют три вершины, порождающие пустой граф O_3.

Рассмотрим произвольную вершину v. Она не смежна с 11 вершинами. Среди этих вершин обязательно найдутся две вершины u и w, не смежные между собой, так как в противном случае степень каждой из этих 11 вершин была бы не меньше 10. Вершины v, u и w определяют нужную тройку команд.

Решение задачи не изменится, если число команд уменьшить до 19.

7. Построим ***граф знакомств*** G, в котором вершины будут изображать людей, а ребро будет соединять две вершины тогда и только тогда, когда соответствующие люди знакомы. Отметим, что из условий задачи следует, что подграф, порожденный любыми тремя вершинами графа G, не может быть ни полным, ни пустым.

Покажем, что степень каждой вершины графа равна двум. Предположим, что существует вершина v, степень которой не меньше трех. Пусть вершина v будет смежной с вершинами v_1, v_2 и v_3. Рассмотрим подграф, порожденный этими тремя вершинами. В этом подграфе должно быть хотя бы одно ребро. Пусть это будет ребро (v_1, v_2). Но тогда граф, порожденный вершинами v, v_1 и v_2, будет полным, что противоречит условиям задачи.

Аналогично доказывается, что степень вершины графа не может быть меньше двух.

Легко показать, что существует ровно один граф с пятью вершинами, степень каждой вершины которого равна двум (см. рис.0.9).

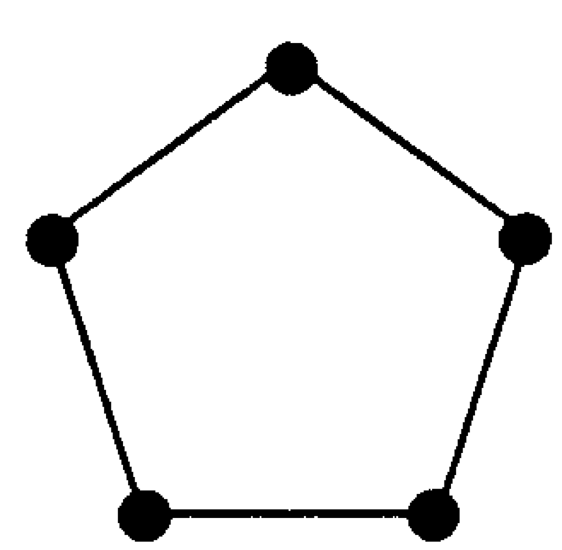

Рис.0.9

Этому графу соответствует расположение людей за столом.

8. Построим граф знакомств G, как в предыдущей задаче. Пусть граф имеет n вершин. Степень вершины v равна числу знакомств человека, соответствующего вершине. По условию задачи, $d(v) \geq \frac{n}{2}$. Необходимо доказать, что в графе G существует подграф С из четырех вершин, в котором первая вершина смежна со второй, вторая с третьей, третья с четвертой, а четвертая с первой. Если в графе все вершины смежные, то любые 4 из них образуют нужный подграф и любых четырех человек можно посадить за столом.

Пусть вершины u и v несмежные. Обозначим через $N(u)$ и через $N(v)$, соответственно, множество, состоящее из вершины u и всех смежных с ней вершин, и множество, состоящее из вершины v и всех смежных с ней вершин. Оценим число вершин в множествах $N(u)$ и $N(v)$: $|N(u)| \geq \frac{n}{2}+1$, $N(v) \geq \frac{n}{2}+1$. Если в этих множествах все вершины различны, то число вершин в графе G будет не меньше, чем $(n+2)$, что противоречит условию. То же самое произойдет, если множества $N(u)$ и $N(v)$ будут иметь только одну общую вершину.

Следовательно, вершины u и v будут иметь, как минимум, две общие вершины w_1 и w_2. Граф G, изображенный на рис. 0.10, определит людей, сидящих за круглым столом.

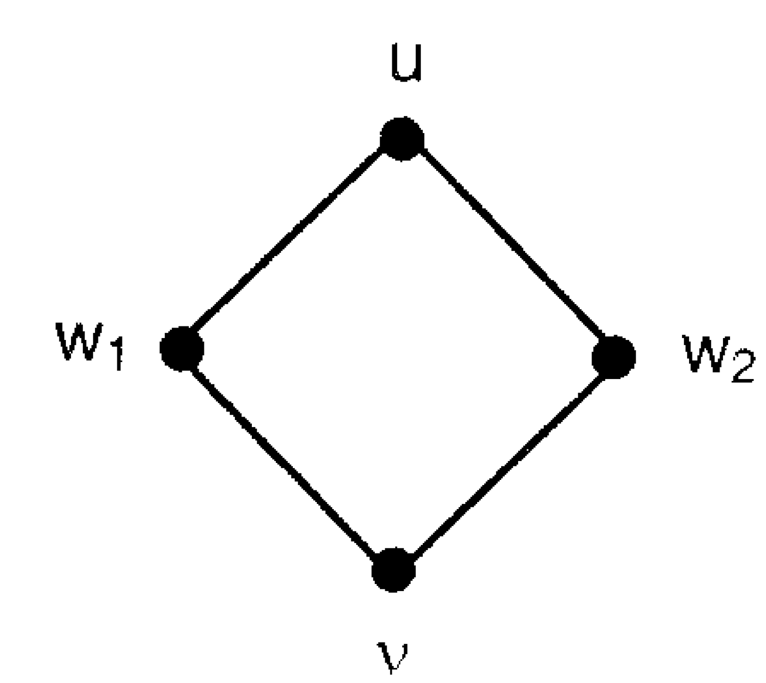

Рис. 0.10

9. Построим ***граф авиалиний*** G, в котором вершины задают города, а ребра — авиалинии, соединяющие города. Рассмотрим любую вершину v_0 графа G. По условию из нее выходит не более трех ребер. Пусть (v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3) — ребра, выходящие из вершины v_0. Из каждой вершины v_i $(i = 1, 2, 3)$, кроме ребра (v_0, v_i), выходит не более двух ребер (см. рис. 0.11). Таким образом, в графе G не может быть более 10 городов.

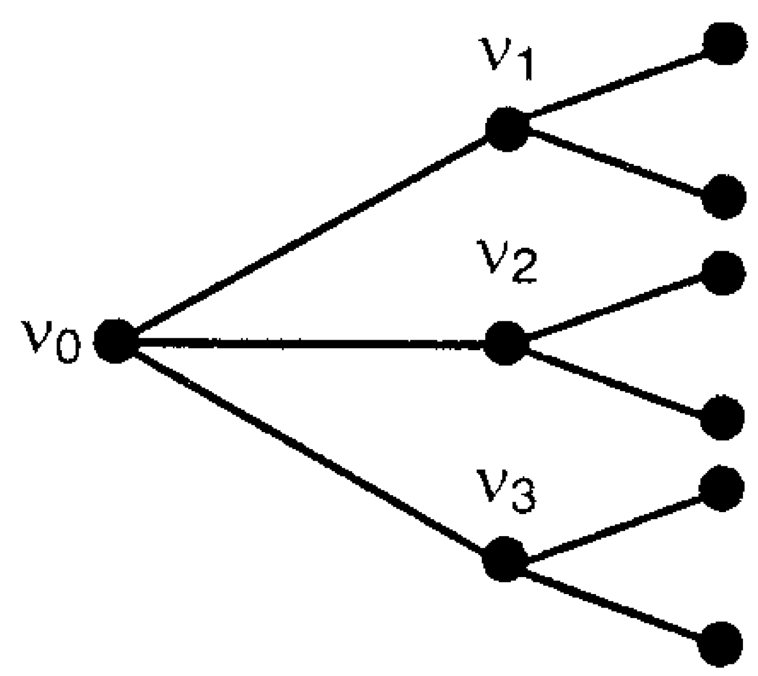

Рис. 0.11

На рис. 0.12 изображен граф, удовлетворяющий требуемым условиям. Он называется ***графом Петерсена***.

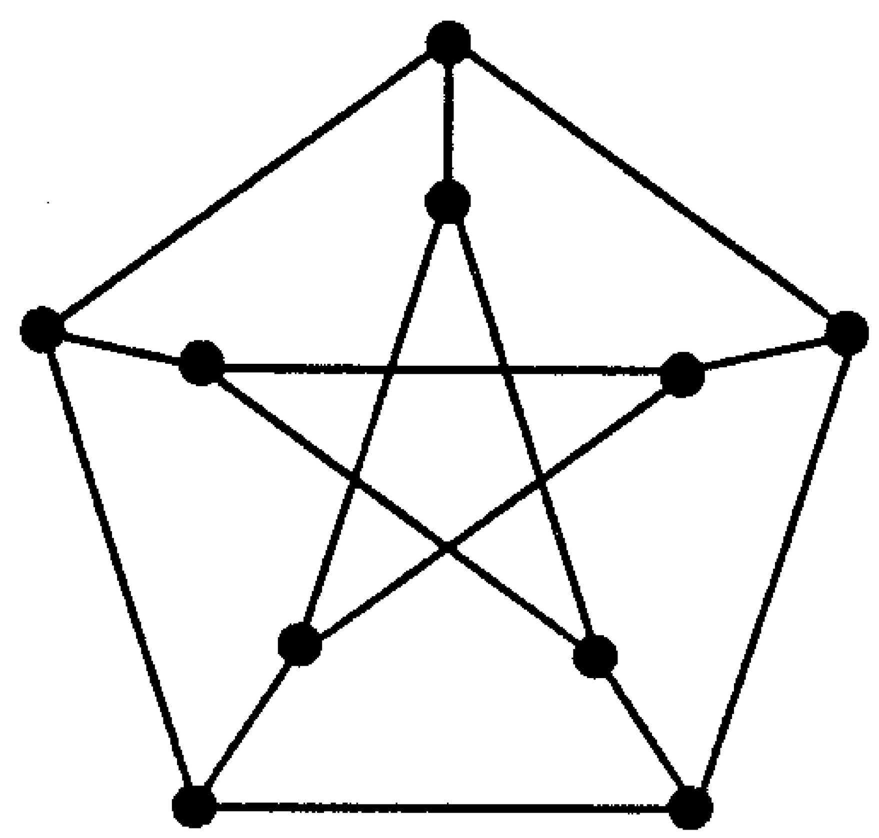

Рис. 0.12

Следовательно, в государстве 10 городов.

10. Построим граф G, в котором вершины обозначают депутатов и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им депутаты являются противниками. Из условия следует, что степень каждой вершины графа G не больше трех. Для решения задачи мы должны разбить вершины графа G на два множества A и B так, чтобы степени вершин графа, порожденного множеством А, и степени вершин графа, порожденного множеством B, были не больше единицы. Разобьем вершины на два множества произвольным образом. Вершины, которые не будут удовлетворять требуемому условию, назовем "плохими". Предположим, что существует "плохая" вершина в одном из множеств. Переместим ее в противоположное множество (см. рис. 0.13, где v — "плохая" вершина).

В результате переноса число ребер, соединяющих вершины множеств A и B, увеличится. Такие перемещения будем производить до тех пор, пока в графе будут оставаться "плохие" вершины.

Поскольку после каждого переноса количество ребер между вершинами множеств A и B увеличивается, а число ребер в графе конечно, то, в конце концов, мы придем к нужному разбиению вершин, которое определит разбиение депутатов по палатам.

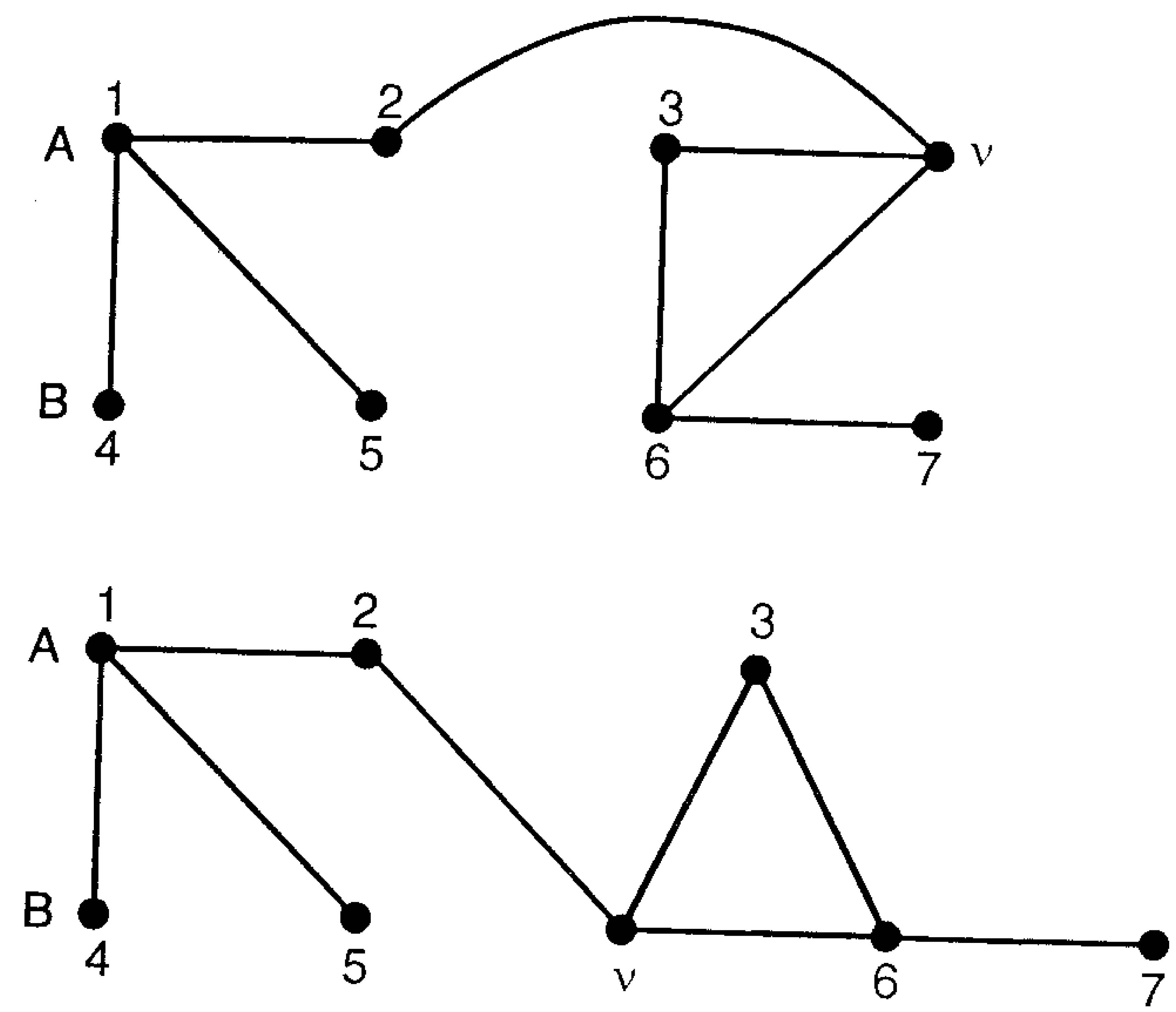

Рис. 0.13

11. Граф, вершины которого можно разбить на два множества (две ***доли***) таким образом, что каждое ребро будет соединять вершины из разных множеств, называется ***двудольным***. Двудольный граф, у которого каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли, называется ***полным двудольным графом***. Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и q вершин обозначается $K_{p,q}$. На рис.0.14 изображены некоторые полные двудольные графы. Полный двудольный граф $K_{p,q}$ имеет $p\times q$ ребер.

Пусть в командах "синих" и "красных" по n игроков. Если поставить каждому игроку вершину графа и соединить ребрами вершины, соответствующие проведенным играм, то получится полный двудольный граф $K_{n,n}$. Этот граф имеет n^2 ребер. Если встречу между двумя игроками выиграл "синий" игрок, то соответствующее ребро окрасим синим цветом, если "красный", то красным. Обозначим через x число красных ребер, тогда синих будет $4x$. Всех ребер в графе n^2. Поэтому $4x + x = n^2$, $5x = n^2$. Отсюда $n = 5$.

В каждой команде было по пять игроков.

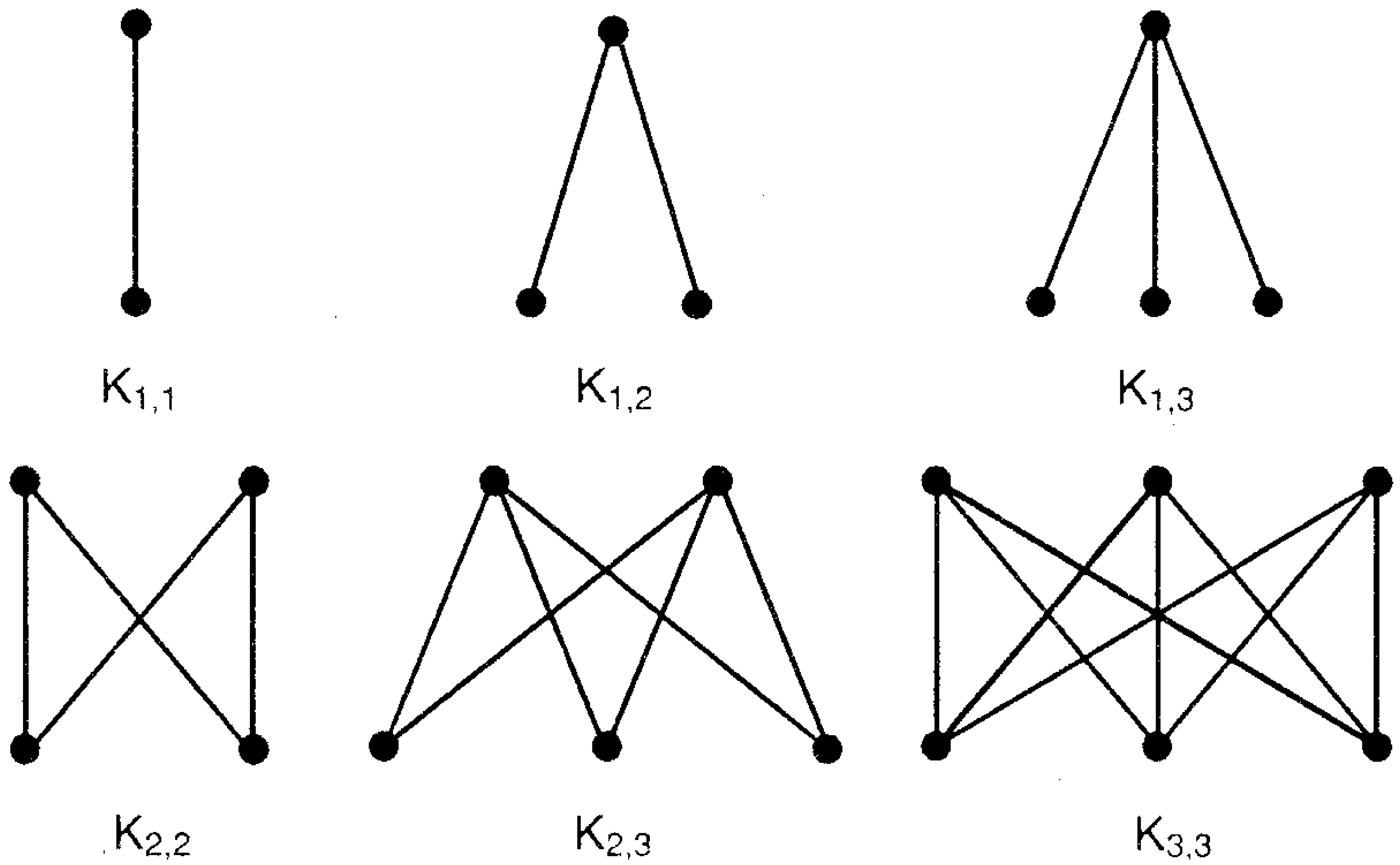

Рис.0.14

12. Поставим в соответствие ученикам вершины графа G, а если два ученика дружат, то соединим ребром соответствующие им вершины. Поскольку мы учитываем лишь дружбу учеников разных классов, то граф G будет двудольным. Каждая из вершин графа G имеет степень, равную трем.

Граф, все вершины которого имеют одинаковые степени, называется ***регулярным***. Пусть 9"а" классу соответствует доля A графа G, в которой будет m вершин, а 9"б" — доля B, в которой будет n вершин. Число ребер, выходящих из вершин доли A, равно $3m$, а из вершин доли B — $3n$. Поскольку это одни и те же ребра, то $3m = 3n$. Отсюда следует, что $n=m$, и число учеников в классах одинаково.

13. Построим двудольный граф G, описывающий дружбу школьников так, как в предыдущей задаче. Пусть 9"а" классу соответствует доля A, в которой будет m вершин, а 9"б" — доля B, в которой будет n вершин.

Для любой вершины u из доли A ее степень $d(u) \geq \frac{n}{2}$, а для любой вершины v из доли B ее степень $d(v) \leq \frac{m}{2}$. Для числа ребер E_1, выходящих из вершин доли A, выполняется неравенство

$$|E_1| \geq m \cdot \frac{n}{2},$$

а для числа ребер E_2, выходящих из вершин доли B, неравенство

$$|E_2| \leq n \cdot \frac{m}{2}.$$

Поскольку это одни и те же ребра, то $|E_1| = |E_2|$. Это равенство возможно лишь в том случае, когда степень любой вершины из доли A будет равна $\frac{n}{2}$, а степень любой вершины из доли B – $\frac{m}{2}$.

Поэтому каждый ученик дружит ровно с половиной учеников другого класса. Отсюда, в частности, следует, что в каждом классе четное число учеников.

14. Построим граф G кандидатов. Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа, а если два участника не могут находиться в одной экспедиции, то соединим соответствующие вершины ребром (см. рис. 0.15).

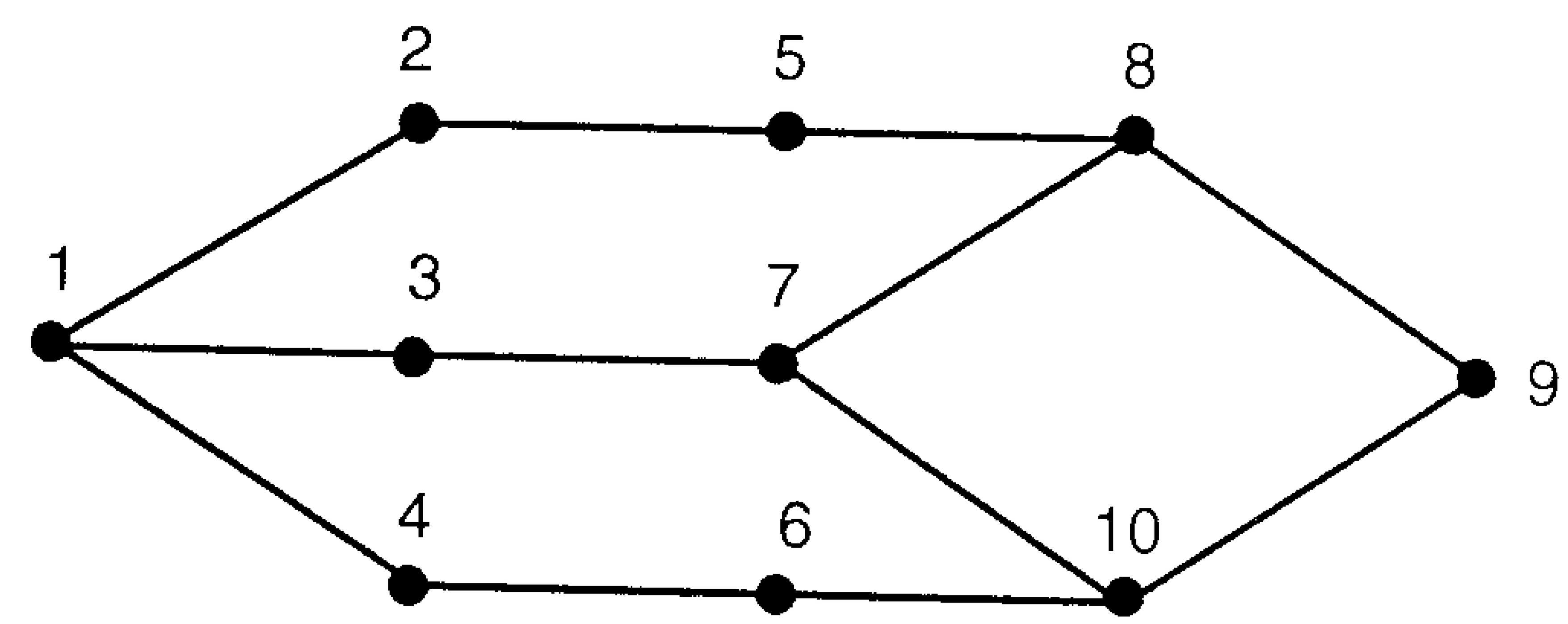

Рис. 0.15

Необходимо разбить вершины графа на два множества так, чтобы каждое ребро соединяло вершины из разных частей, то есть показать, что граф G является двудольным.

Рассмотрим следующую процедуру, которая называется ***поиском в ширину***. Вершину 1 отнесем к первой группе. Затем смежные с ней вершины 2, 3, 4 отнесем ко второй группе. Смежные с одной из вершин 2, 3, 4 вершины 5, 6, 7 отнесем к первой группе и так далее, пока не разделим все вершины на две группы. В первую попадают вершины 1, 5, 7, 6 и 9, во вторую — 2, 3, 4, 8, 10. Соответствующим будет и деление кандидатов на группы для участия в экспедициях.

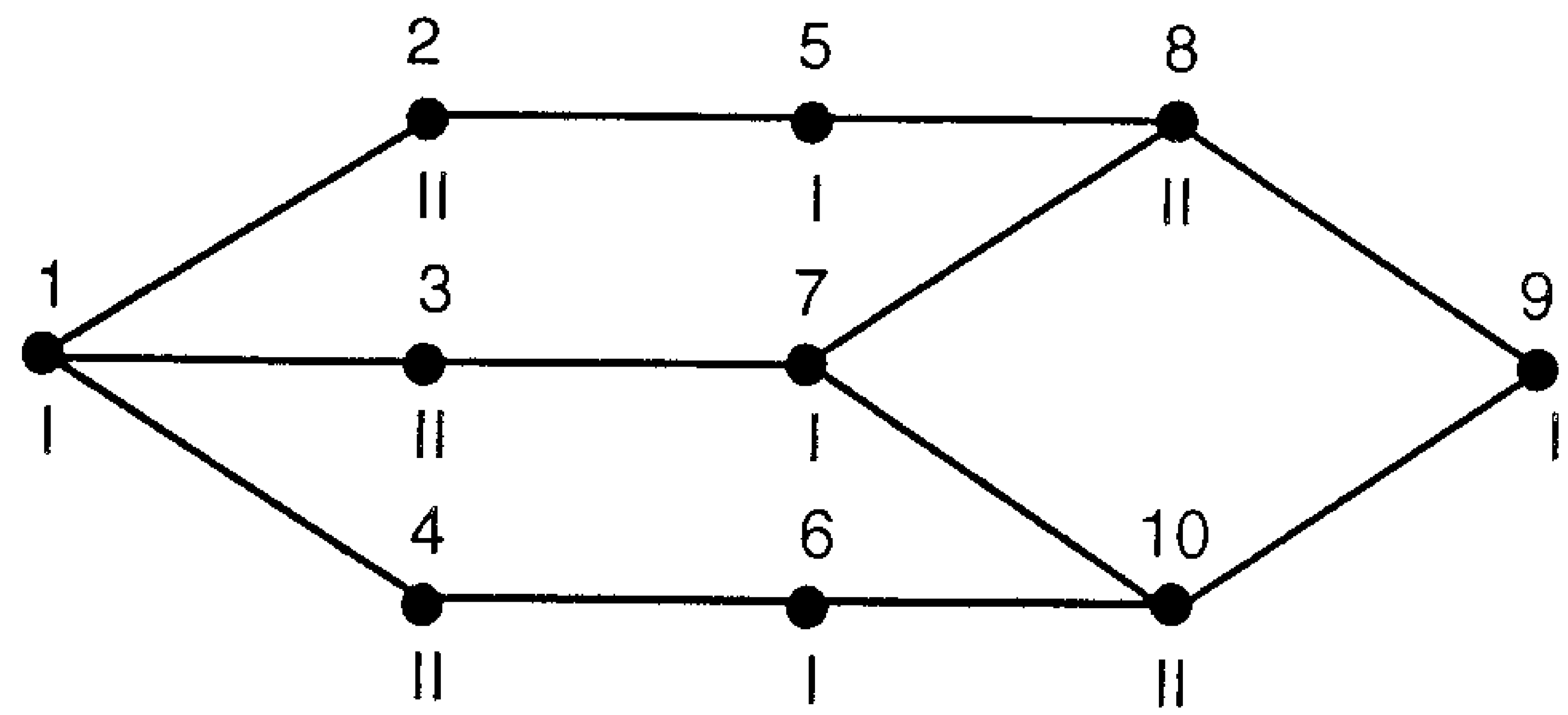

Рис. 0.16

Поиск в ширину позволяет проверить, является ли граф двудольным. Например, если бы в графе G было ребро (7,9), то деление его вершин по указанному правилу было бы невозможным.

15. Граф называется ***n-дольным***, если его вершины можно разбить на n частей (долей) так, что каждое ребро будет иметь свои концы в разных долях.

Построим граф G знакомств, как в предыдущих задачах. Поскольку мы учитываем лишь знакомства учеников различных классов, то граф G является 3-дольным. Обозначим через A, B, C его доли. Нужно доказать, что можно выбрать по одной вершине из каждой доли так, что они породят полный граф K_3.

По условию задачи существует вершина a из доли A, смежная более, чем с половиной вершин доли B и более, чем с половиной вершин доли C. Среди смежных с a вершин в доле B есть вершина b, смежная более, чем с половиной вершин доли C. Так как вершин, смежных с a и b в доле C больше половины, то в доле C найдется вершина c, смежная и с a, и с b. Вершины a, b и c порождают полный граф, а ученики, соответствующие вершинам, дружат между собой.

16. Построим трехдольный граф знакомств, как в предыдущей задаче. По условию степень каждой вершины этого графа равна 301.

Выберем вершину, смежную с наибольшим числом вершин в одной из долей. Пусть, для определенности, это будет вершина u из доли A, которая смежна с p вершинами из доли B. Тогда она смежна с $(301-p)$ вершинами из доли C. Рассмотрим любую вершину v из доли C, смежную с вершиной u. Если вершины u и v имеют общую смежную вершину из доли B, то задача решена. Пусть такой вершины не существует. Тогда вершина v смежна самое большее с (300-p) вершинами из доли B. Поскольку степень этой вершины 301, то она будет смежной самое меньшее с $(301-(300-p))=p+1$ вершиной из доли A. Но это противоречит выбору

вершины u. Поэтому вершины u и v обязательно имеют общую смежную вершину в доле B, с которой порождают полный граф. Ученики, соответствующие этим вершинам, будут знакомы.

17. Граф называется ***связным***, если от любой его вершины можно по ребрам перейти до любой другой. В противном случае граф называется ***несвязным***. Будем говорить, что две вершины графа принадлежат одной ***компоненте***, если от одной из них до другой можно перейти по ребрам графа. Каждая компонента является связным графом. Граф, изображенный на рис. 0.17 состоит из трех компонент.

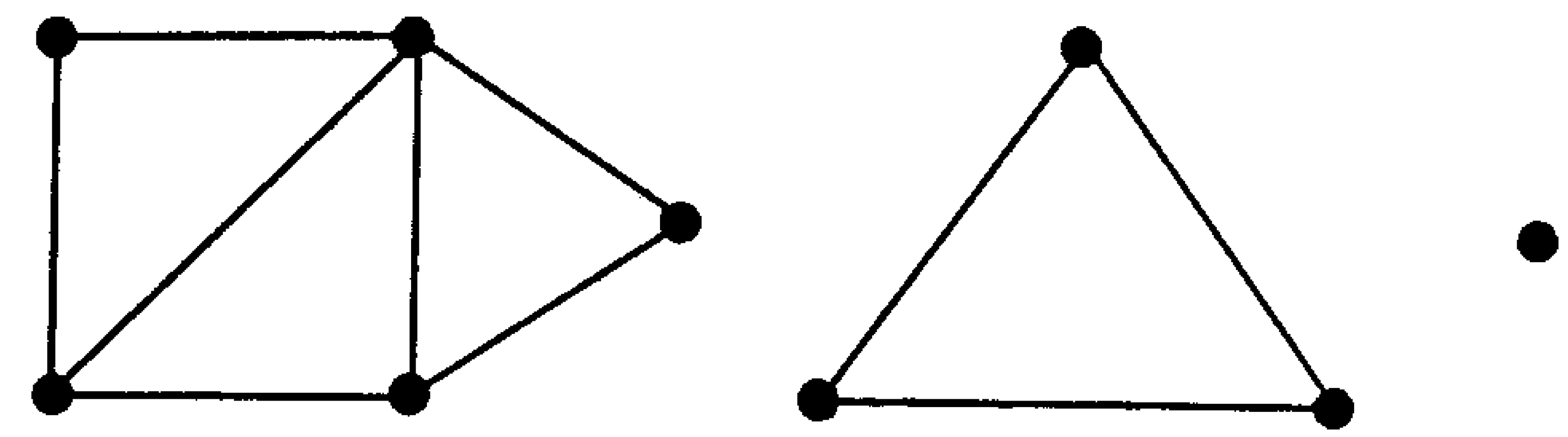

Рис. 0.17

Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют школьникам, а две вершины соединены ребром, если соответствующие школьники обменялись адресами. Из каждой вершины графа выходит не менее 26 ребер. Для решения задачи мы должны доказать, что любой граф с 53 вершинами и со степенями вершин не меньшими, чем 26, является связным.

Предположим, что граф несвязный. Рассмотрим компоненту, содержащую наименьшее число вершин. В ней будет не более 26 вершин. Но в таком случае степень любой вершины из этой компоненты будет не больше, чем 25, что противоречит условию задачи. Это означает, что граф связный, и Иван узнает адрес Николая.

Подобным образом можно доказать, что если для графа G наименьшая степень его вершин $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$, то граф G связный.

18. Так, как и в предыдущей задаче мы должны доказать, что граф с 45 вершинами и с 950 ребрами будет связным. Доказательство проведем от противного. Рассмотрим несвязный граф с 45 вершинами, который имеет наибольшее число ребер. Очевидно, что этот граф имеет ровно две компоненты, каждая из которых является полным графом. Пусть большая из компонент имеет p вершин (значит $p\geq 23$), тогда меньшая — $(45-p)$ вершин. Число ребер в нашем графе будет

$$|E| = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{(45-p)(44-p)}{2} = p^2 - 45p + 45\cdot 22 .$$

Значения квадратного трехчлена $f(p) = p^2 - 45p + 45 \cdot 22$ растут с увеличением числа p. Наибольшее p, при котором граф будет несвязным, равно 44. Одна компонента такого графа является графом K_{44}, а вторая — графом K_1. Этот граф имеет наибольшее число ребер среди несвязных графов с 45 вершинами. Число ребер в нем равно (44×43):2=946. А граф, который получается из условий задачи, имеет больше, чем 946 ребер, следовательно, он связный.

Подобным образом можно доказать, что если граф с n вершинами имеет больше, чем $((n-1)(n-2))$:2 ребер, то он связный.

19. Построим граф G, вершины которого обозначают мальчиков, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им мальчики являются братьями. Каждая компонента графа G будет полным графом, поскольку, если один мальчик имеет несколько братьев, то все эти дети — братья. Предположим, что в графе G несколько компонент. Тогда существует компонента, содержащая не более трех вершин. Степень каждой вершины этой компоненты не более двух, что противоречит условию, так как степень вершины равна числу братьев соответствующего мальчика. Следовательно, граф G имеет одну компоненту, т.е. все мальчики — братья.

20. Пусть задан граф G. Рассмотрим граф $\overline{G}$, который имеет такое же множество вершин, что и граф G, а ребро соединяет две вершины графа $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда эти вершины не соединены ребром в графе G. Граф $\overline{G}$ называется ***дополнительным*** графом к графу G.

Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют городам и две вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда эти города соединены железнодорожным маршрутом. В этом случае граф $\overline{G}$, в котором вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие города соединены автобусным маршрутом, будет дополнительным к графу G. Для того, чтобы можно было доехать из одного города в любой другой с помощью одного вида транспорта необходимо, чтобы или граф G, или граф $\overline{G}$ был связным. Пусть граф G является несвязным и состоит из нескольких компонент $G_1, G_2, \ldots, G_p$. Тогда в дополнительном графе существуют ребра между любыми вершинами компонент G_i и G_j $(i \neq j)$ и граф $\overline{G}$ будет связным (см. рис. 0.18).

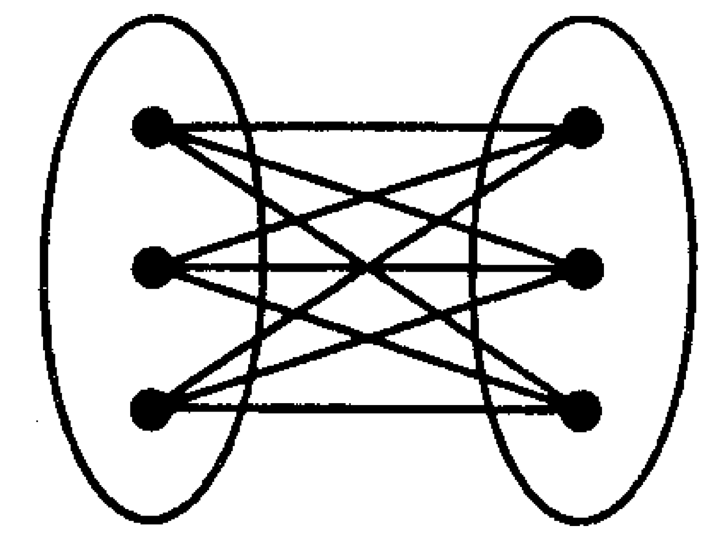

Рис. 0.18

21. Рассмотрим граф G, состоящий из шести вершин, каждая из которых соответствует человеку. Если два человека знакомы, то соединим соответствующие им вершины красным ребром, если два человека не знакомы — синим. Мы получим полный граф K_6, ребра которого окрашены в красный или синий цвета. Нужно доказать, что в этом графе существует треугольник, состоящий только из красных ребер, или треугольник, состоящий только из синих ребер.

Рассмотрим произвольную вершину графа G. Степень этой вершины равна пяти. Значит из нее выходит по крайней мере три одноцветных ребра, допустим красных (см. рис. 0.19).

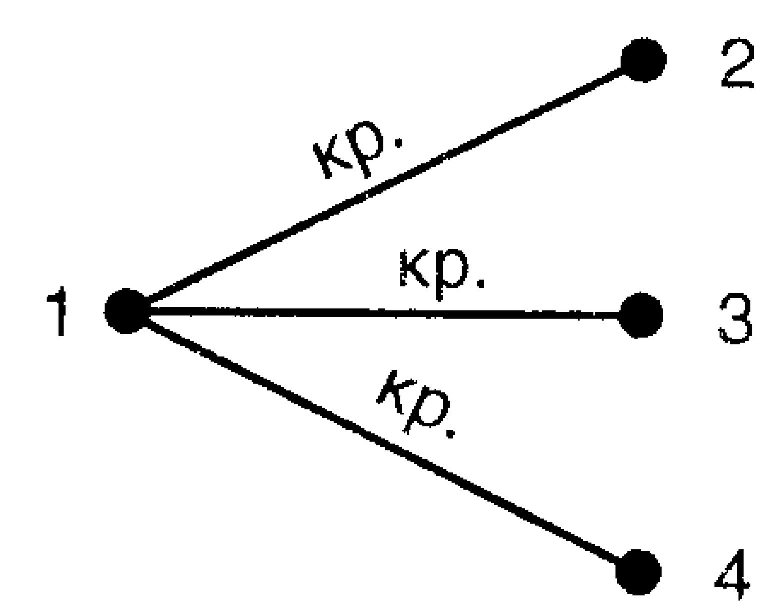

Рис. 0.19

Если одна из пар вершин (2,3), (2,4), (3,4) соединена красным ребром, то в графе будет красный треугольник. В противном случае вершины 2, 3, 4 образуют синий треугольник.

Если в графе K_6 существует красный треугольник, то его вершины определяют трех знакомых людей, если синий — трех незнакомых.

22. Построим граф G, в котором вершины соответствуют делегатам, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие делегаты могут объясниться между собой. Из предыдущей задачи следует, что в любом графе с шестью вершинами есть или порожденный полный подграф K_3, или порожденный пустой подграф O_3. Так как среди любых трех вершин хотя бы две соединены ребром, то в G отсутствуют порожденные пустые графы. Поэтому в графе G имеется порожденный подграф K_3. Три делегата, соответствующие вершинам этого подграфа, могут объясниться между собой.

23. Построим граф G, вершины которого обозначают ученых. Если двое ученых переписываются на английском языке, то соединим соответствующие им вершины зеленым ребром, если на французском – красным, если на русском – синим. Мы получили полный граф K_{17}, ребра которого раскрашены тремя цветами. Докажем, что в этом графе есть треугольник, составленный из одноцветных ребер.

Рассмотрим произвольную вершину v графа. Из вершины должно выходить, по крайней мере, 6 ребер одного цвета , так как в противном случае из вершины v будет выходить не более 15 ребер, а степень вершины v в графе K_{17} равна 16. Пусть для определенности из вершины v выходит 6 зеленых ребер (v, v_1), (v, v_2), ..., (v, v_6). Если какая-либо пара вершин из множества $\{v_1, v_2, ..., v_6\}$ соединена зеленым ребром, то в графе G есть зеленый треугольник. Если же эти вершины соединены между собой только красными или синими ребрами, то из задачи 21 следует, что в графе G есть красный или синий треугольник. Вершины одноцветных треугольников определяют ученых, которые переписываются на одном языке.

24. Построим граф знакомств G, как в предыдущих задачах. Нужно доказать, что степени всех вершин графа одинаковы, т.е. граф G является регулярным.

Пусть u и v — две смежные вершины графа. Тогда, согласно условию, вершины u_1, u_2, ..., u_p, смежные с вершиной u, не будут смежными с вершиной v. Рассмотрим несмежные вершины u_1 и v. Эти вершины, кроме вершины u, должны иметь еще одну общую смежную вершину, например v_1 (см. рис. 0.20), и эта вершина не будет смежной с вершиной u.

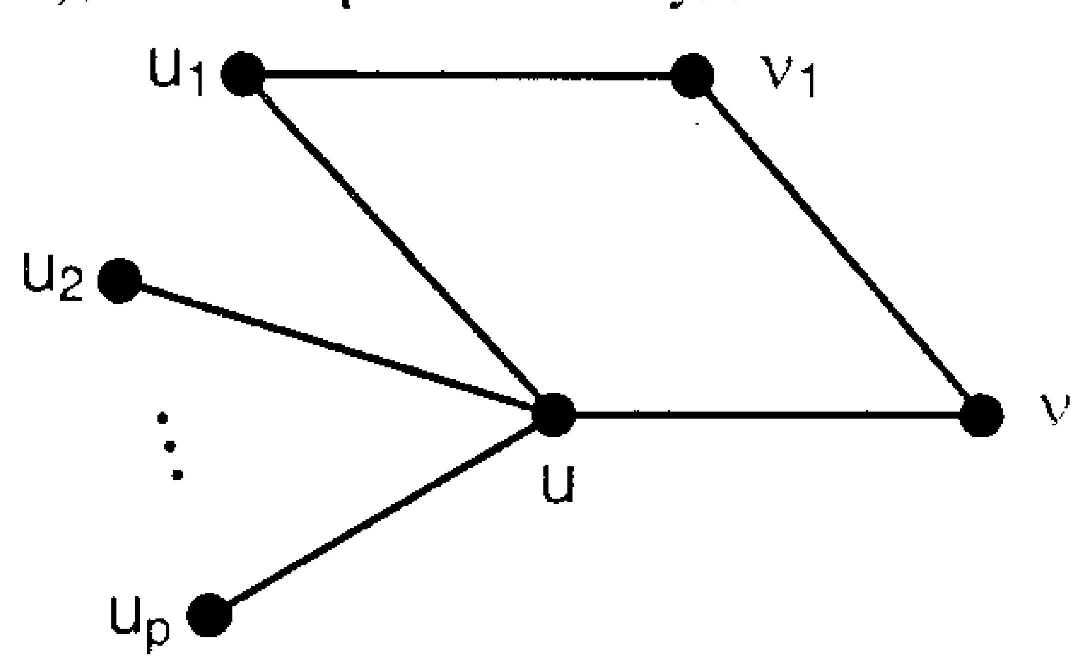

Рис. 0.20

Аналогично, для каждого индекса i $(2 \le i \le p)$ найдется вершина v_i, смежная с вершинами u_i и v и не смежная с вершиной u. Вершины $v_1, v_2, ..., v_p$ попарно различны, так как в противном случае люди, соответствующие вершинам u и v_1, будут иметь более двух общих знакомых (см. рис. 0.21).

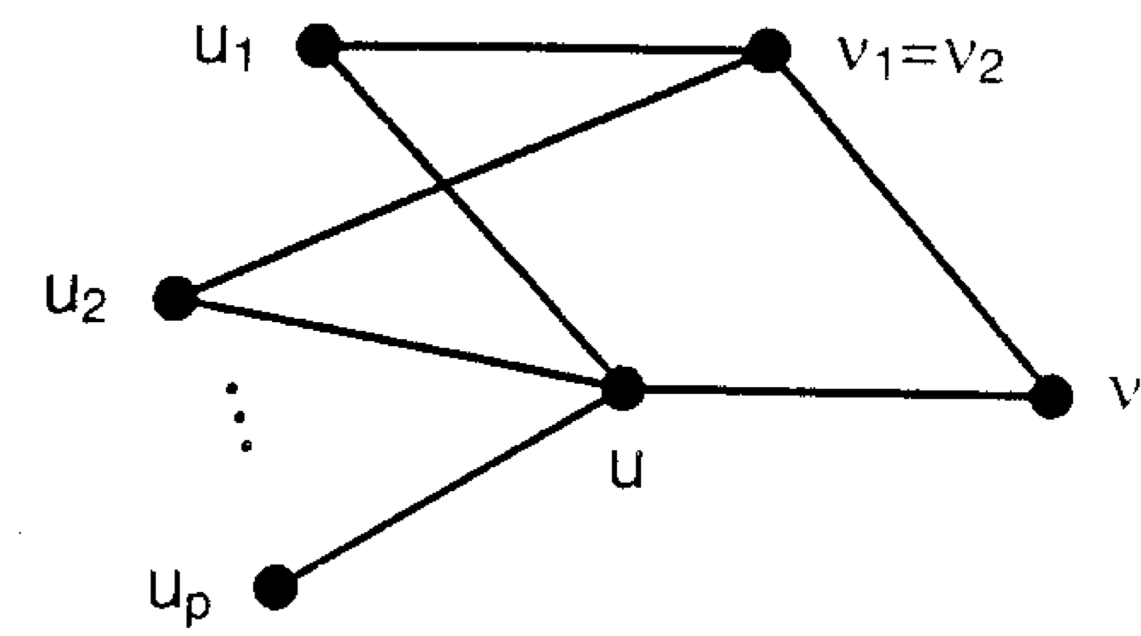

Рис. 0.21

Поэтому $d(v) \ge d(u)$. Точно так же можно доказать, что $d(v) \le d(u)$. Следовательно, $d(v) = d(u)$.

Мы доказали, что степени двух смежных вершин одинаковы. Но для двух несмежных вершин u и v существует третья вершина w, которая будет смежной и с u, и с v. Поэтому будут одинаковы и степени всех несмежных вершин. Следовательно, в компании все имеют одинаковое число знакомых.

25. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. В этом графе степень вершины будет равна числу знакомых человека. Нужно доказать, что существует вершина, степень которой не менее одиннадцати.

Изучим строение графа G. В нем обязательно существует вершина, степень которой не менее двух, так как в противном случае граф G был бы объединением графов K_1 и K_2 и в нем бы существовали несмежные вершины одинаковой степени. Пусть вершина u смежна с вершинами v и w. Тогда по условию степени этих трех вершин равны. Из условий задачи также вытекает, что вершины v и w смежны. Следовательно, граф G распадается на несколько компонент $G_1, G_2, ..., G_p$, и каждая компонента является полным графом. Степени вершин в разных компонентах различные, так как люди, соответствующие вершинам различных компонент, незнакомы. Поэтому граф G представляет собой объединение полных графов:

$$G = K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \ldots \cup K_{p_t}.$$

Индексы p_i можно занумеровать таким образом, что

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_t.$$

Докажем, что $p_t \geq 12$.

Действительно, предположим, что в графе G отсутствует подграф K_p, в котором $p \geq 12$, и оценим число вершин в графе G. В самом благоприятном случае, когда в графе G будут подграфы K_1, K_2, ..., K_{10}, K_{11}, число вершин графа G будет равно

$$1+2\ +\ \ldots\ +11 = \frac{(1+11)\cdot 11}{2} = 66.$$

Но по условию в графе G должно быть 70 вершин. Получено противоречие. Следовательно, в графе G должен быть полный подграф не менее, чем с двенадцатью вершинами. Вершины этого подграфа и соответствуют требуемым людям.

26. Как и в предыдущих задачах построим граф G знакомств. Степень каждой вершины графа равна шести. Рассмотрим шесть вершин графа G: $u_1, u_2, \ldots, u_6$. По условию существует вершина u_0, смежная с каждой из этих шести вершин.

Возьмем теперь шестерку вершин u_0, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6. По тому же условию есть вершина, которая смежна с этими вершинами. Этой вершиной может быть лишь вершина u_6, так как в противном случае степень вершины u_0 окажется большей, чем 6. Аналогично доказывается, что каждая пара остальных вершин также является смежной. Поэтому граф G будет графом K_7, и в компании будет семь человек.

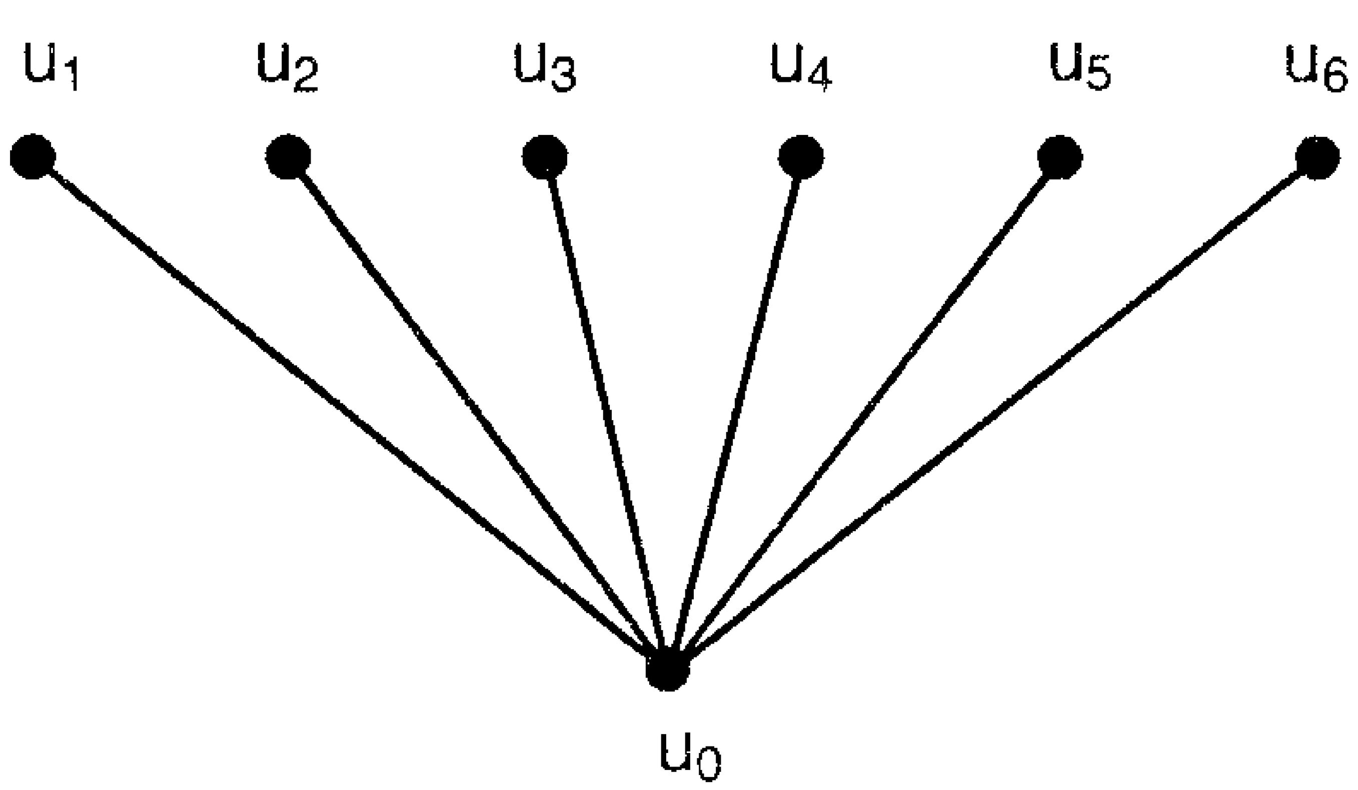

Рис. 0.22

27. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. Необходимо доказать, что в графе найдется вершина, степень которой равна

49. Предположим, что вершина u имеет наибольшую степень p среди вершин графа, и $3 \leq p \leq 48$. Обозначим через $\partial(u) = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ множество вершин, смежных с вершиной u. Пусть вершина v будет не смежной с вершиной u. Если в $\Gamma(u)$ есть две несмежные вершины, например u_1 и u_2, то четверка вершин u, v, u_1, u_2 не удовлетворяет условиям задачи (см. рис. 0.23).

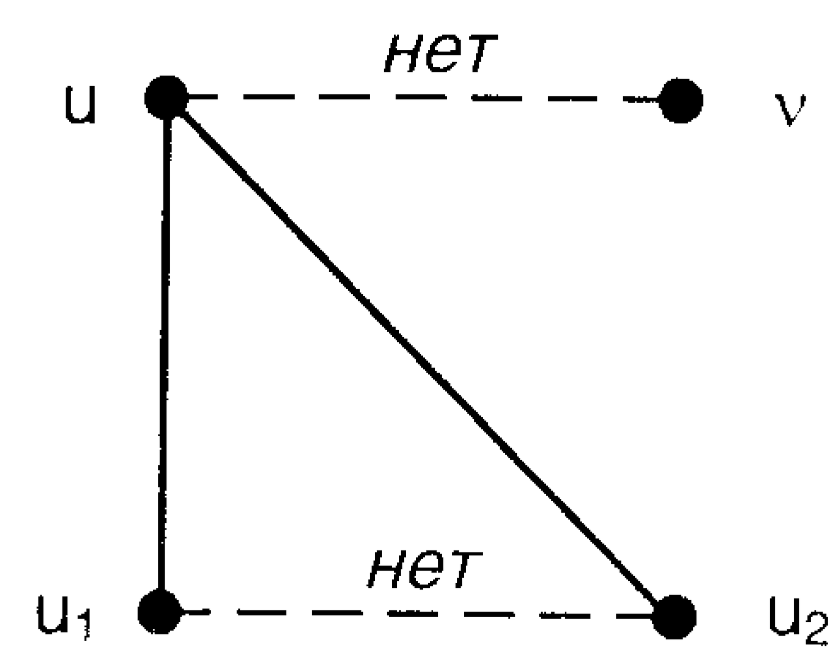

Рис. 0.23

Поэтому все вершины множества $\Gamma(u)$ попарно смежны. Рассмотрим далее четыре вершины: u, v, u_1, u_2. По условию задачи одна из этих вершин должна быть смежной с остальными. Поскольку u и v не смежные вершины, то такой вершиной является или u_1, или u_2. Для определенности, пусть вершина u_1 будет смежной с вершинами v, u и u_2.

Поскольку вершина u_1 является смежной с вершинами u, v и со всеми вершинами из множества $\Gamma(u)$, то ее степень будет больше, чем степень вершины u, что противоречит предположению о максимальности степени вершины u.

Следовательно, в графе G есть вершина, степень которой равна 49, а в лагере есть школьник знакомый со всеми остальными школьниками.

28. Построим граф G знакомств, как и предыдущих задачах. Из условия вытекает, что две вершины графа, имеющие одинаковые степени, не могут быть смежными с одной и той же вершиной. Нужно доказать, что в графе есть вершина степени 1.

Рассмотрим вершину v_0, имеющую наибольшую степень d. Пусть она будет смежна с вершинами v_1, v_2, ..., v_d. Поскольку эти вершины смежны с одной и той же вершиной v_0, то все они будут иметь разные степени. Но если среди этих вершин не найдется вершины степени 1, то степень какой-то вершины окажется больше, чем d, что противоречит выбору вершины v. Следовательно, среди вершин v_1, ..., v_d существует вершина степени 1, которая соответствует ученому, имеющему одного знакомого.

29. Рассмотрим граф G, в котором точки являются вершинами, а отрезки — ребрами. Степень каждой вершины графа G равна четырем. Необходимо доказать, что в графе G есть полный подграф K_3.

Пусть произвольная вершина v_1 смежна с вершинами v_2, v_3, v_4, v_5. Если среди этих вершин есть хотя бы одна пара смежных, то эта пара вместе с вершиной v_1 порождает граф K_3.

Рассмотрим случай, когда такой пары нет. Тогда вершина v_2 смежна с тремя вершинами (пусть это будут вершины v_6, v_7, v_8 из множества $\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$ (см. рис. 0.24).

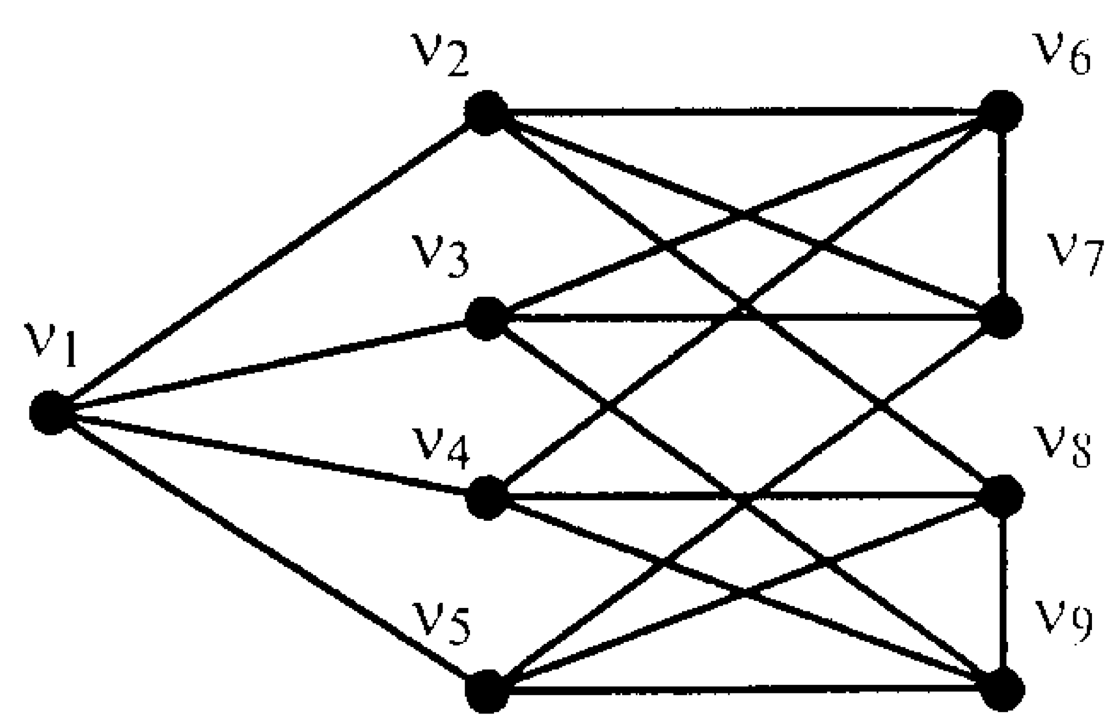

Рис. 0.24

В графе H, порожденном множеством вершин $\{v_2, v_3, ..., v_9\}$, вершины v_2, v_3, v_4, v_5 имеют степень 3, а вершины v_6, v_7, v_8, v_9 — степень 4. Так как вершины v_2, v_3, v_4, v_5 не смежны между собой, то все 12 ребер, выходящих из этих вершин в графе H, должны выходить и из вершин множества $\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Но из вершин последнего множества должно выходить больше, чем 12 ребер, так как 4×4>12. Поэтому четыре последние вершины будут разбиты на две пары смежных вершин. Одна из этих пар обязательно принадлежит множеству $\{v_6, v_7, v_8\}$ и вместе с вершиной v_2 образует треугольник (см. рис. 0.24).

30. Построим граф G, в котором вершины, обозначающие горожан, соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие горожане не дружат. В графе G любые три вершины порождают один из трех графов:

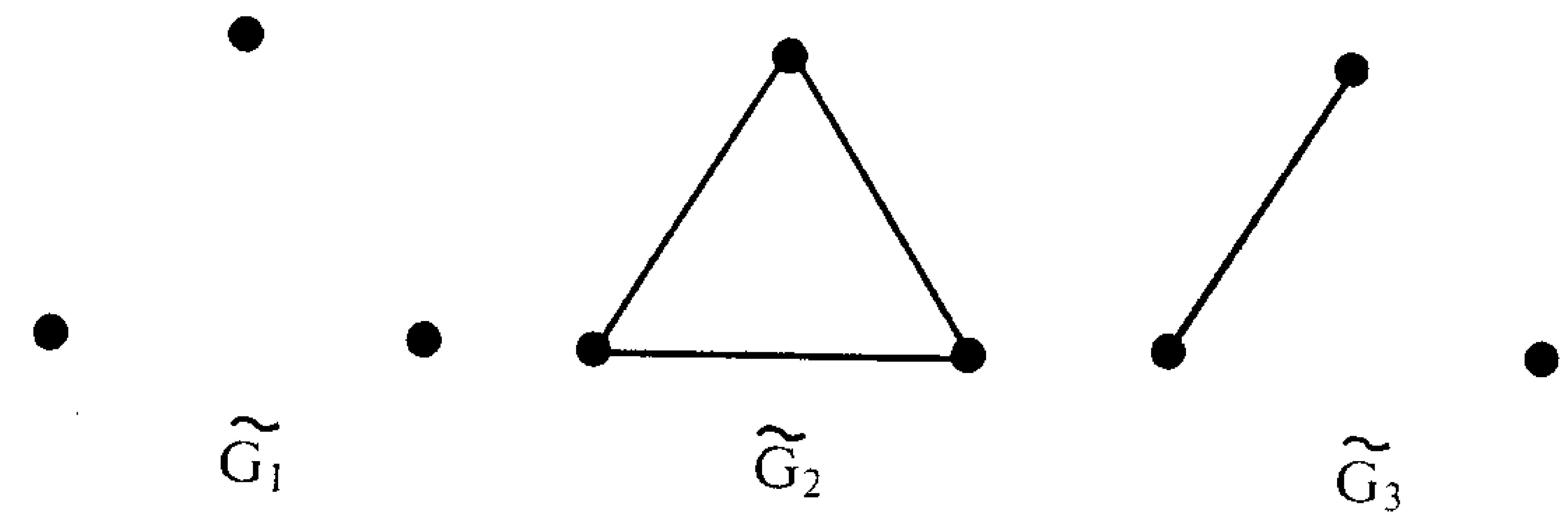

Рис. 0.25

Пусть не все жители города дружат, т.е. граф G не является полным. Мы должны доказать, что если граф имеет n вершин, то существует вершина v, степень которой $d(v) < \frac{n-1}{2}$.

Предположим противное: степень каждой вершины графа G не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$. Рассмотрим произвольную вершину v. Она вместе со смежными с ней вершинами порождает полный граф G_1. Это следует из того, что в графе G нет подграфов вида

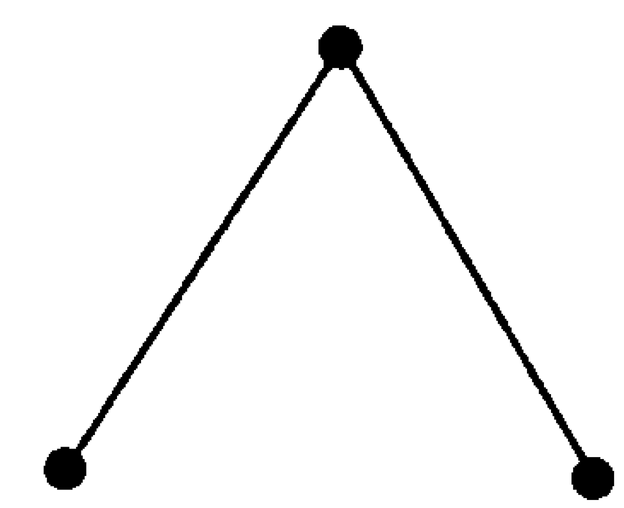

Рис. 0.26

Граф G_1 содержит не меньше, чем $\frac{n+1}{2}$ вершин.

Поскольку граф G не является полным, то существует вершина u, не смежная с вершиной v и не принадлежащая графу G_1. Степень этой вершины также не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$, но поскольку число вершин, не входящих в граф G_1 не больше, чем $\frac{n-1}{2}$, то вершина u будет смежна с некоторой вершиной w из графа G_1. Так как вершина w смежна и с вершиной v, то вершины u и v будут смежными. Мы получили противоречие с предположением, что вершины u и v не смежные. Значит вершина v является смежной со всеми вершинами графа G, т.е. граф G полный, что запрещено условиями задачи.

Следовательно, наше предположение, что степень каждой вершины графа не меньше, чем $\frac{n-1}{2}$ не верное, и в графе существует вершина степень которой меньше, чем $\frac{n-1}{2}$. Эта вершина соответствует жителю, у которого врагов больше, чем друзей.

31. Построим граф G, в котором вершины, изображающие горожан, соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие горожане враждуют. Из условия следует, что половина вершин графа имеет степень 70, а вторая половина — 90.

Так, как и в предыдущей задаче можно показать, что любая вершина вместе со смежными ей вершинами порождает полный граф. Поэтому граф G является объединением некоторого количества полных графов K_{71} и K_{91}. Пусть первых графов будет t, а вторых — s. Все графы K_{71} содержат одну половину вершин графа G, а все графы K_{91} — вторую. Поэтому

$$71t=91s.$$

Так как числа 71 и 91 простые, то минимально возможные значения s и t, соответственно, 71 и 91. В графе G будет $2\cdot 71\cdot 91=12922$ вершин. Столько же жителей будет в городе.

32. Построим граф G, в котором вершины соответствуют городам. Если два города соединены автобусной линией, то проведем между соответствующими вершинами графа синее ребро, если железнодорожной — то зеленое, если авиационной — то красное. Таким образом мы получили полный граф, ребра которого окрашены в три цвета. По условиям задачи из одной вершины не могут выходить ребра трех цветов, и в графе не существует одноцветного треугольника.

Сначала покажем, что из одной вершины не может выходить более двух ребер одного цвета. Допустим противное: из некоторой вершины v выходят три одноцветных (например, синих) ребра: (v,v_1) (v,v_2), (v,v_3) (см. рис. 0.27).

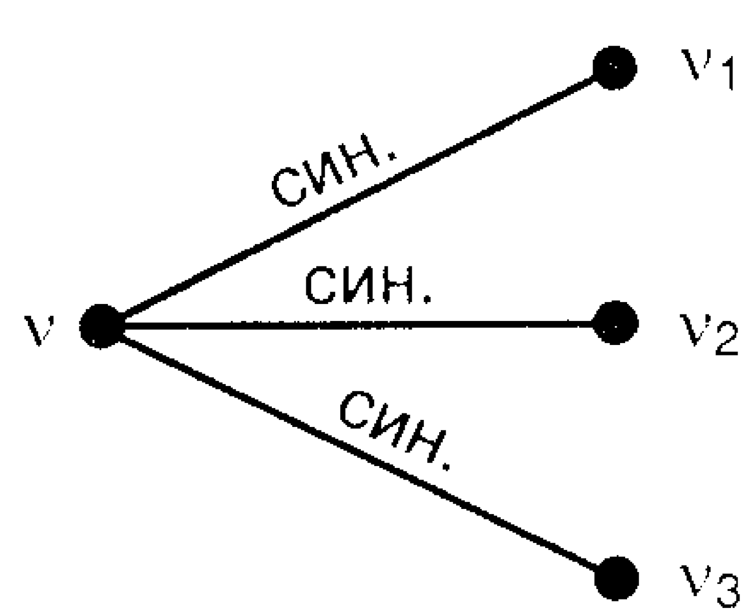

Рис. 0.27

По условию задачи ребро (v_1,v_2) не может быть синим. Пусть оно красное. В таком случае ребро (v_1,v_3) также должно быть красным. Ребро (v_2,v_3) не возможно окрасить, не нарушая условий задачи. Получено противоречие. Следовательно, из любой вершины выходит не более двух одноцветных ребер, и степень каждой вершины графа не превышает четырех. Следовательно, в графе G может быть от трех до пяти вершин.

Рассмотрим случай, когда $G=K_5$. Покажем сначала, что из одной вершины не может выходить более двух ребер одного цвета. В самом деле, предположим, что из вершины v_1 выходят три синих ребра (v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4). Тогда ребро (v_2,v_3) не может быть синим. Пусть это зеленое ребро. Из условий задачи следует, что ребро (v_3,v_4) также будет зеленым. Но в этом случае окрасить ребро (v_2,v_4) без нарушения условий невозможно.

Теперь покажем, что существует цвет, в который окрашены ребра, выходящие не более, чем из трех вершин. Действительно, в противном случае в графе будет ребер одного цвета не меньше, чем (4×2):2=4. Так как в графе обязательно присутствуют ребра трех цветов, то всех ребер должно быть не меньше двенадцати, что невозможно, поскольку в графе K_5 десять ребер.

Пусть ребра синего цвета выходят не более, чем из трех вершин. Рассмотрим ребро (u,v) синего цвета. Из вершин u и v должно выйти еще по одному ребру синего цвета, пусть (u,w_1) и (v,w_2). В случае, когда w_1 и w_2 разные вершины, ребра синего цвета будут выходить из четырех вершин, что противоречит предположению. В случае, когда вершины w_1 и w_2 совпадают, в графе будет синий треугольник, что запрещено условием задачи. Таким образом, мы показали, что граф G не может быть графом K_5.

Для графов K_3 и K_4 существует раскраска их ребер требуемым образом (см. рис. 0.28).

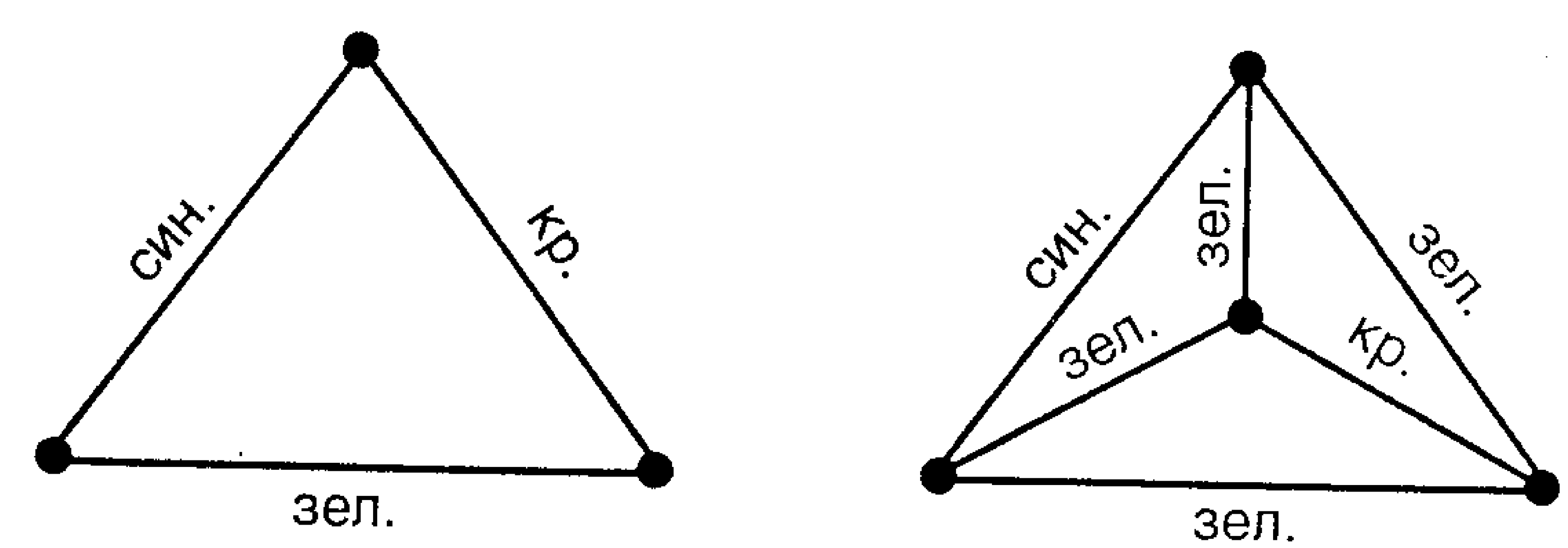

Рис. 0.28

Следовательно, в стране 3 или 4 города.

33. Построим граф G знакомств, как и в предыдущих задачах. Если утверждение Петра верно, то каждая из пятнадцати вершин графа имеет степень 5. В произведении $15 \times 5 = 75$ каждое ребро учитывается дважды, так как оно соединяет две вершины. Поэтому в графе должно быть $75 : 2 = 37{,}5$ ребер, что невозможно. Следовательно, утверждение Петра неверно.

34. Предположим, что на вопрос, поставленный в задаче, ответ положителен. Построим граф G, в котором вершины, соответствующие школьникам, соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие школьники обменялись открытками. Тогда граф G будет иметь 11 вершин степени 3, что невозможно (см. решение предыдущей задачи).

35. Построим граф G, в котором вершины изображают отрезки, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им отрезки пересекаются. Предположим, что можно нарисовать отрезки указанным способом. Тогда граф будет иметь 9 вершин степени 3, что невозможно (см. предыдущие задачи).

36. Построим граф G, в котором каждая вершина будет соответствовать какому-либо человеку, жившему на Земле, и две вершины будут соединять столько ребер, сколько раз жали друг другу руки люди, когда соответствующие этим вершинам.

Граф, у которого существуют пары вершин, соединенные несколькими ребрами, называется ***мультиграфом*** .

Докажем утверждение, которое верно и для графов и для мультиграфов.

➻ ***Лемма о рукопожатиях. Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.***

Доказательство. Пусть граф G имеет n вершин. Сложив степени вершин графа G: $d(1)$, $d(2)$, ... , $d(n)$, мы получим сумму, в которую каждое ребро входит дважды, поскольку каждое ребро вносит по единице в степень ровно двух вершин. Поэтому

$$d(1) + d(2) + \ \dots \ + d(n) = 2|EG|.$$

Лемма доказана.

Следствие. В любом графе число вершин нечетной степени четное.

Действительно, если предположить противное, то сумма степеней вершин графа окажется нечетным числом, что противоречит лемме о рукопожатиях.

Из следствия сразу вытекает решение нашей задачи.

37. Построим мультиграф G мостов, в котором острова будут соответствовать вершинам, а мосты между ними — ребрам.

Пусть на берег не ведет ни один мост. Тогда все вершины графа G будут иметь нечетную степень, и сумма их степеней будет нечетной. Но по лемме о рукопожатиях эта сумма должна быть четной. Получено противоречие. Следовательно, хотя бы один из мостов должен идти на берег.

38. Построим граф G, в котором вершины изображают города, а ребра — дороги. Из условий задачи следует, что степень каждой вершины графа G равна трем. Пусть граф G имеет n вершин. Из леммы о рукопожатиях вытекает, что $2 \times 100 = 3n$. Последнее равенство при целых n невозможно. Поэтому ответ на вопрос, поставленный в задаче, отрицательный.

39. Построим граф G авиалиний, поставив в соответствие городам страны вершины графа, а авиалиниям — ребра. Вообще говоря, граф может быть несвязным. Нужно доказать, что вершины графа, соответствующие столице и городу Дальнему, принадлежат одной компоненте графа. Это вытекает из следствия из леммы о рукопожатиях, так как в противном случае компоненты, содержащие вершины, обозначающие столицу и город Дальний, будут иметь ровно по одной вершине нечетной степени. Поэтому нужные нам вершины будут принадлежать одной компоненте графа G, и из столицы можно долететь до города Дальний.

40. Построим граф G встреч участников. В этом графе рассмотрим вершину наибольшей степени k, которая соответствует игроку, сыгравшему наибольшее число партий. Никакие из k вершин $v_1, v_2, \dots, v_k$, смежных с вершиной v, не могут быть смежными между собой, так как в этом случае в графе G будет подграф K_3, что запрещено условиями задачи. Каждая из вершин v_i может быть смежна, кроме вершины v, лишь с вершинами $u_1, u_2, \dots, u_{10-k}$, не входящими в множество $\{v_1, \dots, v_k\}$ (см. рис. 0.29).

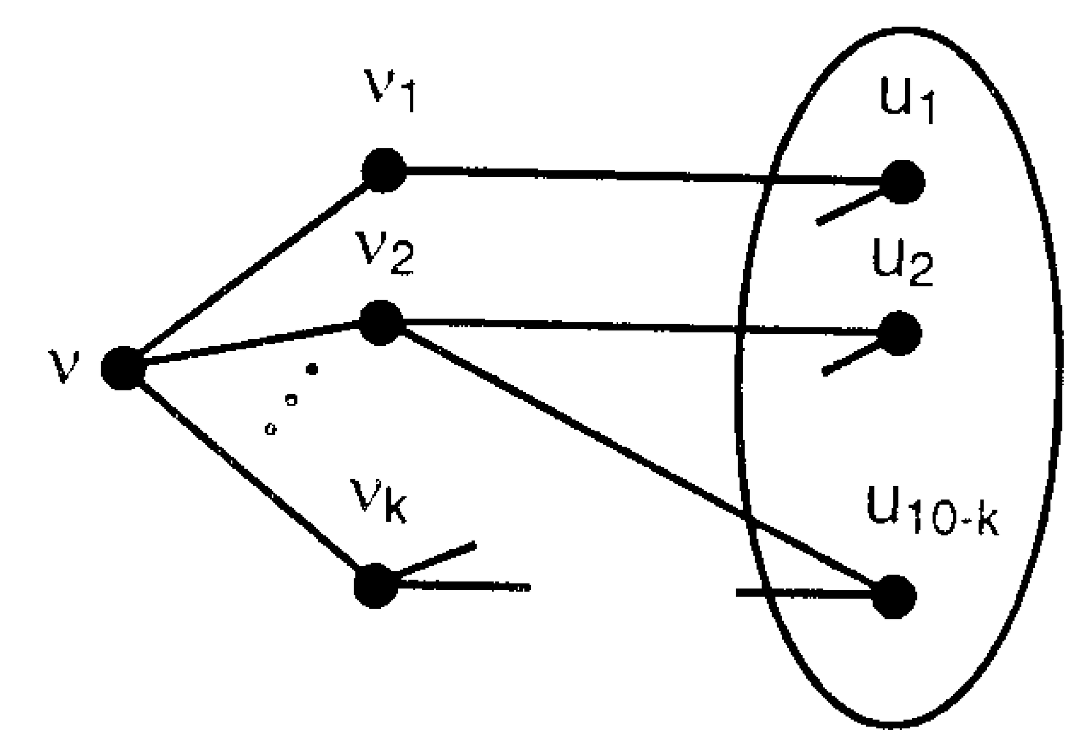

Рис. 0.29

Поэтому степень любой вершины v_i не превышает $(11 - k)$. Из правила выбора вершины v следует, что степень любой вершины u не превышает k.

Воспользуемся леммой о рукопожатиях.

$$2m = d(v) + d(v_1) + \ \dots\ + d(v_k) + d(u_1) + \ \dots\ + d(u_{10-k}) \le$$
$$\le k + k(11-k) + (10-k)k = k + 11k - k^2 + 10k - k^2 = 22k - 2k^2.$$

Отсюда $m \le k(11-k)$.

Выражение $k(11 - k)$ принимает свое наибольшее значение 30 при k=5 и k=6 (напомним, что k — целое). Следовательно, в графе G не больше 30 ребер, и команды провели не более 30 встреч.

41. Построим граф G встреч команд. По условию задачи в графе нет пустых подграфов O_3.

Рассмотрим вершину v_0, которая имеет наименьшую степень k. Смежные с ней вершины тоже будут иметь степень не меньшую, чем k. Каждая пара из оставшихся $(19 - k)$ вершин должна быть смежна между собой, так как в противном случае несмежная пара вместе с вершиной v будет порождать граф O_3. Поэтому степень каждой из оставшихся вершин не меньше, чем$(18 - k)$.

Итак, граф G имеет $(k + 1)$ вершину степени не меньшей, чем k, и $(19 - k)$ вершин степени не меньшей, чем $(18 - k)$.

Как и в предыдущей задаче, воспользуемся леммой о рукопожатиях.

$$2m \ge k(k+1) + (19-k)(18-k) = 2k^2 - 36k + 18 \times 19 =$$
$$= 2(k-9)^2 + 180 \ge 180.$$

Следовательно, в графе G должно быть не менее 90 ребер. В качестве примера такого графа можно взять несвязный граф, две компоненты которого — полные графы K_{10}.

Поэтому наименьшее число игр, которое проведут команды равно 90.

42. Поставим в соответствие мушкетерам вершины графа G. Если два мушкетера поссорились, то соответствующие вершины соединим ребром. По условию в графе G нет порожденных подграфов K_3. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G существует порожденный подграф O_4.

Предположим, что в графе G есть вершина u степени 4. Среди смежных с ней вершин u_1, u_2, u_3, u_4 нет ни одной пары вершин, смежных между собой, так как в противном случае в графе G был бы подграф

K_3, что запрещено условиями задачи. В этом случае вершины u_1, u_2, u_3, u_4 порождают нужный граф O_4.

Пусть теперь наибольшая из степеней вершин графа не превосходит трех. В графе G обязательно есть вершина (пусть v), степень которой не больше двух, так как в противном случае в графе будет 9 вершин нечетной степени, что невозможно (см. следствие из леммы о рукопожатиях в задаче 36).

Вершина v не смежна, по крайней мере, с шестью вершинами. Рассмотрим граф H, порожденный этими вершинами. Из задачи 21 следует, что в H есть или порожденный подграф K_3, или порожденный подграф O_3. Но существование K_3 запрещено условиями задачи. Поэтому некоторые три вершины v_1, v_2, v_3 порождают граф O_3. Добавив к этим вершинам вершину v, получим подграф O_3.

Среди мушкетеров, соответствующих вершинам подграфа, нет поссорившихся.

43. Построим граф G, в котором вершины соответствуют перекресткам и тупикам парка, а ребра — его дорожкам.

Цепью в графе называется такая чередующаяся последовательность вершин v_i и ребер e_j графа

$$(v_0,\ e_i,\ v_1,\ e_1,\ v_2,\ \dots,\ e_{k-1},\ v_k),$$

что все ребра различны и каждое ребро соединяет вершины, между которыми оно находится, т.е. ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i.

Цепь в графе можно задавать перечислением только вершин или только ребер.

Цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают, называется ***циклом***. Связный граф, в котором отсутствуют циклы, называется ***деревом***.

По условию задачи в графе G нет циклов, и он является деревом. Существование тупиков в парке эквивалентно существованию висячих вершин (т.е. вершин степени 1) в построенном дереве.

Докажем, что в любом дереве есть висячая вершина. Предположим противное. Рассмотрим произвольную вершину v_1 и перейдем из нее по любому ребру (v_1, v_2) в вершину v_2. Поскольку степень вершины v_2 не меньше двух, то из нее по новому ребру можно перейти в вершину v_3 и так далее. Но число вершин в графе G конечно. Поэтому, в конце концов, мы приедем в одну из тех вершин, в которых были раньше (см. рис. 0.30).

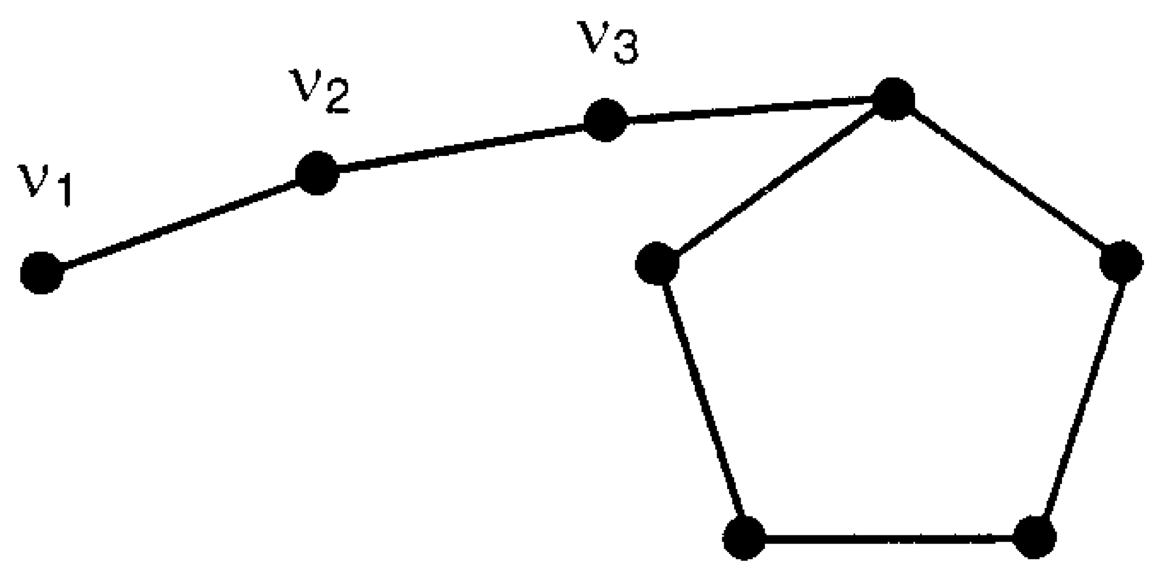

Рис. 0.30

Это означает существование цикла в дереве G, что противоречит условию. Следовательно, в графе есть висячая вершина. Эта вершина будет соответствовать тупику в парке.

44. В предыдущей задаче мы установили, что граф G, описывающий перекрестки, тупики и аллеи парка "Лотос" является деревом. Найдем соотношение между числом вершин и ребер любого дерева. Каждое дерево имеет висячую вершину (см. предыдущую задачу). Удалим висячую вершину v_0 из дерева G вместе с ребром, выходящим из этой вершины. Полученный граф G_1 будет связным и в нем будут отсутствовать циклы, т.е. граф G_1 — также дерево. Из графа G_1, найдя и затем удалив висячую вершину v_1 вместе с выходящим из нее ребром, можно получить дерево G_1 и так далее. Выполнив такие операции, мы получим последовательность деревьев, которая оканчивается деревом, состоящим из одной вершины и не имеющим ребер. Для этого дерева выполняется соотношение: $m = n - 1$, где n — число вершин графа, а m — число его ребер. Теперь будем добавлять в обратном порядке ранее удаленные вершины и ребра. При каждом возвращении добавляется одна вершина и одно ребро, и для каждого получающегося графа соотношение $m = n - 1$ будет выполняться. Следовательно, мы доказали, что ***в любом дереве число ребер на единицу меньше числа вершин.***

Поскольку в парке 18 перекрестков и тупиков, то дерево G будет иметь 18 вершин и 17 ребер. В парке необходимо установить $18{\times}4 + 17{\times}6 = 174$ светильника.

45. Рассмотрим граф G, который описывает парк (см. предыдущие задачи). Докажем, что две произвольные вершины любого дерева соединяет единственная цепь. Действительно, существование двух цепей между некоторыми вершинами дерева приводит к существовали цикла, что невозможно.

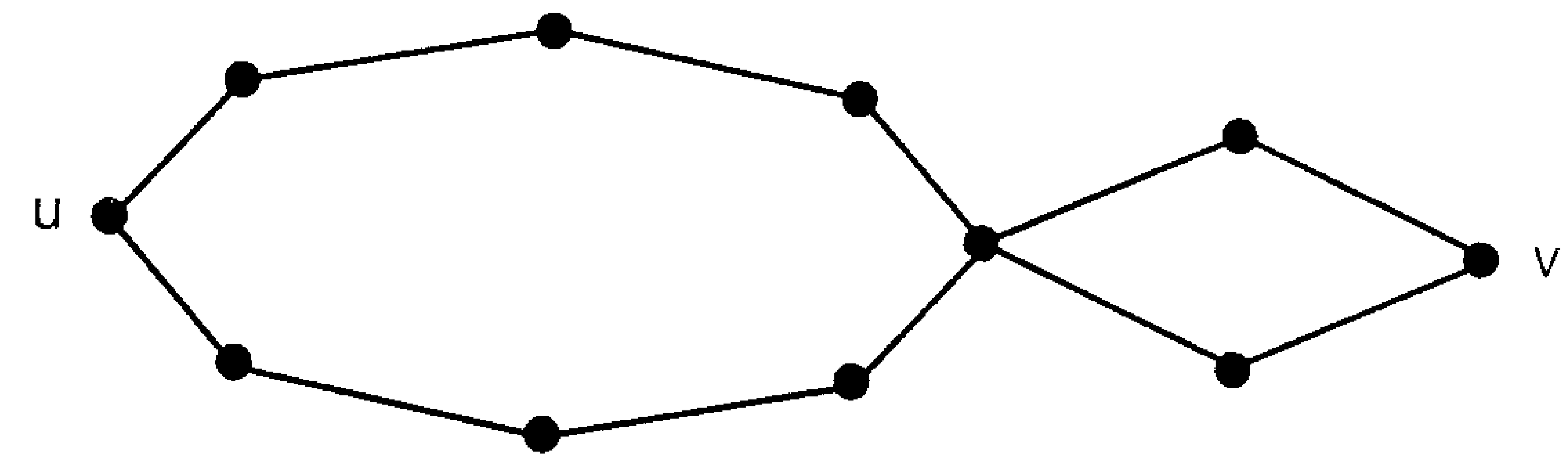

Рис. 0.31

Поскольку граф, описывающий парк, является деревом, то любые два перекрестка или тупика парка будут соединены одним нужным маршрутом.

46. Волейбольную сетку естественным образом можно представить как связный граф, который имеет $11 \times 6 = 66$ вершин и $10 \times 6 + 11 \times 5 = 115$ ребер. Легко видеть, что удаление любого ребра связного графа, принадлежащего какому-нибудь циклу, не делает граф несвязным. Поэтому нам нужно удалять ребра из циклов до тех пор, пока циклы будут, т.е. пока не получится дерево. Так как в дереве любые две вершины соединены единственной цепью (см. предыдущую задачу), то удаление любого ребра дерева делает граф несвязным. Поэтому удалять ребра дерева нельзя. Дерево с 66 вершинами имеет 65 ребер (см. задачу 31). Поэтому из графа можно удалить $(115 - 65) = 50$ ребер. Такое наибольшее число разрезов можно сделать в сетке так, чтобы она не распалась.

47. Пусть число авиакомпаний равно N. Построим N графов авиалиний $G_1, G_2, \ldots, G_N$, описывающих авиалинии компаний. Так как по условию задачи каждый граф G_i должен быть связным, то число ребер в нем не меньше 99 (см. задачи 44, 46). Все графы G_i в сумме имеют не больше ребер, чем полный граф K_{100}, т.е.

$$99N \le \frac{100 \cdot 99}{2}$$

Следовательно, число авиалиний не превосходит 50.

Докажем по индукции, что n авиалиний могут связать нужным образом $2n$ городов.

При $n = 1$ (одна компания и два города) это очевидно.

Предположим, что доказываемое утверждение верно для n авиакомпаний, и докажем его для $n + 1$.

Рассмотрим $2n + 2$ города. Пусть A и B — два из них. Остальные города произвольным образом разобьем на два подмножества:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$. По индуктивному предположению n компаний соединяют нужным образом города $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_n$. Можно организовать еще одну авиакомпанию, отдав ей незанятые линии между A и B, а также между A и B_i, B и A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Утверждение доказано.

Следовательно, наибольшее число авиалиний равно 50.

48. Рассмотрим произвольную раскраску шахматной доски десятью красками, при которой клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Построим граф G, вершины которого соответствуют краскам и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда две краски являются соседними при этой раскраске.

Докажем, что граф G является связным. Пусть v_i и v_j — две вершины графа, соответствующие цветам i и j. Найдем на шахматной доске две клетки этих цветов. Они соединены путем L, проходящим через стороны клеток и не проходящим через их вершины. Поскольку при переходе из клетки в клетку в пути L меняется цвет клетки, то путь L в графе G будет соответствовать некоторому маршруту, соединяющему вершины v_i и v_j.

Наименьшее число ребер в связном графе будет в том случае, когда граф является деревом (см. задачу 46). Поэтому минимально возможное число ребер в графе G — 9 (см. задачу 44), и меньше, чем 9 пар соседних красок, быть не может.

Зададим раскраску, в которой ровно 9 пар. Окрасим в цвет 1 клетки, расположенные в шахматном порядке, т.е. через одну, а остальные клетки окрасим, как угодно, лишь бы были использованы все цвета. Тогда цвет 1 будет соседним с каждым из остальных 9 цветов, а из этих 9 цветов никакая пара не будет соседней.

49. Построим граф G, в котором вершины обозначают острова и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие острова соединены теплоходным маршрутом. Из условия задачи следует, что граф G — связный.

Длиной цепи называется число ребер, входящих в цепь.

Расстоянием между двумя вершинами графа называется наименьшая из длин цепей, соединяющих эти вершины. Расстояние между вершинами u и v обозначается $d(u, v)$.

Если расстояние между вершинами u и v равно d, то с острова, обозначенного вершиной u, на остров, обозначенный вершиной v, можно добраться за d дней.

Пусть в первый день операции Крутой Уокер находился на острове U, которому соответствует вершина u, а преступник — на острове V, которому соответствует вершина v, и $L = (u, u_1, \ldots, v)$ — кратчайшая цепь, соединяющая эти вершины. Если Уокер переедет на остров U_1, соответствующий вершине u_1, то, куда бы не переехал преступник, расстояние между ним и Уокером или останется прежним, или (если повезет Уокеру) уменьшится (см. рис. 0.32).

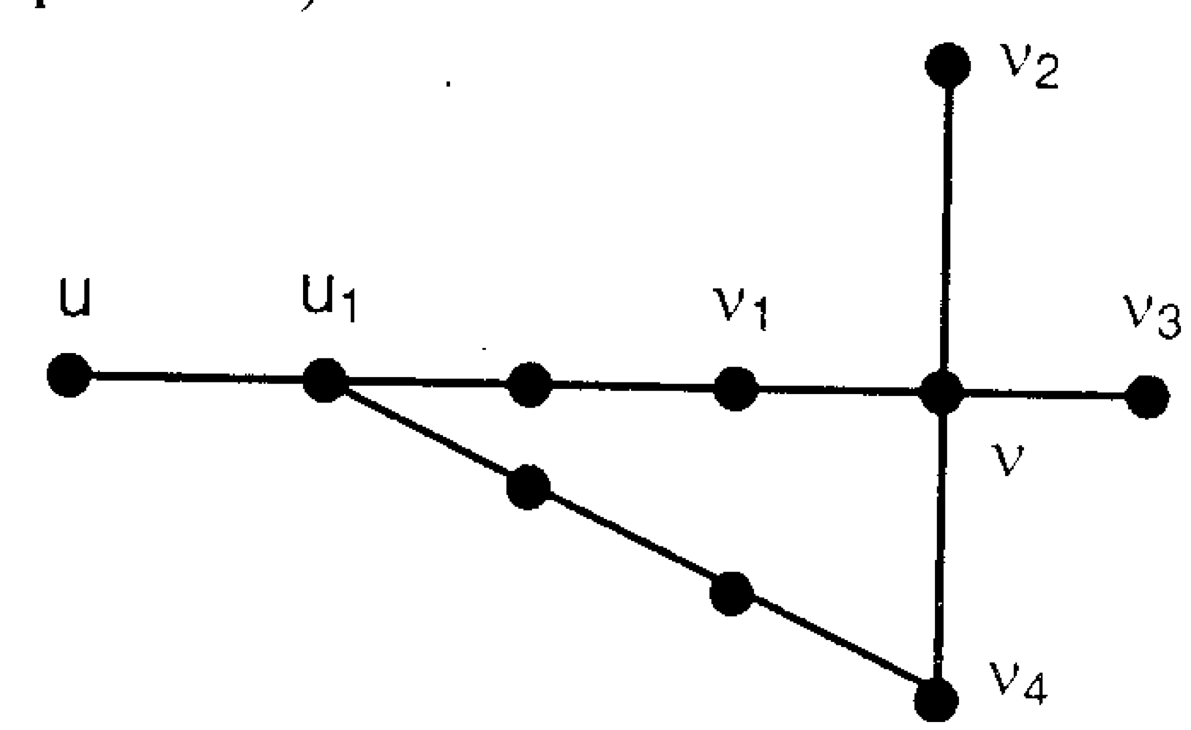

Рис. 0.32

Каждый понедельник и каждого 13 числа расстояние будет уменьшатся, так как преступник в эти дни не совершает переездов. Это означает, что, в конце концов, Уокер и преступник окажутся на одном острове.

50. Построим граф G знакомств жителей поселка. Из условия задачи следует, что граф G будет связным.

Для решения задачи достаточно доказать, что в графе G существует такое множество V из 90 вершин, что расстояние от любой вершины, не принадлежащей V, до некоторой вершины из V не превосходит десяти.

Предположим сначала, что граф G — дерево. Пусть $L = (u, v_1, v_2, \ldots, v_k, w)$ — цепь графа G, содержащая наибольшее число ребер. Если $k \le 19$, то расстояние от каждой вершины графа G до вершины v_{10} будет не больше 10. Это означает, что новость, сообщенная жителю, обозначенному вершиной v_{10}, через 10 дней будет известна всем жителям поселка.

Если $k \ge 20$, то удалим из G вершины $u, v_1, \ldots, v_{10}$ и все вершины, соединенные с одной из этих вершин цепями, не содержащими вершины v_{11}. Получившийся после удаления вершин граф является деревом. Повторяя описанную процедуру 89 раз (каждый раз выбирая свою вершину v_{11}), мы на каком-то шаге или исчерпаем все вершины графа, или получим дерево T, в котором не более, чем $(10000 - 89 \times 11) = 21$ вершин. В дереве T выберем вершину способом, описанным ранее.

Множество людей, соответствующих вершинам v_{10}, и будет нужным множеством жителей.

Если граф G не является деревом, то нужно превратить его в дерево, удаляя некоторые ребра, и повторить рассуждения.

51. Построим два графа авиалиний G и $\overline{G}$, описывающих авиалинии, соответственно, в Обычной стране и в Зазеркалье. Из условий задачи вытекает, что граф G является дополнительным к графу G.

Наибольшее из расстояний между вершинами графа G называется **диаметром** графа и обозначается $d(G)$.

Из условия задачи следует, что для перехода из вершины a, соответствующей городу A, в вершину b, соответствующую городу B, нужно пройти не менее трех ребер. Поэтому $d(G) \geq 3$.

Докажем, что $d(\overline{G}) \leq 3$. В графе G вершины a и b соединены ребром. Рассмотрим две произвольные вершины c и f графа $\overline{G}$, отличные от вершин a и b. В этом графе каждая из вершин c и f соединена хотя бы одним ребром с одной из вершин a или b, так как в противном случае в графе G была бы цепь из двух ребер, соединяющих a и b (см. рис. 0.33). Отсюда следовало, что $d(c,f) \leq 3$ и $d(G)) \leq 3$.

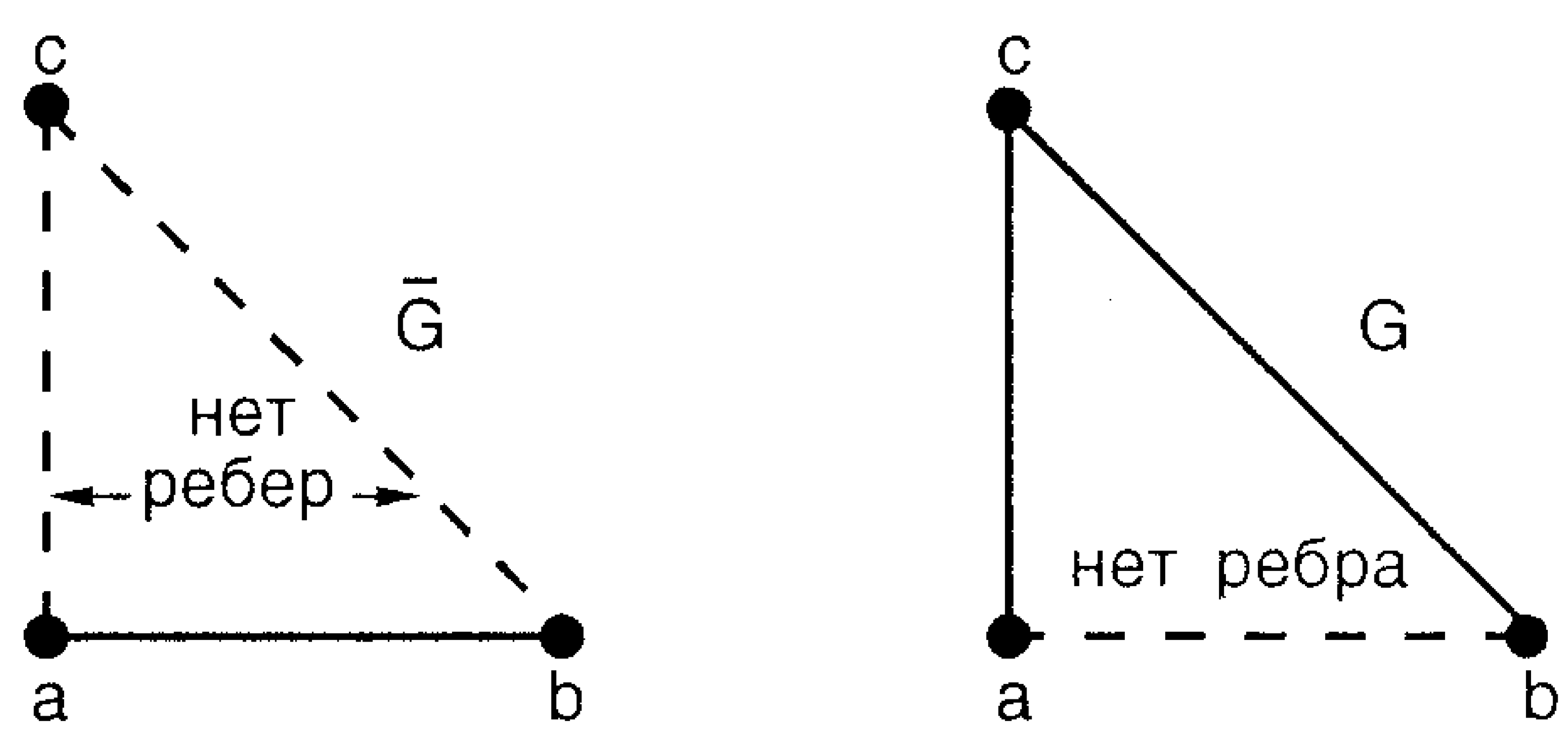

Рис. 0.33.

Аналогично рассматривается случай, когда одна из вершин c и f совпадает с a или b.

Из сказанного следует, что расстояние между двумя произвольными вершинами графа $\overline{G}$ не превосходит трех. Поэтому $d(\overline{G}) \leq 3$ и из любого города Зазеркалья можно переехать в любой другой, сделав не более двух пересадок.

52. Стрельбу Андрея можно описать деревом , которое называется ***корневым деревом*** (см. рис. 0.34).

В этом дереве все вершины, кроме верхней, соответствуют выстрелам. Если Андрей попал, то степень соответствующей вершины равна трем, если промазал — единице. Степень верхней вершины равна пяти. Дерево имеет 26 вершин и 25 ребер (см. соотношение между

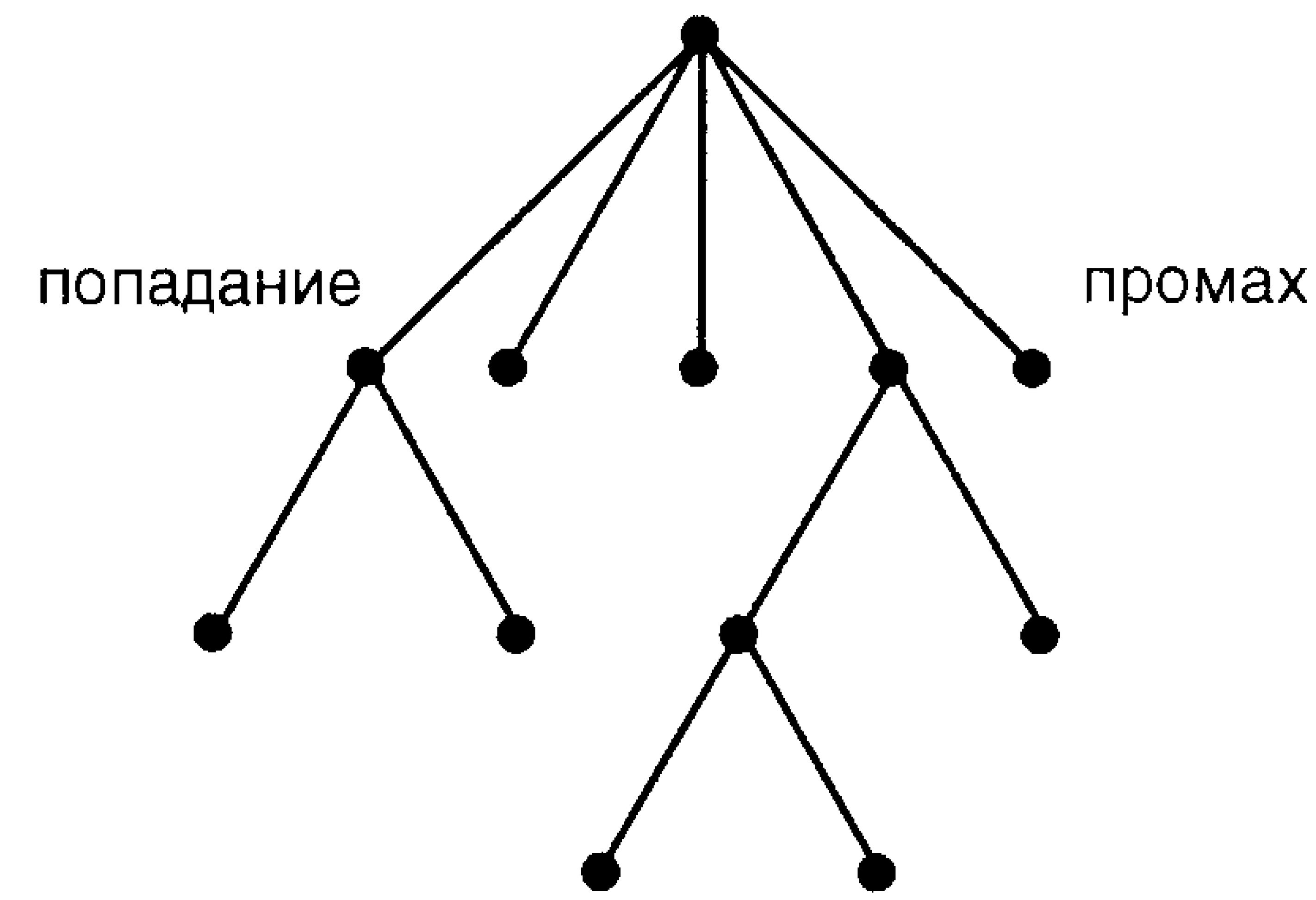

Рис. 0.34

числом вершин и ребер дерева, полученное в задаче 44). Пусть n — число попаданий Андрея. Тогда граф содержит n вершин степени 3, $(25 - n)$ вершин степени 1 и одну вершину степени 5. Воспользуемся леммой о рукопожатиях

$$3 \times n + 1 \times (25 - n) + 5 = 2 \times 25.$$

Решив это уравнение, получим $n = 10$.

Андрей попал 10 раз.

Второе решение. Андрей сделал 20 дополнительных выстрелов. Поскольку за каждое попадание он дважды стрелял дополнительно, то он попал 10 раз.

53. Спортивное соревнование, проводимое по олимпийской системе, можно описать с помощью корневого дерева, в котором вершины степени 1 будут соответствовать участникам, а вершины других степеней — встречам. Один из возможных вариантов корневого дерева, описывающего наш турнир, приведен на рис 0.35.

Победителю турнира нужно провести не более, чем 4 встречи. это значит, что турнир пройдет за четыре часа.

Покажем, что меньшим числом встреч обойтись нельзя. Предположим противное: каждый участник турнира провел не более трех встреч. Тогда в финале будут бороться 2 человека, во второй встрече — не более четырех, а в первой — не более восьми. Полученное число меньше числа борцов, участвующих в соревновании.

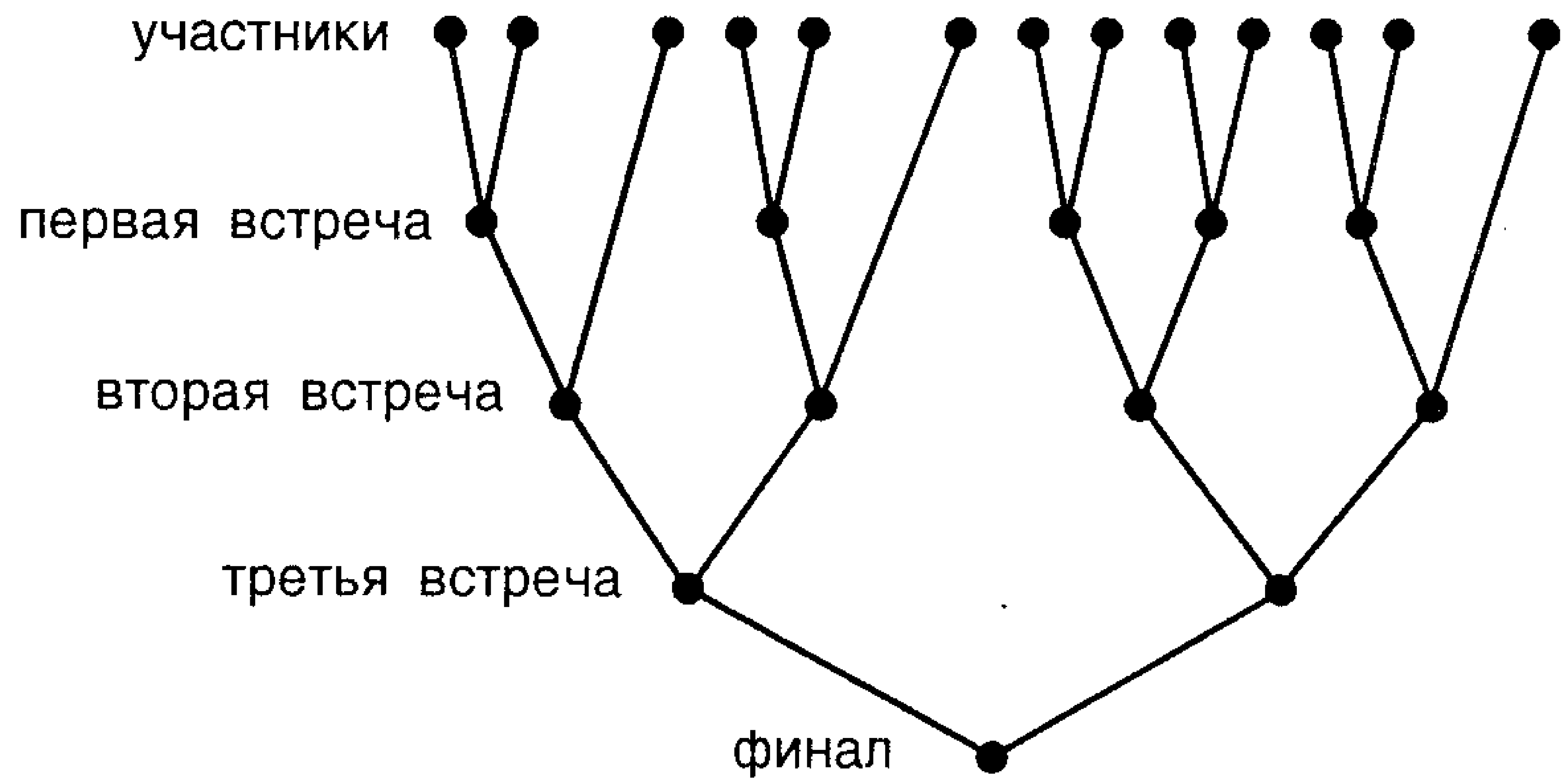

Рис. 0.35

54. Процесс деления бактерий можно изобразить корневым деревом.

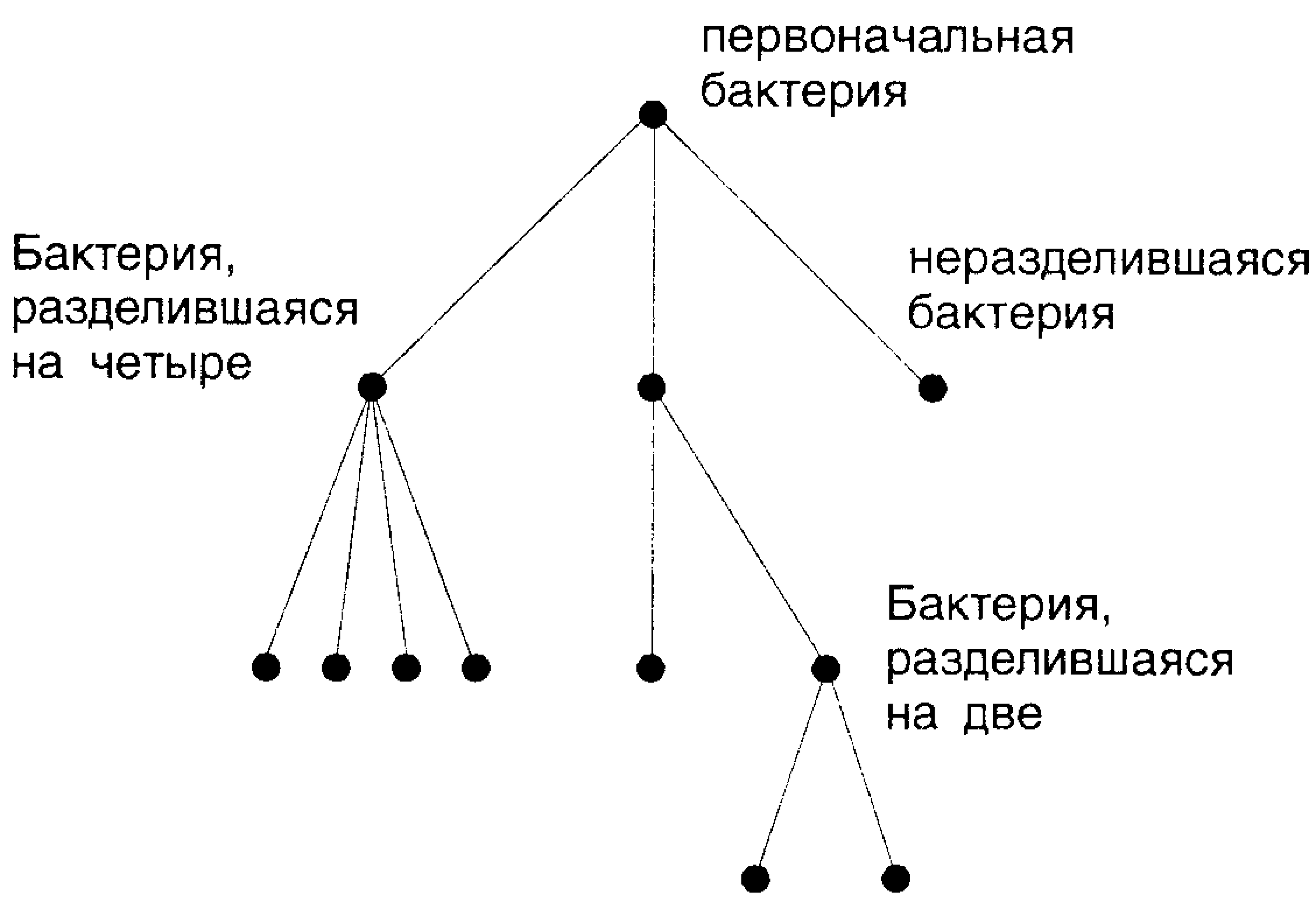

Рис. 0.36

Любая бактерия, разделившаяся на 4 бактерии, будет соответствовать вершине дерева степени 5, бактерия, разделившаяся на две, — вершине степени 3. Кроме этих вершин в дереве еще есть вершина степени 3, соответствующая начальной бактерии, и 102 вершин степени 1, соответствующих бактериям, которые не делились.

Пусть n — число бактерий, которые разделились на 4, тогда $6n$ — число бактерий, которые разделились на две. Дерево, описывающее деление бактерий будет иметь $7n+103$ вершину и $7n+102$ ребер (см. соотношение между числом вершин и ребер дерева, выведенное в задаче 44).

Воспользовавшись леммой о рукопожатиях, имеем

$$5 \times n + 3 \times 6n + 3 + 1 \times 102 = 2(7n + 102).$$

Решив это уравнение, получим, что $n = 11$.

Это означает, что 11 раз бактерии делились на четыре и 66 раз — на две.

55. Процесс деления бактерий опишем корневым деревом, как в предыдущей задаче.

Условимся называть дочками бактерии те две бактерии, на которые она разделилась. Обозначим через $Б_1, Б_2, Б_3, \ldots$ такую последовательность бактерий:

$Б_1$ — исходная бактерия, число ее потомков $П_1 = 1000$;

$Б_2$ — та из дочек $Б_1$, у которой число потомков $П_2$ не меньше, чем у другой дочки $Б_1$:

$Б_3$ — та из дочек $Б_2$, у которой число потомков $П_3$ не меньше, чем у другой дочки $Б_2$ и т.д.

В силу выбора нами дочерних бактерий следует, что $П_n \le 2П_{n+1}$.

Последовательность натуральных чисел $П_1, П_2, П_3, \ldots$ монотонно убывает. Первый член этой последовательности равен 1000, последний 1. Значит, найдется такой номер k, когда число $П_k$ в первый раз станет меньше 200, т.е. когда выполняются неравенства $П_{k-1} \ge 200$ и $П_k < 200$.

Учитывая, что $П_k \ge \frac{1}{2} П_{k-1}$, получим $П_k \ge 100$, т.е. число потомков бактерии $Б_k$ не меньше 100 и не больше 199.

56. Графом молекулы называется граф вершинами которого являются атомы, составляющие молекулу, а ребрами — соответствующие валентные связи между атомами. Докажем, что графом G молекулы насыщенного углеводорода является дерево. Предположим, что в графе G есть цикл C. Поскольку валентности атомов водорода равны 1, то цикл C может состоять только из атомов углеводорода. Разорвав некоторую связь между атомами углеводорода в цикле и соединив эти атомы с атомами водорода, мы получим соединение, в котором атомов водорода будет больше, чем в первоначальном соединении (см. рис. 0.37). Это противоречит тому, что граф G был графом молекулы насыщенного углеводорода.

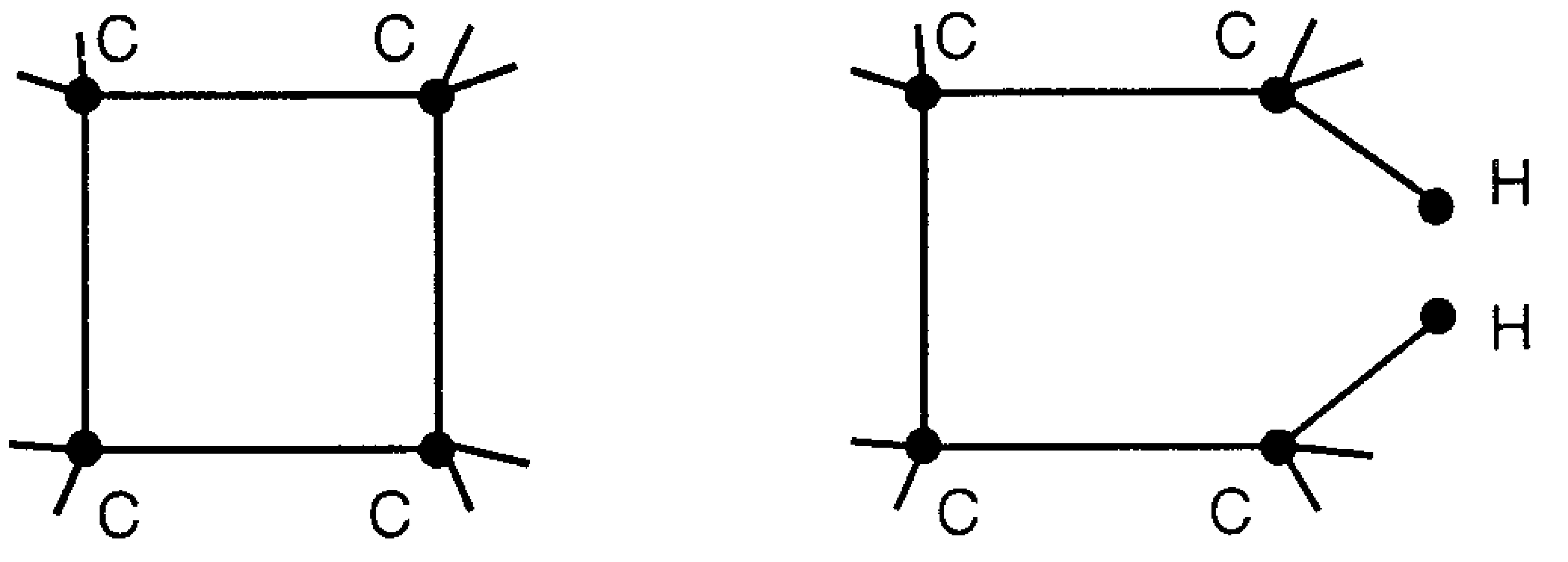

Рис. 0.37

Пусть молекула насыщенного углеводорода содержит n атомов углерода и m атомов водорода. Граф молекулы, являющийся деревом, имеет $n + m$ вершин и $n + m - 1$ ребер (см. соотношение между числом вершин и ребер дерева, выведенное в задаче 44). Воспользуемся леммой о рукопожатиях

$$4\times n + 1\times m = 2(n + m - 1).$$

Отсюда получаем: $m = 2n + 2$.

Это значит, что формула насыщенного углеводорода, имеющего n атомов углерода, будет C_nH_{2n+2}.

Графы молекул насыщенных углеводородов при n = 1, 2, 3 изображены на рисунке 0.38

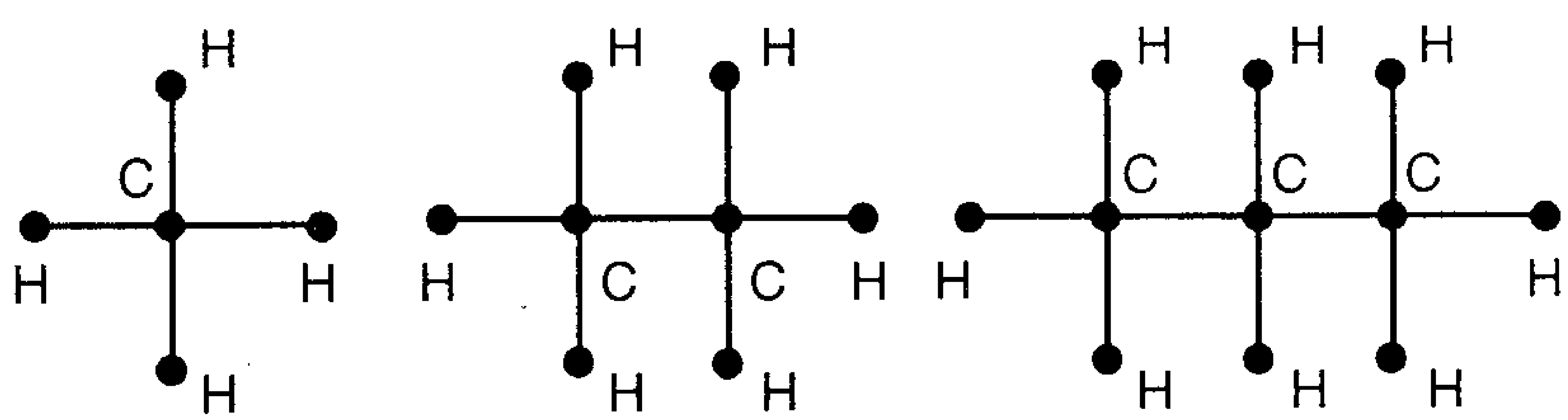

Рис. 0.38

57. Построим граф G авиалиний. Вершины графа будут соответствовать городам, и две вершины графа будут соединены ребром, окрашенным в цвет i тогда и только тогда, когда соответствующие города соединены авиалинией i-й компании. Из условий задачи следует, что каждые две вершины графа будут соединены хотя бы одним ребром. (Возможно, что некоторые пары вершин будут соединены несколькими ребрами.) Поэтому всех ребер будет не меньше, чем ребер в полном графе K_{40}, т.е. (40×39):2=780.

По условию задачи мы должны показать, что в каком-то из подграфов T, образованном ребрами одного цвета, будет цикл. Предположим, что ни в одном из одноцветных графов нет циклов. Это значит, что каждый одноцветный граф T будет деревом (если он связный) или объединением деревьев. Поэтому в любом графе T не больше, чем 39 ребер, а в объединении всех графов T не больше, чем 10×39=390 ребер. Это меньше, чем определенное ранее число ребер. Следовательно, хотя бы в одном из одноцветных графов обязательно должен быть цикл, который и определит требуемый маршрут.

59. Подграф графа G, содержащий все вершины графа, называется **остовным**. Если остовный подграф является деревом, то он называется **остовным деревом**. Очевидно, что наша задача заключается в построении остовного дерева, имеющего минимальную суммарную длину ребер (***минимального остовного дерева***).

Длину ребра е графа G будем обозначать $l(e)$, а суммарную длину ребер дерева T — $L(T)$.

Рассмотрим следующий алгоритм построения остовного дерева.

На первом шаге выберем ребро минимальной длины. На каждом последующем шаге будем выбирать из оставшихся ребро минимальной длины, не образующее цикла с ранее выбранными ребрами. Процесс оканчивается после построения остовного дерева.

Этот алгоритм носит название **алгоритма Краскала**. Докажем, что он действительно строит минимальное остовное дерево. Доказательство проведем от противного.

Пусть T — дерево построенное с помощью алгоритма Краскала, а S — минимальное остовное дерево, и $L(S)<L(T)$. Поскольку в графе может быть несколько минимальных остовных деревьев, то в качестве S выберем из них дерево, имеющее наибольшее число общих ребер с деревом T. Занумеруем ребра дерева T в том порядке, в котором они выбирались с помощью алгоритма Краскала: e_1, e_2, ..., e_i, ... Пусть e_i =(a, b) — ребро с наименьшим номером в этом списке, не принадлежащее дереву S. В дереве S между вершинами a и b существует единственная цепь (см. задачу 45). Добавив ребро e_i к этой цепи, получим цикл C в новом графе S_1. Поскольку T — дерево, то какое-то ребро e_p цикла C не должно принад-

лежать T (см. рис. 0.39, на котором дерево T изображено сплошной линией, а дерево S — пунктирной).

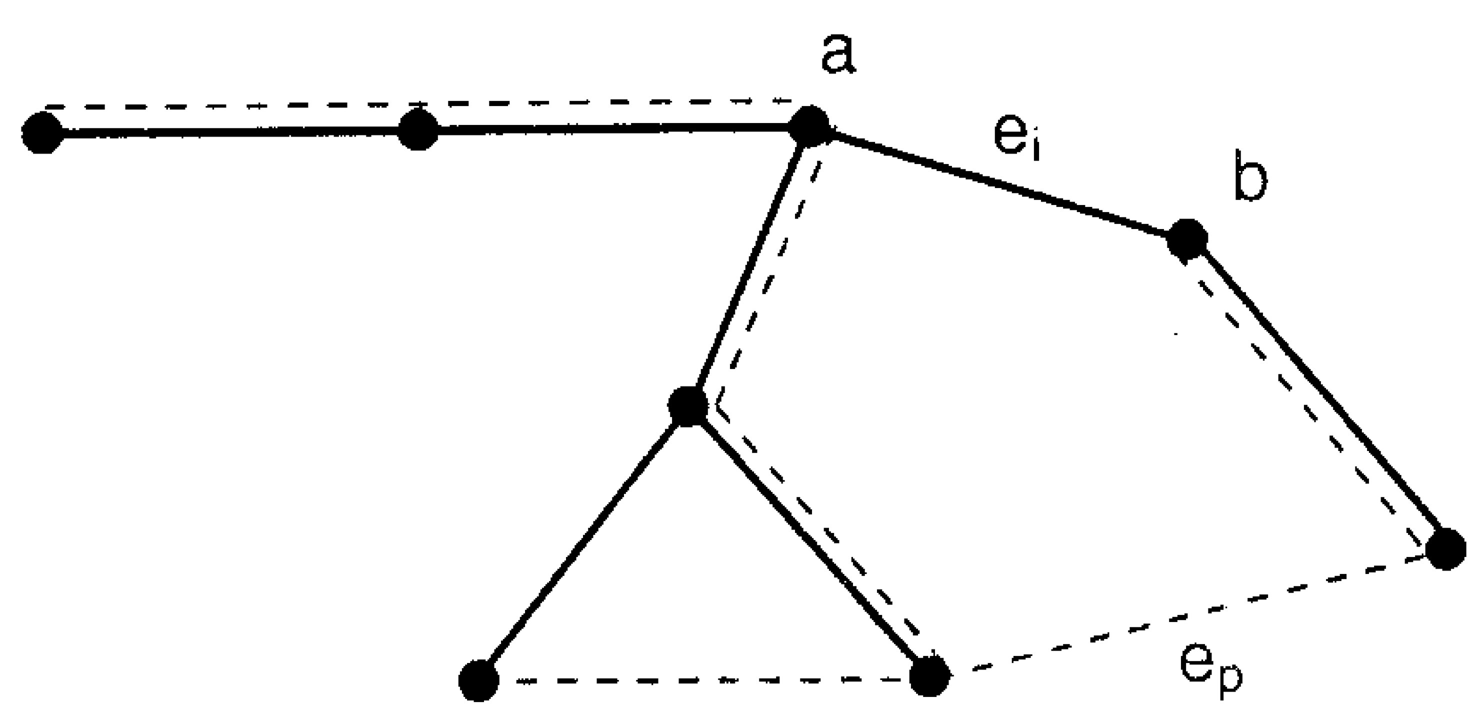

Рис. 0.39

Сравним длины ребер e_i и e_p. Ребро e_p принадлежит дереву S, следовательно оно не образует циклов с ребрами e_1, e_2, ..., e_{i-1}, также принадлежащими дереву S. Поэтому, если бы его длина была бы меньше, чем длина ребра e_i, то на i-м шаге алгоритма было бы выбрано не ребро e_i, а ребро e_p. Следовательно, $l(e_i) \le l(e_p)$.

В графе S_1 удалим ребро e_p. Этим самым мы разрушаем единственный цикл графа S_1 и получаем дерево S_2. Деревья S и S_2 отличаются друг от друга только ребрами e_i и e_p. Из соотношения длин этих ребер следует что $L(S_2) \le L(S)$. Но дерево S было минимальным остовным деревом, поэтому $L(S_2) = L(S)$, и S_2 — также минимальное остовное дерево. Мы получили противоречие с выбором дерева S, так как дерево S_2 имеет больше общих ребер с деревом T, чем дерево S. Доказано, что алгоритм Краскала в самом деле строит минимальное дерево.

Теперь с помощью алгоритма построим минимальное дерево для нашего графа. На первом шаге выбираем одно из ребер (1,4) или (3,6), на втором шаге — оставшееся из них. Третьим выбирается ребро (2,3), четвертым — (2,5). Теперь ребром минимальной длины из оставшихся является ребро (2,6), но оно образует цикл с ранее выбранными ребрами и поэтому не попадает в дерево. Затем в минимальное дерево выбираются ребра (1,2) и (5,7). На рисунке 0.40 ребра минимального дерева выделены. Вдоль дорог, соответствующим выделенным ребрам, нужно проводить телефонные линии.

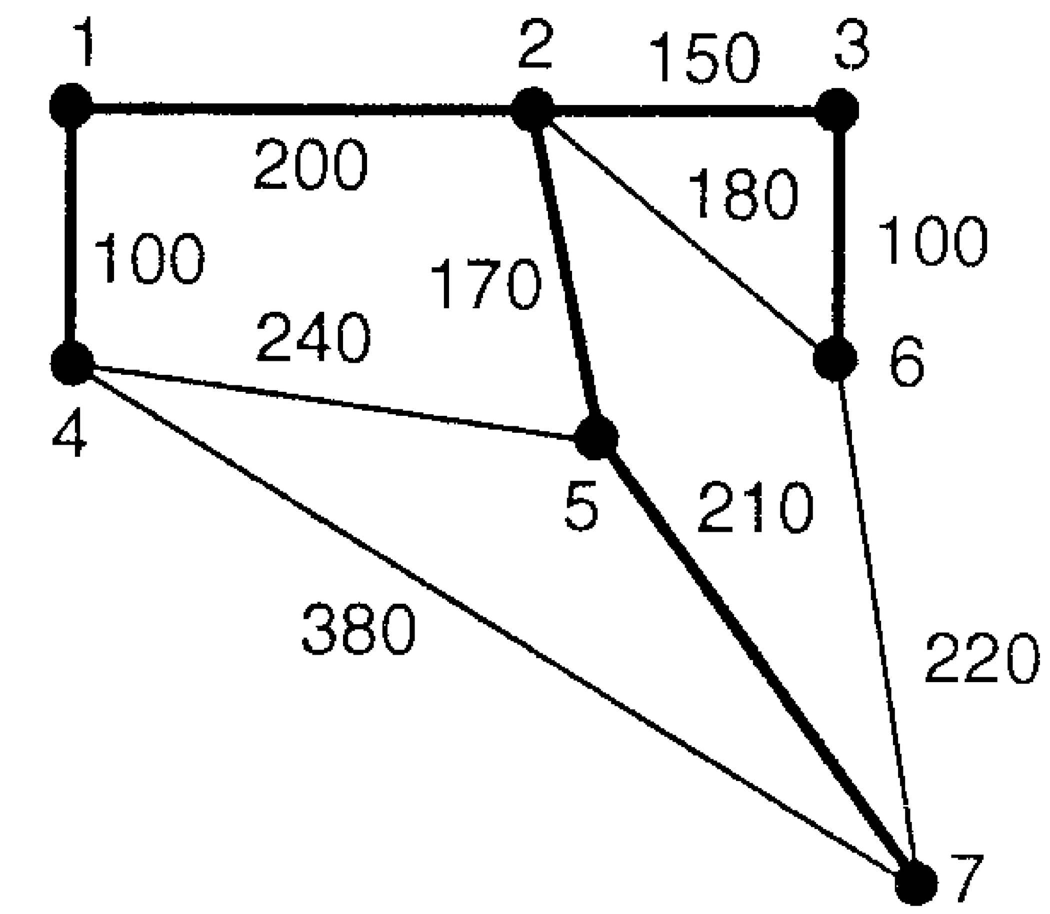

Рис. 0.40

59. Схему линий метро можно считать связным графом G, в котором станции являются вершинами, а линии ребрами. Для решения задачи нужно доказать, что из графа G можно удалить некоторую вершину, что получившийся граф останется связным. Рассмотрим любое остовное дерево T графа G. Любая висячая вершина v этого дерева является нужной вершиной. Действительно, удаляя эту вершину из дерева вместе с выходящими из нее ребрами, мы удаляем только одно ребро из T. Получившийся из T граф также будет деревом, которое связывает все оставшиеся вершины графа G. Вершина v соответствует станции, которую можно закрыть.

60. Город естественным образом можно представить в виде графа G, вершины которого соответствуют перекресткам города, а ребра — отрезкам улиц, соединяющим перекрестки. Граф G имеет $(n+1)^2$ вершин.

Заасфальтированные улицы будут соответствовать некоторому подграфу H графа G.

Поскольку любые два перекрестка должны быть связаны заасфальтированными улицами, то H — связный остовный подграф графа G. По условию задачи этот подграф должен иметь, как можно меньше ребер. Следовательно подграф Н должен быть деревом (см. задачу 46). Из соотношения числа вершин и ребер в дереве следует, что он имеет $((n+1)^2-1)$ ребер. Поэтому наименьшая возможная длина асфальтового покрытия $100((n+1)^2-1)$ метров.

61. Построим граф G, в котором каждому участку суши поставим в соответствие вершину и соединим две вершины ребром тогда и только тогда, когда соответствующие участки суши будут соединены мостом.

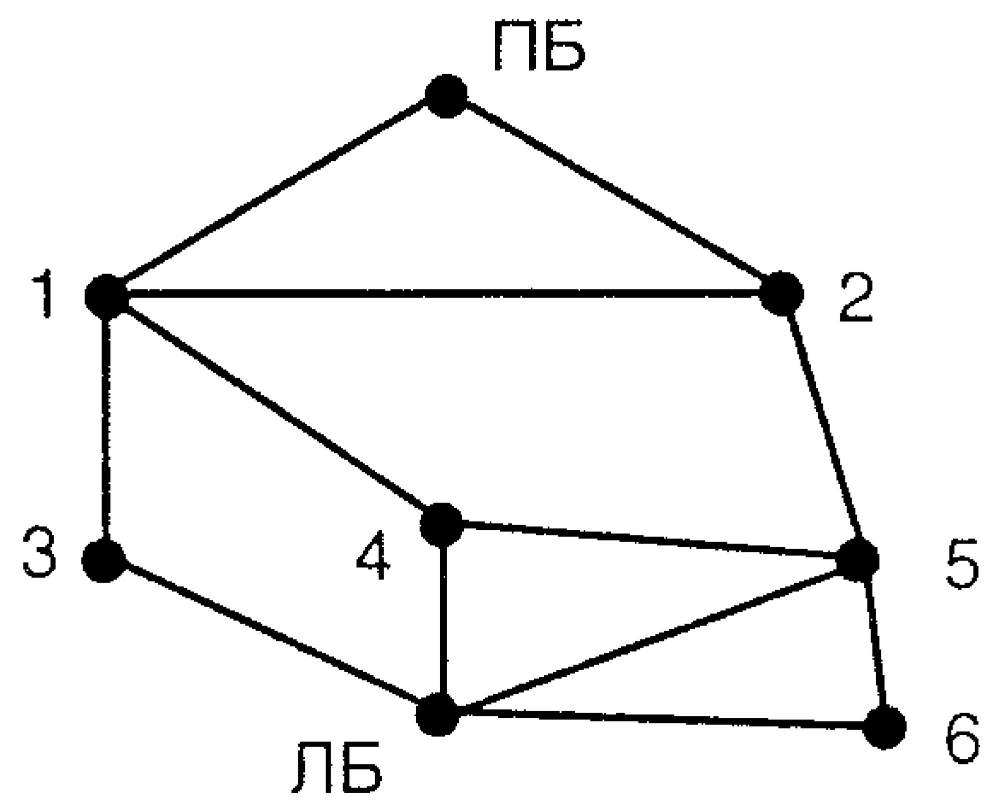

Рис. 0.41

Связный граф, в котором существует цикл, проходящий через все ребра графа, называется *эйлеровым*. Сам цикл тоже называется *эйлеровым*. (Напомним, что в цикле каждое ребро графа проходится не более раза.)

Задача заключается в определении, будет ли граф G эйлеровым. Найдем необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла .

➸ ***Теорема. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная.***

Доказательство. Необходимость. Пусть G — эйлеров граф. Эйлеров цикл этого графа, проходя через каждую его вершину, входит в нее по одному ребру, а выходит по другому. Это означает, что каждое прохождение вершины по циклу вносит слагаемое 2 в ее степень. Поскольку цикл содержит все ребра графа, то степени всех вершин будут четными.

Достаточность. Предположим, что степени всех вершин связного графа G четные. Начнем цепь G_1 из произвольной вершины v_1 и будем продлевать ее, выбирая каждый раз новое ребро. Так как степени вершин четные, то, попав в некоторую вершину, мы всегда будем иметь в распоряжении еще не пройденное ребро. Таким образом, построение цепи P_1 обязательно закончится в вершине v_1, и P_1 будет циклом. Если P_1 содержит все ребра графа G, то построен эйлеров цикл. В противном случае, удалив из G ребра P_1, получим граф G_2. Так как степени всех вершин графов G и P_1 были четными, то и G_2 будет обладать этим свойством. В силу связности G графы P_1 и G_2 должны иметь хотя бы одну общую вершину v_2. Теперь, начиная из v_2, построим в G цикл P_2 подобно тому, как построили P_1.

Объединим циклы P_1 и P_2 следующим образом: пройдем часть P_1 от вершины v_1 до вершины v_2, затем пройдем цикл P_2, затем — оставшуюся часть P_1 от v_2 до v_1 (см. рис. 0.42).

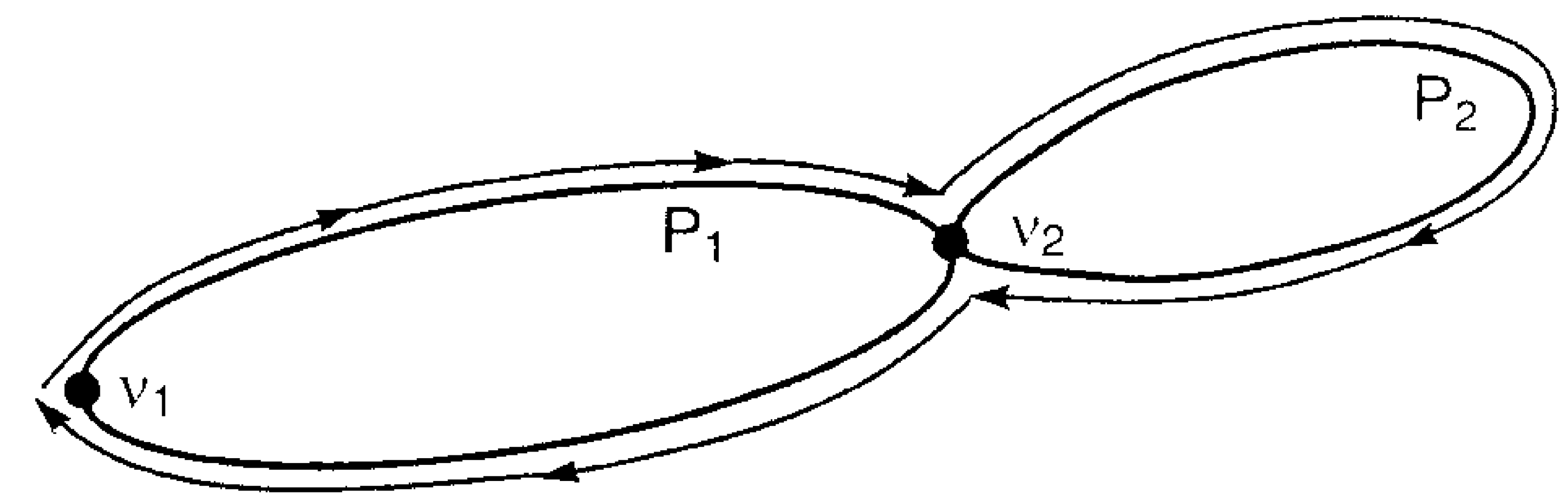

Рис. 0.42

Если объединенный цикл не эйлеров, то, проделав аналогичные построения, получим еще больший цикл. Поскольку степени вершин во всех графах, составленных из ребер, не попавших в строящийся цикл, четные, и число ребер в этих графах убывает, то процесс закончится построением эйлерова цикла. Теорема доказана.

Эта теорема носит имя великого немецкого математика Леонарда Эйлера и доказана им в 1736 году.

Рассмотрим построенный граф G. В этом графе вершины 2 и 4 имеют нечетную степень, следовательно, граф G не является эйлеровым. Это означает, что желаемую прогулку по мостикам совершить нельзя.

Если же соединить ребром вершины 2 и 4, то степень всех вершин нового графа будет четной, а сам граф будет эйлеровым. Поэтому после постройки моста, соединяющего острова 2 и 4, можно найти маршрут прогулки по мостикам, начинающийся и заканчивающийся в одном месте, при котором каждый мостик будет пройден ровно один раз.

62. Для того, чтобы отыскать нужный маршрут, необходимо найти эйлеров цикл в следующем графе G, описывающем острова и мостики парка.

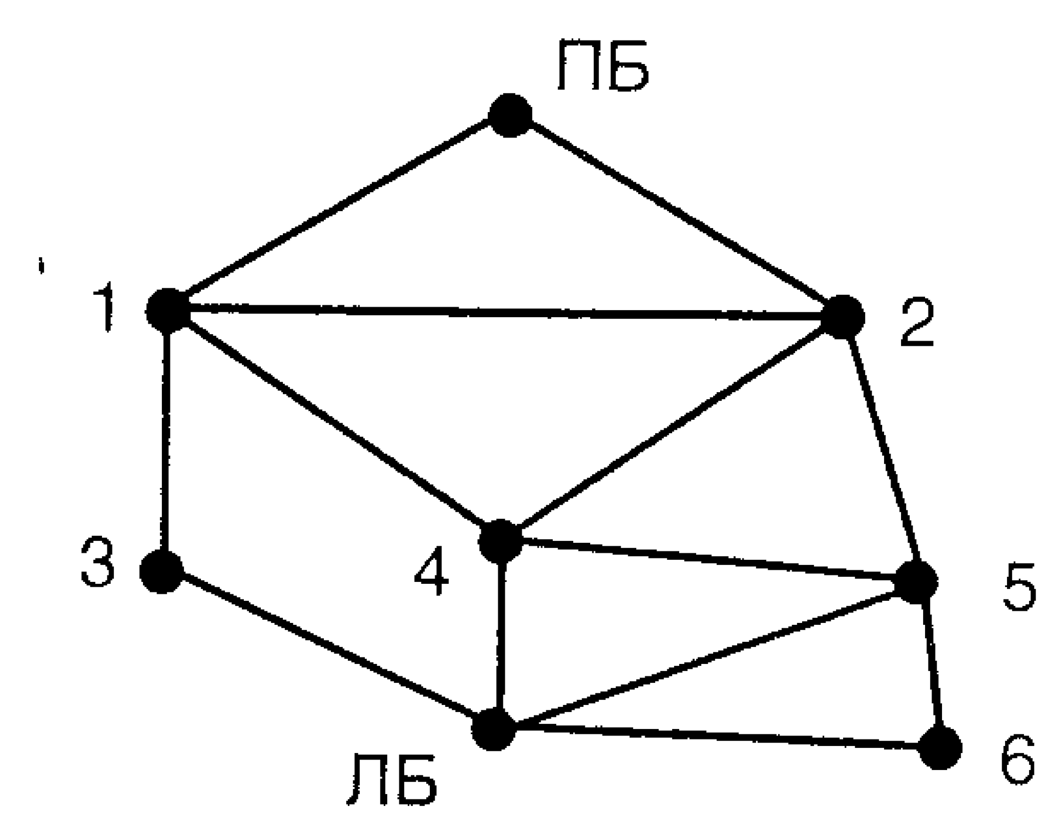

Рис. 0.43

Для поиска цикла воспользуемся способом доказательства теоремы в предыдущей задаче. Поиск эйлерова цикла начнем в вершине ПБ. Выйдя из этой вершины, для продолжения цепи будем каждый раз выбирать еще не использованное ребро. Предположим, что мы получили цикл P_1 = (ПБ,1,4,ЛБ,5,2,ПБ).

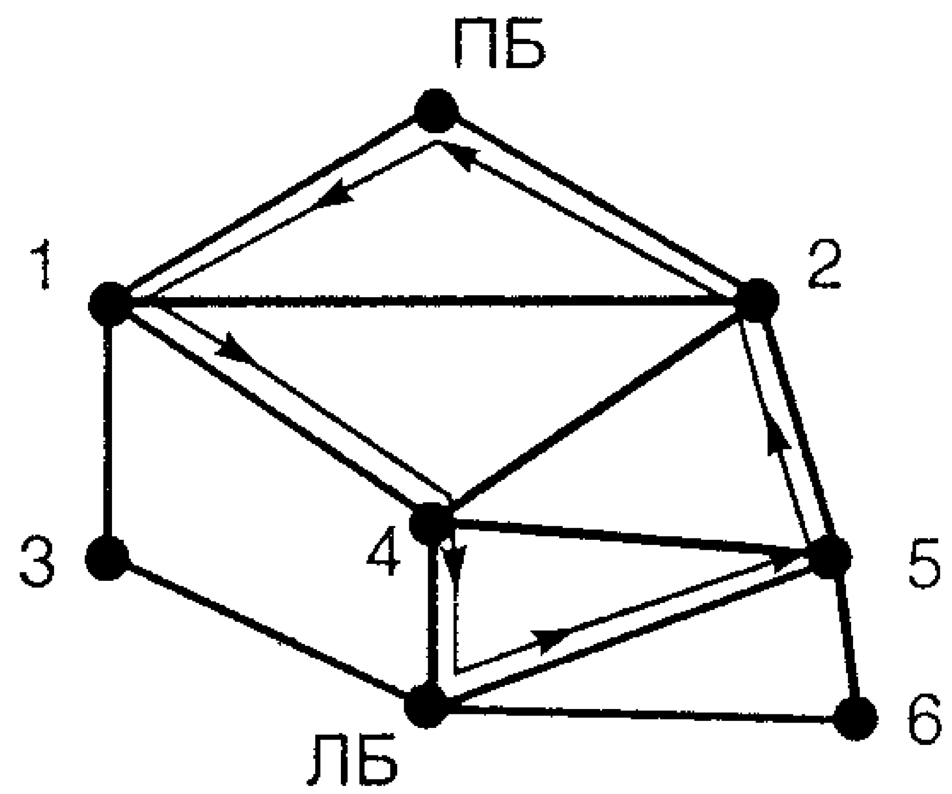

Рис. 0.44

Удалим ребра цикла P_1 из графа. В оставшемся графе построим цикл P_2 = (1, 3, ЛБ, 6, 5, 4, 1). Объединим циклы P_1 и P_2 в цикл P = (ПБ, 1, 3, ЛБ, 6, 5, 4, 2, 1, 4, ЛБ, 5, 2, ПБ) по правилу, предложенному в предыдущей задаче (в качестве вершины v_2 используется вершина 1).

Построенному циклу будет соответствовать требуемый маршрут прогулки (см. рис. 0.45).

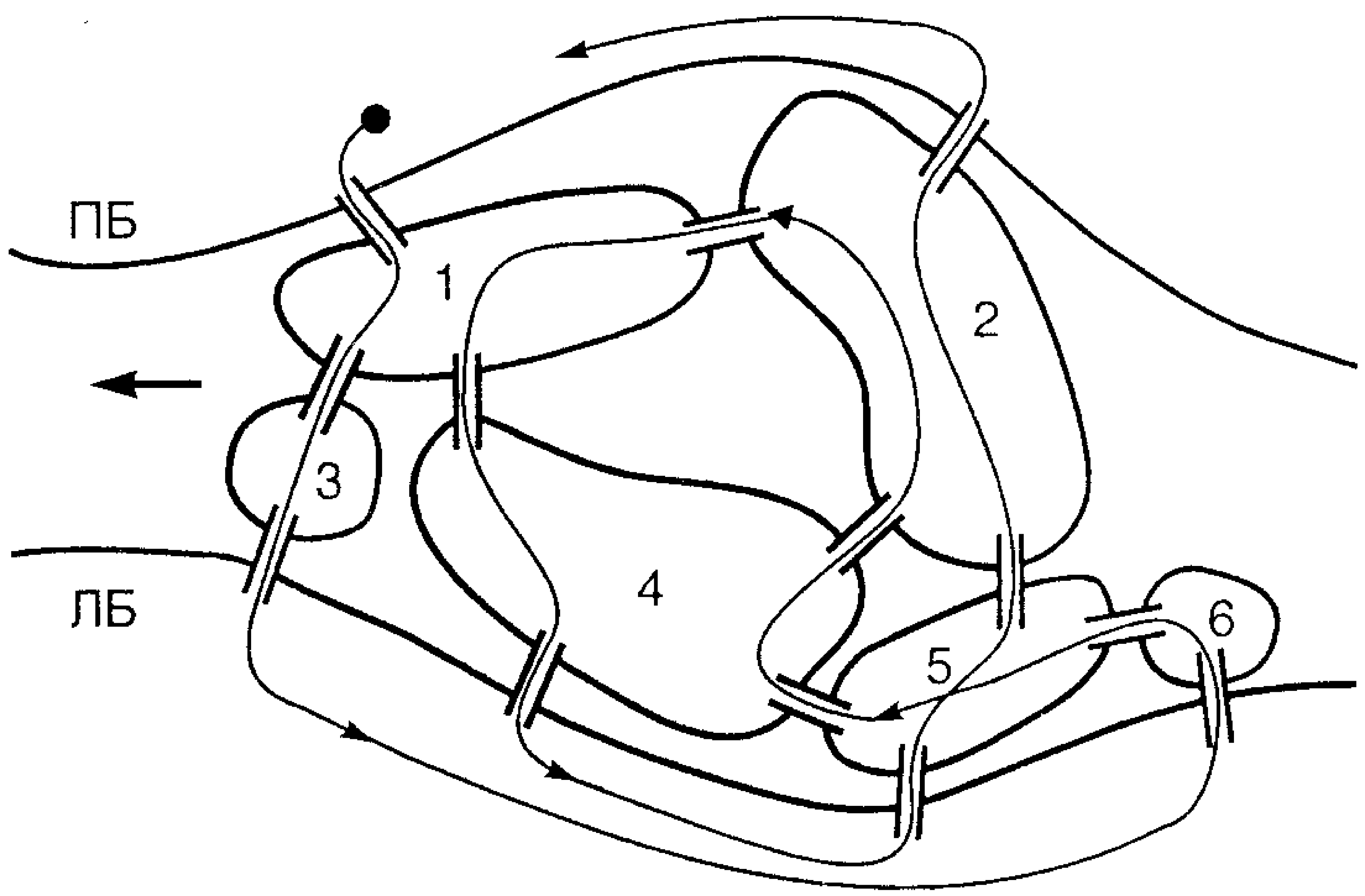

Рис 0.45

63. Превратим схему коридоров в мультиграф, заменив каждый коридор двумя ребрами (см. рис. 0.46).

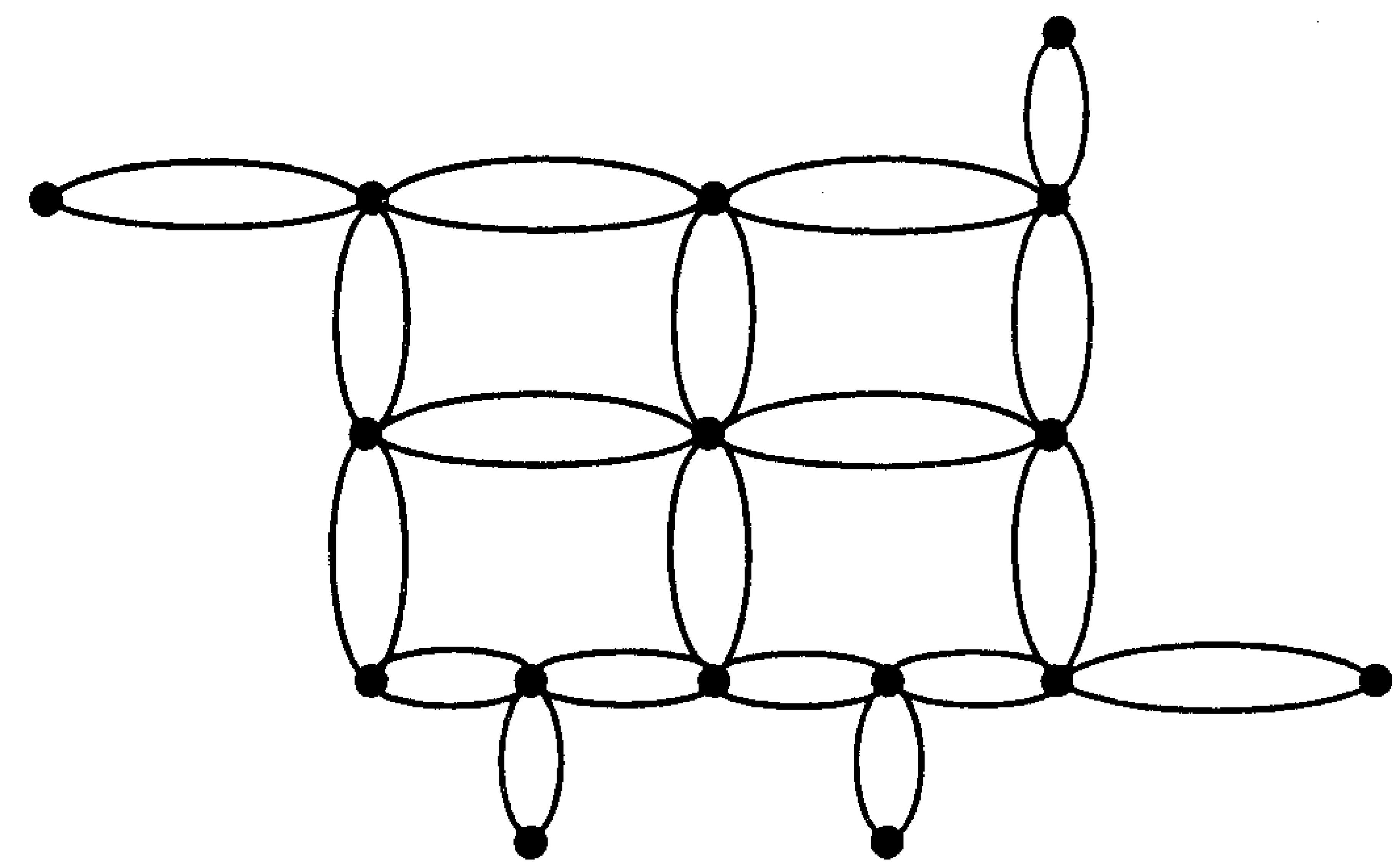

Рис. 0.46

Полученный мультиграф является эйлеровым, поскольку степень каждой его вершины четная. Можно найти эйлеров цикл в мультиграфе так, как в предыдущей задаче. Этот цикл и определит нужный маршрут.

64. Рассмотрим граф, связанный с фигурой:

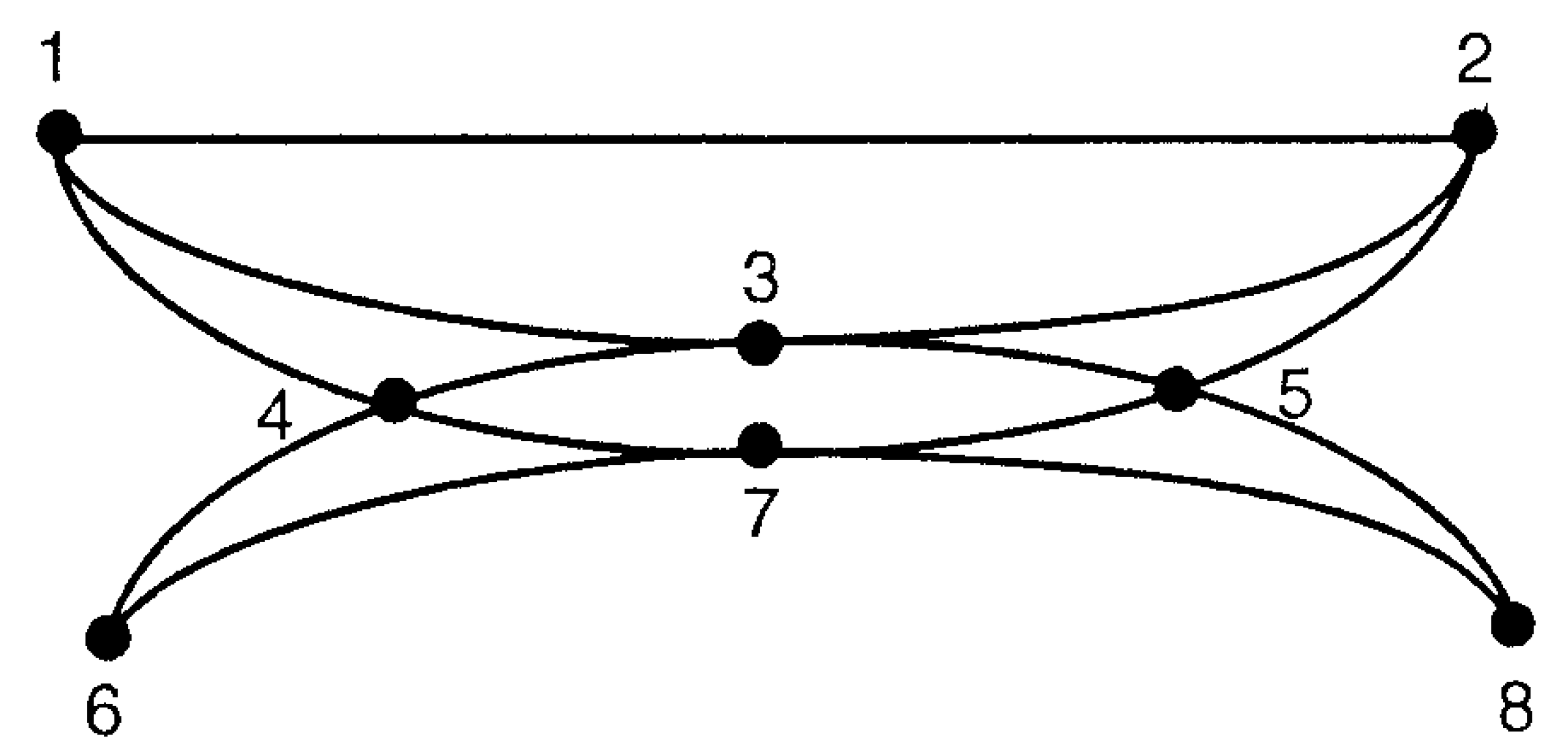

Рис. 0.47

Степени вершин 1 и 2 графа нечетные. Если мы соединим еще одним ребром эти вершины, то получим эйлеров мультиграф. Как и в предыдущей задаче, построим в этом мультиграфе эйлеров цикл. Удалив из цикла добавленное ребро, получим цепь, которая начинается в вершине 1, заканчивается в вершине 2 и содержит каждое ребро графа ровно один раз. Такая цепь называется **эйлеровой цепью**. Построенная цепь определит движение карандаша при вычерчивании фигуры.

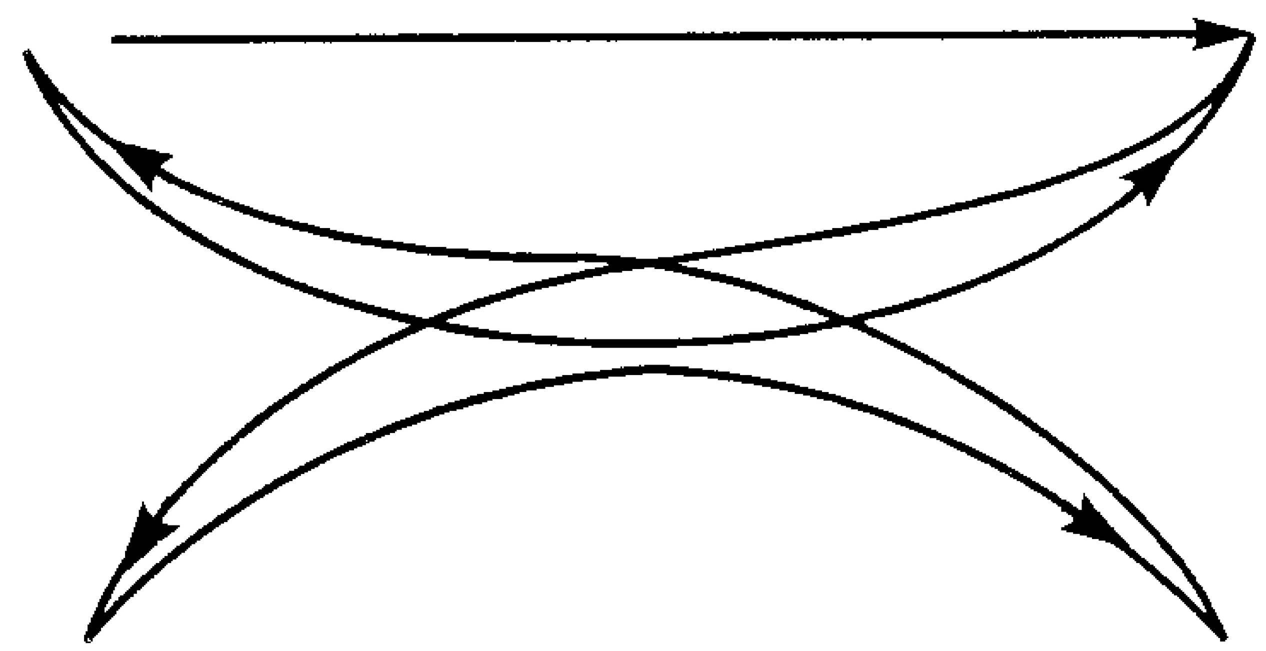

Рис. 0.48

65. Естественным образом представим город в виде графа G, вершины которого обозначают перекрестки города, а ребра — улицы. Каждое ребро графа пометим числом, равным количеству проходов туристом соответствующего отрезка улицы. Назовем ребро четным, если оно помечено четным числом, и нечетным, если помечено нечетным числом. Исследуем свойства подграфа H, образованного нечетными ребрами.

Рассмотрим маршрут L в графе G, соответствующий маршруту туриста по городу. Возьмем произвольную вершину w, лежащую на маршруте, и вычислим сумму $S(w)$ чисел, помечающих ребра, выходящие из этой вершины. Если вершина w не соответствует ни вокзалу, ни площади Бангалор, то сумма $S(w)$ будет четной, поскольку число заходов в любую промежуточную вершину маршрута равно числу выходов из нее. Поэтому число нечетных ребер, выходящих из каждой вершины графа, не соответствующей вокзалу или площади Бангалор, будет четным, так как в противном случае сумма $S(w)$ окажется нечетной.

Для вершины v, обозначающей площадь Бангалор, число заходов в нее будет на единицу больше, чем число выходов. Поэтому сумма $S(v)$ нечетная, и число нечетных ребер, выходящих из вершины v, нечетное.

Аналогично доказывается, что число нечетных ребер, выходящих из вершины u, обозначающей вокзал, нечетное.

Таким образом, в графе H, образованном нечетными ребрами, ровно две вершины (u и v) имеют нечетную степень. Из следствия из леммы о рукопожатиях вытекает, что вершины u и v принадлежат одной компоненте графа H (см. также задачу 39). Поэтому в графе H существует цепь P, соединяющая вершины u и v. Цепь P и определит маршрут возвращения туриста.

66. Как и в предыдущей задаче, построим граф G, описывающий перекрестки и улицы Зеленого города (без набережной).

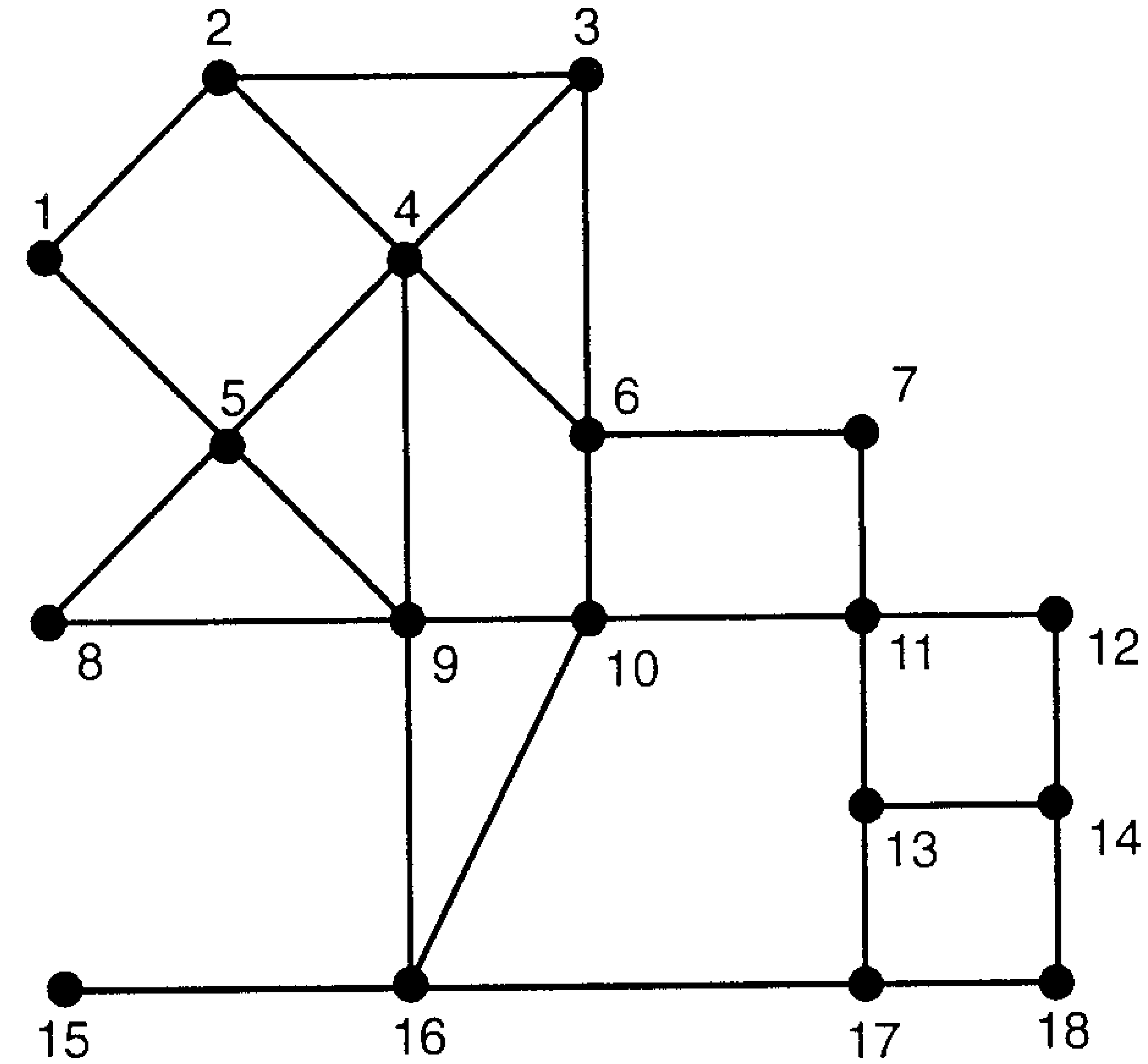

Рис. 0.49

В построенном графе 8 вершин нечетной степени, следовательно, граф не является эйлеровым. Соединим попарно вершины нечетных степеней, например 2 и 7, 8 и 15, 4 и 13, 14 и 17. Поскольку степени всех вершин нового графа четные, то он будет эйлеровым. Так, как и в задаче 62, построим эйлеров цикл в новом графе. Удалим добавленные ребра. Цикл распадется на четыре цепи, которые будут соответствовать автобусным маршрутам (один из возможных вариантов маршрутов изображен на рис. 0.50).

Покажем, что ребра графа невозможно разбить менее, чем на 4 цепи. Если вершина графа является только промежуточной вершиной цепей, то ее степень будет четной. Поэтому любая вершины нечетной степени обязательна должна быть конечной вершиной какой-нибудь цепи. Поскольку у цепи только два конца, то для того, чтобы соединить 8 вершин необходимо по крайней мере 4 цепи.

В общем случае таким же образом можно доказать теорему:

Если связный граф содержит ровно 2k вершин нечетной степени, то минимальное число реберно-непересекающихся цепей, на которые можно разбить его ребра, равно k.

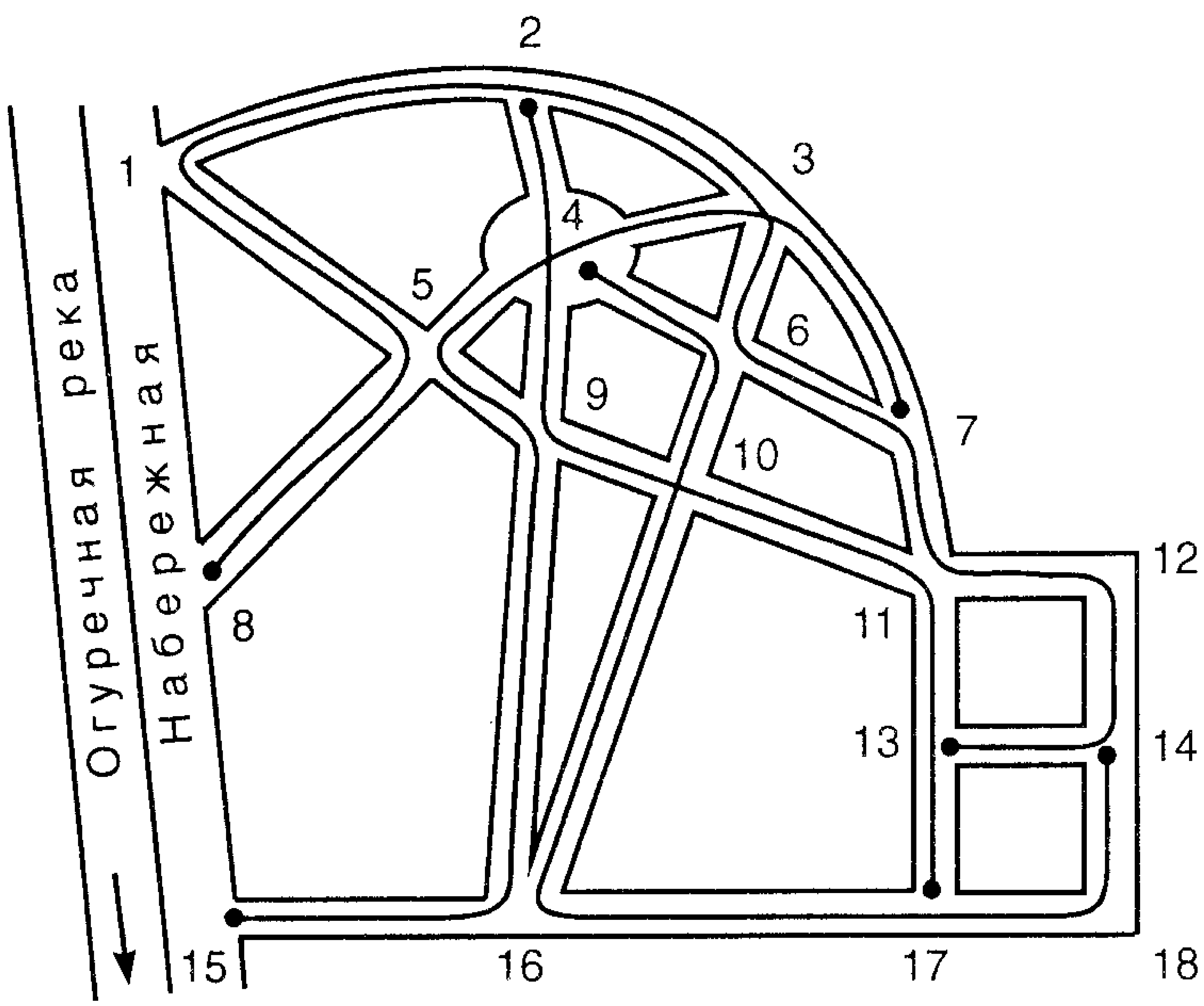

Рис. 0.50

67. Считая вершины куба вершинами графа, а ребра куба ребра куба ребрами графа, получим граф куба.

В этом графе 8 вершин нечетной степени. Из предыдущей задачи следует, что минимальное число цепей, на которое можно разбить ребра графа — 4. Следовательно, наименьшее число кусков проволоки — тоже 4.

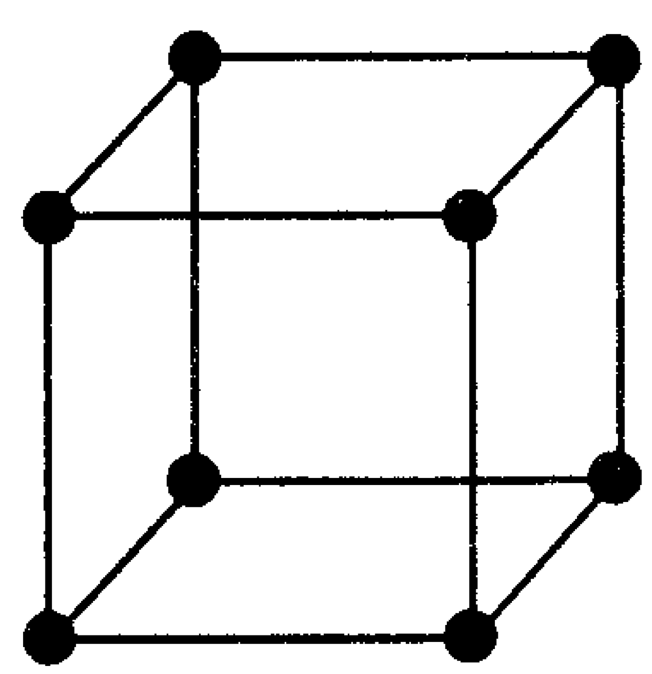

Рис. 0.51

68. Если бы граф *G* участка был бы эйлеровым, то маршрут почтальона определялся бы эйлеровым циклом. Но степени вершин 1 и 6 нечетные, поэтому эйлерова цикла не существует и некоторые улицы почтальон должен будет пройти дважды. Допустим, что мы нашли маршрут

обхода. Если улица проходится почтальоном дважды, то добавим соответствующее ребро к графу *G*. Таким образом мы получим эйлеров мультиграф. Следовательно, для решения задачи мы должны удвоить некоторые ребра так, чтобы степени всех вершин стали четными. При этом сумма длин добавленных ребер должна быть наименьшей. В нашем графе степени вершин 1 и 6 должны стать четными. Но при удвоении некоторого ребра, выходящего из вершины 1, например, ребра (1,2), степень вершины 2 станет нечетной и придется удваивать какое-то ребро, выходящее из вершины 2 и т.д. Процесс удваивания ребер может окончиться только в вершине 6. Следовательно, мы должны найти кратчайшую цепь, соединяющую вершины 1 и 6, и удвоить ребра этой цепи. Такой цепью является цепь $L=(1,2,4,6)$. В полученном мультиграфе так, как в задаче 40, найдем эйлеров цикл, который и определит маршрут почтальона (один из возможных маршрутов изображен на рис. 0.52).

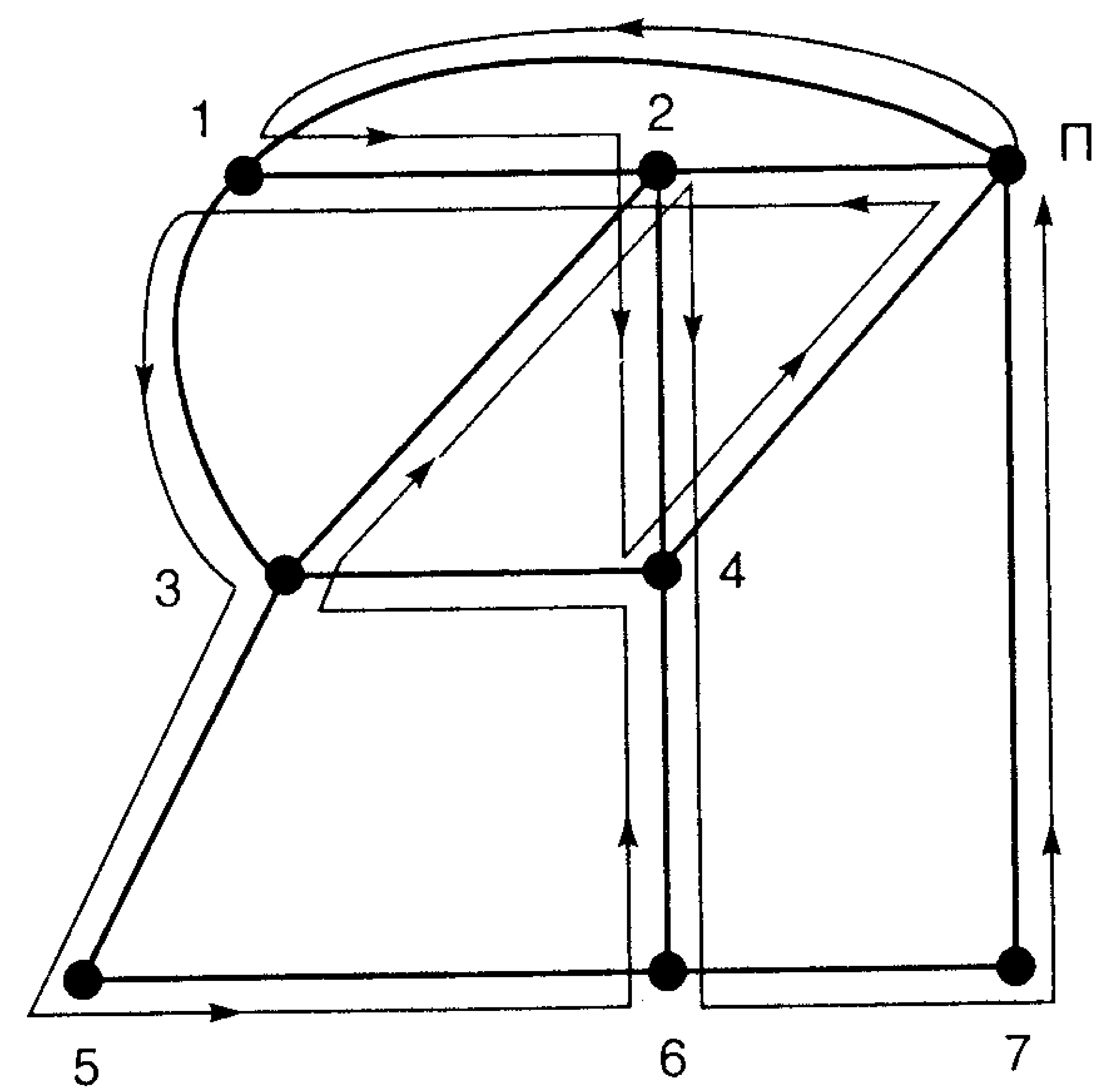

Рис. 0.52

69. Построим граф *G* авиалинии, в котором вершины, соответствующие городам, будут соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие города соединены авиалинией.

Граф, в котором существует цикл, содержащий каждую вершину графа ровно один раз, называется **гамильтоновым**. Сам цикл также называется **гамильтоновым**.

Нам необходимо доказать, что построенный нами граф является гамильтоновым.

Докажем одно достаточное условие гамильтоновости графа.

➻ ***Теорема. Если в графе G, имеющем n вершин, степень каждой вершины не меньше, чем $\frac{n}{2}$, то граф G гамильтонов.***

Доказательство. Предположим противное: граф G не является гамильтоновым. Добавим к графу новую вершину, соединив ее ребрами со всеми вершинами графа G. Если получившийся граф не гамильтонов, то добавим еще одну новую вершину, как и ранее, соединив ее ребрами со всеми вершинами графа G, и т.д. до тех пор пока не получим гамильтонов граф, который обозначим G'. Это обязательно произойдет, так как при добавлении n вершин гамильтонов цикл можно построить, даже не используя ребра графа G (см. рис. 0.53). Заметим, что никакие две новые вершины не соединены ребром.

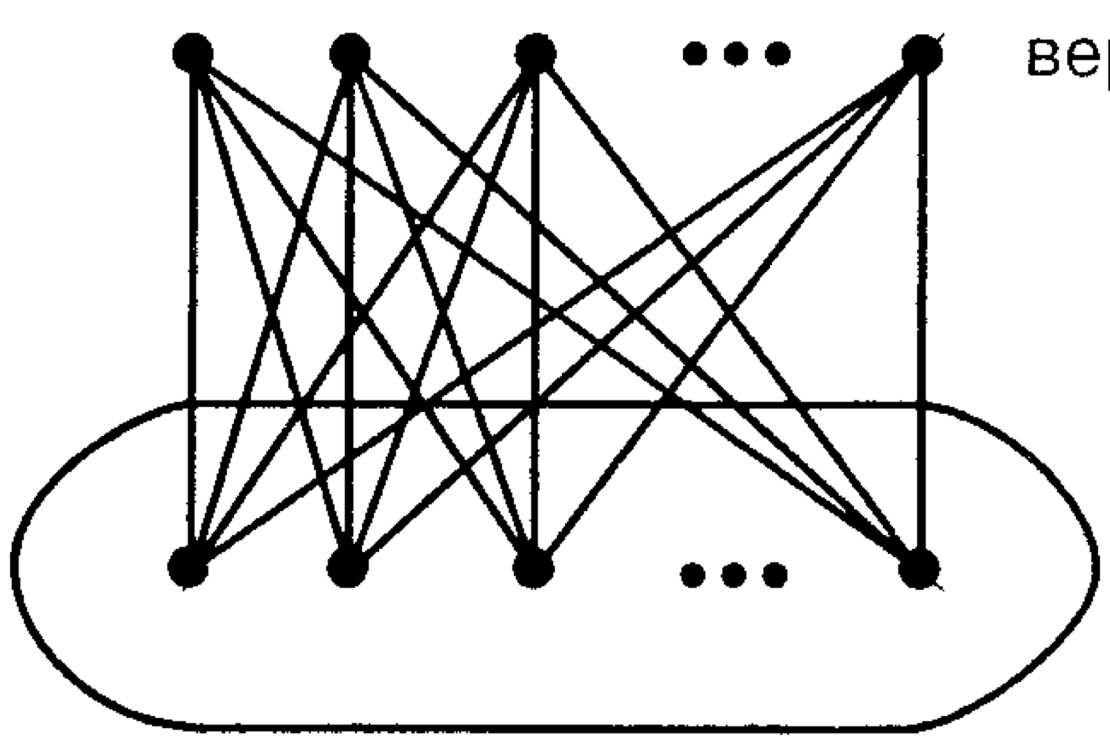

Рис. 0.53

Пусть k — минимальное число новых вершин, которые нужно добавить, чтобы получить гамильтонов граф G'. В графе G' будет $(n+k)$ вершин.

Рассмотрим гамильтонов цикл $C=(u,w,v,...,u)$ в графе G', где u и v — вершины графа G, а w — новая вершина. Вершины u и v не смежные, так как в противном случае существует гамильтонов цикл в графе, не включающем вершину w, что противоречит минимальности числа k. По этой же причине за каждой вершиной, смежной с вершиной с вершиной u, в цикле обязательно должна стоять вершина, не смежная с вершиной v.

(На рис. 0.54 изображена ситуация, когда за вершиной, смежной с вершиной u, стоит вершина, смежная с вершиной v).

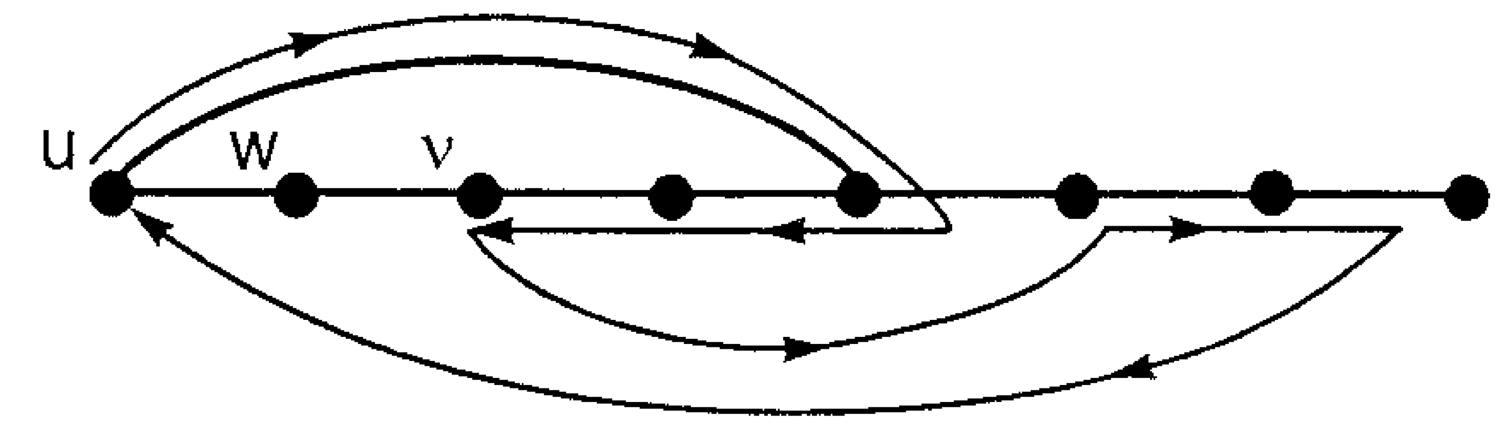

Рис. 0.54

Из условия теоремы следует, что число вершин в графе G, смежных с вершиной u, будет не меньше, чем $\frac{n}{2}$. Тогда число вершин, смежных с вершиной u в графе G' будет не меньше, чем $\frac{n}{2}+k$. Поскольку за каждой вершиной, смежной с u, в цикле находится вершина, не смежная с v, то можно оценить число d_1 вершин, не смежных с вершиной v, в графе G':

$$d_1 \geq \frac{n}{2}+k .$$

Для числа d_2 вершин, смежных с вершиной v в графе G верна оценка:

$$d_2 \geq \frac{n}{2}+k .$$

Так как каждая вершина графа или смежная с v, или несмежная с v, то число n всех вершин графа G', будет не меньше, чем $(n+2k)$, что противоречит числу вершин графа G'.

Теорема доказана.

Поскольку каждый город соединен авиалинией не менее, чем с половиной городов страны, то условия теоремы выполняются для построенного графа авиалиний. Гамильтонов цикл в этом графе будет соответствовать нужному маршруту облета.

70. Построим граф G, вершины которого соответствуют рыцарям, и две вершины будут соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие рыцари дружат. Если граф G имеет $2n$ вершин, то для степени любой его вершины v выполняется неравенство $d(v) \geq n$.

Первое решение. Из теоремы, доказанной в предыдущей задаче, следует, что в графе G существует гамильтонов цикл. Рыцарей можно рассадить вокруг стола в соответствии с порядком вершин в этом цикле.

Второе решение. Рассмотрим произвольную расстановку вершин графа G на окружности. Пусть вершины u и v не смежны и вершина v находится справа от вершины u. Теперь найдем такую смежную с вершиной u вершину w_1, что вершина w_2, которая находится справа от вершины w_1, является смежной с вершиной v (см. рис. 0.55). Такую вершину всегда можно найти, поскольку смежных с u вершин не меньше, чем n, а несмежных с v — не больше, чем $(n - 1)$.

"Развернем" участок окружности от w_1 до v в обратном порядке (см. рис. 0.56).

После поворота число пар несмежных вершин на окружности уменьшится. Проделав подобную операцию необходимое число раз, получим такое расположение вершин, что все соседние вершины будут смежными. Расположение вершин на окружности определяет расположение рыцарей за круглым столом.

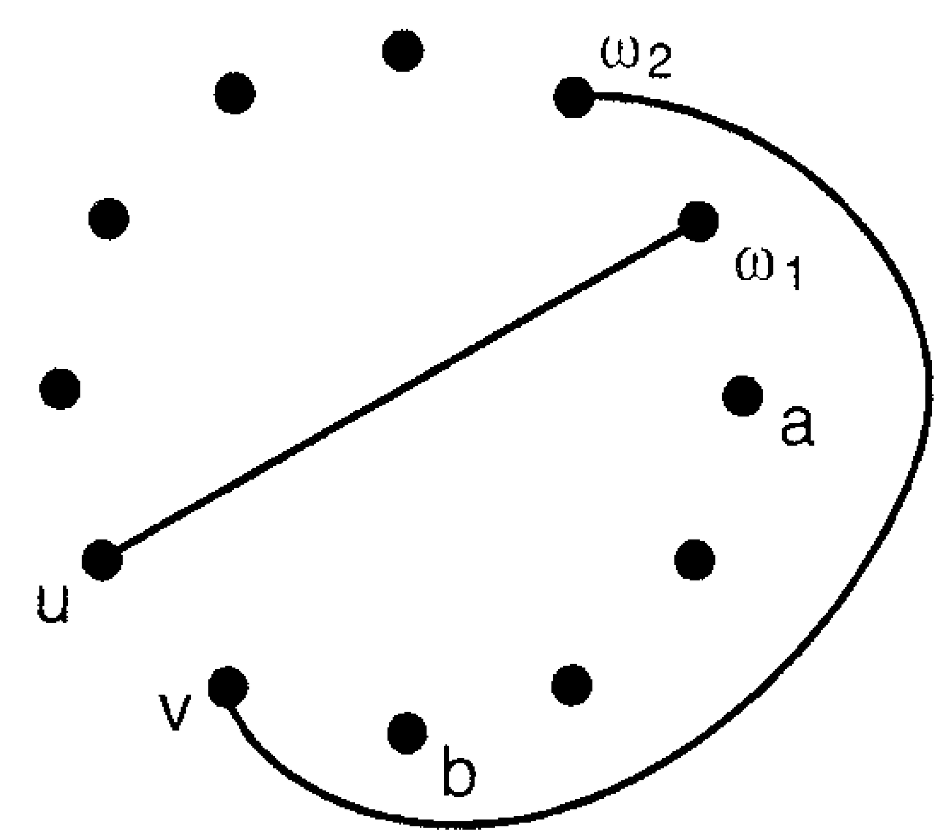

Рис. 0.55

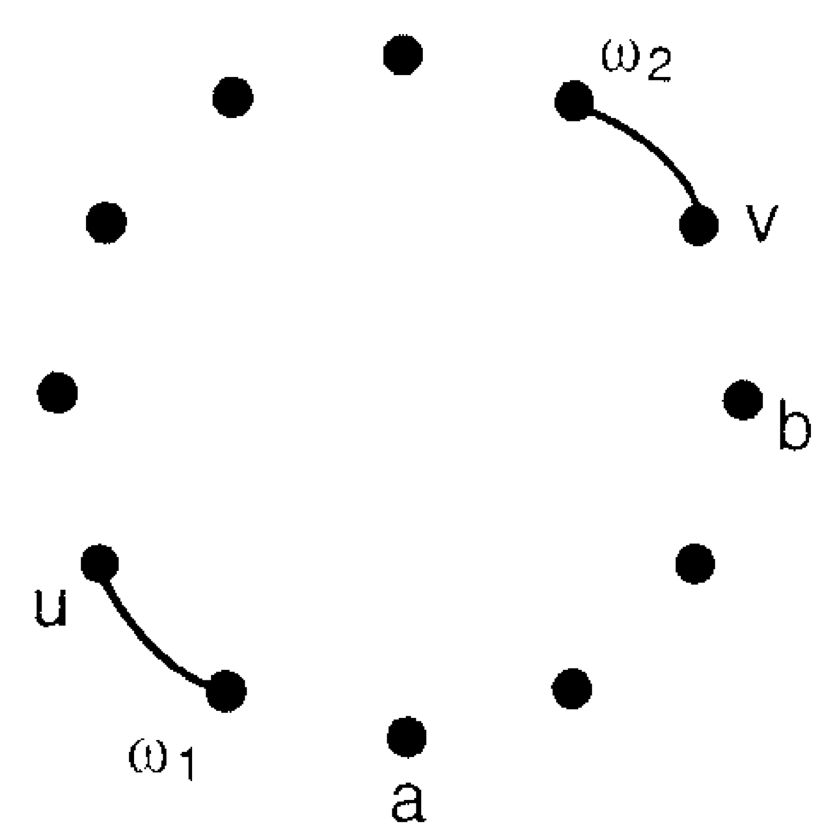

Рис. 0.56

71. Построим граф G по следующему правилу. Каждому единичному кубику поставим в соответствие вершину графа. Если два единичных кубика имеют общую грань, то соответствующие вершины графа соединим ребром.

Цепь, содержащая каждую вершину графа ровно один раз, называется **гамильтоновой** цепью.

Поскольку мышка съедает каждый кубик только один раз, то ее маршрут, если он существует, будет описан гамильтоновой цепью. Докажем, что в графе G не существует гамильтоновой цепи.

Каждый из 26 единичных кубиков, отличных от центрального, будем считать либо белым, либо черным в шахматном порядке: 12 кубиков, имеющих ровно по две грани на поверхности большого куба назовем белыми, а остальные 14 кубиков — черными. Поскольку в любой паре кубиков, имеющих общую грань, один кубик будет белым, а другой — черным, то граф G является двудольным графом. Так как в любой цепи двудольного графа чередуются вершины разных долей, то гамильтоновой цепи в двудольном графе, одна доля которого имеет на две вершины больше, чем другая, быть не может. Следовательно, мышка не может съесть сыр указанным способом.

72. Построим граф G по следующему правилу. Каждой клетке шахматной доски поставим в соответствие вершину графа. Две вершины соединим ребром тогда и только тогда, когда конь может перейти из клетки, соответствующей одной вершине, в клетку, соответствующую второй. Если конь находится в клетке какого-то цвета, то сделав ход он попадет в клетку другого цвета. Поэтому граф G будет двудольным графом. Его доле A будут соответствовать 32 черные клетки, а доле B — 32 белые.

Существование нужного маршрута перевода коня из $a1$ в $h8$ эквивалентно существованию в графе G гамильтоновой цепи, соединяющей вершины, соответствующие клеткам $a1$ и $h8$.

Покажем, что существование такой цепи невозможно. Действительно, цепь должна иметь 63 ребра, так как для требуемого перехода из $a1$ в $h8$ нужно сделать 63 хода. Каждое нечетное ребро (в том числе и 63-е) цепи, которая начинается в вершине доли A, приводит в долю B. Это эквивалентно тому, что каждый нечетный ход коня, в том числе и 63-й, приводит в белую клетку. Поскольку клетка $h8$ черная, то нужный маршрут коня не существует.

73. Граф называется **планарным**, если его можно нарисовать на плоскости так, что никакие его два ребра (за исключением ребер, выходящих из общей вершины) не имеют общих точек. Граф, нарисованный таким образом, называется **плоским**.

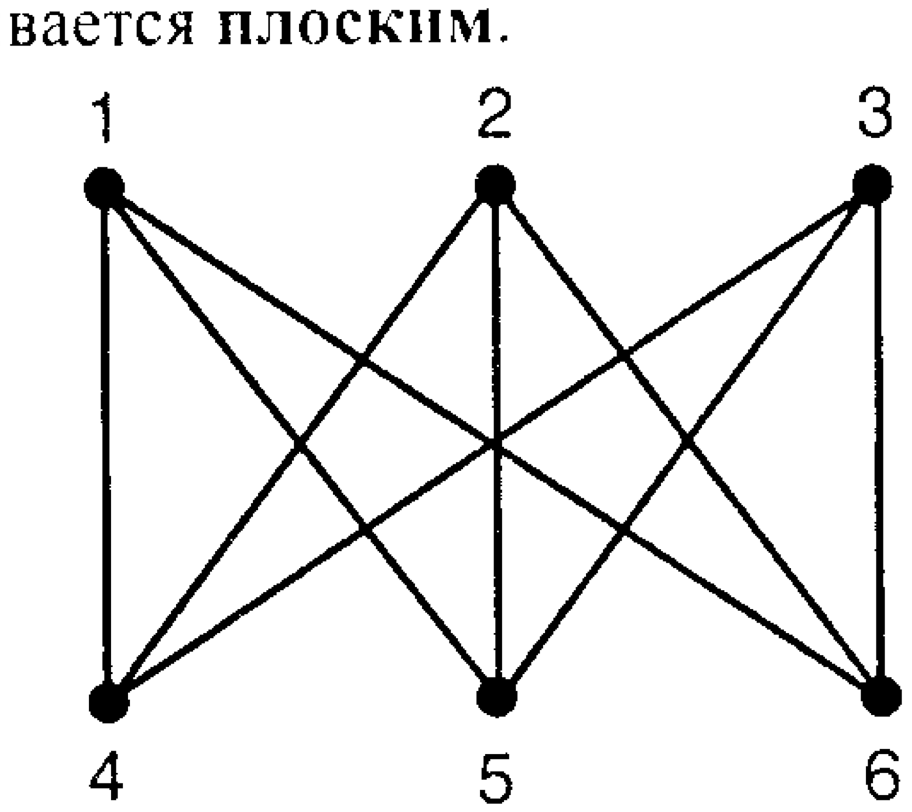

Рис. 0.57

Решение задачи о трех домах и трех колодцах сводится к ответу на вопрос: является ли планарным граф $K_{3,3}$.

Попробуем нарисовать граф $K_{3,3}$ на плоскости так, как этого требует определение планарности. На любом рисунке графа должен обязательно присутствовать цикл C=(1,4,2,5,3,6,1), который делит плоскость на две части: внутри и вне цикла.

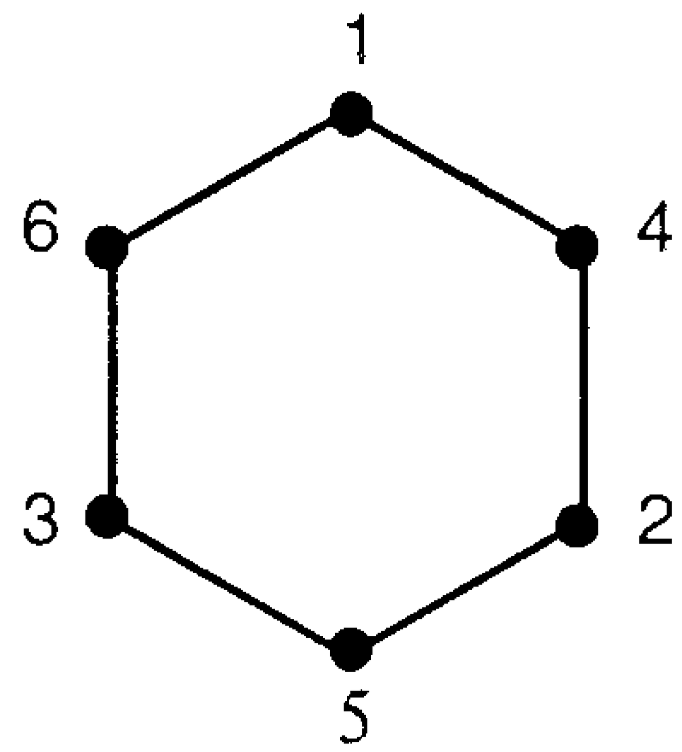

Рис. 0.58

Нам осталось еще нарисовать ребра (3,4), (1,5), (6,2). Для изображения ребра (3,4) есть две возможности: внутри цикла и вне цикла.

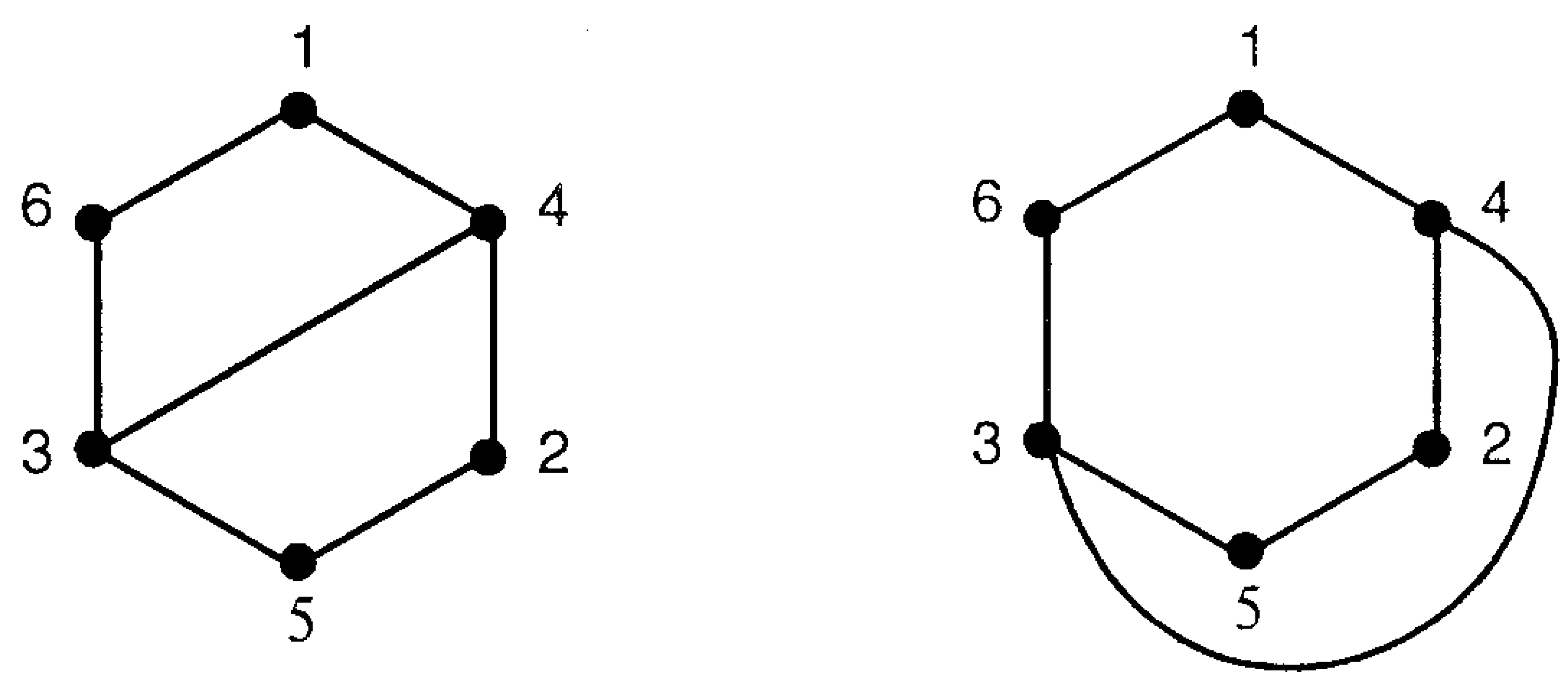

Рис. 0.59

Тогда ребро (1,5) в первом случае можно нарисовать только вне цикла, а во втором — только внутри.

Последнее ребро (6,2) невозможно нарисовать так, чтобы оно не имело общих точек с ранее нарисованными ребрами ни в одном из этих случаев.

Мы доказали, что граф $K_{3,3}$ не является планарным. Это означает, что невозможно провести дорожки от домов до колодцев нужным образом.

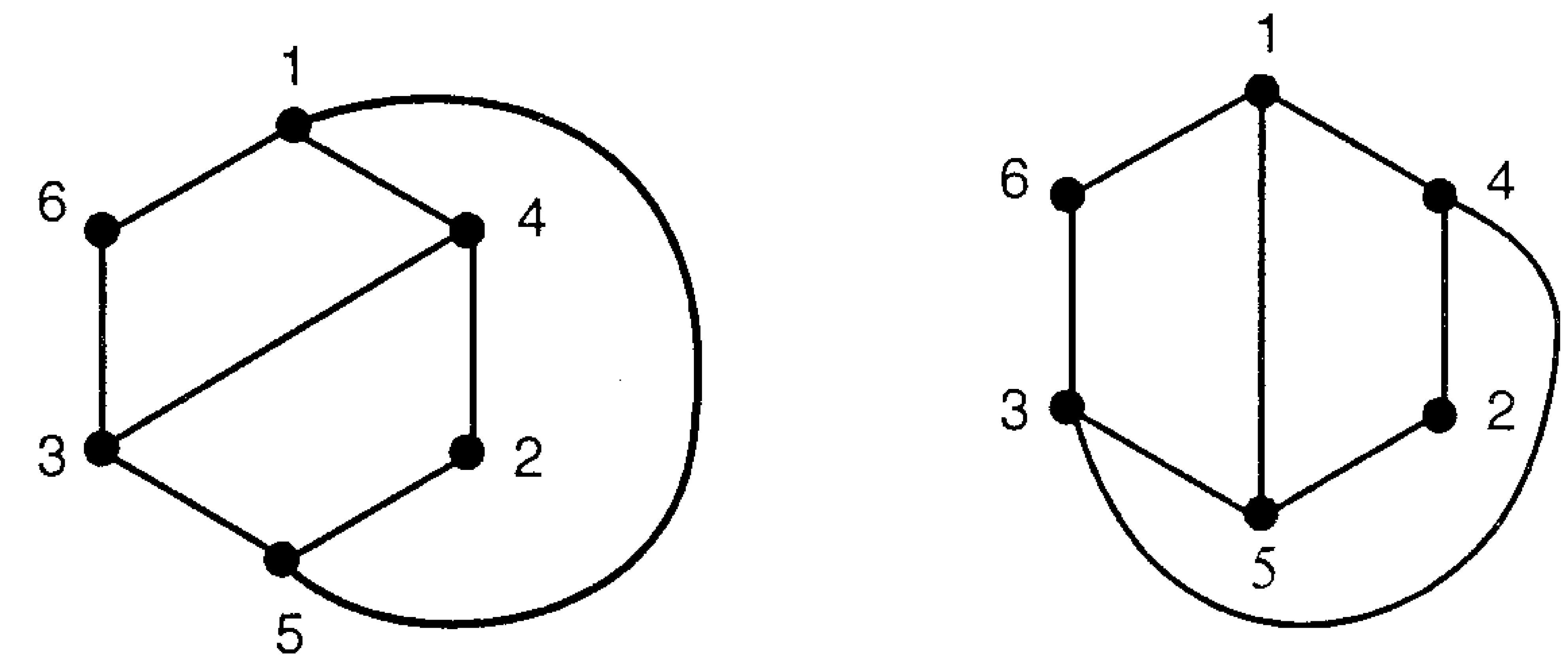

Рис. 0.60

74. Карту города можно считать плоским графом G, в котором перекрестки будут вершинами, а отрезки улиц — ребрами.

Гранью плоского графа называется максимальное множество точек плоскости, каждую пару из которых можно соединить кривой, не пересекающей ребра графа. Грань, которая имеет бесконечную площадь, называется **внешней**, остальные грани называются **внутренними**.

Плоский граф, изображенный на рис. 0.61, имеет 3 грани, причем грань 1 — внешняя, а грани 2 и 3 — внутренние.

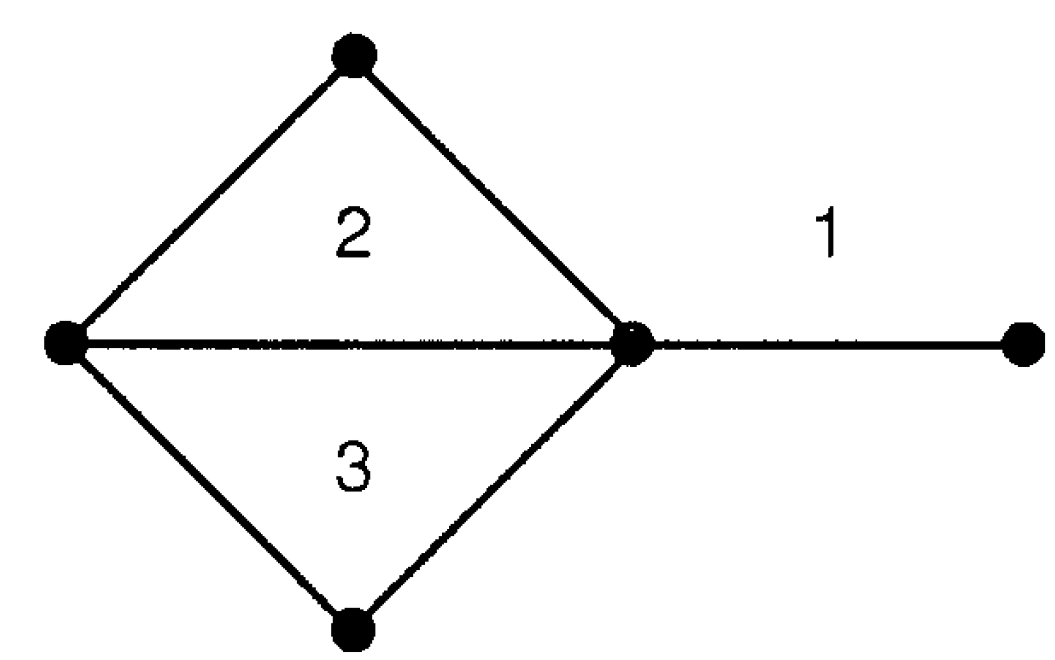

Рис 0.61

➸ ***Теорема Эйлера. Для всякого связного плоского графа верно равенство***

$$n - m + f = 2, \qquad (*)$$

где n — число вершин m — число ребер, а f — число граней графа.

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево T графа G (см. задачу 43). Очевидно, что граф T имеет n вершин и одну грань (внешнюю). Поскольку T — дерево, то число ребер T равно (n–1) (см. задачу 44). Поэтому для графа T доказываемая формула верна. Теперь будем поочередно добавлять к Т недостающие ребра графа G. При каждом добавлении число вершин не меняется, а число ребер и граней увеличивается на единицу. Это значит, что доказываемая формула будет верна для всякого графа, получаемого в результате операций добавления ребер, а, значит, и для исходного графа. Теорема доказана.

Формула (*) называется **формулой Эйлера**.

Поскольку кварталы города соответствуют внутренним граням плоского графа G, то найдем число граней по формуле Эйлера. Граф G имеет 155 вершин и 260 ребер. Число граней в нем:

$$f = m - n + 2 = 260 - 155 + 2 = 107.$$

В городе нужно построить 106 универсамов.

75. Схему колонии можно считать плоским графом, в котором палочки являются ребрами, а места их соединения — вершинами.

Граф, построенный в нашей задаче, имеет 30 вершин и 58 ребер. С помощью формулы Эйлера найдем число граней в нем:

$$f = m - n + 2 = 58 - 30 + 2 = 30.$$

Так как каждая грань графа, за исключением внешней, соответствует ячейке, то в колонии живут 29 муравьев.

76. Поселения муравьев на острове Щекотан можно изобразить несвязным графом G, каждая из пяти компонент которого соответствует одной колонии.

Покажем, что формула Эйлера следующим образом обобщается на случай несвязного плоского графа:

$$n - m + f = k + 1,$$

где k — число компонент графа, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и раньше.

Соединим компоненты ребрами (см. рис. 0.62).

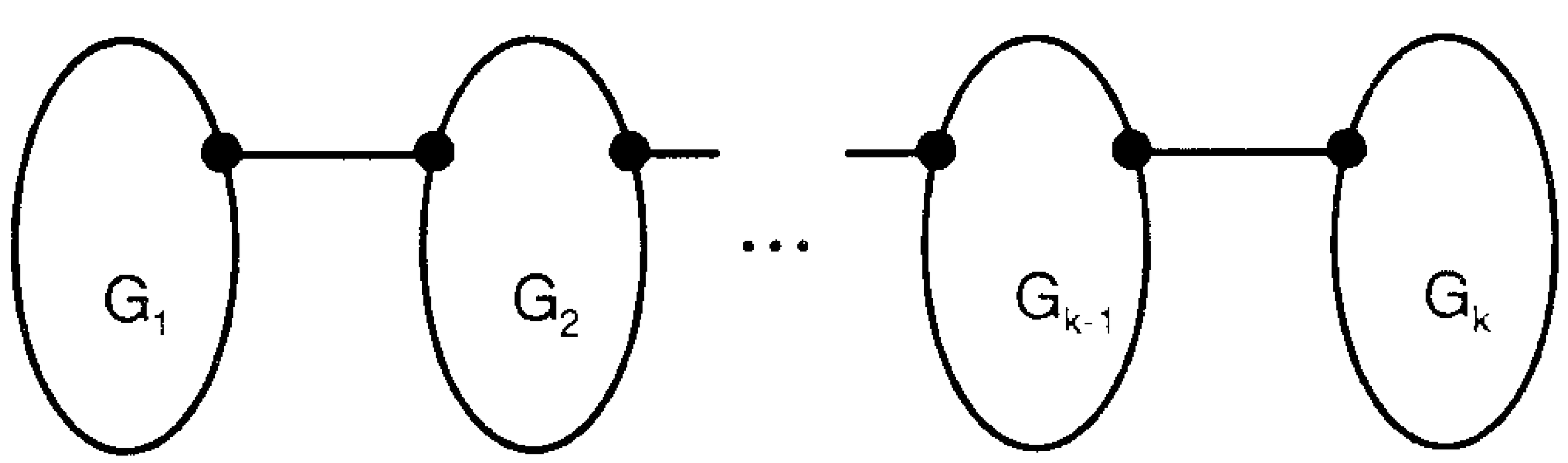

Рис. 0.62

В полученном связном графе будет n вершин, $(m + k - 1)$ ребро и f граней. Для этого графа будет верна формула Эйлера

$$n - (m + k - 1) + f = 2.$$

Выполнив преобразования, получим $n - m + f = k + 1$.

Воспользуемся выведенной формулой:

$$f = m - n + k + 1 = 1200 - 300 + 5 + 1 = 906.$$

Поскольку каждая грань, за исключением внешней, соответствует ячейке, то на острове живут 905 муравьев.

77. Как и ранее, изобразим схему колонии плоским графом.

Плоский граф, в котором каждая грань, в том числе и внешняя, ограничена тремя ребрами, называется **плоской триангуляцией**. Определим число ребер m и число граней f в плоской триангуляции, имеющей n вершин. Поскольку ее каждая грань ограничена тремя ребрами, а каждое ребро принадлежит двум граням, то выполняется равенство $3f = 2m$. Отсюда $f = \frac{2}{3}m$. Подставив это значение в формулу Эйлера получим, что $m = 3n - 6$, а $f = 2n - 4$.

Превратим граф G, изображающий колонию в плоскую триангуляцию, нарисовав во внешней грани новую вершину и соединив ее ребрами с каждой вершиной внешней грани (см. рис. 0.63). Так как внешняя грань графа G имеет 500 вершин, то мы проведем 500 новых ребер.

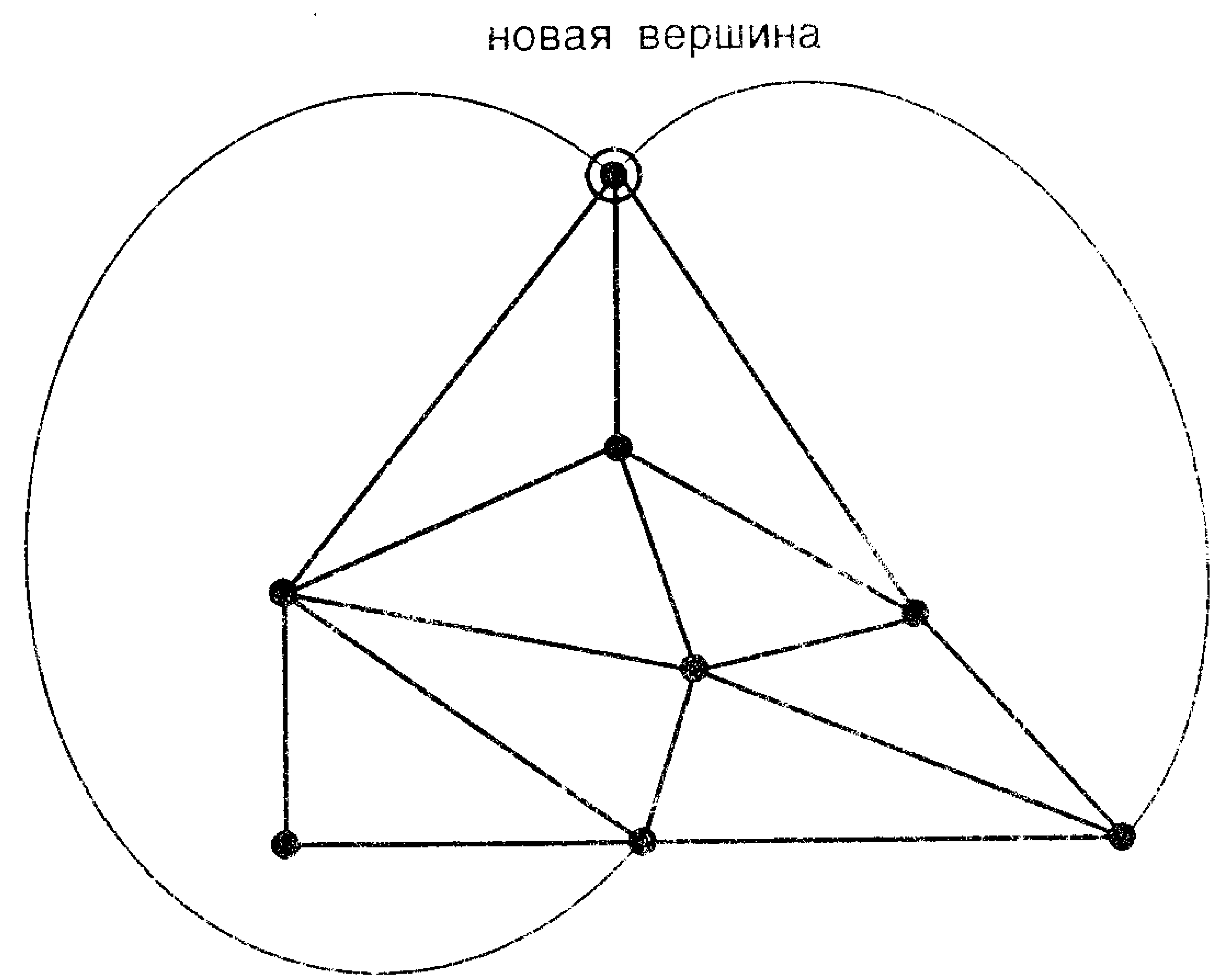

Рис. 0.63

Полученная плоская триангуляция имеет 1201 вершину. Число ребер в ней равно $m = 3\times1201 - 6 = 3597$. Вычтя из этого числа 500 добавленных ребер, получим, что для построения колонии необходимо 3097 палочек.

Число граней в триангуляции — $f = 2\times1201 - 4 = 2398$. Вычтя из этого числа 501 грань, образовавшихся из внешней грани графа G после добавления новой вершины, получим, что в колонии живет 1897 муравьев.

78. Поместим многогранник в сферу так, чтобы ее центр находился внутри многогранника. Будем считать вершины многогранника вершинами, а ребра — ребрами графа G. Спроектировав граф G из центра сферы на сферу так, что центр, проектируемая точка и ее проекция на сфере будут находиться на одном луче, выходящем из центра сферы (см. рис. 0.64), получим изображение G_1 графа на сфере. Так как многогранник выпуклый, то ребра графа G_1 не пересекаются, и граф G_1 имеет столько же вершин, ребер и граней, сколько и граф G. (Определение граней графа на сфере аналогично определению граней графа на плоскости.)

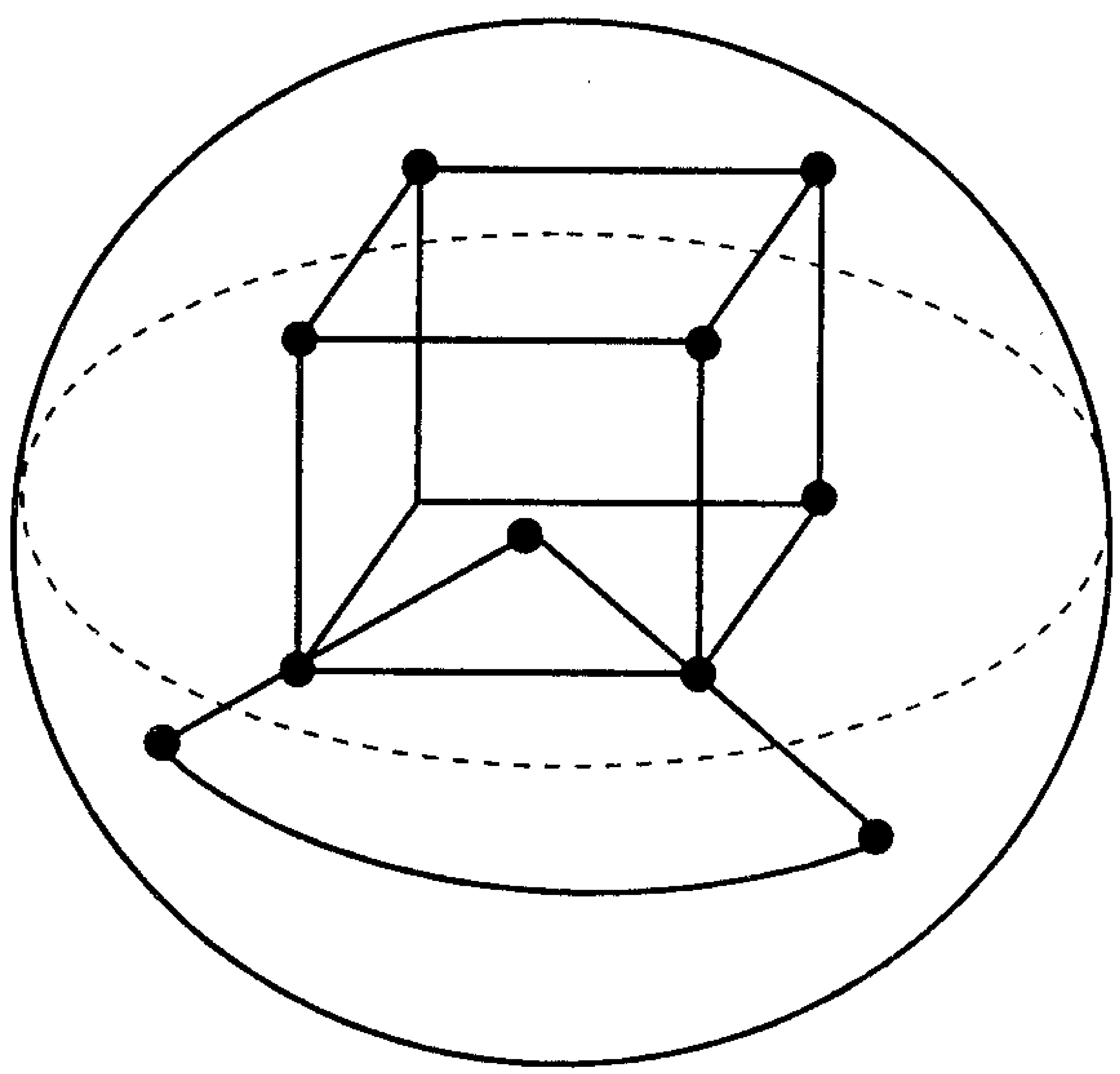

Рис. 0.64

Теперь поместим сферу на плоскость так, чтобы Северный полюс (точка диаметрально противоположная точке касания) не лежал на ребре и не совпадал с вершиной графа G_1, и спроектируем граф G_1 на плоскость так, чтобы Северный полюс, проектируемая точка и ее проекция на плоскости лежали на одном луче, выходящем из Северного полюса (см. рис. 0.65). Такая проекция называется **стереографической проекцией.**

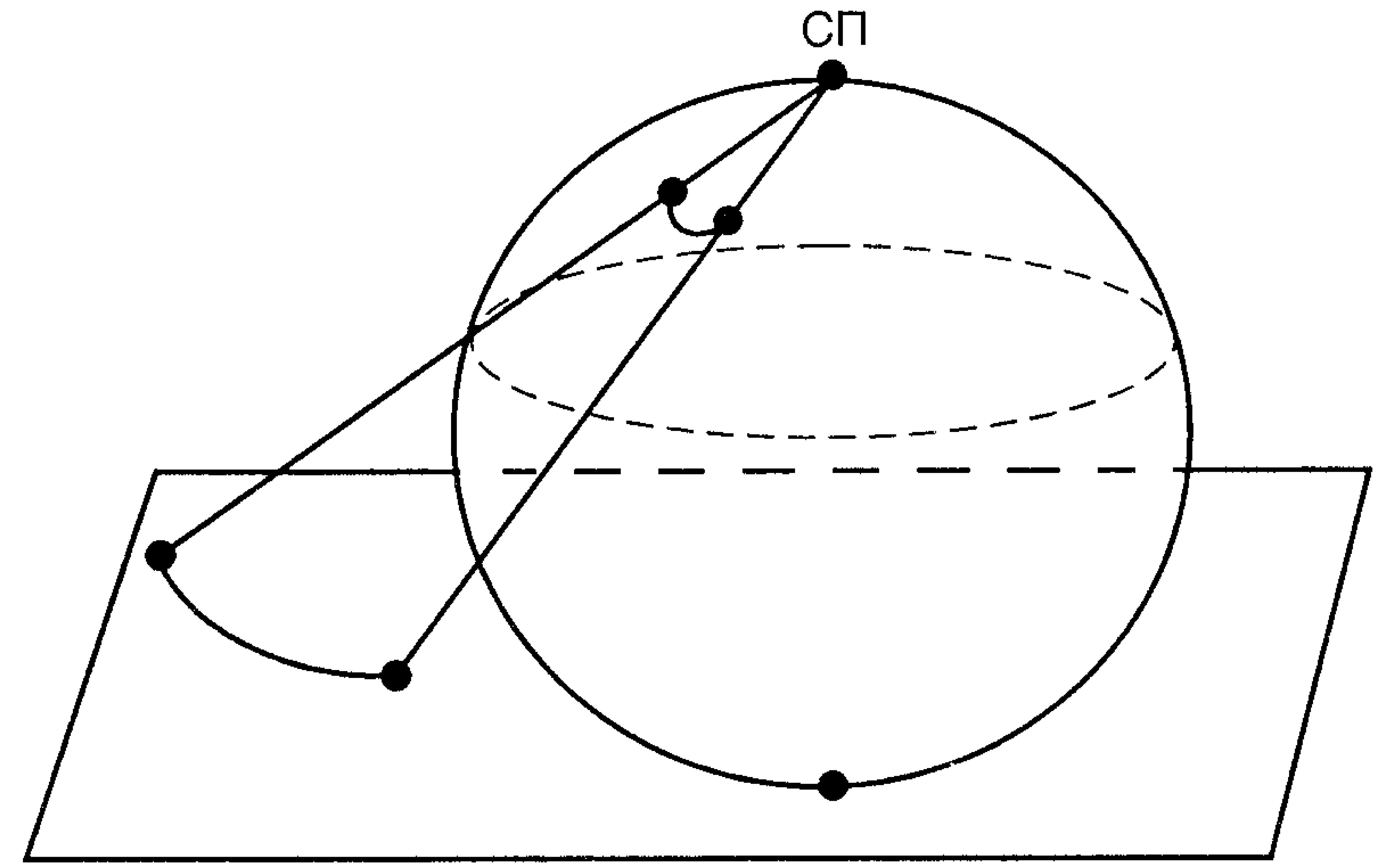

Рис. 0.65

В полученном плоском графе G_2 число вершин, ребер и граней совпадают с числом вершин, ребер и граней многогранника, соответственно. Поскольку формула Эйлера (см. задачу 74) верна для графа G_2, то она будет верна и для многогранника.

Именно для выпуклого многогранника доказал свою формулу Эйлер в 1758 году.

79. Схему печатной платы можно представить в виде графа, вершины которого будут изображать приборы, а ребра — проводники, их соединяющие. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: будет ли граф G, изображающий плату инженера Иванова, планарным?

Докажем следующее соотношение: ***для связного планарного графа, содержащего n вершин и m ребер, при $n \geq 3$ выполняется неравенство $m \leq 3n - 6$.***

Доказательство. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_f$ — грани графа G, и $m_1, m_2, \ldots, m_f$ — число ребер ограничивающих, соответственно, каждую грань. Найдем сумму $S = m_1 + m_2 + \ldots + m_f$.

Поскольку всякая грань графа ограничена по крайней мере тремя ребрами, то $3f \le S$. С другой стороны, каждое ребро принадлежит или двум граням, или одной грани, т.е. в сумме S учитывается два раза или один. Поэтому $S \le 2m$. Мы получили, что $3f \le 2m$. Далее воспользуемся формулой Эйлера (см. задачу 74):

$$f = m - n + 2,$$
$$3f = 3m - 3n + 6,$$
$$2m \ge 3m - 3n + 6,$$
$$m \le 3n - 6.$$

Для n=3 неравенство проверяется непосредственно.

Неравенство доказано.

Для графа G, описывающего плату инженера Иванова, n=12, m=32, и полученное неравенство не выполняется.

Поэтому граф G не является планарным и изготовить одностороннюю плату невозможно.

80. Решение задачи сводится к проверке: является ли граф K_5 планарным. По формуле, выведенной в предыдущей задаче, для планарного графа должно выполняться неравенство $m \le 3n - 6$. Но граф K_5 имеет 5 вершин и 10 ребер, т.е. нужное неравенство не выполняется.

Поэтому граф K_5 не является планарным графом и соединить 5 домов непересекающимися дорожками невозможно.

81. Будем считать схему платы графом G. Неравенство $m \le 3n - 6$ не позволяет ответить, является ли граф G планарным, поскольку $17 \le 3 \times 9 - 6 = 21$.

Рассмотрим подграф графа G, выделенный жирными линиями на рисунке 0.66.

Этот подграф можно получить из графа K_5, поставив на некоторых его ребрах дополнительные вершины. (На рисунке вершины графа K_5 выделены, а дополнительные вершины помечены знаком "+"). Введение дополнительных вершин не может превратить непланарный граф K_5 в планарный. Следовательно, граф G, подграфом которого является непланарный граф, также непланарный. Это означает, что изготовить одностороннюю плату невозможно.

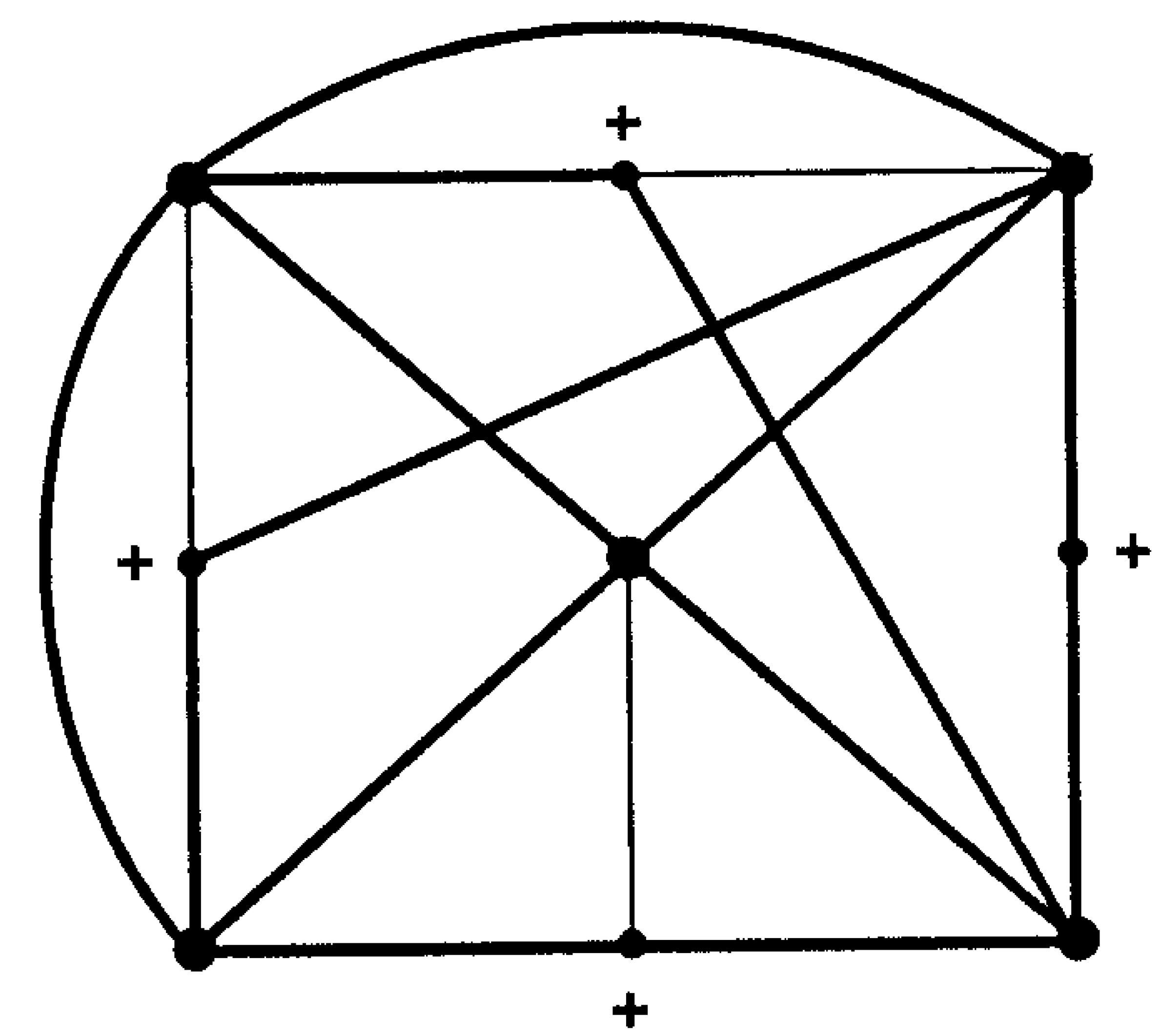

Рис. 0.66

Известна теорема, описывающая строение планарных графов.

Разобьем некоторые из ребер графов $K_{3,3}$ и K_5 новыми вершинами (см. рис. 0.67). Получившиеся графы будем называть, соответственно, графами типов $K_{3,3}$ и K_5.

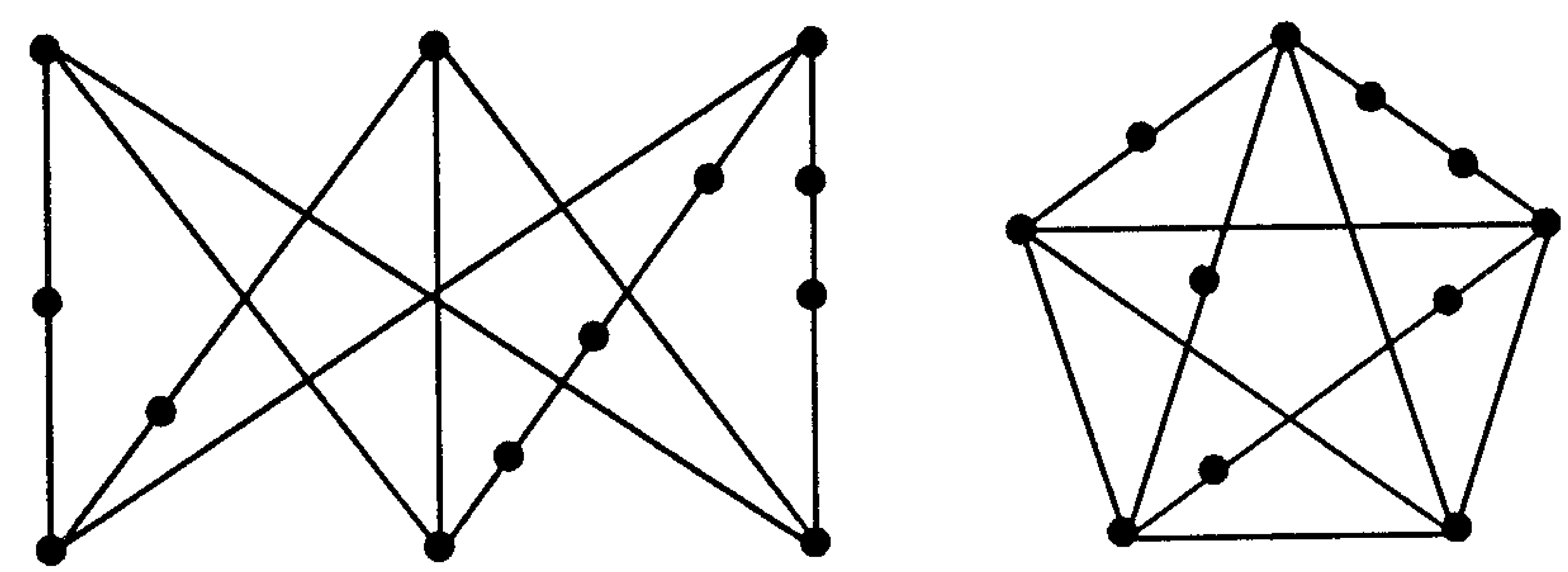

Рис. 0.67

➳ ***Теорема Понтрягина-Куратовского*** *(1927,1930 г.).* ***Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов типов $K_{3,3}$ или K_5.***

82. Пусть плоский граф G задает печатную плату (см. задачу 79). Докажем, что произвольный планарный G граф можно так изобразить на плоскости, что его любая наперед заданная грань станет внешней. Для этого рассмотрим любое изображение графа G на плоскости. Спроектируем граф G с помощью стереографической проекции на сферу (см. задачу 78).

Теперь установив сферу на плоскости так, чтобы Северный полюс находился внутри выбранной грани, и опять с помощью стереографической проекции спроектировав граф на плоскость, получим граф G_1. Очевидно, что выбранная грань будет внешней гранью графа G_1.

Рассмотрим любую грань, содержащую ребро, соответствующее нужному проводнику. Мы доказали, что эту грань можно сделать внешней. Следовательно, при изготовлении платы нужный проводник будет находиться на ее краю.

83. Толщиной графа G называется наименьшее число планарных подграфов, на которые можно разбить ребра графа G.

Для решения задачи нужно доказать, что толщина графа G, изображающего схему инженера Иванова, будет больше трех. Действительно, предположим, что объединив три планарных графа, получим граф G. Но каждый из графов, попавших в объединение, должен содержать не больше, чем (3×200 – 6) = 594 ребра (см. задачу 79), а объединение трех графов — не больше, чем 594×3 = 1792 ребра. Но это число меньше, чем число ребер графа G.

84. Для решения задачи докажем, что в любом плоском графе существует вершина v, степень которой $d(v)\le 5$. Предположим противное: для любой вершины v степень ее $d(v)\ge 6$. Воспользуемся леммой о рукопожатиях

$$d(v_1)+d(v_2)+\ \dots\ +d(v_n)=2m,$$
$$6+6+\ \dots\ +6\le 2m,$$
$$6n\le 2m,$$
$$3n\le m\le 3n-6.$$

(Последнее неравенство доказано в задаче 79.)

Получено противоречие. Следовательно, в любом плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит 5. Это означает, что на плате есть прибор, соединенный не более, чем с пятью приборами.

85. Информационной сети естественно сопоставить граф G: вершины графа соответствуют центрам сети, а ребра графа — каналы связи. Тогда исправной сети будет соответствовать связный граф.

Разрушить сеть можно двумя способами: или уничтожить несколько центров хранения и переработки информации, или повредить несколько каналов связи. Первому способу эквивалентно удаление некоторого множества вершин графа вместе с выходящими из них ребрами, второму — удаление некоторого множества ребер. В каждом из способов получившиеся графы должны оказаться несвязными.

Числом связности $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которых (вместе с выходящими из них ребрами) приводит к несвязному или одновершинному графу.

Числом реберной связности $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу.

Для графа G, изображенного на рис. 0. 68, $\chi(G)=2$, $\lambda(G)=3$.

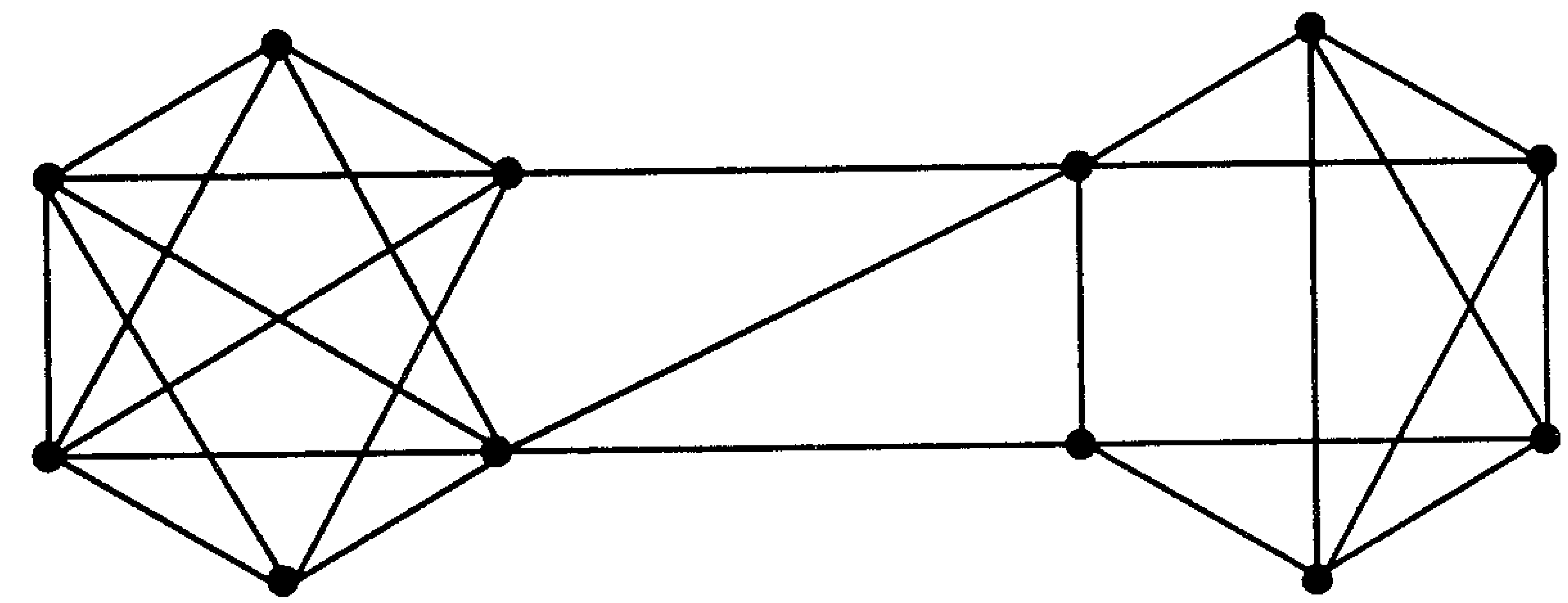

Рис. 0.68

Вершина графа называется **точкой сочленения**, если после удаления этой вершины из графа (вместе с выходящими из нее ребрами), получается несвязный граф. Ребро графа называется **мостом**, если после удаления этого ребра получается несвязный граф. Для графа, изображенного на рис. 0.69, вершины a, b и c являются точками сочленения, а ребро (b, c) — мостом.

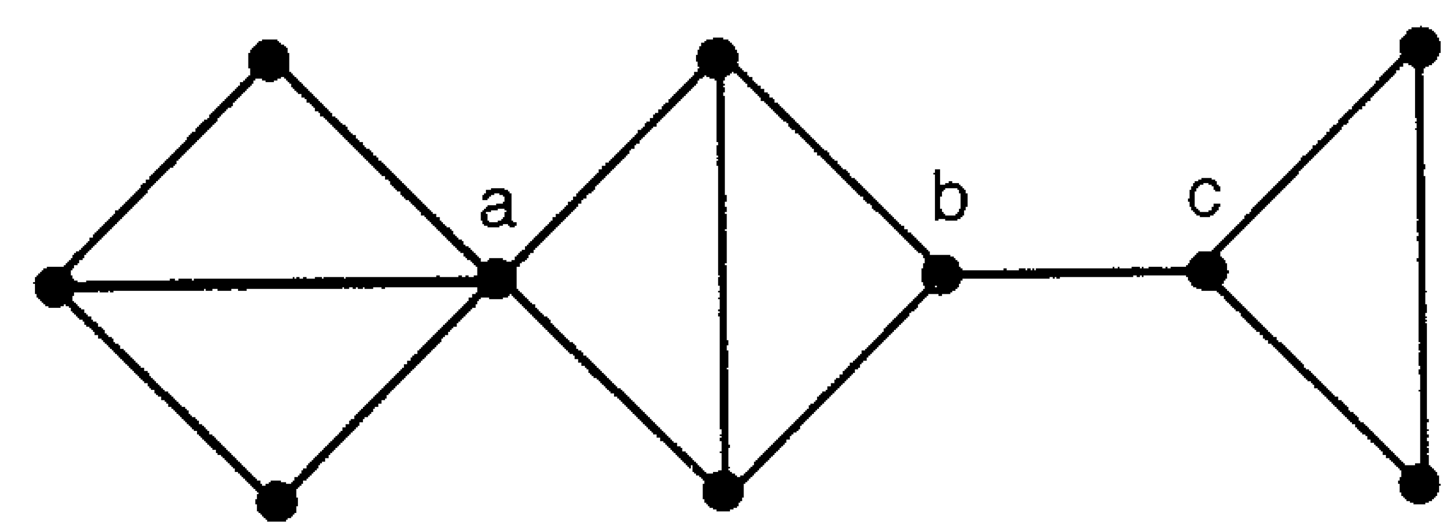

Рис. 0.69

➛ ***Теорема. Для любого связного графа выполняется соотношение***

$$\chi(G)\le\lambda(G)\le\delta(G),$$

где $\delta(G)$ — минимальная из степеней вершин графа.

Доказательство. Правое неравенство очевидно, так как удаление всех ребер, выходящих из вершины минимальной степени, приводит к несвязному графу.

Если граф имеет мост, т.е. $\lambda(G) = 1$, то и $\chi(G) = 1$ (см. рис. 0.70). (В первым двух случаях изображенные графы имеют точки сочленения, в третьем удаление вершины приводит к одновершинному графу.)

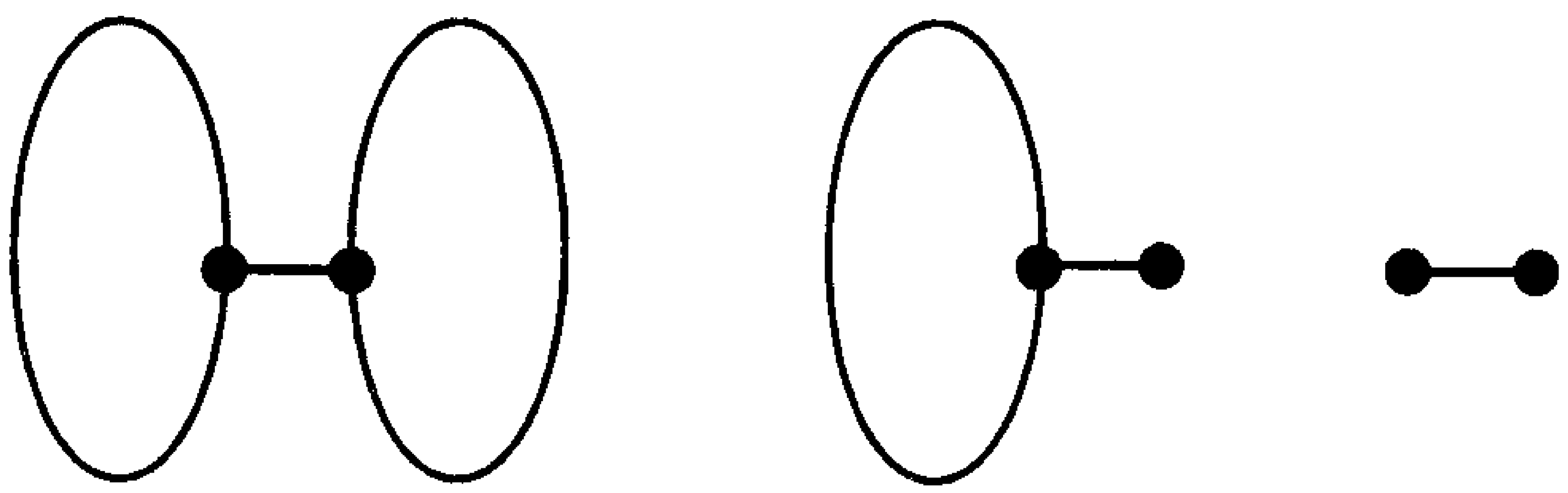

Рис. 0.70

Рассмотрим случай, когда $\lambda(C) = \lambda \geq 2$. Выберем в графе G множество $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_\lambda\}$ ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Затем удалим из графа ребра множества $E_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_{\lambda-1}\}$. Так как λ — это наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу, то получившийся граф G_1 является связным и ребро $e_\lambda = (u, v)$ будет в нем мостом.

Для каждого ребра e_i из множества E_1 выберем вершину v_i, отличную от вершин u и v. (Вершины v_i не обязательно различны). Удалим теперь выбранные вершины вместе с выходящими из них ребрами из графа G. Тем самым, в числе прочих, будут удалены ребра из множества E_1.

Если оставшийся граф несвязен, то $\chi(G) < \lambda$.

Если же он связен, то ребро (u, v) является в нем мостом.

Поэтому удаление одной из вершин u или v вместе с выходящими ребрами приводит к несвязному или одновершинному графу. Следовательно,

$$\chi(G) \leq \lambda(G) = \lambda.$$

Теорема доказана.

Так как в нашей информационной сети каждая пара центров соединена каналом связи, то сети соответствует полный граф K_n. Для этого графа $\chi(K_n) = n - 1$, поскольку какое-бы количество вершин не удалить, получившийся граф останется связным. Поэтому нужно удалять вершины до тех пор пока не останется одна вершина, т.е. $\chi(K_n) = n - 1$. Из доказанной теоремы следует, что

$$n - 1 = \chi(K_n) \leq \lambda(K_n) \leq \delta(K_n) = n - 1.$$

Следовательно, $\lambda(K_n) = n - 1$ и для того, чтобы вывести сеть из строя, нужно разрушить $(n - 1)$ канал.

86. Поставим в соответствие информационной сети граф G, как в предыдущей задаче. Мы должны доказать, что после удаления любого ребра граф G останется связным. Предположим противное: после удаления ребра $e=(u, v)$ получившийся граф G несвязный и вершины u и v принадлежат его разным компонентам. Но в этом случае каждая компонента будет графом, содержащим ровно одну вершину нечетной степени, что невозможно (см. задачу 39).

Следовательно, уничтожение одного канала не выведет сеть из строя.

87. Систему нефтепроводов можно изобразить в виде плоского графа G, вершины которого будут соответствовать станциям, а ребра — нефтепроводам. Из задачи 84 известно, что в нем есть вершина, степень которой не превышает пяти. Поэтому из неравенства, доказанного в предыдущей задаче вытекает

$$\chi(G) \leq \delta(G) \leq 5.$$

Следовательно, для того чтобы разрушить систему нефтепроводов достаточно вывести из строя не более пяти перекачивающих станций.

88. Предположим, что пятерка государств с указанным свойством существует. Рассмотрим ее изображение на карте. Это изображение естественно считать плоским графом G. В этом графе вершинами будут точки карты, в которых сходятся границы трех или более государств, а ребрами — сами границы. Государствам будут соответствовать грани графа. Если два государства соседние, то соответствующие им грани будут иметь общее ребро.

Построим граф G^* по следующему правилу. Внутри каждой грани выделим по одной вершине нового графа. Если две грани имеют общее ребро, то соответствующие им новые вершины соединим ребром нового графа. Ясно, что ребра можно провести так, чтобы они не пересекались. Поэтому граф G^* плоский. Но каждая пара граней имеет общее ребро, поскольку каждые два государства являются соседними. Это означает, что граф G^* будет графом K_5. Граф K_5 не планарный (см. задачу 80) и поэтому его нельзя нарисовать на плоскости без пересечения ребер. Получено противоречие. Следовательно, нужной пятерки государств существовать не может.

Подобным образом граф G^* можно построить для любого плоского графа G. Граф G^* называется **двойственным** к графу G.

В том случае, если граф G имеет вершины степени 2, то G^* будет мультиграфом. На рис. 0.71 сплошной линией изображен граф G, а пунктирной — граф G^*.

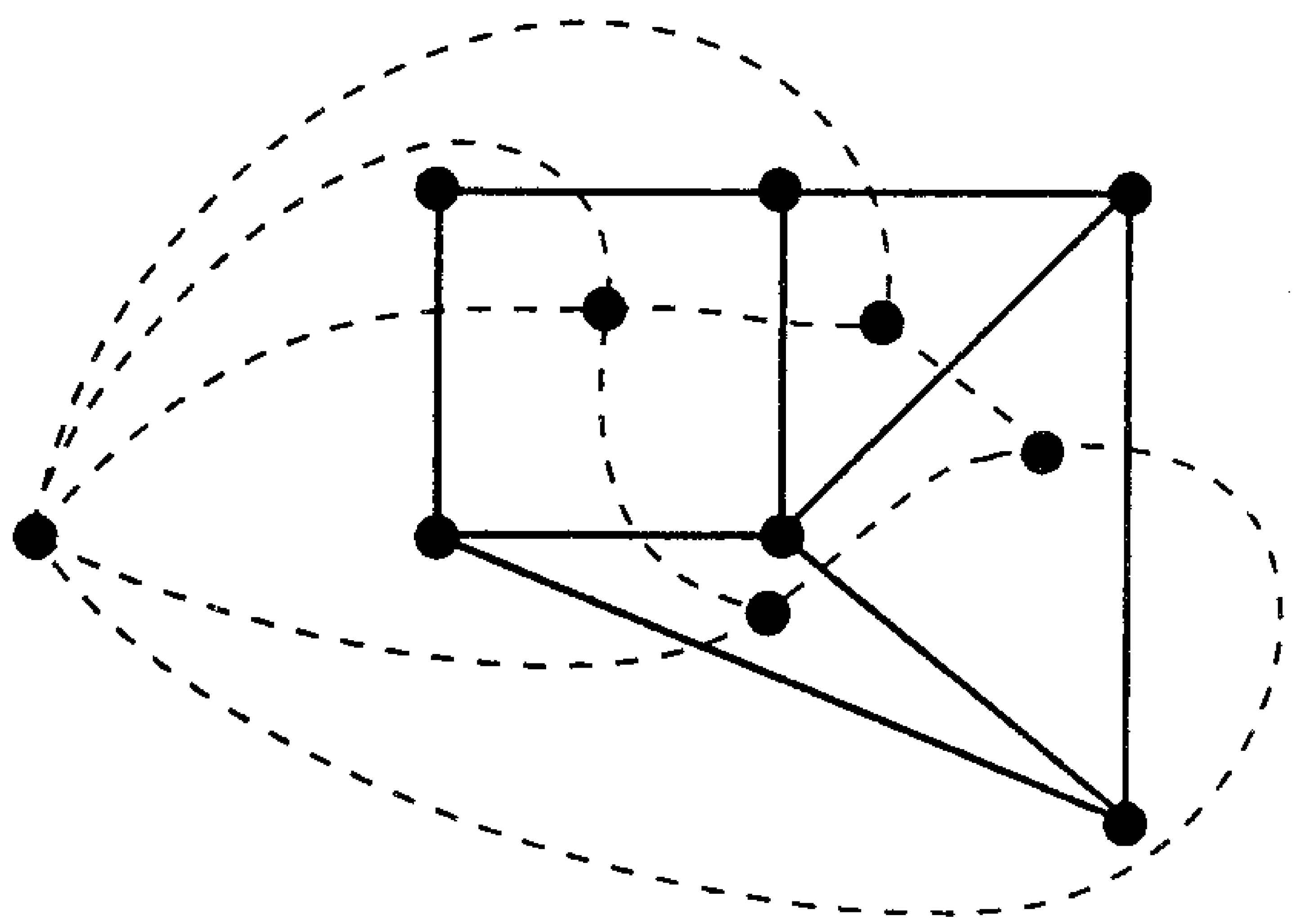

Рис. 0.71

89. Перейдем от карты Англии к плоскому графу G и построим граф G^*, двойственный к графу G (см. предыдущую задачу). Поскольку внешняя грань графа G не соответствует никакому графству, то удалим из G вершину, находящуюся в этой грани вместе с выходящими из нее ребрами. Полученный граф имеет четное число вершин нечетной степени (см. задачу 36). Эти вершины соответствуют графствам, имеющим нечетное число соседей. Кроме того, в плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит пяти (см. задачу 84). Этой вершине соответствует графство, у которого не более пяти соседей.

90. Будем считать схему парка графом G, и построим двойственный мультиграф G^* (см. рис. 0.72).

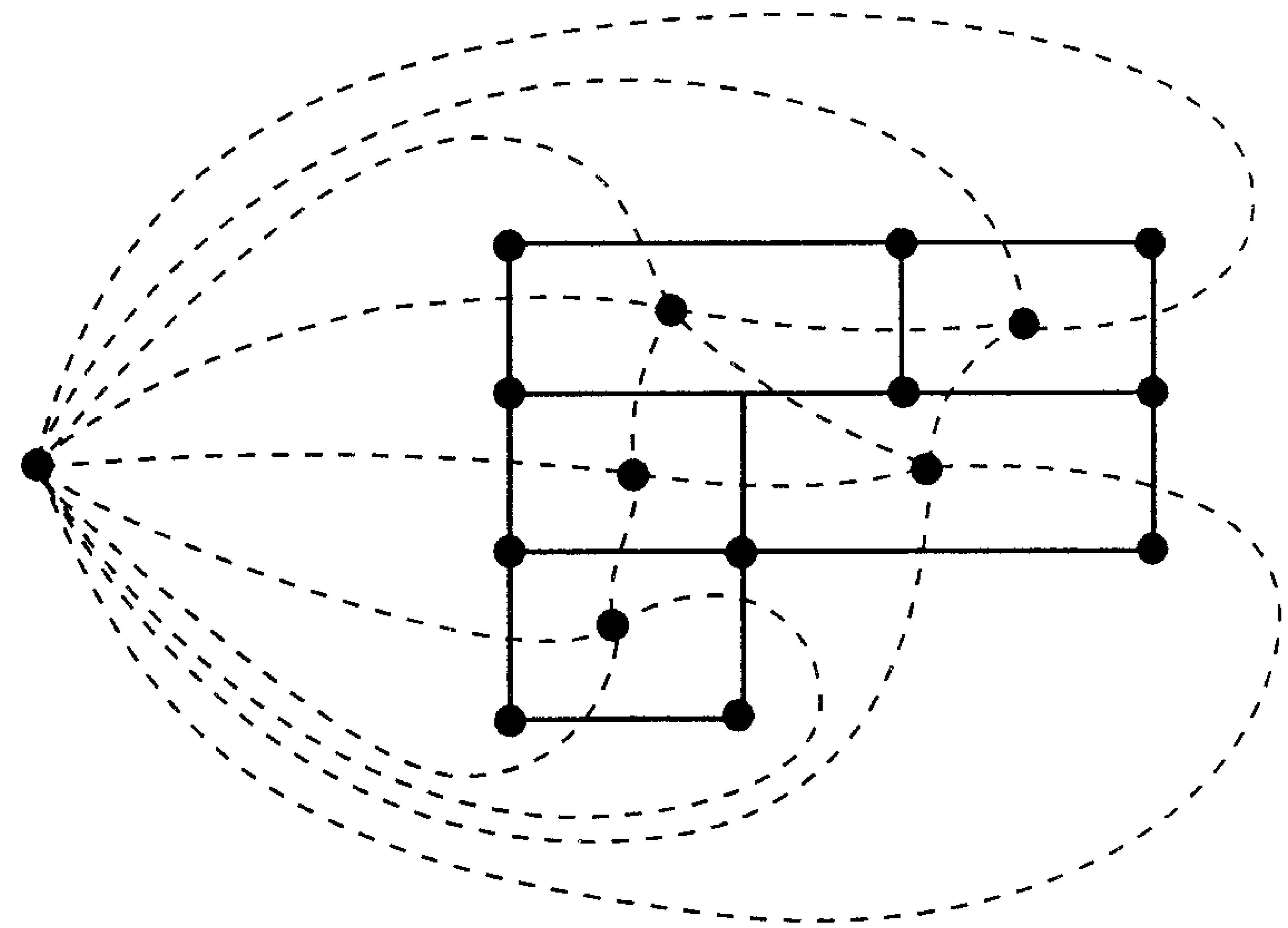

Рис. 0.72

В мультиграфе G^* ровно две вершины имеют нечетную степень. Поэтому G^* содержит эйлерову цепь, соединяющую эти вершины (см. задачи 62 и 64). Эта цепь и определит один из возможных вариантов прогулки хулигана Вадима.

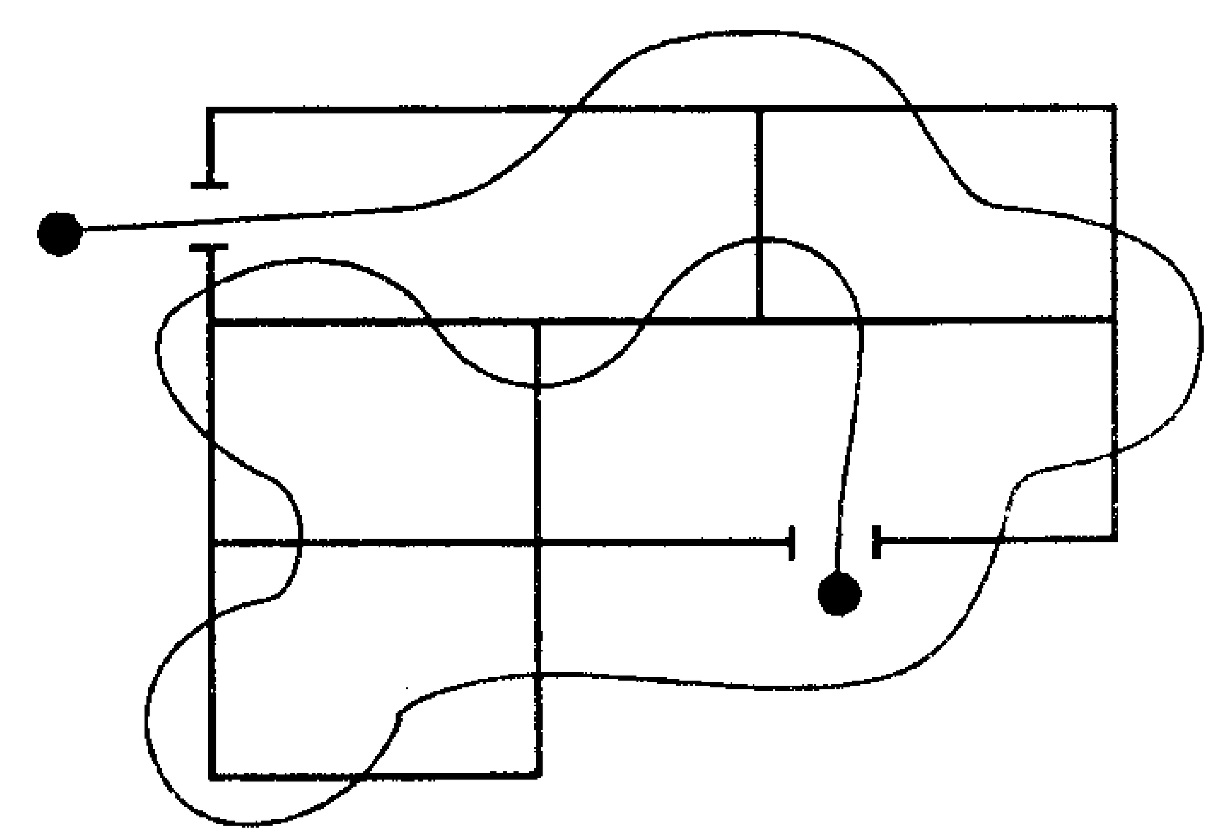

Рис. 0.73

91. С помощью стереографической проекции, как в задаче 78, перейдем от выпуклого многогранника к графу G, его изображающему на плоскости. Построим граф G^*, двойственный к графу G. Известно, что любой граф имеет хотя бы две вершины одинаковой степени (см. задачу 1). Этим вершинам и будут соответствовать грани многогранника, имеющие одинаковое число ребер.

92. Первое решение. Как и в предыдущей задаче перейдем от выпуклого многогранника к плоскому графу G . Известно (см. задачу 84), что в графе G существует вершина, степень которой не превосходит пяти. Этой вершине соответствует грань многогранника, не являющаяся шестиугольником.

Второе решение. Пусть нужный выпуклый многогранник существует и n – число его граней. Тогда сумма плоских углов в каждой грани равна 4π, а сумма всех плоских углов равна $4\pi n$. С другой стороны, число вершин многогранника не превосходит $\frac{6n}{3} = 2n$, а сумма плоских углов при одной вершине строго меньше 2π. Поэтому сумма всех плоских углов многогранника должна быть строго меньше $4\pi n$. Получено противоречие.

93. Рассмотрим граф G, вершины которого соответствуют шестерням, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие шестерни не должны находиться на одном валу.

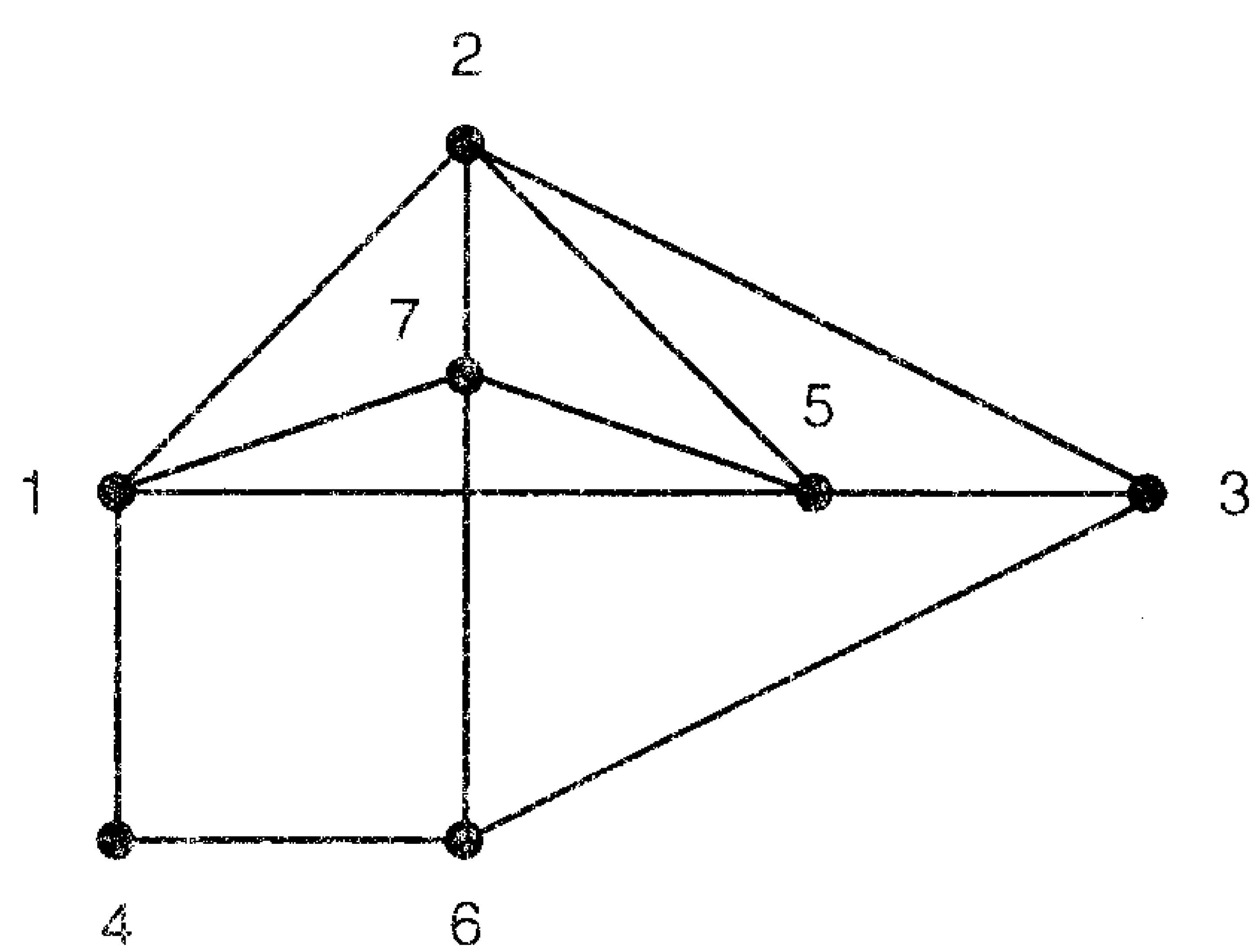

Рис. 0.74

Рассмотрим произвольный граф. Окрасим каждую его вершину в какой-либо цвет, причем смежные вершины окрасим в разные цвета. Такая раскраска вершин графа называется **правильной**. Граф, для которого существует правильная раскраска в k-цветов, называется ***k*-раскрашиваемым**. Минимальное k, при котором граф является k-раскрашиваемым, называется **хроматическим числом** графа и обозначается $\chi(G)$.

Очевидно, что в нашей задаче любая правильная раскраска построенного графа G определяет возможность размещения шестерен: вершины графа, окрашенные в один цвет, задают множество шестерен, которые можно размещать на одном валу. Верно и обратное: от заданного способа размещения шестерен можно перейти к правильной раскраске вершин графа. Поэтому хроматическое число $\chi(G)$ графа G равно минимальному числу валов, необходимых для проектирования коробки скоростей.

Так как все вершины полного графа попарно смежны, то для правильной раскраски полного графа с n вершинами необходимо n цветов. Граф G содержит полный подграф K_4 , значит раскрасить его вершины менее, чем в 4 цвета невозможно. Одна из раскрасок в 4 цвета показана на рис. 0.75. Следовательно, $\chi(G)$=4, и минимальное число валов, на которые можно установить шестерни, равно четырем.

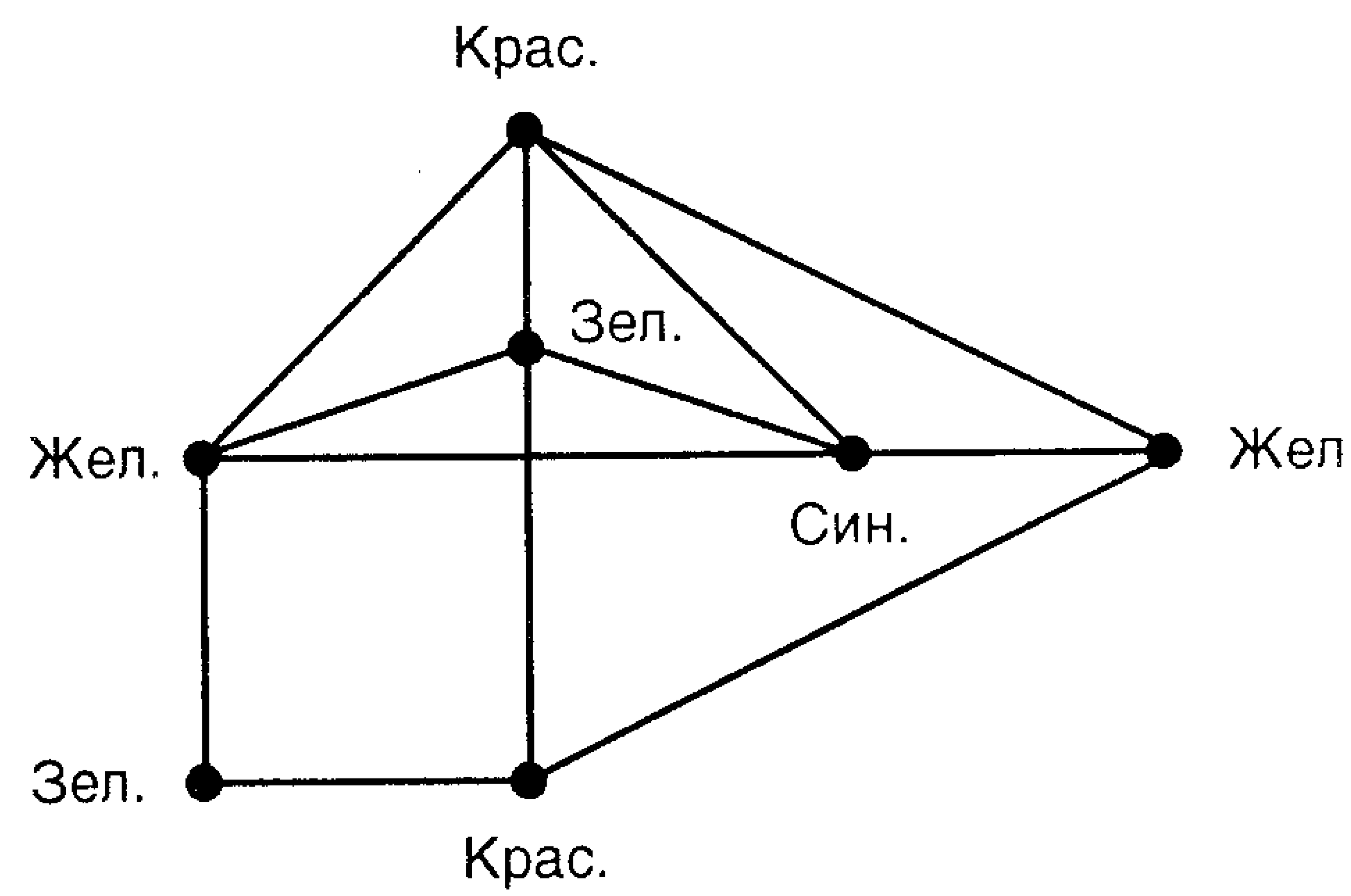

Рис. 0.75

94. Построим граф G_1 несовместимости лекций. Вершины графа соответствуют лекциям, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им лекции нельзя читать одновременно.

Очевидно, что в нашей задаче любая правильная раскраска определяет некоторое расписание лекций: лекции, соответствующие вершинам, окрашенным в один цвет можно читать одновременно. Верно и обратное: любое расписание определяет правильную раскраску вершин графа G_1 . Минимальное число часов, необходимых для прочтения всех лекций равно $\chi(G_1)$.

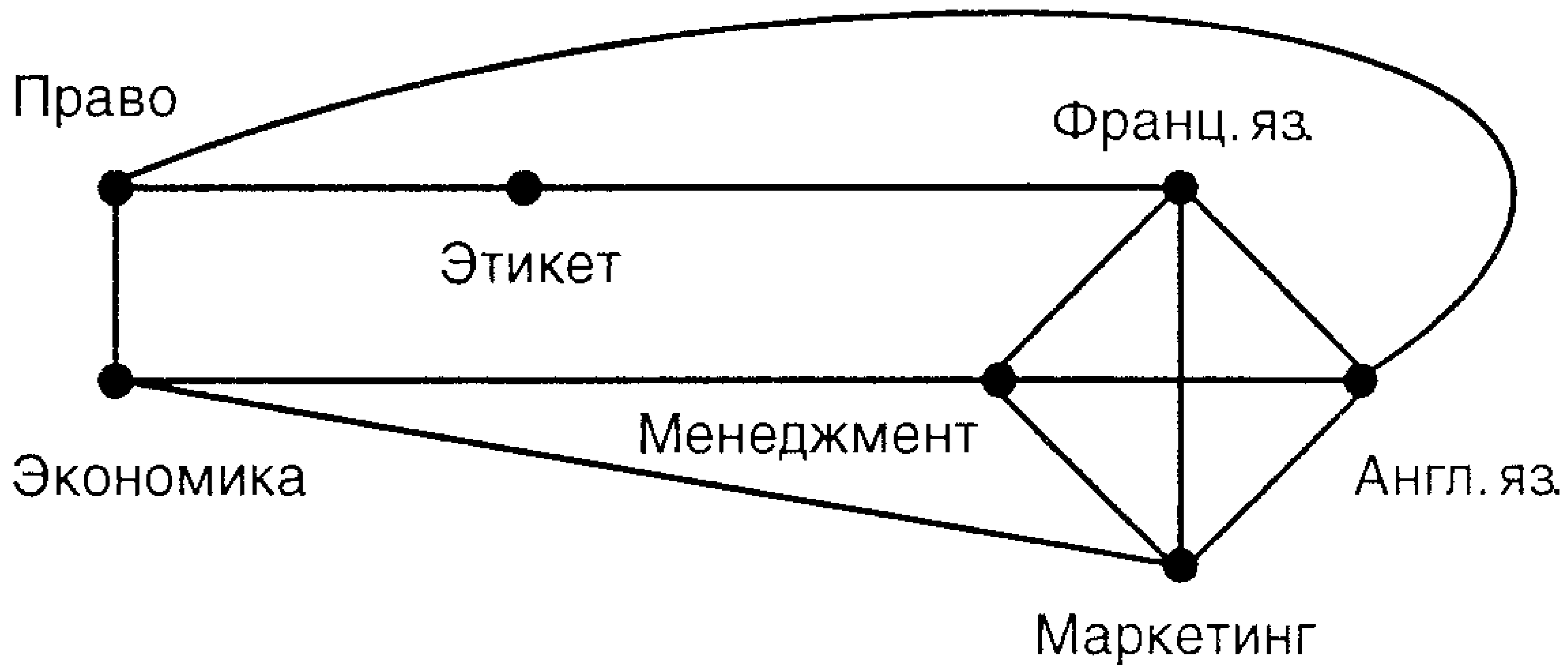

Рис. 0.76

Поскольку граф G_1 содержит полный подграф K_4, то его вершины нельзя правильно раскрасить менее, чем в 4 цвета. На рис. 0.77 изображена одна из таких возможных раскрасок. Следовательно, минимальное число часов, необходимо для прочтения всех лекций в четверг, равно четырем.

Рассмотрим два графа: граф G_1 и граф G из предыдущей задачи.

Два графа G и H называются **изоморфными**, если можно занумеровать вершины каждого из них так, что если две вершины будут смежными в одном графе, то вершины с такими же номерами будут смежными во втором. В случае изоморфизма графов G и H пишут $G \cong H$.

Графы G и G_1 изоморфны. На рис. 0.74 задана одна из нумераций вершин графа G, а на рис. 0.77 нужная нумерация вершин графа G_1

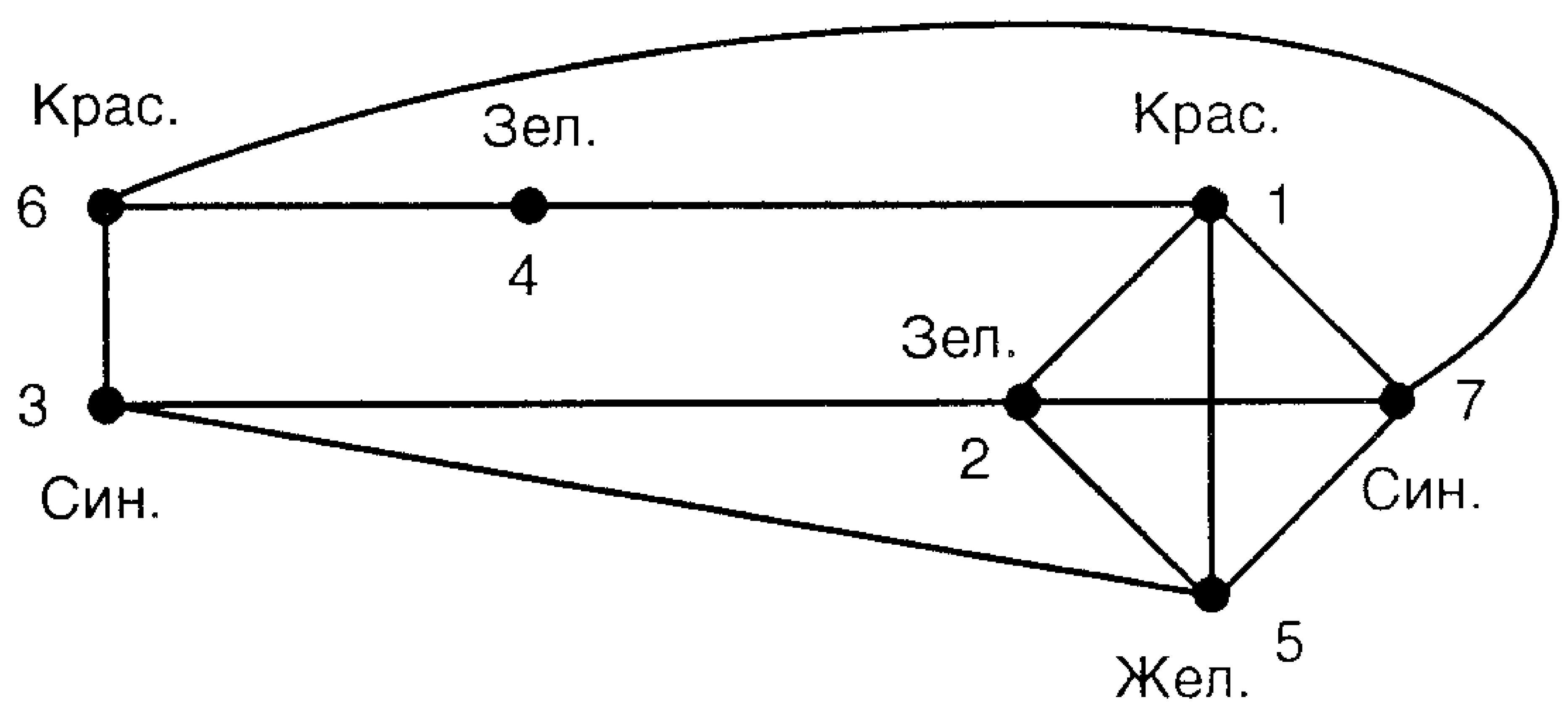

Рис. 0.77

95. Построим граф G несовместимости лекций (см. предыдущую задачу).

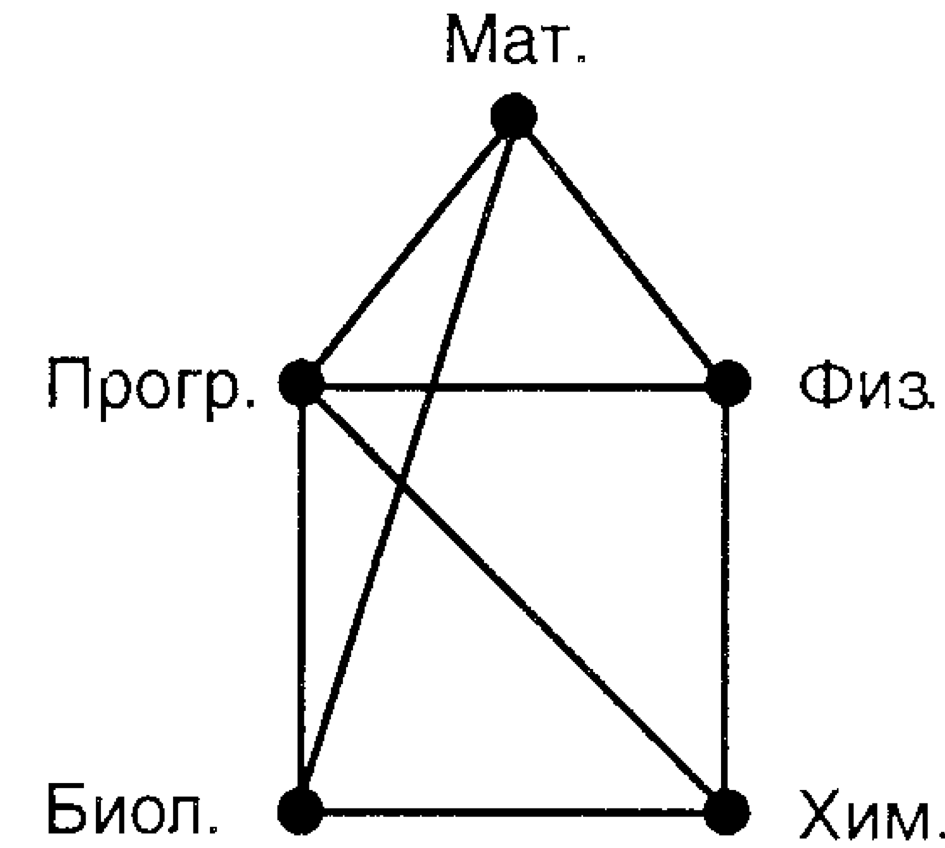

Рис.0.78

Каждому часовому промежутку времени (с 9.00 до 10.00, с 11.00 до 11.00 и т.д.) поставим в соответствие свой цвет. Тогда число вариантов распределения лекций по временным промежуткам в первую смену будет равно числу различных способов правильной раскраски графа G тремя цветами, а во вторую смену — четырьмя цветами.

Количество попарно различных способов правильной раскраски графа G в t цветов называется **хроматической функцией** графа и обозначается $f(G,t)$. Очевидно, что наименьшее t, для которого $f(G,t)>0$, есть $\chi(G)$.

Для некоторых графов хроматическая функция определяется легко. Например, $f(O_n,t)=t^n$, так как цвета всех вершин пустого графа можно выбирать независимо друг от друга.

При правильной раскраске полного графа K_n первая вершина может быть окрашена в любой из t заданных цветов, а для окраски каждой из последующих вершин разрешается использовать на один цвет меньше, чем для предыдущей. Поэтому

$$f(K_n,t)=\begin{cases} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1), & \text{если } t \ge n, \\ 0, & \text{если } t<n. \end{cases}$$

В общем случае вычисление хроматической функции связано с трудностями. Докажем теорему, позволяющую несколько упростить вычисление $f(G,t)$.

Рассмотрим операцию слияния двух несмежных вершин u_1 и u_2. При этой операции вершины u_1 и u_2 объединяются в одну вершину u_0, которая будет смежна со всеми вершинами, с которыми были смежны вершины u_1 и u_2 (см. рис. 0.79).

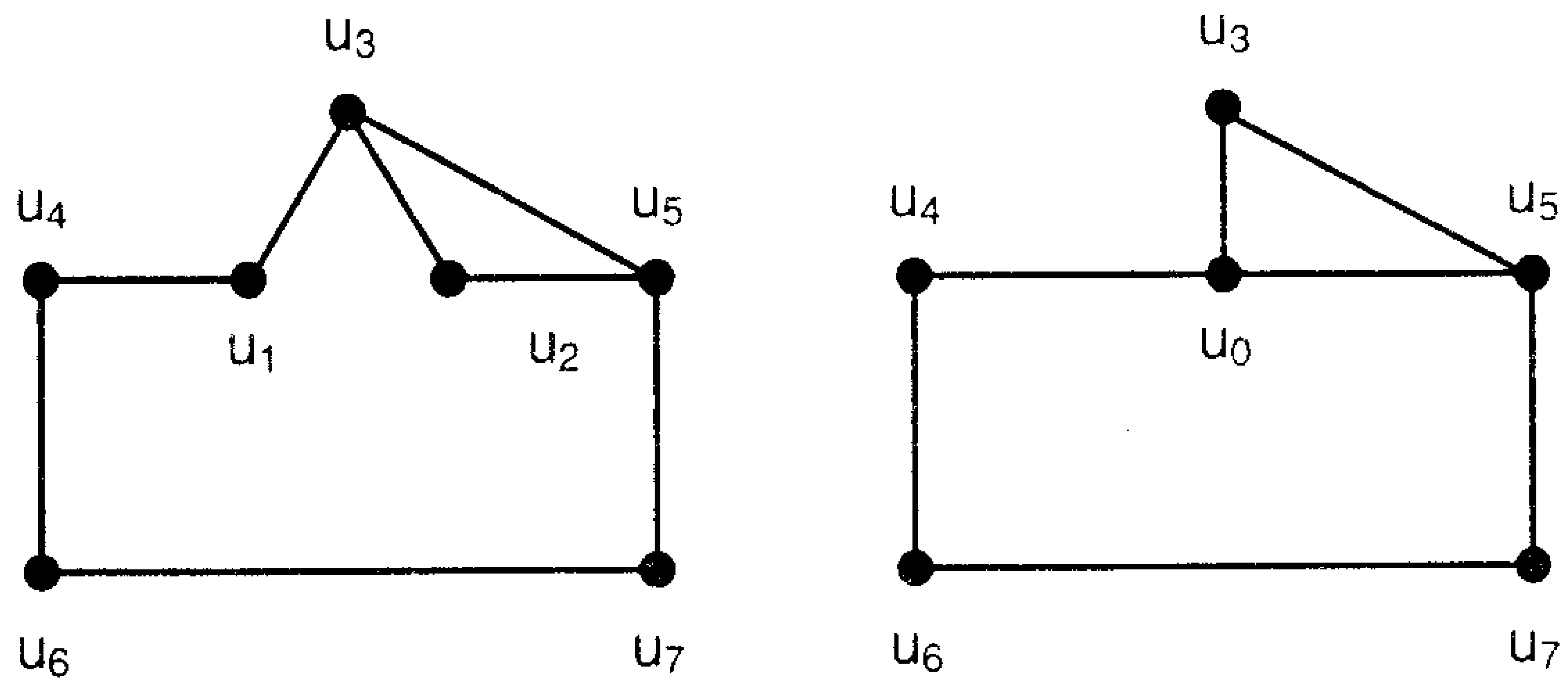

Рис. 0.79

➻ ***Теорема. Пусть** u **и** v **— две несмежные вершины графа** G. **Если граф** G_1 **получается из графа** G **добавлением ребра** (u,v), **а граф** G_2 **— слиянием вершин** u **и** v, **то***

$$f(G,t) = f(G_1,t) + f(G_2,t).$$

Доказательство. Число правильных раскрасок графа G в t цветов, при которых цвета вершин u и v различны, не изменится, если к G присоединить ребро (u,v), поэтому оно равно $f(G_1,t)$. Аналогично, число правильных раскрасок графа G в t цветов, при которых цвета вершин u и v совпадают, равно $f(G_2,t)$. Складывая эти два числа, получим число правильных раскрасок графа G в t цветов.

Теорема доказана.

Теорема позволяет свести вычисление функций $f(G,t)$ произвольных графов к вычислению хроматических функций графов с большим числом ребер или с меньшим числом вершин, и следовательно, в конце концов, к хроматическим функциям полных графов. Поскольку $f(K_n,t)$ — многочлен от t, то хроматическая функция является многочленом от t.

Найдем хроматическую функцию построенного графа G. При этом вместо $f(G,t) = f(G_1,t) + f(G_2,t)$ будем писать $G = G_1 \oplus G_2$ или рисовать соответствующие графы.

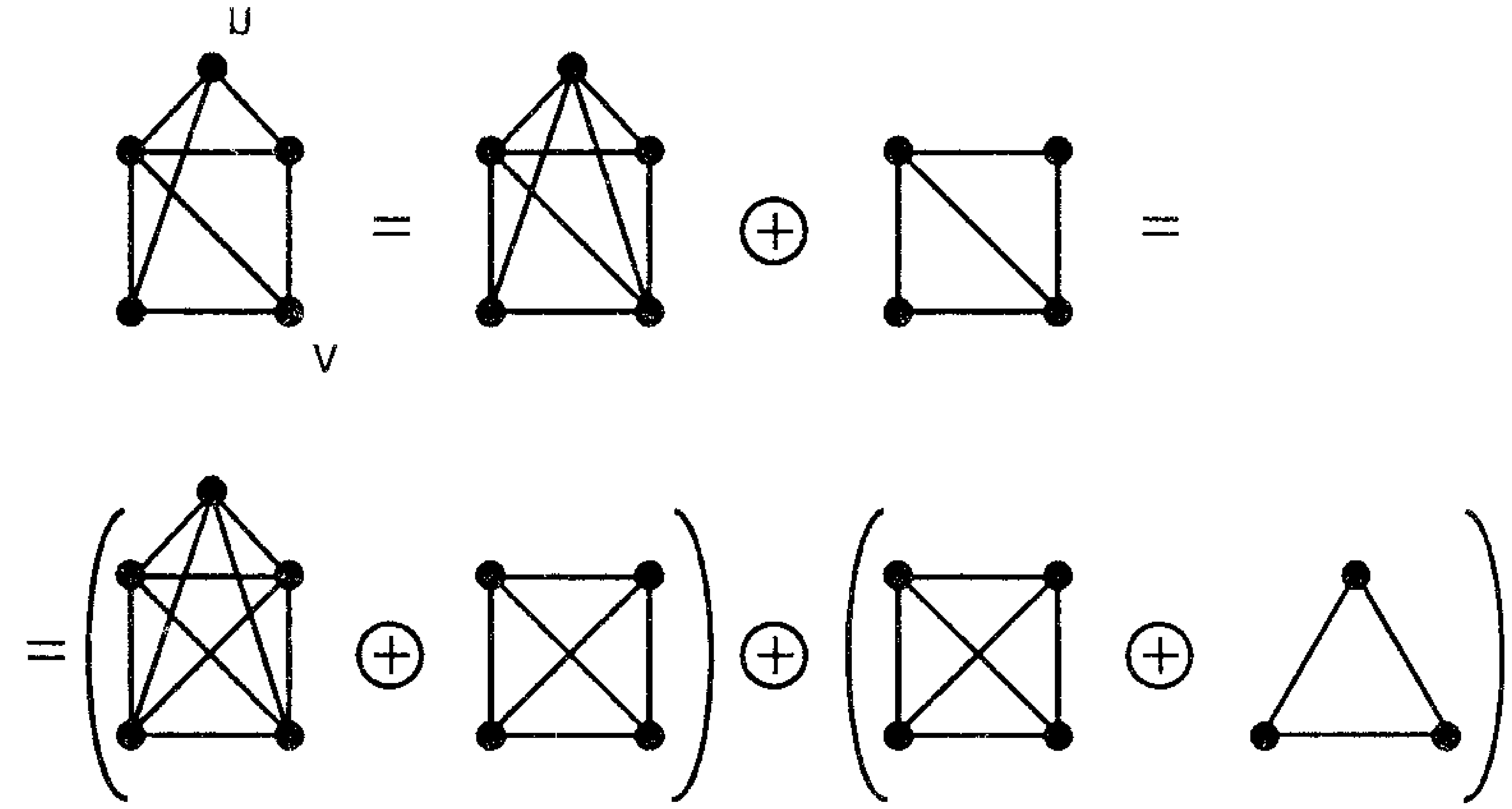

Рис. 0.80

Таким образом, $f(G,t) = f(K_5,t) + 2f(K_4,t) + f(K_3,t)$.

Используя вычисленные ранее значения хроматических функций полных графов имеем:

$$f(G,t) = t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) + 2t(t-1)(t-2)(t-3) + t(t-1)(t-2).$$

Отсюда $f(G,3) = 0 + 0 + 3\times2\times1 = 6$.

$$f(G,4) = 0 + 2\times4\times3\times2\times1 + 4\times3\times2 = 72.$$

Следовательно, есть 6 способов распределения лекций в первую смену и 72 способа — во вторую.

96. Перейдем от карты к плоскому графу G (см. задачи 88 – 89). Задача заключается в раскраске граней графа G таким образом, что две грани, имеющие общее ребро, будут окрашены в разные цвета. Такую раскраску будем называть **правильной раскраской граней**.

Построим граф G^*, двойственный к графу G. От правильной раскраски граней графа G можно естественным образом перейти к раскраске вершин графа G^*, окрасив вершину графа G^* в цвет той грани, в которой находится эта вершина. Очевидно, что такая раскраска графа G^* является правильной. Аналогично можно показать, что от любой правильной раскраски графа G^* можно перейти к правильной раскраске граней графа G.

Таким образом, мы показали, что раскраска географической карты нужным нам образом эквивалентна правильной раскраске вершин плоского графа G^* шестью красками. Пусть граф G^* имеет n вершин. В графе G^* есть вершина v_1, степень которой не больше пяти (см. задачу 84).

Удалим вершину v_1 вместе с выходящими из нее ребрами. Полученный граф обозначим G_{n-1}. В нем есть вершина v_2, степень которой не больше пяти. Удалим ее вместе с выходящими ребрами из графа G_{n-1} и полученный граф обозначим G_{n-2}. Эту процедуру мы будем продолжать до тех пор, пока не получится граф G_6, содержащий 6 вершин. Рассмотрим последовательность графов G_6, G_7, ... , G_{n-1}, G^*. Каждый последующий граф этой последовательности можно получить из предыдущего добавлением одной новой вершины и соединением ее ребрами не более, чем с пятью старыми.

Раскрасим вершины графа G_6 шестью красками. Новая вершина, появившаяся в графе G_7, будет смежна не более, чем с пятью вершинами графа G_6. Даже если эти вершины будут окрашены в разные цвета, то новую вершину можно окрасить в шестой цвет. Таким же образом можно окрасить новую вершину при переходе от графа G_7 к графу G_8 и т.д. Это значит, что граф G^* можно правильно раскрасить шестью цветами. Из доказанной ранее эквивалентности задач следует, что произвольную географическую карту можно так раскрасить шестью красками, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.

97. Как и в предыдущей задаче докажем, что пятью красками можно правильно раскрасить вершины двойственного графа G^*, полученного из карты.

Проведем доказательство индукцией по числу вершин графа. Утверждение справедливо для графов не более, чем с пятью вершинами. Предположим, что оно верно для графов, имеющих не более n вершин.

Рассмотрим произвольный плоский граф с $(n + 1)$ вершиной. Согласно задаче 84, этот граф содержит вершину v_0, степень которой не превосходит пяти. Отдельно рассмотрим два случая.

1. Степень вершины v_0 не превосходит четырех.

Удалим вершину v_0 из графа вместе с выходящими из нее ребрами. По индуктивному предположению вершины получившегося графа можно правильно раскрасить пятью красками. После этого окрасим вершину v_0 в тот из пяти цветов, который не использован при окраске смежных с ней вершин.

2. Степень вершины v равна пяти.

Среди смежных с v_0 вершин обязательно найдутся две несмежные между собой вершины v_1 и v_2, так как в противном случае граф G содержал бы подграф K_5, т.е. не был бы планарным (см. задачу 80). Удалим из графа G^* вершину v_0 вместе с выходящими из нее ребрами и в получившемся графе, как в задаче 95, сольем вершины v_1 и v_2 в одну вершину v (см. рис. 0.81).

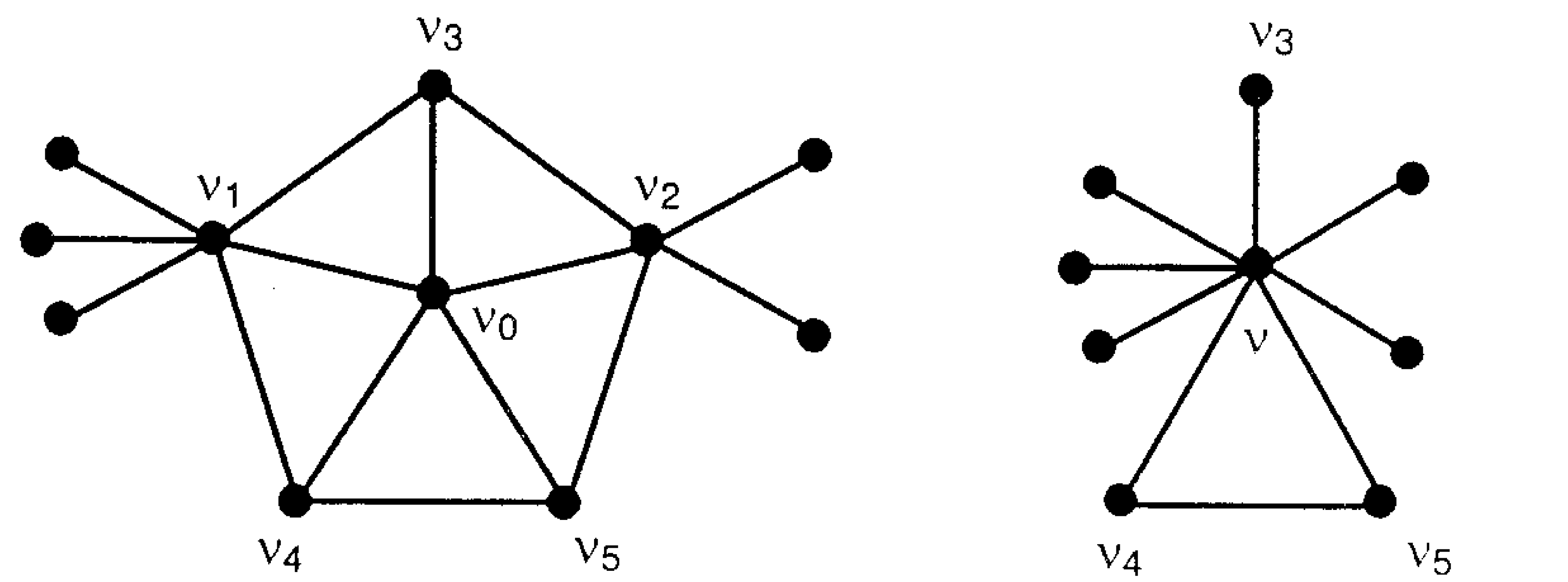

Рис. 0.81

Граф G', получившийся в результате таких операций, является плоским, содержит $(n - 1)$ вершину, и по индуктивному предположению его можно правильно раскрасить в 5 цветов. Теперь окрасим в графе G^* вершины v_1 и v_2 в цвет вершины v, остальные вершины в те же цвета, что и в графе G', а вершину v_0 в цвет, не использованный при окраске смежных с ней вершин. Мы получили правильную раскраску вершин графа G^*. Следовательно, любую географическую карту можно раскрасить пятью красками нужным нам образом.

Замечание. На самом деле произвольную географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, что любые две соседние страны будут окрашены в разные цвета.

98. Перейдем от карты острова к плоскому графу G, а затем к двойственному графу G^* (см. задачи 88, 89). Из задачи 96 следует, что правильная раскраска графа G^* тремя красками эквивалентна нужной раскраске карты острова. Граф G^* содержит вершину v_1, степень которой не больше двух. Такой вершиной может быть вершина, соответствующая стране, расположенной на берегу моря. Удалим из графа G^* вершину v_1 вместе с выходящими из нее ребрами. В полученном графе G_{n-1} опять найдется вершина v_2, степень которой не больше двух. Как и в задаче 96, получим последовательность графов G_3, G_4, ..., G_{n-1}, G^*. Каждый граф в этой последовательности, кроме первого, можно получить из предыдущего добавлением одной новой вершины и соединением ее ребрами не более, чем с двумя старыми вершинами.

Раскрасим три вершины графа G_3 тремя красками. Так как новая вершина в графе G_4 смежна не более, чем с двумя вершинами графа G_3, то ее можно окрасить в цвет, не использованный при окраске этих вершин. Таким же образом можно правильно раскрасить тремя красками графы G_5, G_6 и т.д. Правильная раскраска в три цвета графа G^* определит правильную раскраску карты тремя красками.

99. Будем считать карту области графом G. По условию все вершины этого графа, не принадлежащие внешней грани, имеют четную степень. Построим граф G^*, двойственный к графу G, без внешней грани (см. рис. 0.82).

Из предыдущих задач вытекает, что если мы докажем, что граф G^* можно правильно раскрасить двумя красками, то решим и нашу задачу. Для этой цели докажем, что граф G^* двудольный.

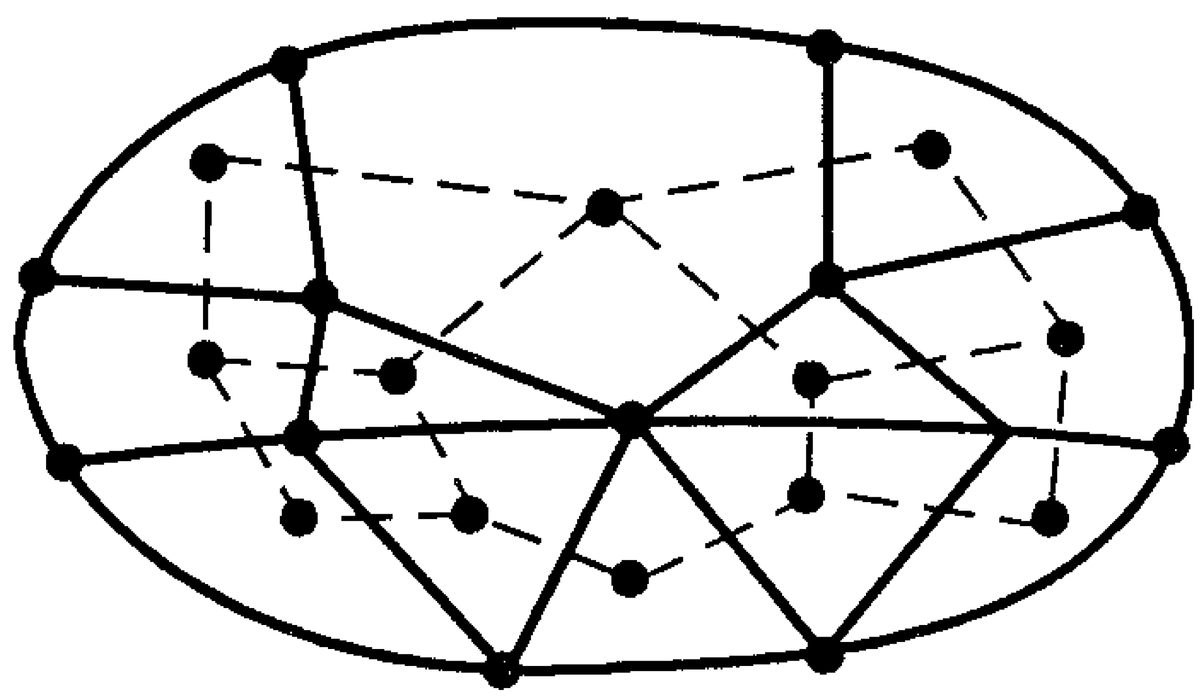

Рис. 0.82

Покажем, что любой цикл в графе G^* содержит четное число ребер. Если внутри цикла находится только одна вершина v графа G, то каждое ребро цикла пересекает ровно одно ребро, выходящее из вершины v, а по условию из v выходит четное число ребер (см. рис. 0.82).

Пусть внутри цикла находится несколько вершин графа G: v_1, v_2, ..., v_k (см. рис. 0.83).

Каждая вершина v_i окружена циклом C_i, имеющим внутри себя только эту вершину и содержащим четное число ребер. Сложив число ребер циклов C_i, получим в сумме четное число, равное числу ребер цикла C, сложенному с удвоенным числом ребер циклов C_i, не вошедших в C. Поэтому число ребер цикла C — четное.

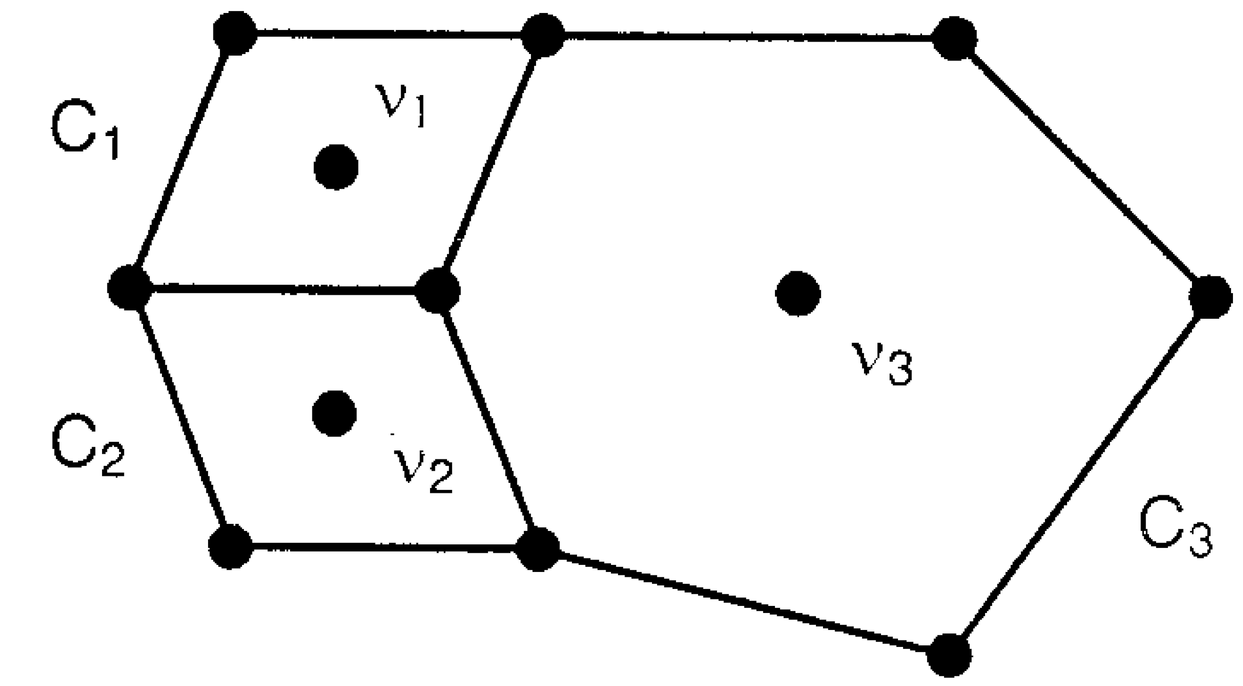

Рис. 0.83

Аналогично рассматривается случай, когда цикл C имеет повторяющиеся вершины.

➸ ***Теорема Кенига (1936 г.). Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.***

Доказательство. Необходимость. Пусть G — двудольный граф, C — один из его циклов длины k. Пройдем все ребра этого цикла в той последовательности, в какой они в нем расположены, начиная с некоторой вершины v. Так как концы каждого ребра лежат в разных долях, то k — четное число.

Достаточность. Не теряя общности, можно рассматривать только связные графы. Пусть связный граф G не имеет циклов нечетной длины.

Рассмотрим произвольную вершину v_0 и построим разбиение вершин графа G на два класса A и B следующим образом: к классу A отнесем вершину v_0 и любую такую вершину u, что расстояние между u и v_0 четное, к классу B отнесем любую такую вершину u, что расстояние между u и v_0 нечетное. Остается доказать, что любые две вершины из множества A или любые две вершины из множества B не смежны.

Пусть, например, существуют две смежные вершины u и w, входящие в один класс. Тогда ни одна из них не совпадает с v_0, так как вершина v_0 принадлежит классу A, а все смежные с ней вершины — классу B. Пусть, далее, U — кратчайшая цепь, соединяющая v_0 и u, W — кратчайшая цепь, соединяющая v_0 и w. Обозначим через v_1, v_2, ..., v_p общие вершины цепей U и W, считая от вершины v_0 (см. рис. 0.84).

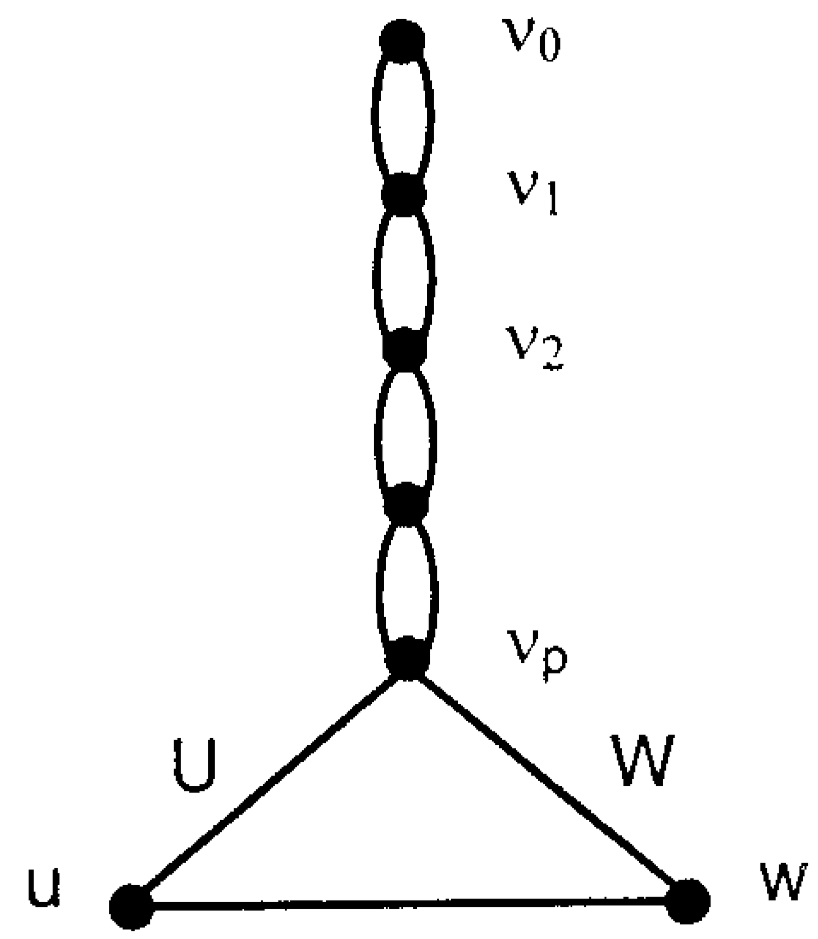

Рис. 0.84

Поскольку U и W — кратчайшие цепи, то их части от вершины v_0 до вершины v_1 имеют одинаковые длины. То же самое можно сказать и о частях цепей U и W от любой вершины v_i до вершины v_{i+1}. Поэтому части цепей от вершины v_p до вершин u и w имеют одинаковые четности. Но тогда объединение этих частей и ребра (u,w) является циклом нечетной длины, что запрещено условиями теоремы.

Теорема доказана.

Поскольку граф G^* имеет только циклы четной длины, то из доказанной теоремы вытекает его двудольность. Раскрасив вершины каждой доли своим цветом, получим правильную раскраску графа G^*. Отсюда следует, что карту области можно раскрасить двумя красками.

100. Как и ранее, считаем карту графом G. Тогда степень каждой вершины графа G будет четной. Из предыдущей задачи следует, что такую карту можно раскрасить двумя красками.

101. "Раздвоим" границы каждой страны (см. рис. 0.85).

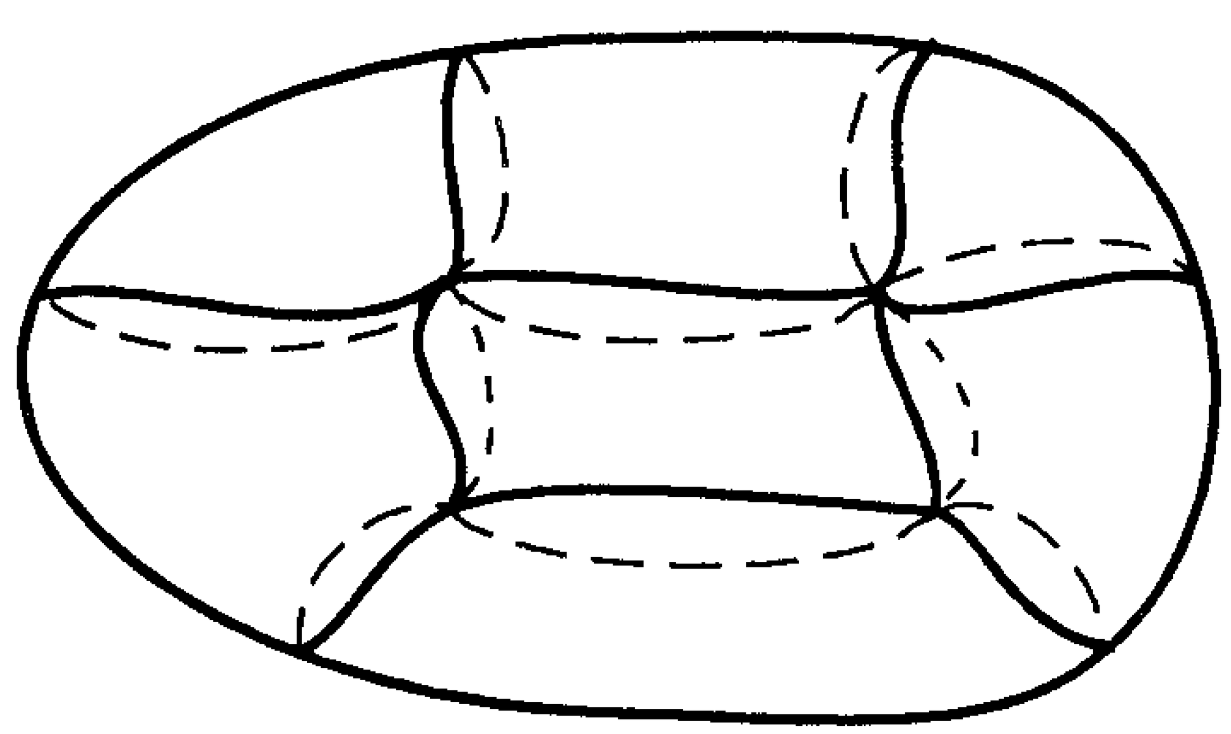
Рис. 0.85

Теперь внутри острова будут сходиться границы только четного числа стран. Согласно задаче 99 такую карту можно раскрасить двумя красками.

102. Естественным образом поставим в соответствие городу граф G, в котором вершины будут соответствовать перекресткам, а ребра — отрезкам улиц, соединяющим перекрестки.

Пусть G — произвольный граф. Множество вершин графа называется **независимым**, если никакие две вершины из этого множества не смежны. Независимое множество называется **наибольшим**, если оно содержит наибольшее число вершин среди всех независимых множеств. Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется **числом независимости** графа G и обозначается $a_0(G)$.

Множество вершин графа называется **покрытием** графа, если каждое ребро графа выходит из некоторой вершины множества. Покрытие графа G называется **наименьшим**, если число вершин в нем наименьшее среди всех покрытий графа. Число вершин в наименьшем покрытии графа G называется **числом покрытия** и обозначается $\beta_0(G)$.

Например, для графа G, изображенного на рис. 0.86, множества вершин $\{4,7\}$, $\{1,2,3,7\}$, $\{5,2,3,8\}$ являются независимыми, причем последние два — наибольшими. Множества вершин $\{1,2,3,5,6,8\}$, $\{4,5,6,8\}$, $\{4,5,6,7\}$ являются покрытиями, причем последние два — наименьшими. Для этого графа $a_0(G) = 4$, $\beta_0(G) = 4$.

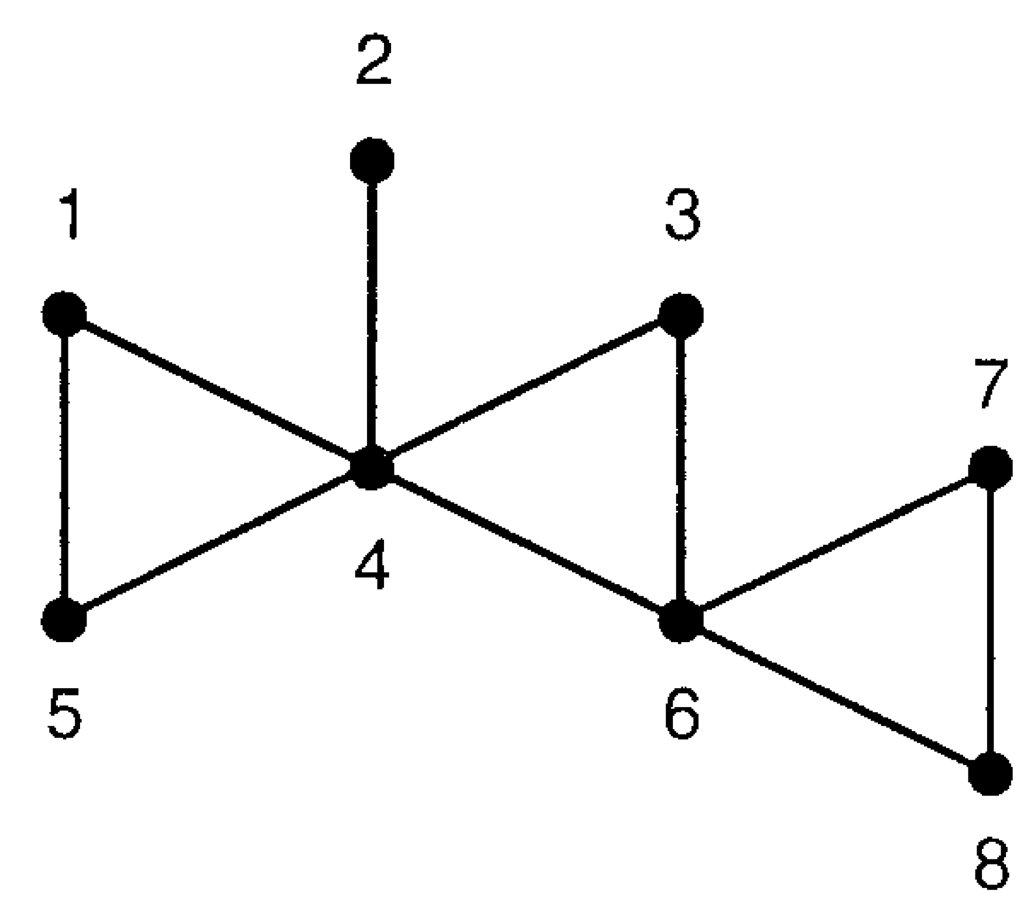

Рис. 0.86

➤ ***Теорема. Множество U вершин графа G является наименьшим покрытием тогда и только тогда, когда множество $\overline{U}$ остальных вершин является наибольшим независимым множеством. Следовательно,***

$$a_0(G) + \beta_0(G) = n,$$

где n — число вершин графа G.

Доказательство. По определению множество $\overline{U}$ независимо тогда и только тогда, когда в графе нет ребра, оба конца которого содержатся в $\overline{U}$, т.е. хотя бы один из концов каждого ребра принадлежит U. Последнее означает, что U — покрытие.

Поскольку сумма числа вершин множеств U и $\overline{U}$ равна n, то, очевидно, наибольшим множествам $\overline{U}$ соответствуют наименьшие множества U и наоборот.

Теорема доказана.

Из условия задачи следует, что для построенного графа G, у которого $n = 75$ и $a_0(G) = 30$, нужно найти $\beta_0(G)$ Из формулы, доказанной в теореме следует, что $\beta_0(G) = 45$. Поэтому в городе нужно установить 45 телекамер.

103. Так, как и в предыдущей задаче построим граф G, описывающий перекрестки и улицы города. Из условий задачи следует, что число независимости графа $a_0(G) = 30$. Маршруты патрулирования будут соответствовать цепям графа G. Нужно доказать, что вершины графа можно разбить не более, чем на 30 цепей, так чтобы эти цепи не имели общих вершин.

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_k$ — разбиение вершин графа на минимальное число цепей, и $k>30$. Рассмотрим первые вершины цепей: $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Поскольку их больше тридцати, то среди них обязательно найдется хотя бы одна пара смежных. Пусть это будут вершины a_1 и a_2. Объединив цепи $L_1 = (a_1, \ldots, b_1)$ и $L_2 = (a_2, \ldots, b_2)$ в одну цепь $L_1 = (b_1, \ldots, a_1, a_2, \ldots, b_2)$, получим разбиение вершин на меньшее число цепей, что противоречит первоначальному выбору разбиения.

Следовательно, число цепей, на которые можно разбить вершины графа, будет не больше тридцати. Поэтому возможно обойтись не более, чем тридцатью маршрутами патрулирования.

104. Построим граф G, описывающий улицы и перекрестки города, как в предыдущих задачах. Из условий задачи следует, что минимальная

степень вершин этого графа $\delta(G) = 4$. Поскольку колонки на соседних перекрестках устанавливать нельзя, то установленным колонкам будет соответствовать независимое множество вершин графа G.

➤ ***Теорема. Для любого графа G верно неравенство***

$$a_0(G) \le \frac{|EG|}{\delta(G)},$$

где $|EG|$ – число ребер графа G.

Доказательство. Из каждой вершины наибольшего независимого множества V выходит по крайней мере $\delta(G)$ ребер. Так как вершины из V несмежны, то все эти ребра различные. Поэтому

$$|EG| \ge a_0(G) \cdot \delta(G).$$

Отсюда и получается нужное неравенство.

Теорема доказана.

В нашей задаче $a_0(G) \le \dfrac{282}{4} = 70\dfrac{1}{2}$.

Поэтому в городе можно установить не более 70 колонок.

105. Построим граф G, описывающий улицы и перекрестки города, как в предыдущих задачах.

Реберным графом $L(G)$ произвольного графа G называется граф, вершины которого соответствуют ребрам графа G, и две вершины являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра графа G имеют общий конец. Следовательно, реберный граф $L(G)$ имеет столько вершин, сколько ребер имеет граф G.

На рис.0.87 совмещены два графа — G и $L(G)$. Вершины графа G темные кружочки, вершины графа $L(G)$ — светлые кружки. Ребра графа G — тонкие линии, ребра графа $L(G)$ — жирные линии.

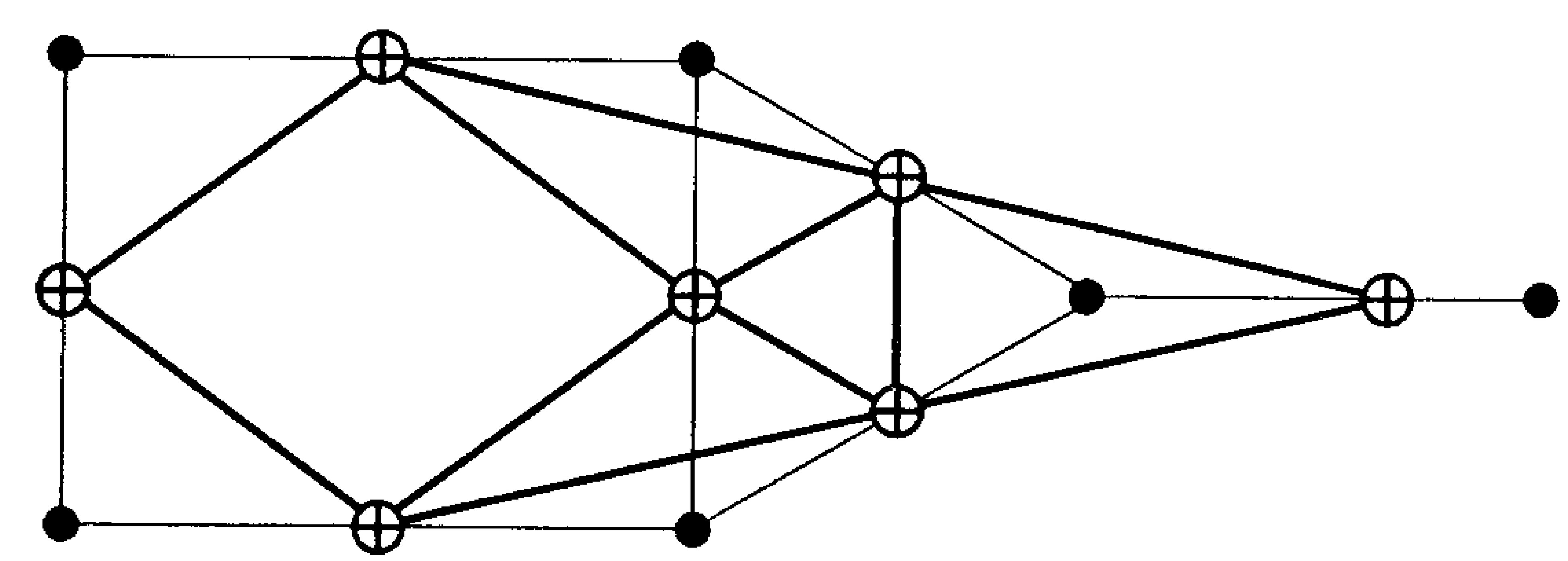

Рис. 0.87

Рассмотрим какое-либо размещение колонок в городе, удовлетворяющее условию. Отметим множество S вершин графа $L(G)$, соответствующее отрезкам улиц с колонками. Так как на двух отрезках улиц, выходящих из одного перекрестка, не может находиться двух колонок, то множество S является независимым множеством вершин графа $L(G)$. Поэтому для решения задачи мы должны доказать, что $\alpha_0(L(G)) \geq 20$.

➸ ***Теорема. Для любого графа G, имеющего n вершин, выполняется соотношение***

$$\alpha_0(G) \geq \frac{n}{\Delta(G)+1},$$

где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин графа G.

Доказательство. Пусть $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{\alpha_0}\}$ — наибольшее независимое множество вершин графа G, содержащее α_0 вершин. Для каждой вершины v_i из S рассмотрим множество $N(v_i)$, которое содержит вершину v_i и все смежные с ней вершины. (См. рис. 0.88, на котором $S = \{1,5\}$, $N(1) = \{1,2,3,4\}$, $N(5) = \{5,2,4\}$.)

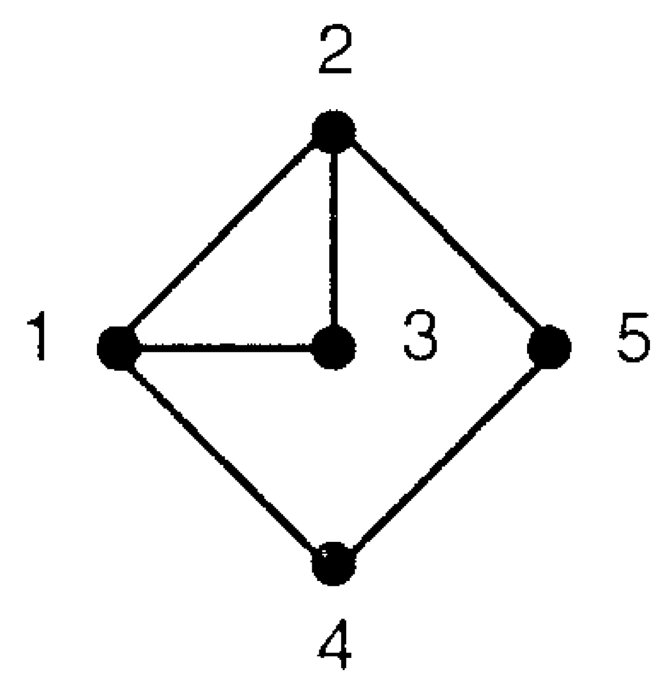

Рис 0.88

Каждая вершина графа G обязательно попадет хотя бы в одно множество $N(v_i)$, так как в противном случае непопавшую вершину можно добавить к S и получить еще большее независимое множество. Число вершин в множестве $N(v_i)$ равно $d(v_i)+1$, где $d(v_i)$ — степень вершины v_i. Поэтому

$$n \leq (d(v_1)+1) + (d(v_2)+1) + \ldots + (d(v_{\alpha_0})+1) \leq$$

$$\leq (\Delta(G)+1) + (\Delta(G)+1) + \ldots + (\Delta(G)+1) = \alpha_0 \cdot (\Delta(G)+1).$$

Отсюда $\alpha_0 \geq \dfrac{n}{\Delta(G)+1}$.

Теорема доказана.

Граф $L(G)$ имеет 210 вершин, и наибольшая из степеней его вершин $\Delta(L(G)) \leq 10$, поскольку отрезок улицы может соединять два перекрестка, из которых выходит еще по пять улиц.

Из доказанной теоремы следует

$$\alpha_0(L(G)) \geq \frac{210}{\Delta(L(G))+1} \geq \frac{210}{10+1} = 19\frac{1}{11}.$$

Поэтому в городе может быть установлено не менее 20 автоколонок.

106. Построим граф G, описывающий перекрестки и улицы города, как в предыдущих задачах.

Множество V вершин графа G называется **доминирующим множеством**, если любая вершина, не принадлежащая V, смежна с какой-либо вершиной из V. Доминирующее множество, которое имеет наименьшее число вершин среди всех доминирующих множеств графа G, называется **наименьшим**, а число вершин в нем называется **числом доминирования** и обозначается $\gamma(G)$.

Докажем неравенство $\gamma = \gamma(\mathrm{G}) \geq \dfrac{\mathrm{n}}{\Delta(\mathrm{G})+1}$,

где n — число вершин графа G, а $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней его вершин. Объединение вершин наименьшего доминирующего множества и вершин, смежных с ними, дает множество всех вершин графа G. Поэтому

$$n \leq (d(v_1)+1) + (d(v_2)+1) + \ldots + (d(v_\gamma)+1) \leq$$

$$\leq (\Delta(G)+1) + (\Delta(G)+1) + \ldots + (\Delta(G)+1) = \gamma(G)(\Delta(G)+1).$$

Отсюда $\gamma(\mathrm{G}) \geq \dfrac{\mathrm{n}}{\Delta(\mathrm{G})+1}$.

По условию задачи полицейские участки соответствуют вершинам доминирующего множества. Поэтому

$$\gamma(\mathrm{G}) \geq \frac{155}{6+1} = 22\frac{1}{7}.$$

Следовательно, в городе не менее 23 участков.

107. Построим двудольный граф G, вершины одной доли (A) которого соответствуют юношам, другой доли (B) — девушкам, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие юноша и девушка знакомы. Пусть некоторое число знакомых юношей и девушек танцуют в парах. Выделим ребра, соединяющие вершины, соответствующие танцующим. Выделенные ребра не будут иметь общих вершин.

Паросочетанием в графе называется множество его ребер, в котором каждая пара ребер не имеет общей вершины. Поскольку каждый юноша на вечере должен танцевать, то нужно доказать, что в графе G существует паросочетание, ребра которого выходят из каждой вершины доли A. Такое паросочетание называется **паросочетанием из A в B**.

Пусть X — любое подмножество множества A. Через $N(X)$ обозначим подмножество вершин из B, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из X.

➳ ***Теорема. Для существования паросочетания из А в B в двудольном графе необходимо и достаточно, чтобы для любого множества вершин X из A множество $N(X)$ имело вершин не меньше, чем X, т.е. выполнялось неравенство***

$$|X| \le |N(X)|. \qquad (*)$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Доказательство проведем индукцией по n — числу вершин в доле А. Для n=1 утверждение вытекает из того, что для одной вершины u в А обязательно найдется смежная ей вершина v в В, и ребро (u,v) будет нужным паросочетанием. Пусть утверждение доказано для всех чисел меньших n. Докажем его для числа n. Рассмотрим два случая.

1. Пусть для любого множества X ($|X| < n$) выполняется неравенство $|X| < |N(X)|$. Рассмотрим произвольное ребро (u,v) и удалим из графа вершины u и v вместе с выходящими из них ребрами. Полученный граф обозначим G_1. Его доли A_1 и B_1 получены из долей A и B графа G. Рассмотрим любое подмножество X_1 множества A_1. В графе G для X_1 выполняется неравенство $|X_1| < |N(X_1)|$. Так как из B удалена только одна вершина, то в графе G_1 будет выполняться соотношение $|X_1| < |N(X_1)|$. По индуктивному предположению в графе G_1 существует паросочетание из A_1 в B_1. Добавив к этому паросочетанию ребро (u,v), получим нужное паросочетание в графе G.

2. Существует такое множество X ($|X| = k < n$), для которого $|X| = |N(X)|$. Для графа G_1, порожденного множествами вершин X и $N(X)$, существует паросочетание из X в $N(X)$. Это следует из индуктивного предположения.

Покажем, что для двудольного графа G_2, порожденного остальными вершинами, будет выполняться условие (*). (В этом графе доля A_2 состоит из вершин доли A без X, доля B_2 — из вершин доли B без $N(X)$.)

Рассмотрим произвольное множество X_1 из A_2, пусть $|X_1| = i$. Тогда $i + k = |X_1| + |X| \le |N(X_1 \cup X)|$.

Вершины из множества X смежны в совокупности с k вершинами из множества B. Поэтому i вершин из множества X_1 смежны не менее, чем с i вершинами из множества B_2, т.е. в графе G_2 для любого подмножества X_1 вершин множества A_2 выполняется соотношение

$$|X_1| \le |N(X_1)|.$$

По индуктивному предположению в графе G_2 есть паросочетание из A_2 в B_2.

Объединив паросочетания в графах G_1 и G_2, получим паросочетание из A в B в графе G.

Теорема доказана.

Поскольку из условия задачи следует, что для графа G, описывающего знакомства молодых людей, выполняется условие теоремы, то в графе G существует паросочетание из A в B, и все юноши могут одновременно танцевать в парах со знакомыми девушками.

108. Построим двудольный граф G, описывающий знакомства молодых людей, как в предыдущей задаче. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G существует паросочетание, состоящее не менее, чем из 10 ребер.

➳ ***Теорема. Пусть G — двудольный граф, A и B — его доли, t — натуральное число, $t \le A$. Для существования в графе G паросочетания, содержащего t ребер необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества X множества A выполнялось соотношение***

$$|N(X)| \ge |X| + t - |A|, \qquad (**)$$

где $N(X)$ — множество вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из X.

Доказательство. Построим двудольный граф G, добавив $(|A| - t)$ новых вершин к доле B и соединив каждую из них ребром с каждой вершиной из A.

Очевидно, что существование в графе G паросочетания, содержащего t ребер, эквивалентно существованию в графе G паросочетания из A в получившуюся долю B_1 (см. рис. 0.89).

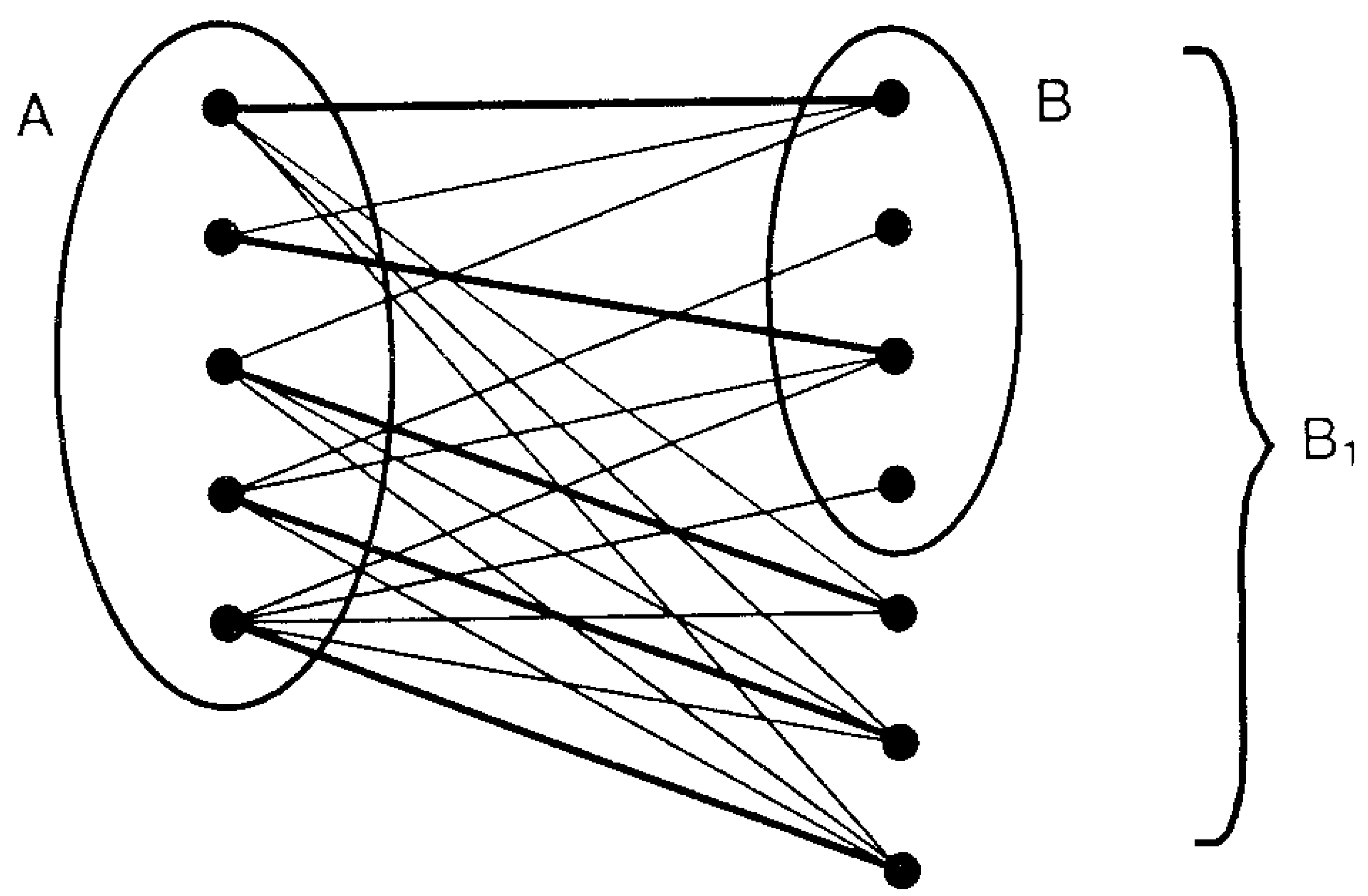

Рис. 0.89

Согласно теореме, доказанной в предыдущей задаче, для существования такого паросочетания необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для любого множества X из A:

$$|X| \le |N_1(X)|,$$

где $N_1(X)$ — множество вершин из доли B_1, смежных хотя бы с одной вершиной из X.

Последнее соотношение эквивалентно условию (**).

Теорема доказана.

В нашей задаче $A = 20$, $t = 10$, и условия (**) выполняется. Поэтому в графе G существует паросочетание из 10 ребер. Это означает, что не менее 10 юношей могут одновременно танцевать в паре со знакомыми девушками.

109. Построим граф G, описывающий знакомства молодых людей, как в предыдущих задачах.

Пусть первый танец танцевали юноши, соответствующие множеству X_1 из A, и девушки, соответствующие множеству Y_1 из B, а паросочетание M_1 определяет танцующие пары. Аналогично для второго танца: юношам соответствует множество X_2 из A, девушкам — Y_2 из B, танцующим парам — паросочетание M_2. (Возможно, что M_1 и M_2 будут иметь некоторые одинаковые ребра.) Для решения задачи докажем, что в графе G можно построить такое паросочетание M, что из каждой вершины множеств X_1 и Y_2 будут выходить ребра паросочетания.

Рассмотрим двудольный граф G_1, образованный ребрами паросочетаний M_1 и M_2. Исследуем строение этого графа.

Каждое ребро, принадлежащее двум паросочетаниям, будет являться компонентой графа G_1. Включим такое ребро в паросочетание M.

Степени вершин остальных компонент графа G_1 равны 1 или 2, поэтому компонентами графа являются или циклы четной длины, или цепи. И в циклах, и в цепях ребра поочередно принадлежат паросочетаниям M_1 и M_2. Каждая вершина цикла принадлежит двум множествам (X_1 и X_2) или (Y_1 и Y_2). То же самое выполняется для всех неконцевых вершин цепей.

Рассмотрим различные случаи строения компонент.

1. Компонента является циклом. (См. рис. 0.90, на котором ребра паросочетания M_1 выделены.)

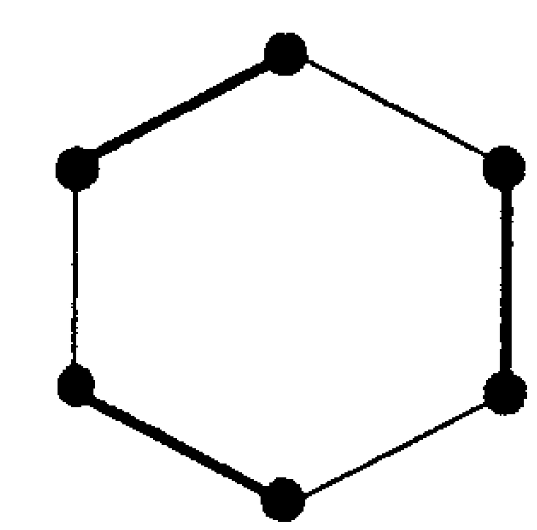

Рис. 0.90

В этом случае в паросочетание M можно включить все ребра одного из паросочетаний, принадлежащих этой компоненте.

2. Цепь L начинается в вершине v из Y_2 и оканчивается или в вершине u из X_2, или в вершине w из Y_1 (см. рис. 0.91).

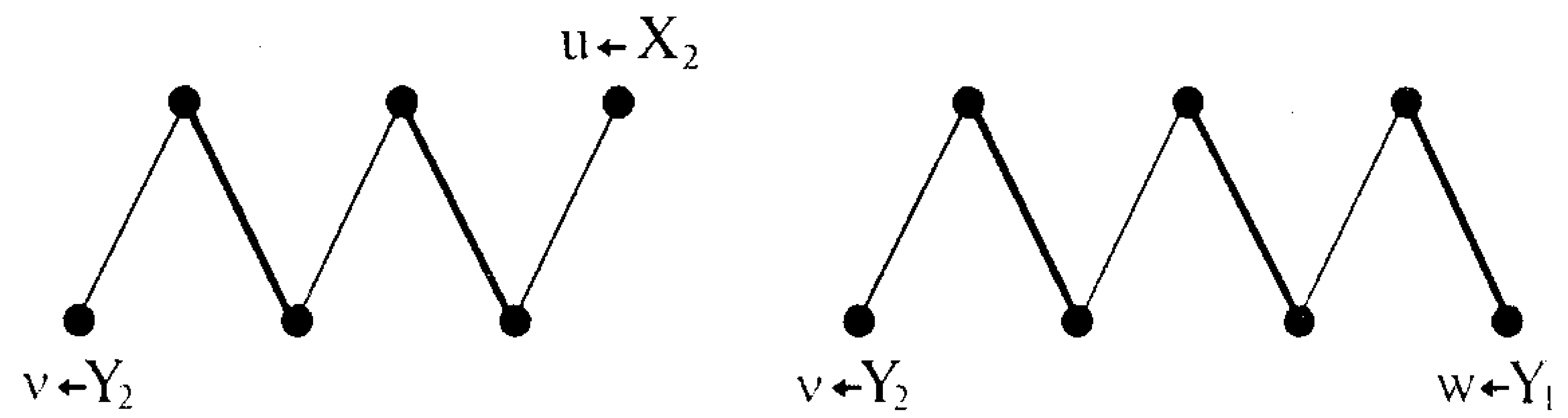

Рис. 0.91

В этом случае в M включим все ребра M_2, принадлежащие L.

3. Цепь L начинается в вершине u из X_1 и оканчивается или в вершине v из Y_1, или в вершине w из X_2 (см. рис. 0.92).

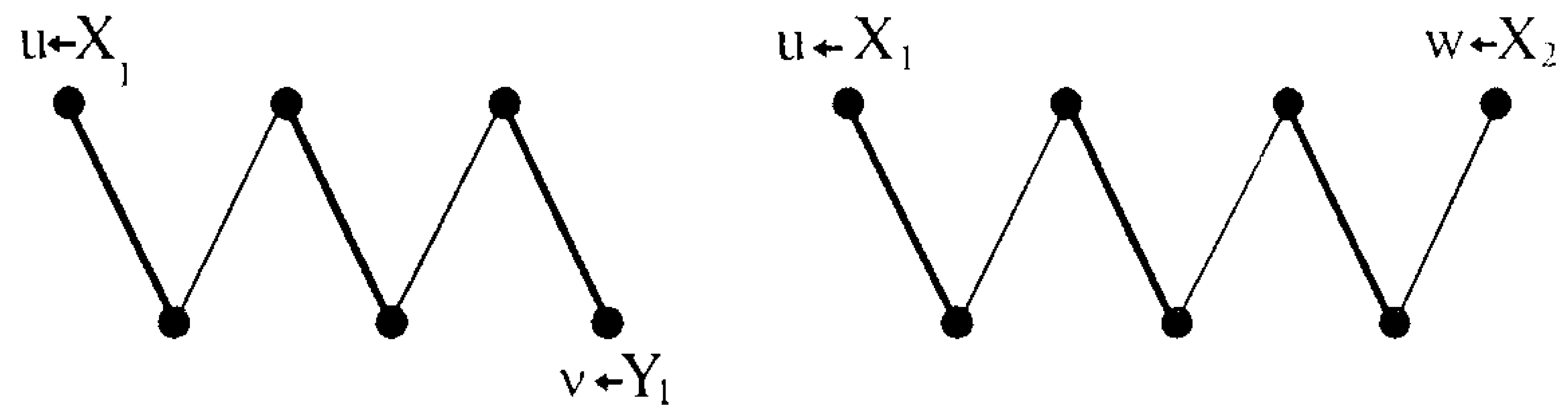

Рис. 0.92

В этом случае в M включим все ребра паросочетания M_1, принадлежащие L.

Других вариантов расположения концевых вершин цепей не существует.

Ребра построенного паросочетания выходят из нужных вершин и определяют танцующие в третьем танце пары.

110. Построим граф G, описывающий знакомства юношей и девушек, как в предыдущей задаче. Пусть множество X из A соответствует юношам, имеющим наибольшее число знакомых девушек, а множество Y из B — девушкам, имеющим наибольшее число знакомых юношей. Степени вершин множеств X и Y являются наибольшими в графе G. Пусть они будут равны d. Нужно доказать, что можно построить такое паросочетание, что из каждой вершины множеств X и Y будут выходить его ребра.

Рассмотрим граф G_1, порожденный вершинами множества X и вершинами множества $N(X)$, смежными с X. Возьмем любое подмножество X_1 из X. Пусть X_1 содержит k вершин. Обозначим через $N(X_1)$ множество вершин из B, каждая из которых смежна хотя бы с одной вершиной из X_1. Если в $N(X_1)$ будет меньше, чем k вершин, то из них выйдет

меньше, чем dk ребер, что невозможно, так как все ребра, выходящие из X_1 должны выходить и из $N(X_1)$. Поэтому в множестве $N(X_1)$ не менее, чем k вершин.

Следовательно, в графе G_1 выполняются условия теоремы, доказанной в задаче 107. Поэтому в G_1 существует паросочетание из X в $N(X)$. Обозначим это паросочетание через M_1. Из каждой вершины множества X выходит ребро паросочетания M_1

Аналогично можно построить такое паросочетание M_2, что из каждой вершины множества Y будет выходить ребро паросочетания M_2.

Теперь воспользуемся предыдущей задачей. С ее помощью из паросочетаний M_1 и M_2 можно построить паросочетание M, ребра которого будут выходить из вершин множеств X и Y. Паросочетание M определит пары танцующих юношей и девушек.

111. Построим граф G, описывающий знакомства юношей и девушек. Из предыдущей задачи следует, что можно построить паросочетание M_1, ребра которого выходят из вершин наибольших степеней. Удалим ребра M_1 из графа G. Точно также в полученном графе G_2 можно построить паросочетание M_2, ребра которого выходят из вершин наибольших степеней в этом графе. Удалим ребра M_2 и построим паросочетание M_3 в получившемся графе G_3 и т.д. Поскольку при каждом переходе от графа к графу максимальная степень вершин будет уменьшаться на единицу, то мы построим шесть паросочетаний, которые определят пары танцующие в шести танцах.

112. Построим двудольный граф G, в котором вершины доли A будут соответствовать школьникам, вершины доли B — задачам, и вершины u и v будут соединены ребром, если школьник, соответствующий вершине u, решил задачу, соответствующую вершине v.

Пусть несколько учеников разобрали некоторые задачи. Выделим ребра, соответствующие этим ученикам и этим задачам. Поскольку каждый ученик может разобрать только одну задачу и каждая задача может быть разобрана одним учеником, то выделенные ребра образуют паросочетание. Для решения задачи мы должны доказать, что в графе G существует паросочетание из A в B.

Исследуем строение графа G. Степень каждой его вершины равна двум. Поэтому граф является объединением циклов. В каждом цикле, начиная с произвольного ребра, будем поочередно включать и не включать ребра в паросочетание. Поскольку каждый цикл двудольного графа имеет четное число ребер (см., например, теорему Кенига), то половина ребер войдет в паросочетание, а половина не войдет, и из каждой вершины графа будет выходить одно ребро паросочетания.

Таким образом, в графе G построено паросочетание из A в B. Ребра этого паросочетания будут соответствовать школьникам, разбирающим задачи.

113. Построим граф G, описывающий решение задач школьниками, как в предыдущей задаче. Мы должны доказать, что в графе G существует паросочетание из A в B.

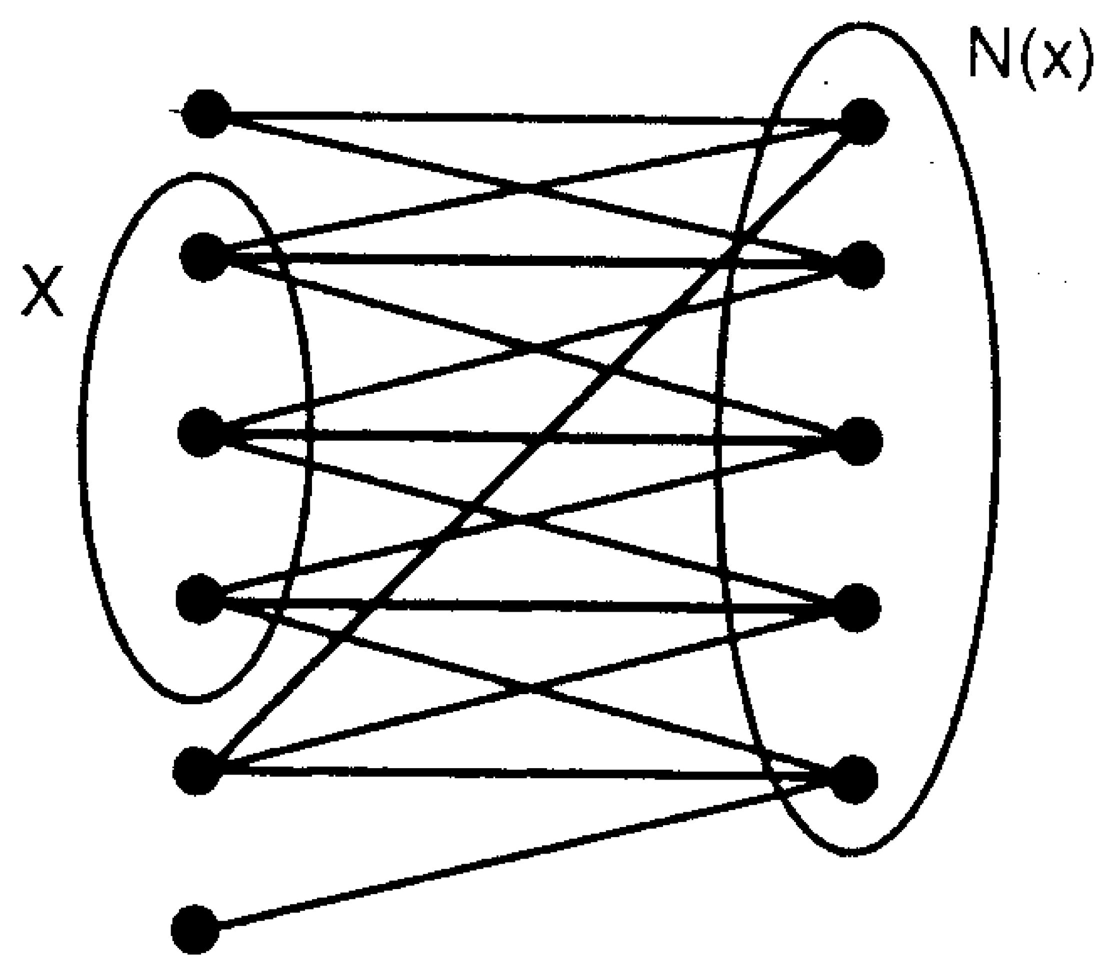

Рис. 0.93

Рассмотрим произвольное множество X из A. Через $N(X)$ обозначим множество вершин, смежных хотя бы с одной вершиной из X. Число ребер, выходящих из вершин множества X, равно $k|X|$, число ребер, выходящих из вершин множества $N(X)$, равно $k|N(X)|$. Но, если все ребра, выходящие из X, попадают в $N(X)$, то возможно существование ребер, выходящих из $N(X)$ и не попадающих в X (см. рис. 0.93).

Поэтому $k|X| \le k|N(X)|$ и $|X| \le |N(X)|$.

По теореме, доказанной в задаче 107, в графе G существует паросочетание из A в B. Ребра этого паросочетания будут соответствовать школьникам, разбирающим задачи.

114. Построим граф G, в котором вершины соответствуют туристам, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующих участников можно посадить в одну лодку (см. рис. 0.94).

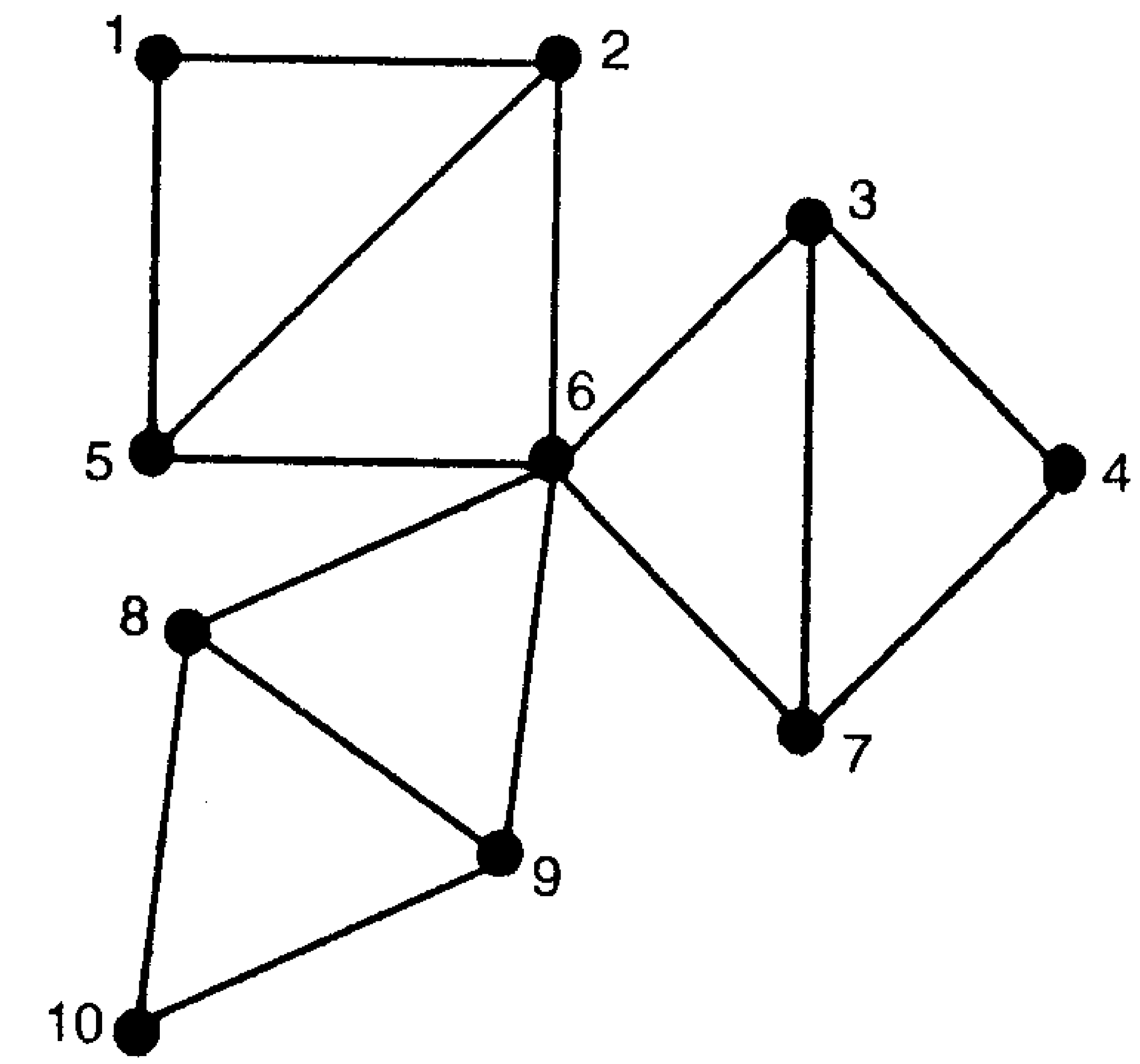

Рис. 0.94

Любое размещение людей по лодкам соответствует некоторому паросочетанию в графе G. И наоборот: любое паросочетание определяет пары участников, которые могут плыть в одной лодке. На рис. 0.95 изображено паросочетание, содержащее 4 ребра. Для решения задачи нужно доказать, что в графе G не существует паросочетания, имеющего 5 ребер.

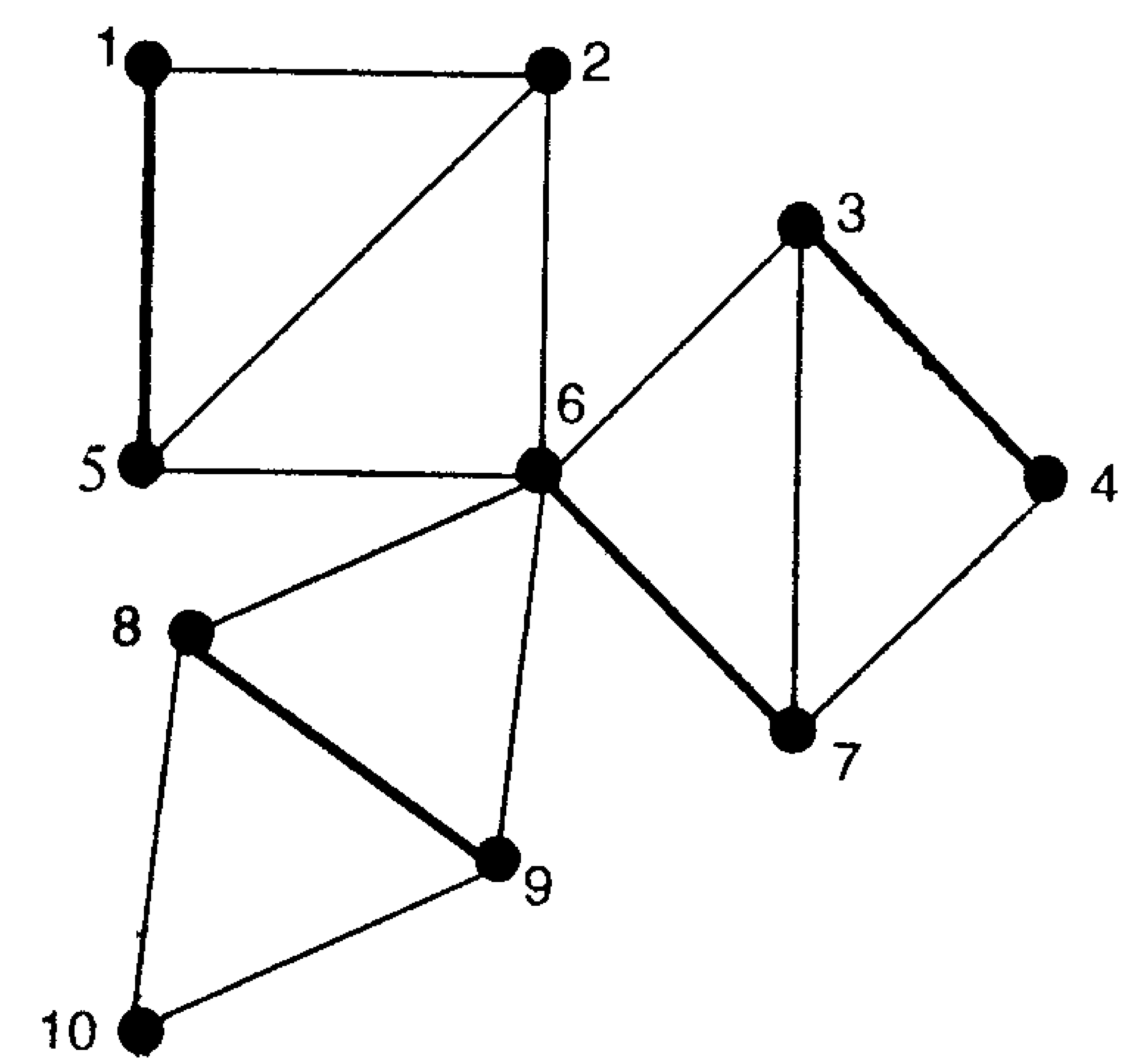

Рис. 0.95

Пусть M — паросочетание в произвольном графе G. Цепь в графе G, ребра которой поочередно входят и не входят в M, называется **чередующейся цепью**. Если чередующаяся цепь соединяет две вершины, из которых не выходят ребра паросочетания M, то она называется **увеличивающей относительно М цепью**. Очевидно, что если в графе есть увеличивающая относительно M цепь, то в графе можно построить паросочетание с большим числом ребер, чем паросочетание M.

Действительно, в такой цепи число ребер, не принадлежащих паросочетанию на одно больше, чем ребер паросочетания. Поэтому, удалив из паросочетания M ребра цепи, принадлежащие M, и добавив к M, ребра цепи, не принадлежащие M, получим паросочетание с большим числом ребер. (См. граф на рис. 0.96, где нужной цепью является цепь L =(7,8,4,1,2,3,6,5).)

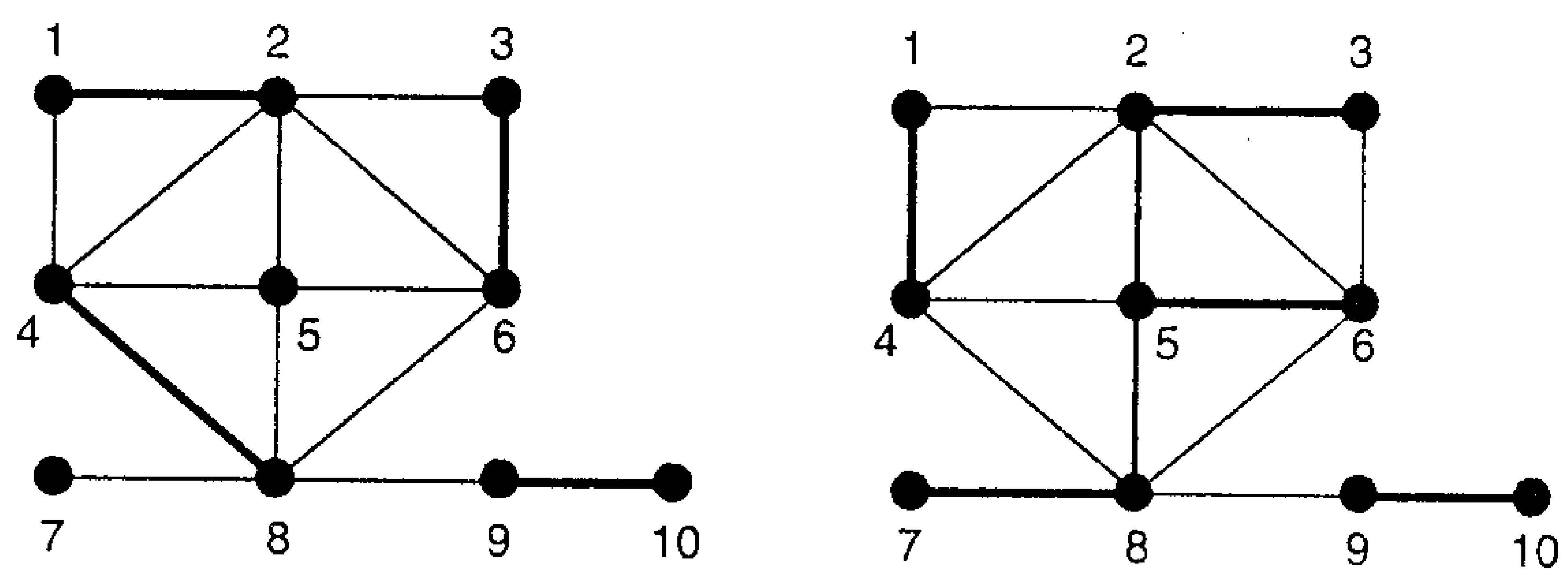

Рис 0.96

Следовательно, отсутствие увеличивающих относительно M цепей является необходимым условием для того, чтобы паросочетание M имело наибольшее число ребер среди всех паросочетаний. Это условие является и достаточным.

➻ ***Теорема. Паросочетание M в графе G является паросочетанием с наибольшим числом ребер среди всех паросочетаний в графе G тогда и только тогда, когда в графе G нет увеличивающих относительно M цепей.***

Доказательство. Необходимость, как отмечалось, очевидна.

Достаточность докажем от противного. Пусть паросочетание M_1 в графе G имеет больше ребер, чем паросочетание M. Рассмотрим граф H, образованный ребрами , входящими или в M, или в M_1, и не входящими одновременно в M и M_1. (См. рис. 0.97).

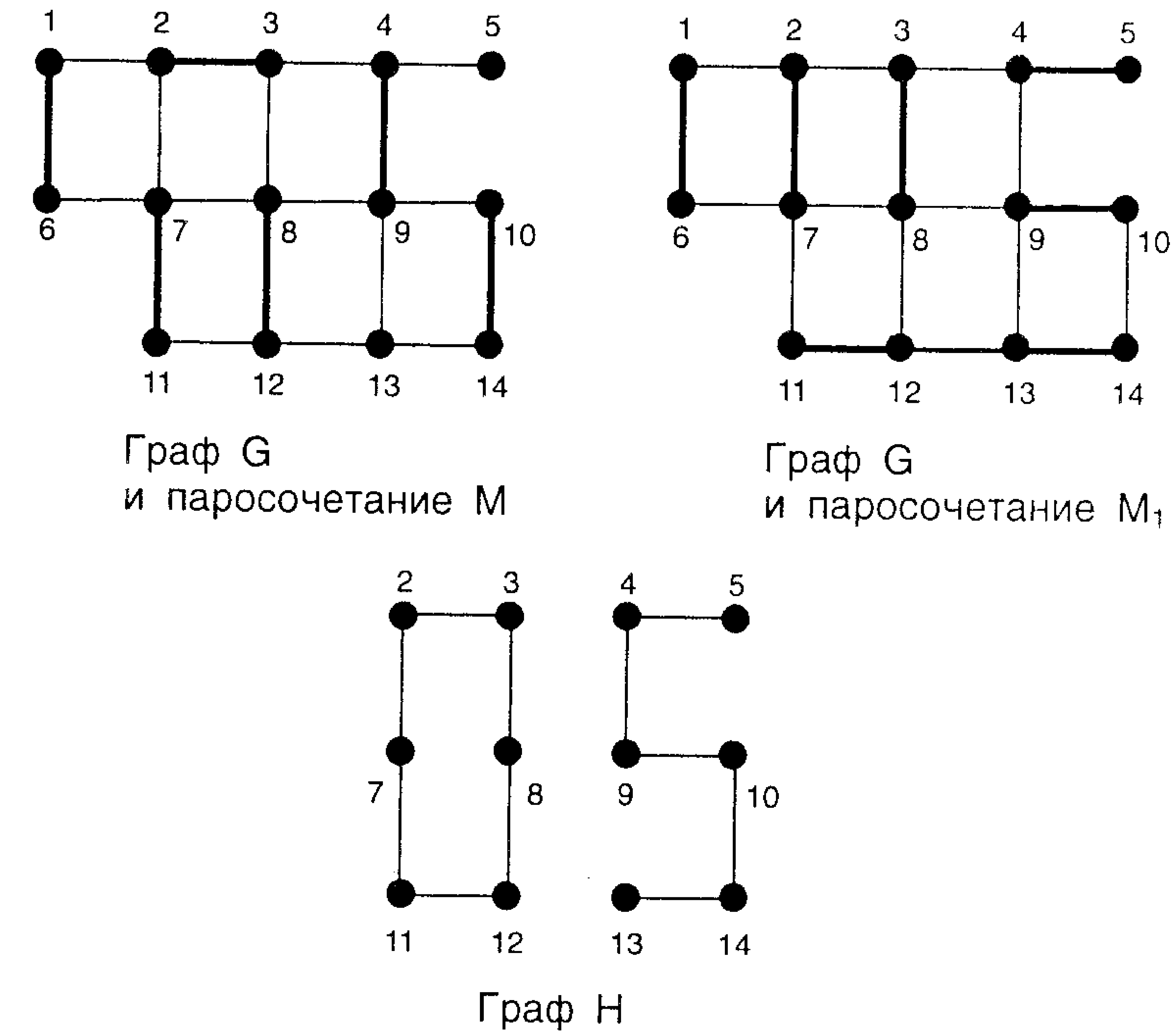

Рис. 0.97

Так как из произвольной вершины этого графа выходит не более, чем по одному ребру каждого паросочетания, то ее степень не больше двух. Если степень вершины равна двум, то одно ребро, выходящее из вершины, принадлежит M, другое — M_1. Поэтому каждая компонента графа H является или циклом, содержащим одно и то же число ребер из M и M_1, или цепью, в которой ребра из M и M_1 чередуются. Но в M_1 больше ребер, чем в M, поэтому среди этих компонент обязательно есть цепь, крайние ребра которой принадлежат M_1. Эта цепь и будет увеличивающей относительно M цепью, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Покажем, что в графе G, изображенном на рис. 0.94 нет увеличивающих относительно M цепей. Для поиска таких цепей используем поиск в ширину (см. задачу 14). Если нужная цепь существует, то она начинается в вершине 10 ребром, не принадлежащим паросочетанию M и заканчивается в вершине 2. Есть две возможности для начала цепи:

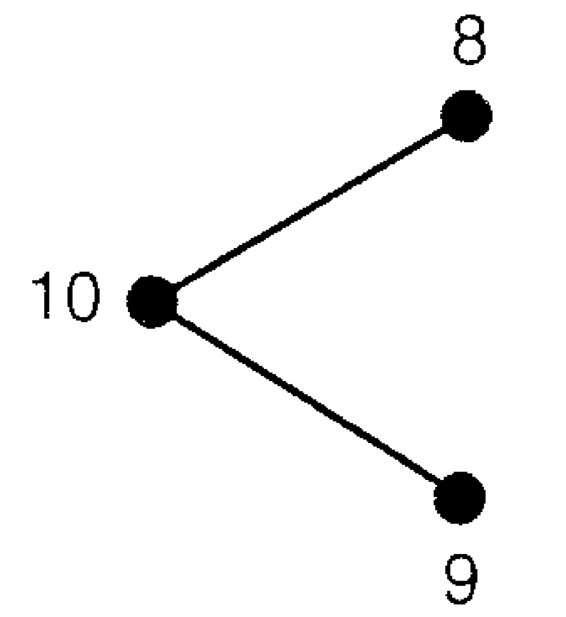

Рис. 0.98

Далее цепь должна быть продолжена ребром из М:

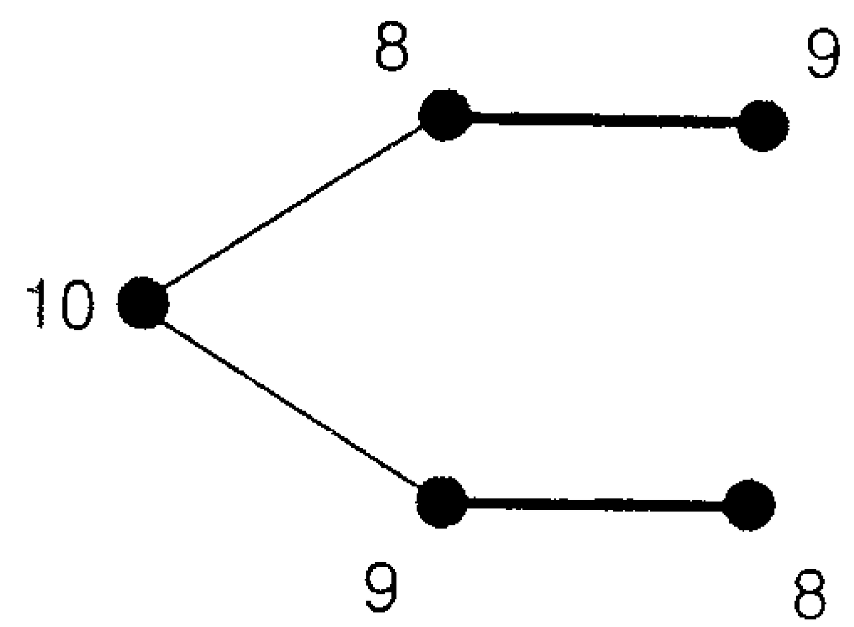

Рис. 0.99

Продолжим построение дальше:

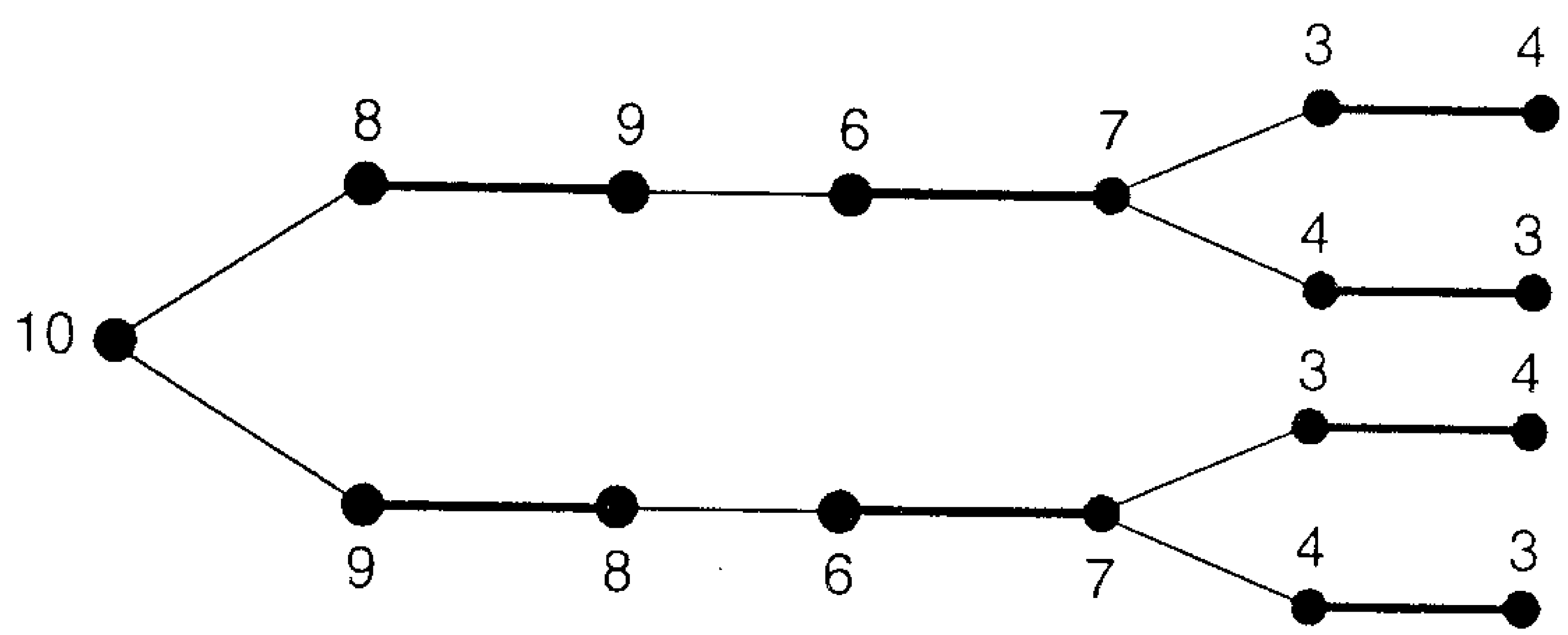

Рис. 0.100

Дальнейшее продолжение поиска невозможно. Следовательно, в графе G нет увеличивающих относительно M цепей. Из доказанной теоремы следует, что в графе G нет паросочетаний содержащих более четырех ребер. Это означает, что руководитель похода не сможет укомплектовать 5 экипажей.

115. Построим граф G так, как в предыдущей задаче. Размещение участников по лодкам составляет паросочетание в графе G. Паросочетание называется **максимальным**, если к нему нельзя добавить ни одного

ребра так, чтобы получившееся множество ребер оказалось паросочетанием. Паросочетание в графе G называется **наибольшим**, если оно имеет наибольшее число ребер среди всех паросочетаний в графе G, число ребер в нем называется **числом паросочетания** и обозначается $a_1(G)$.

В графе G, изображенным на рис. 0.101, паросочетание $M = \{(1,2),(5,6)\}$ не является максимальным, так добавление ребра (4,7) приводит к паросочетанию $M = \{(1,2),(5,6),(4,7)\}$, которое является максимальным. А наибольшим будет паросочетание $M = \{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)\}$, и $a_1(G) = 4$.

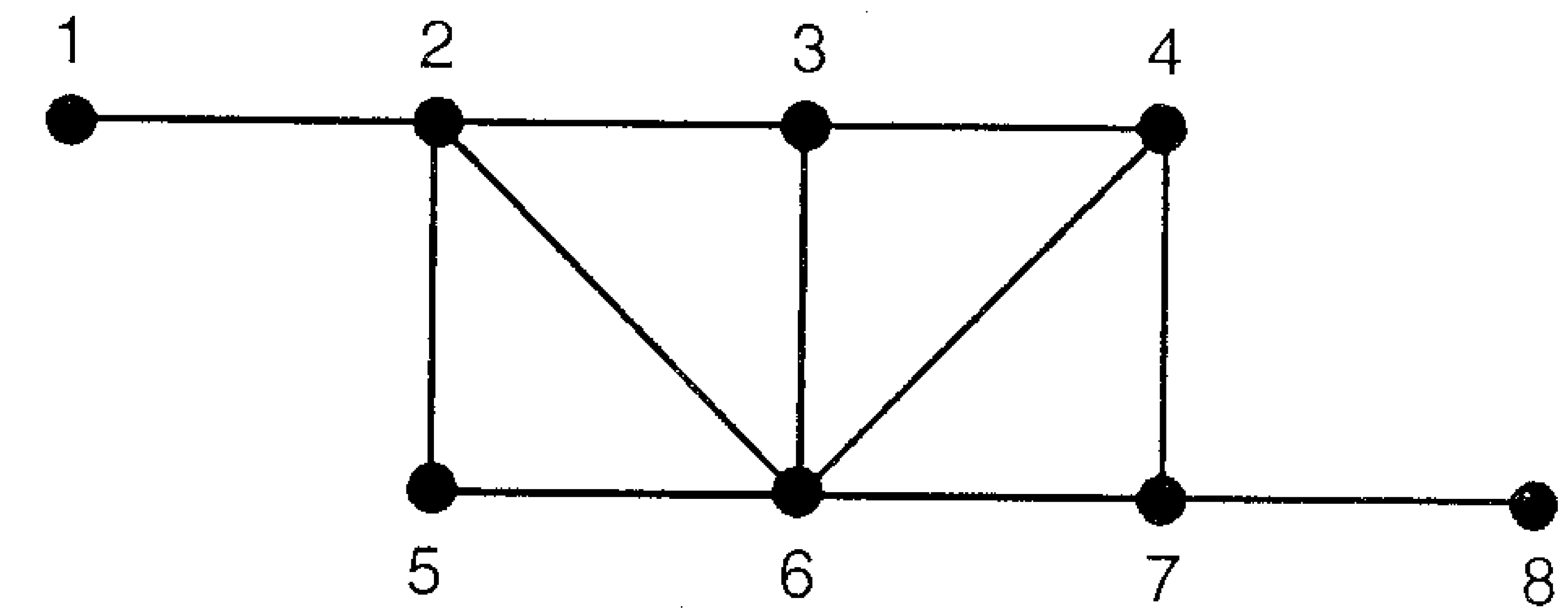

Рис. 0.101

Докажем, что $a_1(G) \le 2|M|$, где $|M|$ — число ребер в произвольном максимальном паросочетании.

Для каждого ребра $e = (u,v)$ из M рассмотрим граф $T(e)$, состоящий из ребра e и всех ребер, выходящих из вершин u и v. Так как M — максимальное паросочетание, то объединение ребер всех графов $T(e)$ даст ребра графа G.

Поскольку каждый граф $T(e)$ содержит не более двух ребер любого наибольшего паросочетания, то

$$2|M| \ge a_1(G).$$

Из условий задачи следует, что руководитель похода составил пары, соответствующие некоторому максимальному паросочетанию. Поэтому число экипажей не может быть больше, чем 12.

116. Рассмотрим полный граф K_6, содержащий 6 вершин, обозначающих ЭВМ. Если две ЭВМ соединены проводом какого-то цвета, то окрасим соответствующее ребро графа в тот же цвет. Поскольку провода одного цвета выходят из разных ЭВМ, то ребра одного цвета будут образовывать паросочетание в графе K_6. Необходимо доказать, что наименьшее число паросочетаний, на которое можно разбить ребра графа K_6, равно пяти.

Расположим 6 вершин графа в вершинах правильного шестиугольника. Его стороны окрасим через одну цветами 1 и 2, а диагонали — цветами 3, 4, 5 (одним цветов окрашиваются две параллельные малые диагонали и перпендикулярная к ним большая).

Ребра графа, окрашенные в один цвет, образуют паросочетания. Провода, соединяющие ЭВМ, можно окрасить в тот же цвет, что и соответствующие им ребра.

117. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: можно ли в полном графе K_{2n+1} разбить ребра на $2n$ паросочетаний.

Пусть s — минимальное число паросочетаний, на которое можно разбить ребра графа K_{2n+1}, а $E_1, E_2, \ldots, E_s$ — сами паросочетания. Поскольку ребра одного паросочетания не смежны, а в графе нечетное число вершин, то каждое паросочетание будет содержать не более n ребер. Поэтому

$$\frac{(2n+1)2n}{2} = |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_s| \le ns.$$

Следовательно, $s \ge 2n+1$, и соединить приборы проводами с указанным числом цветов нельзя.

118. Задача сводится к ответу на вопрос: существуют ли такие графы встреч (см. задачу 1), у которых степени вершин будут равны числу партий, сыгранных школьниками.

Последовательность $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел называется **графической**, если существует граф G с множеством вершин $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, для которого степень вершины v_i равна d_i. Граф G называется **реализацией последовательности**.

Рассмотрим последовательности (7,5,4,4,3,3,2), (5,4,4,4,3,3,2), (6,4,4,4,2,1,1), (5,4,4,3,2,2,2) из условий задачи и выясним, какие из них являются графическими.

Очевидно, что в графической последовательности $d_i \le n-1$, так как вершина может быть смежной самое большее с каждой из остальных $(n-1)$ вершиной. По этой причине первая последовательность не является графической.

Согласно лемме о рукопожатиях сумма всех членов графической последовательности должна быть четной. Поэтому вторая последовательность не является графической.

Определение графичности третьей и четвертой последовательностей более сложное.

Назовем последовательность D ***правильной***, если выполняются два условия:

1) $n-1 \ge d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n \ge 0$;

2) сумма всех членов последовательности — четное число.

Теорема. Пусть $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ — правильная последовательность и $D' = (d_1-1, d_2-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, \quad d_{d_1+2}, \ldots, \quad d_n)$ — последовательность, полученная из D. Тогда последовательность D является графической тогда и только тогда, когда графической является последовательность D'.

(Для получения последовательности D' из D нужно вычесть по единице у d_1 членов последовательности D, начиная со второго. Последовательность D может оказаться неправильной. Примеры перехода от D к D': $D = (5,5,4,3,3,2,2)$, $D' = (4,3,2,2,1,2)$; $D = (3,2,2,1)$, $D' = (1,1,0)$.)

Доказательство теоремы.

Пусть D' — графическая последовательность и граф H — ее реализация. Добавив к H новую вершину и соединив ее ребрами с вершинами степеней $d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1$, получим реализацию последовательности D.

Пусть теперь D — графическая последовательность и граф G — ее реализация. Если вершина v_1 смежна с вершинами $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$, то удалив v_1 вместе с выходящими из нее ребрами, получим реализацию последовательности D'.

Пусть во всех реализациях последовательности D вершина v_1 не смежна с какой-то вершиной из множества $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$. Среди реализаций выберем такой граф G, в котором первая вершина, не смежная с v_1, будет иметь наименьший номер. Пусть это будет вершина v_p. Через v_t обозначим вершину с большим номером, смежную с вершиной v_1. Так как для степеней вершин выполняется неравенство $d(v_p) \ge d(v_t)$, то существует вершина v_s, смежная с вершиной v_p, но не смежная с вершиной v_t (см. рис. 0.102).

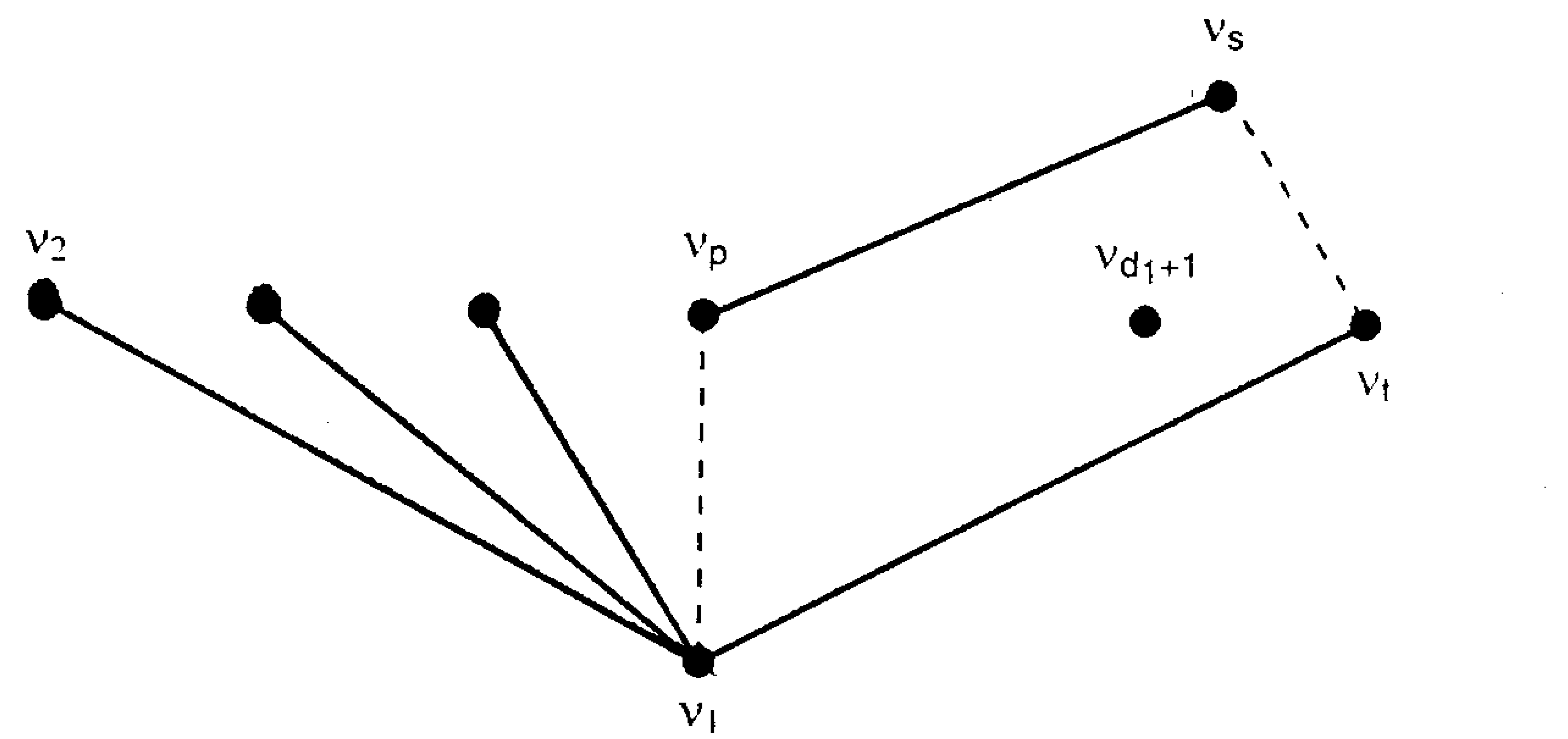

Рис. 0.102

Построим граф G', заменив в G ребра (v_p, v_s) и (v_1, v_t) на ребра (v_1, v_p) и (v_s, v_t) (см. рис. 0.103).

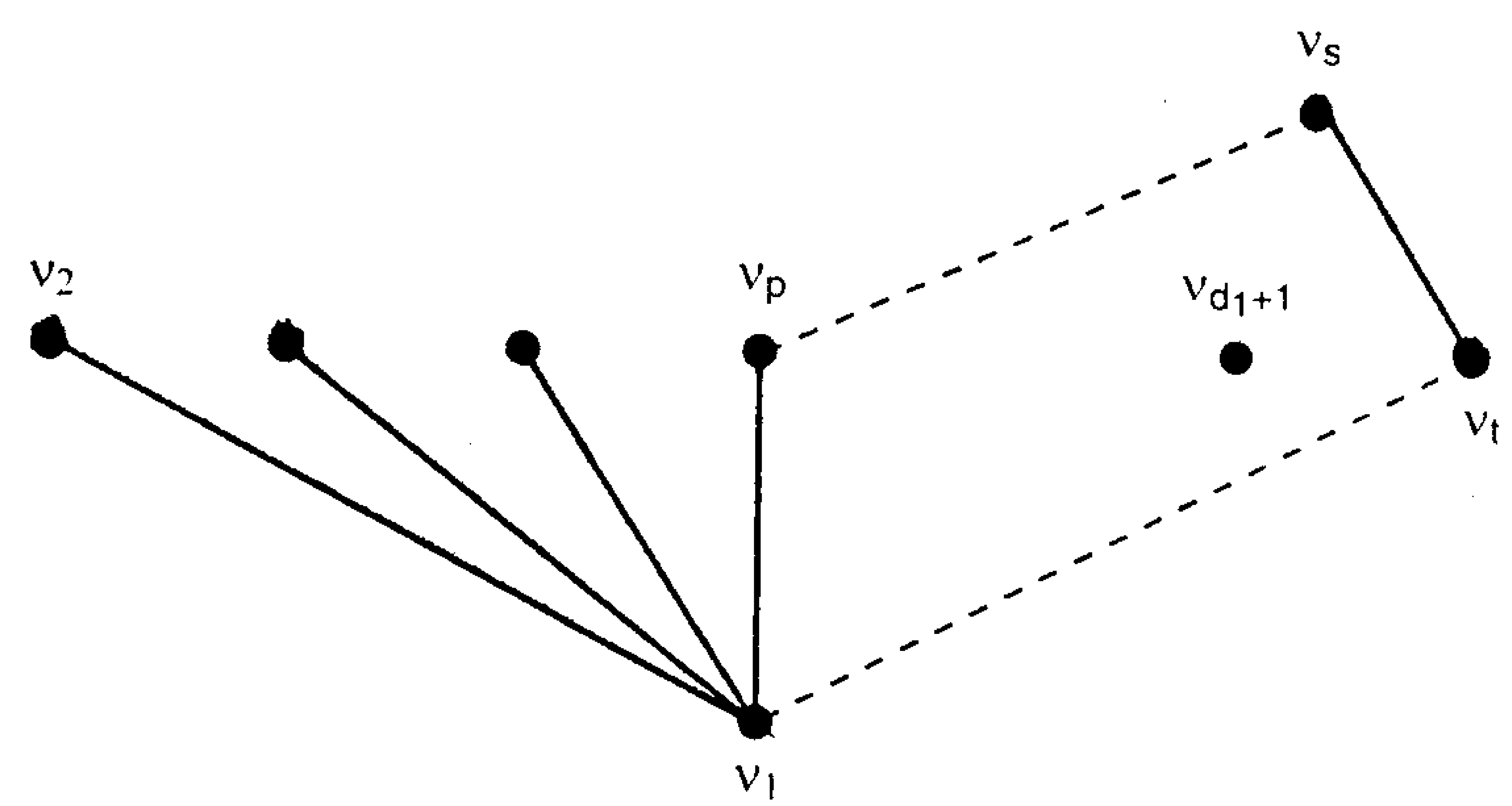

Рис. 0.103

В получившемся графе G' множество степеней вершин то же, что и в графе G, т.е. G' — реализация последовательности. Но в этой реализации вершина v_1 смежна с вершиной v_p, что противоречит выбору графа G.

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет предложить алгоритм распознавания графичности последовательности. Для последовательности D строим последовательность D', по указанному ранее правилу. Упорядочив последовательность D', получаем последовательность D_1. Для D_1 строим D_1'

и т.д. Процесс продолжается до тех пор, пока не получается заведомо графическая последовательность, например, состоящая из одних нулей (тогда исходная последовательность графическая), или в последовательности не оказываются отрицательные числа (тогда исходная последовательность не является графической).

Рассмотрим третью последовательность и проделаем указанные преобразования:

$$\begin{array}{lll} D = & & (6, 4, 4, 4, 2, 1, 1), \\ D' = & D_1 = & (3, 3, 3, 1, 0, 0), \\ D_1' = & D_2 = & (2, 2, 0, 0, 0), \\ D_2' = & & (1, -1, 0, 0). \end{array}$$

Так как в последовательности D_2' есть отрицательные числа, то последовательность (6,4,4,4,2,1,1) не является графической и школьники не могут провести столько встреч.

Рассмотрим четвертую последовательность и проделаем указанные преобразования:

$$\begin{array}{lcccccccc} & & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ D= & (& 5, & 4, & 4, & 3, & 2, & 2, & 2\ ), \\ D'= & (& & 3, & 3, & 2, & 1, & 1, & 2\ ). \end{array}$$

Превратим последовательность D в правильную:

$$\begin{array}{lccccccc} & & v_2 & v_3 & v_4 & v_7 & v_5 & v_6 \\ D_1 = & (& 3, & 3, & 2, & 2, & 1, & 1\ ), \\ D_1' = D_2 = & (& & 2, & 1, & 1, & 1, & 1\ ), \\ D_2' = & (& & & 0, & 0, & 1, & 1\ ). \end{array}$$

Последовательность D_2' графическая, ее реализация:

Рис. 0.104

Будем по очереди возвращать удаленные вершины:

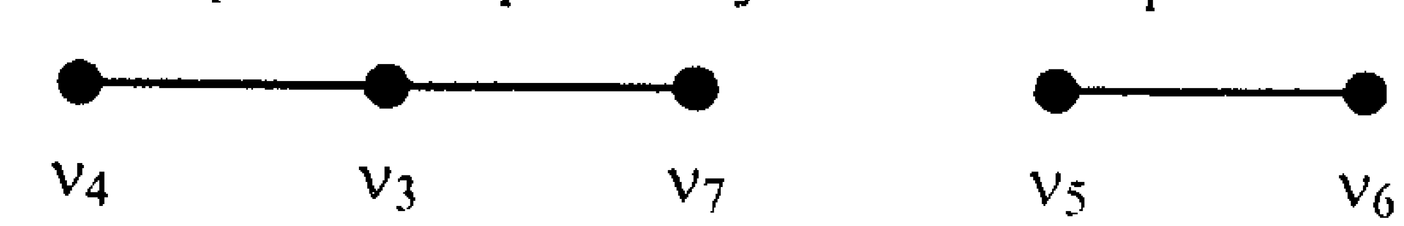

Рис. 0.105

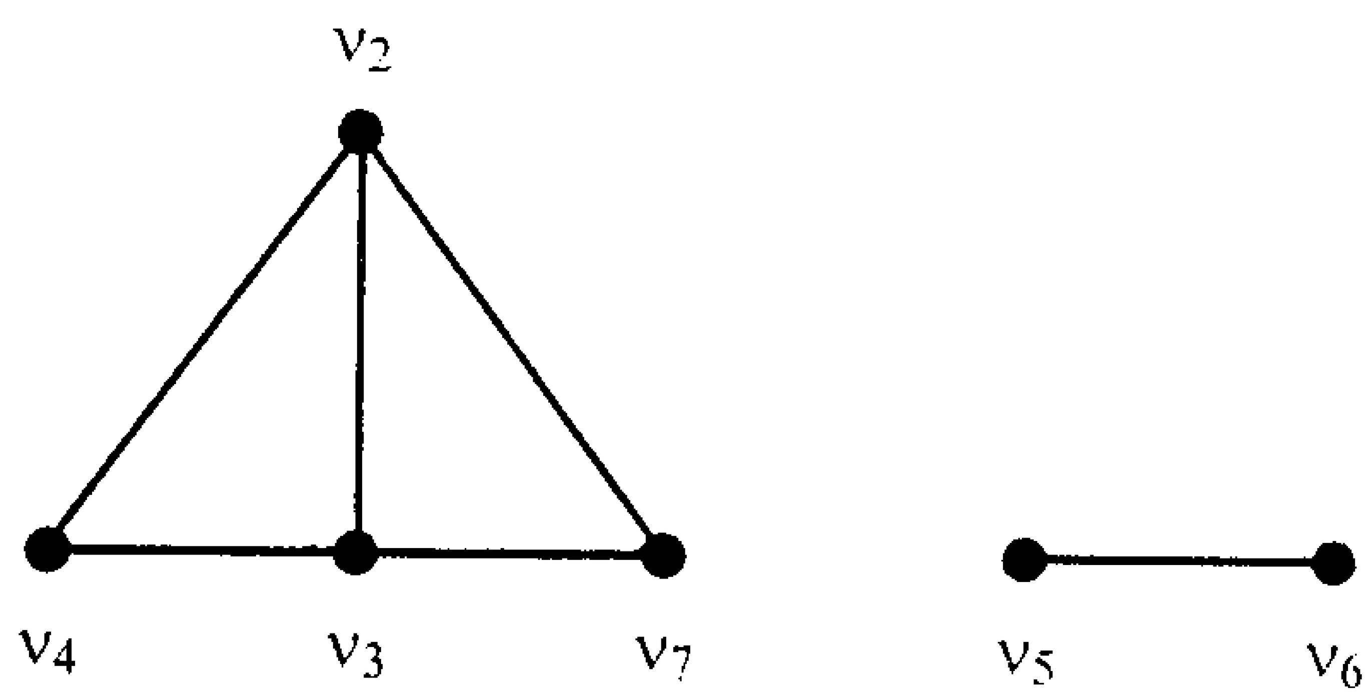

Рис. 0.106

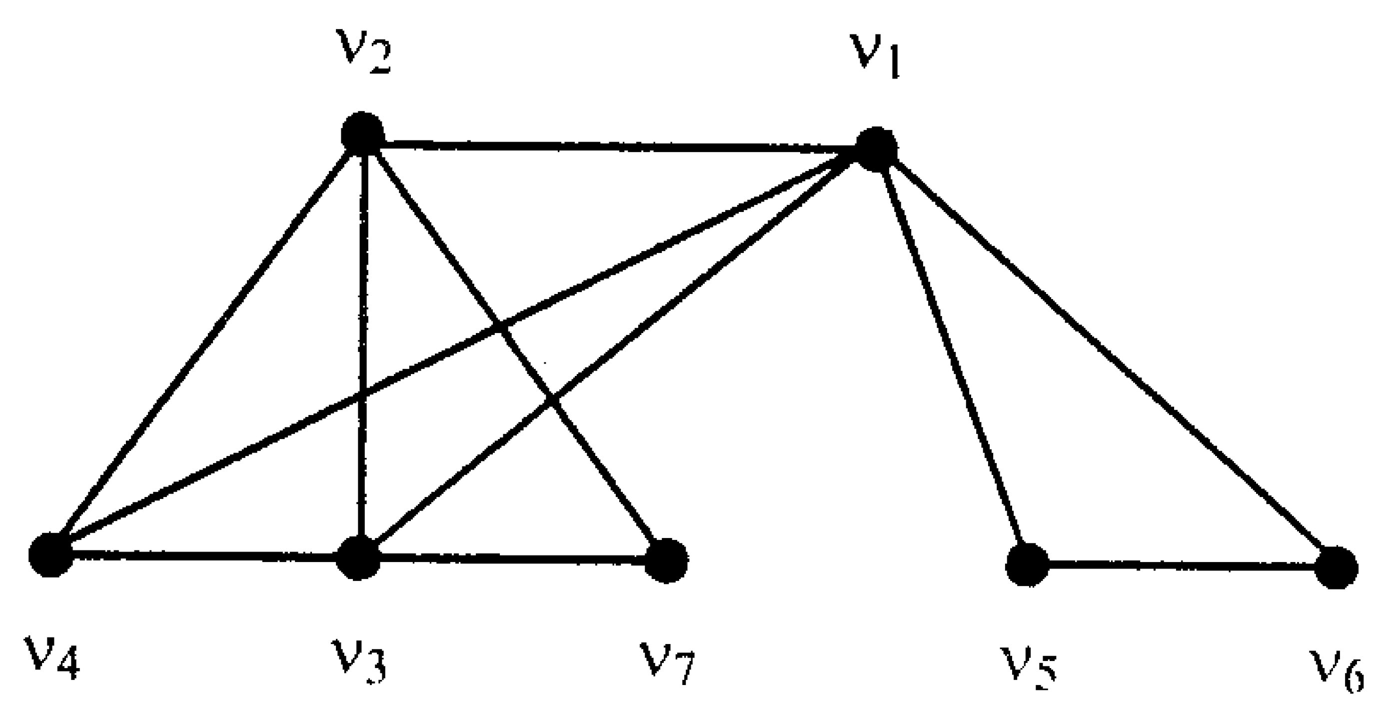

Рис. 0.107

Последний граф является реализацией четвертой последовательности. Следовательно, турнир, в котором школьники сыграли указанное число встреч, возможен.

119. Решение задачи сводится к ответам на два вопроса. Существует ли граф, у которого есть вершины степеней 7, 4, 3, 2 и нет вершин других степеней?

Какое наименьшее число вершин может быть в таком графе?

Ответ на первый вопрос совсем прост: граф, который является объединением полных графов K_8, K_5, K_4 и K_3 имеет вершины указанных степеней. Такой граф содержит 20 вершин.

Теперь построим граф G, который имеет наименьшее число вершин. Вершины графа G можно разбить на два множества: A и B. Множество A состоит из вершин полных графов K_{X_1} и K_{X_2}, множество B — из вершин пустых графов O_{Y_1} и O_{Y_2}. Каждая вершина графа K_{X_1} соединена ребром с каждой из остальных вершин графа G. Кроме этого, каждая вершина графа K_{X_2} соединена ребром с каждой вершиной графа O_{Y_2}. (Схему соединения вершин графа см. на рис. 0.108.)

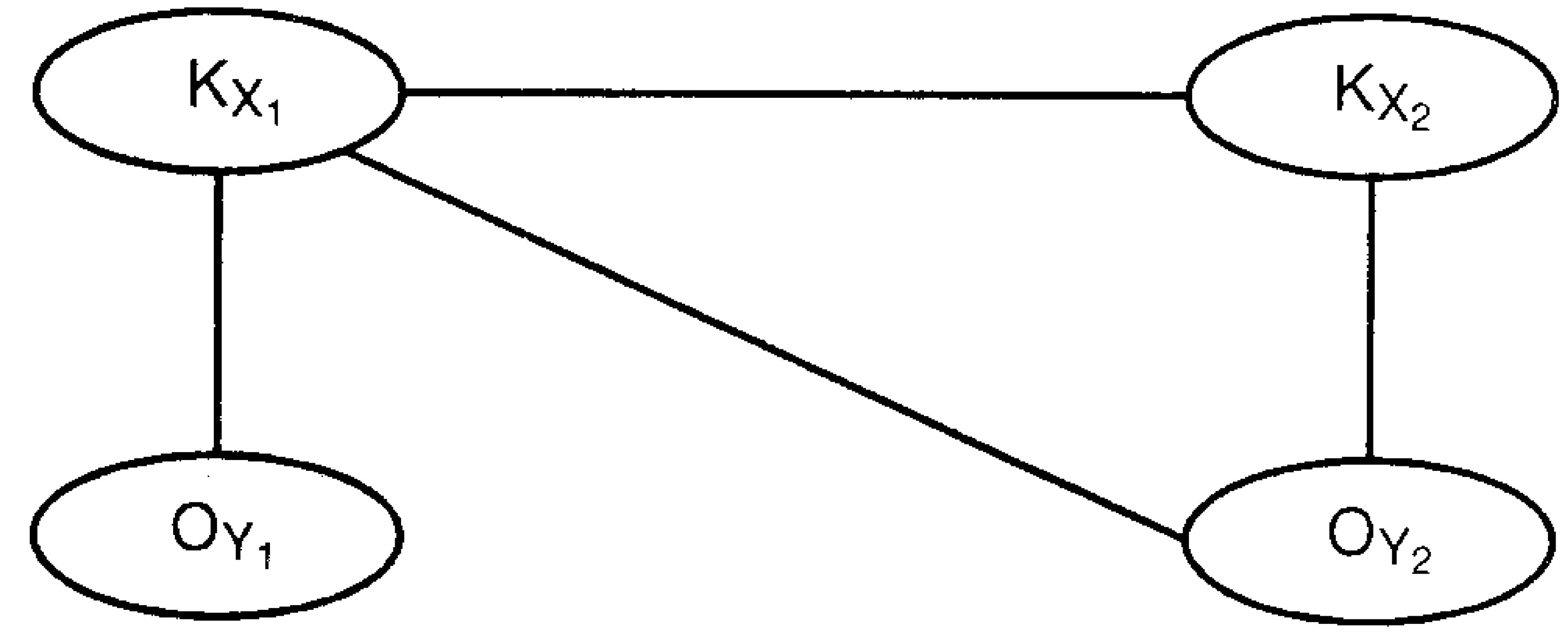

Рис. 0.108

Попробуем так подобрать числа X_1, X_2, Y_1 и Y_2, чтобы степени вершин, принадлежащие K_{X_1}, в графе G были равны семи, K_{X_2} — четырем, O_{Y_2} — трем, O_{Y_1} — двум. Для этого необходимо составить систему уравнений:

$(x_1 - 1) + x_2 + y_1 + y_2 = 7$ (степень вершины, принадлежащей K_{X_1}

$x_1 + (x_2 - 1) + y_2 = 4$ (степень вершины, принадлежащей K_{X_2}

$x_1 + x_2 + \quad = 3$ (степень вершины, принадлежащей O_{Y_2}

$x_1 + \quad = 2$ (степень вершины, принадлежащей O_{Y_1}

Решив эту систему, получим: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $y_1 = 3$. Граф G изображен на рис. 0.109

В турнире должно участвовать 8 игроков. Меньшее количество игроков невозможно, так как, по крайней мере, один из них, должен сыграть с семью.

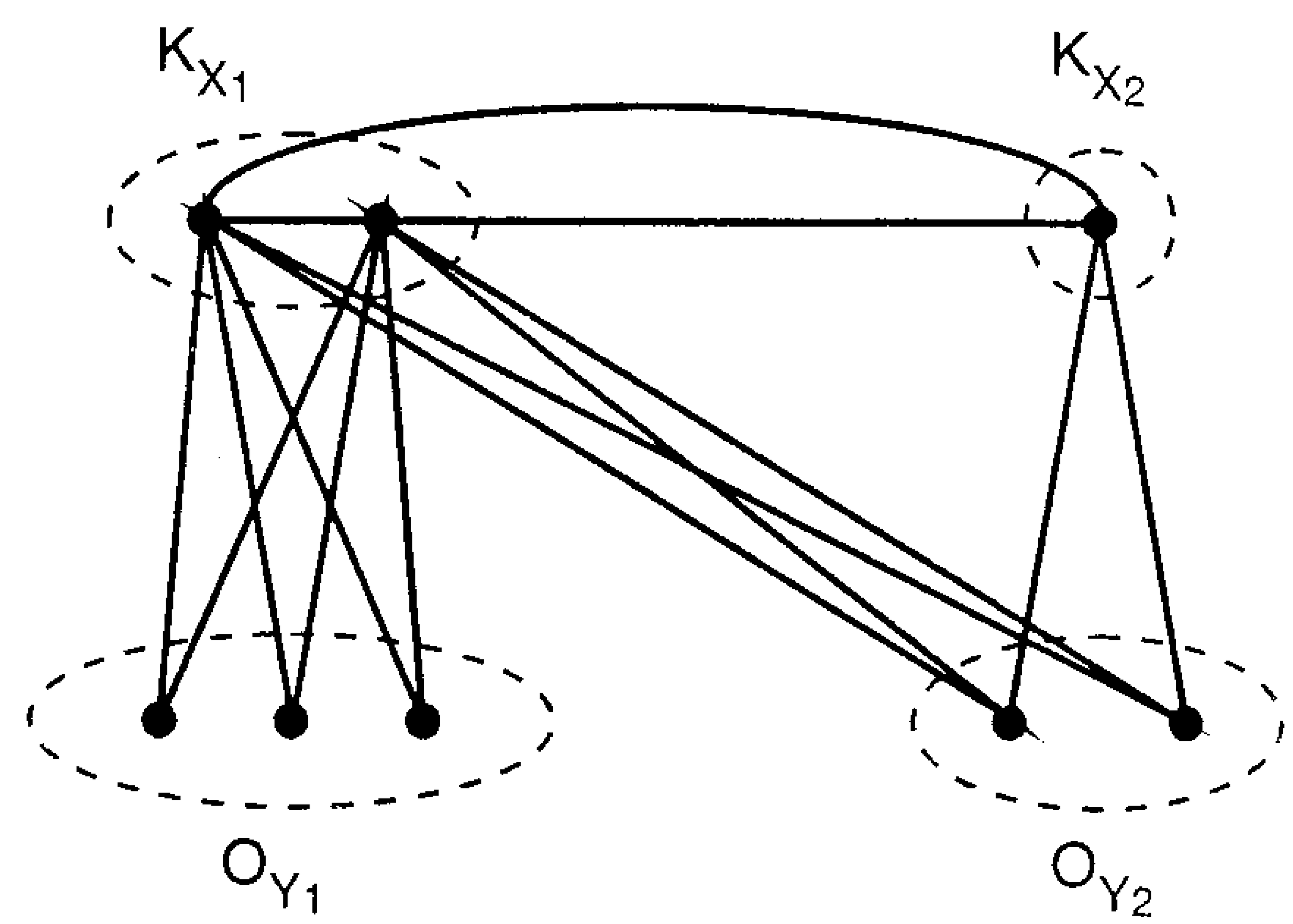

Рис. 0.109

120. Построим граф G, в котором вершины соответствуют городам A и B и перекресткам, а ребра — дорогам. Ориентируем ребра, учитывая, что автомобиль все время должен двигаться по направлению от A к B.

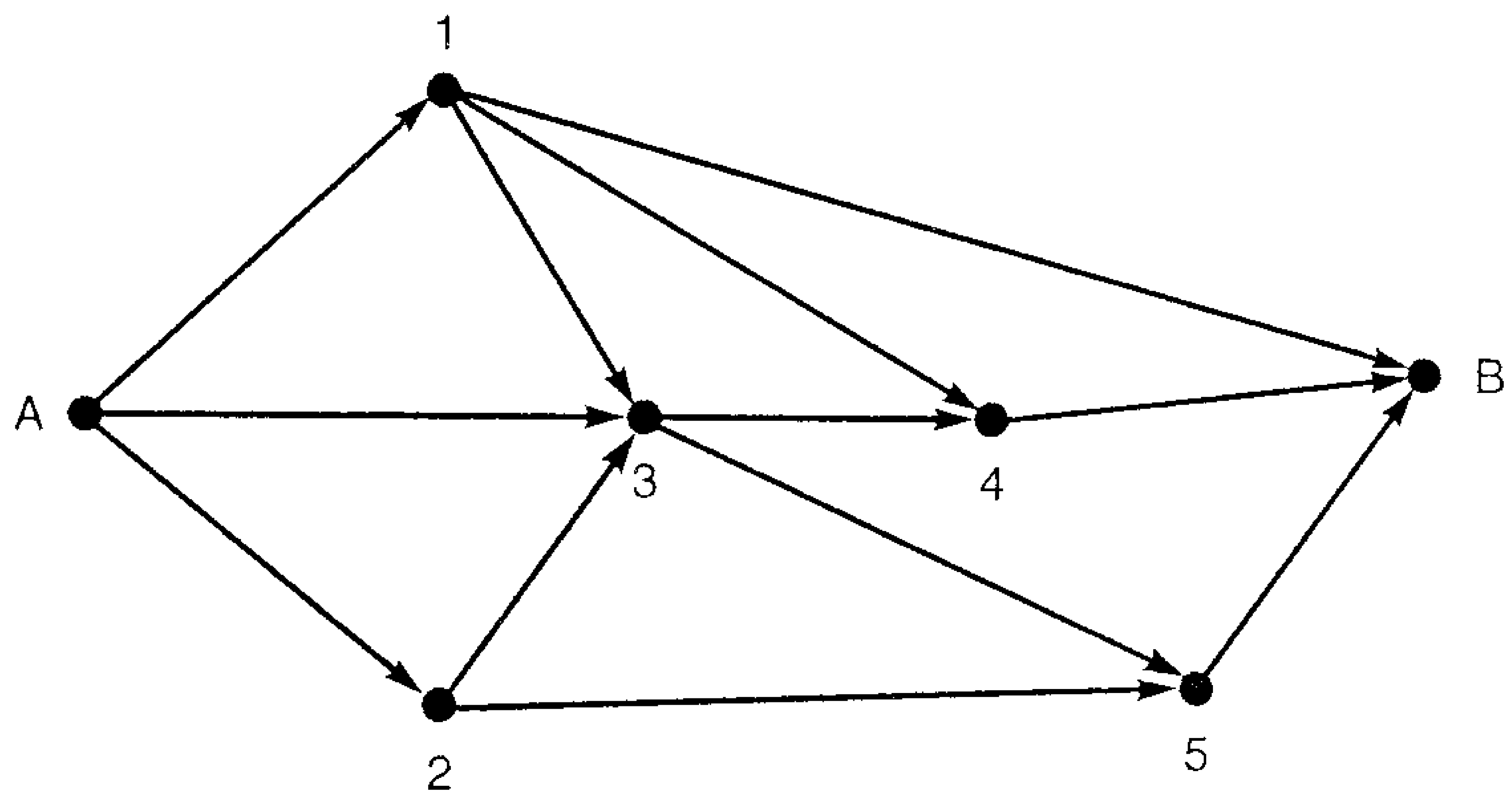

Рис. 0.110

Ориентированный граф G или **орграф** состоит из конечного непустого множества V и множества E упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются **вершинами** орграфа, элементы множества E — **дугами** орграфа.

Если $x = (u,v)$ — дуга, то вершины u и v называются ее **концевыми**, причем u называется **началом** дуги, а v — **концом**. Дуга с совпадающими началом и концом называется **петлей**. Можно рассматривать орграфы с несколькими дугами, имеющими общие концевые вершины. Такие дуги называются **параллельными**.

На рисунке дуга изображается направленной линией, идущей от начала дуги к концу. Например, если $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, где $e_1 = (1,2)$, $e_2 = (3,1)$, $e_3 = (3,1)$, $e_4 = (3,2)$, $e_5 = (2,4)$, $e_6 = (4,2)$, $e_7 = (3,4)$, $e_8 = (4,4)$, то орграф можно изобразить, как на рис. 0.111 В этом орграфе e_2 и e_3 — параллельные дуги, а e_8 — петля.

Вершины орграфа называются **смежными**, если они являются концевыми вершинами некоторой дуги. **Маршрутом** в орграфе называется такая последовательность его дуг, в которой начало каждой последующей дуги совпадает с концом предыдущей. Маршрут, у которого все дуги разные, называется **цепью**.

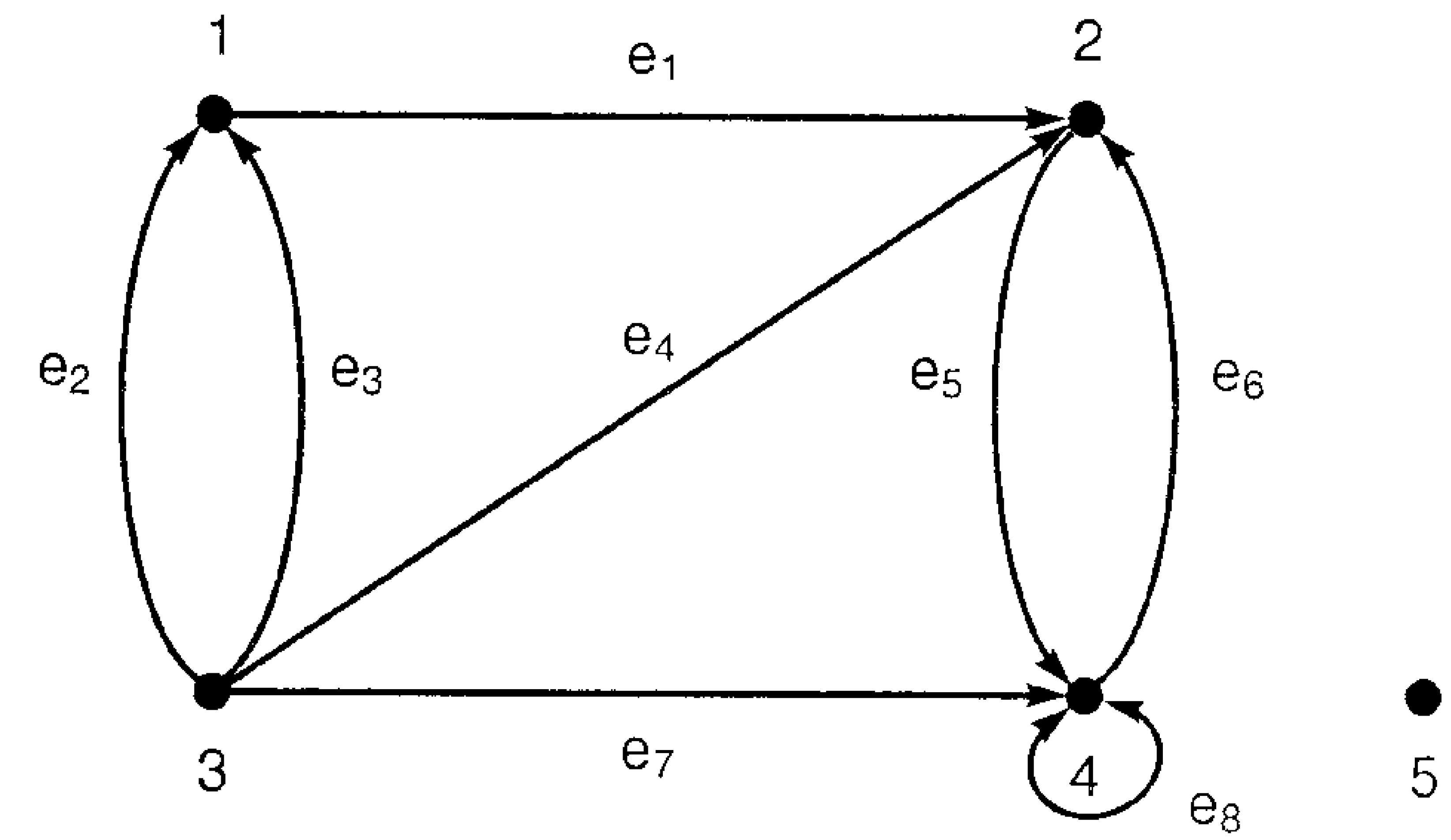

Рис. 0.111

Для решения задачи необходимо найти в построенном орграфе число различных цепей, соединяющих вершины A и B. Для этой цели используем корневое дерево. Из вершины A ведут 3 дуги:

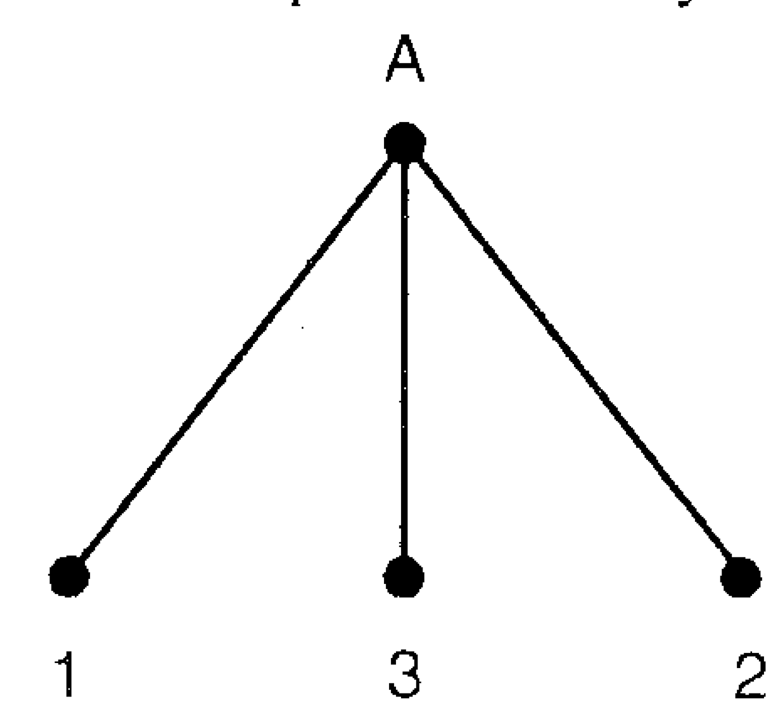

Рис. 0.112

Попав в вершины 1, 2, 3, мы имеем несколько возможностей для продолжения цепей: из 1 можем попасть в вершины 3, 4, и B (в этом случае мы получили один нужный маршрут); из вершины 2 — в 3 и 5; из вершины 3 — в 4 и 5.

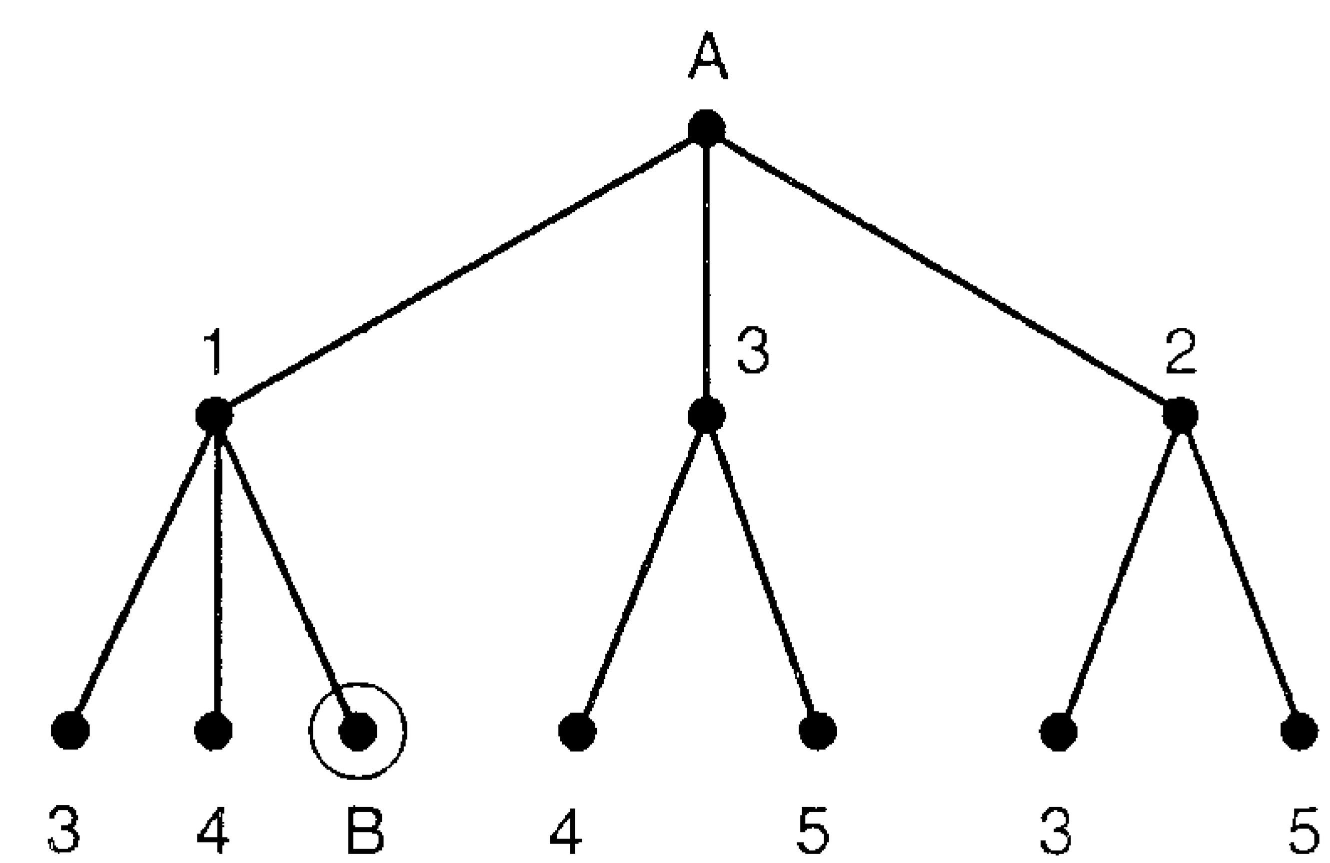

Рис. 0.113

Окончательное корневое дерево построения маршрутов будет выглядеть так:

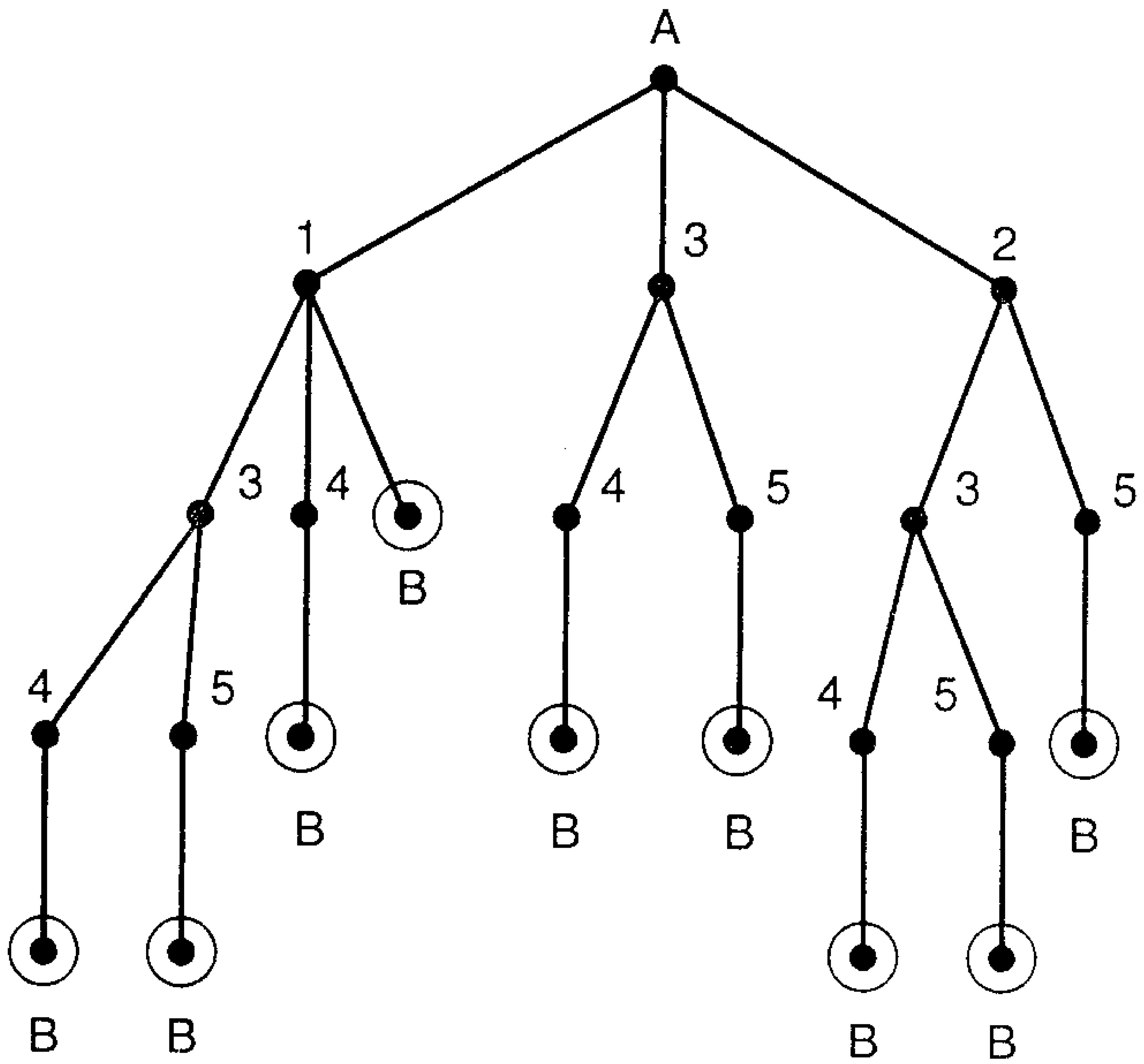

Рис. 0.114

Из города A в город B ведет 9 маршрутов.

121. Построим орграф G, имеющий 1000 вершин, соответствующий ученикам.

Вершины u и v будут соединены дугой (u,v) тогда и только тогда, когда ученику, соответствующему вершине u, нравится ученик, соответствующий вершине v.

Полустепенью исхода $d^+(v)$ вершины v называется число дуг, выходящих из вершины v. **Полустепенью захода** $d^-(v)$ вершины v число дуг, входящих в вершину v.

По условию задачи полустепень исхода каждой вершины орграфа равна k. Необходимо определить при каком k в орграфе G обязательно найдутся две такие вершины u и v, которые или соединены двумя дугами (u,v) и (v,u), или не соединены ни одной дугой.

Предположим, что при некотором k каждую пару вершин соединяет ровно одна дуга. Тогда число дуг в орграфе будет равно числу пар учеников, т.е. (1000x999):2. С другой стороны, из каждой вершины орграфа выходит ровно k дуг, т.е. в орграфе $1000k$ дуг. Приравняем эти числа.

$$\frac{1000 \cdot 999}{2} = 1000k.$$

Отсюда $2k = 999$. Последнее равенство невозможно ни при каком k.

Поэтому при любом k в школе обязательно найдутся два ученика, которые оба нравятся друг другу, или оба не нравятся друг другу.

122. Построим ориентированный граф G, задающий движение по улицам города.

Орграф называется **сильным**, если для любых вершин u и v существует маршрут, соединяющий u и v, и маршрут, соединяющий v и u. Из условия следует, что построенный орграф сильный. Необходимо построить маршрут, который начинается и оканчивается в одной и той же вершине и содержит все пуги орграфа.

Рассмотрим две произвольные вершины u_1 и v_1. В орграфе существует маршрут, соединяющий вершины u_1 и v_1 и маршрут, соединяющий вершины v_1 и u_1. Объединим эти маршруты в один маршрут L_1.

Он будет начинаться и оканчиваться в вершине u_1. Если этот маршрут будет содержать все дуги орграфа, то он будет искомым.

Предположим, что в орграфе остались дуги, не вошедшие в маршрут L. Рассмотрим дугу (u_2, v_2), причем u_2 принадлежит L_1, а v_2 не принадлежит L_1. В орграфе существует маршрут, соединяющий вершины v_2 и u_2. Вместе с дугой (u_2, v_2) он будет образовывать маршрут L_2, который начинается и оканчивается в вершине v_2. Объединим маршруты L_1 и L_2 в один маршрут L (см. рис.0 115). (Возможно, что маршруты имеют общие ребра.)

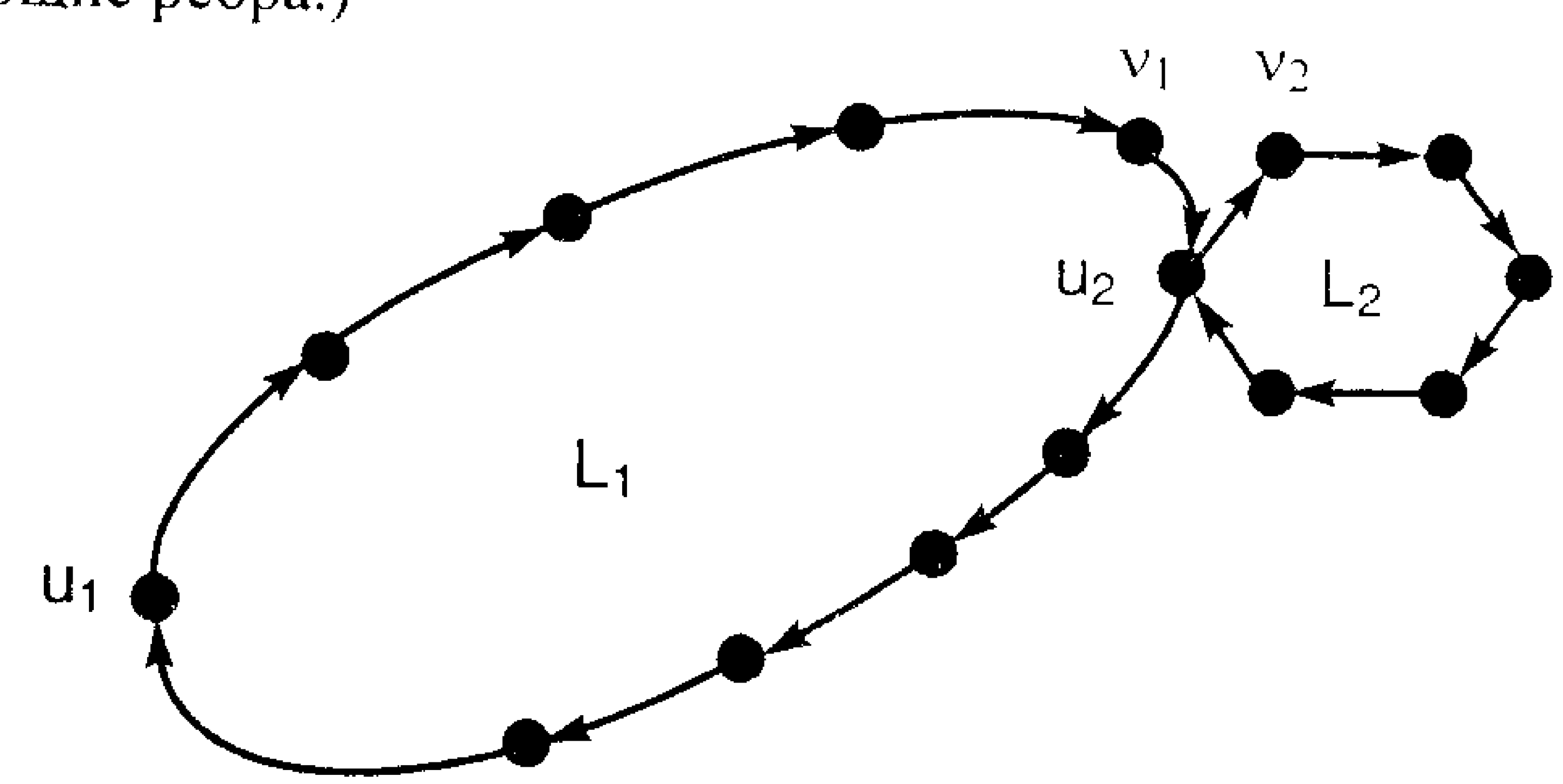

Рис. 0.115

Если маршрут L не содержит все дуги орграфа G, то увеличим его с помощью некоторого маршрута L_3, и так до тех пор пока не получим нужный маршрут. Этот маршрут и будет соответствовать маршруту патрулирования.

123. Построим орграф G, задающий движение в городе.

Цепь называется **циклом**, если ее первая и последняя вершины совпадают. Цикл, содержащий каждую дугу орграфа, называется **эйлеровым**. Орграф называется **связным**, если от любой его вершины до любой другой можно перейти по дугам без учета их ориентации. Связный орграф называется **эйлеровым**, если в нем есть эйлеров цикл.

➳ ***Теорема. Связный орграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда для каждой его вершины v выполняется равенство***

$$d^+(v) = d^-(v),$$

где $d^+(v)$ – полустепень исхода, а $d^-(v)$ – полустепень захода вершины v.

Теорема доказывается точно также, как и теорема в задаче 61.

Из условия задачи следует, что для вершин построенного графа G выполняется равенство $d^+(v) = d^-(v)$. Следовательно, граф G эйлеров, и эйлеров цикл определит нужный маршрут патрулирования.

124. Точки плоскости вместе с векторами образуют орграф G. Цикл орграфа, все вершины которого различные, называется **контуром**.

➳ ***Теорема. Связный орграф G эйлеров тогда и только тогда, когда G является объединением контуров, попарно не имеющих общих ребер.***

Доказательство. Необходимость. Пусть G — эйлеров орграф. Рассмотрим его любую вершину u_1. Выйдем из вершины u_1 по некоторой дуге (u_1, u_2). Это возможно сделать, так как орграф G связный. Поскольку $d^+(u_2) = d^-(u_2)$, то из вершины u_2 можно выйти по дуге (u_2, u_3). Орграф G имеет конечное число вершин, поэтому, в конце концов, мы попадем в некоторую вершину w, в которой были раньше. Часть цепи, которая начинается и оканчивается в вершине w, является контуром C_1. Удалим дуги контура C_1 из орграфа G. В получившемся орграфе G_1 (возможно несвязном) полустепени вершин, принадлежавших C, уменьшились на единицу, полустепени остальных вершин не изменились. Следовательно, для любой вершины v орграфа C_1 будет выполняться равенство $d^+(v) = d^-(v)$. Поэтому в орграфе G_1 можно выделить контур C_2 и т.д.

Достаточность доказывается путем объединения контуров в эйлеров цикл (см. доказательство теоремы в задаче 61).

Теорема доказана.

Возможно, орграф G, задающий векторы в нашей задаче, не является связным. Применив доказанную теорему к каждой связной части орграфа, получим разбиение векторов на контуры. Сумма векторов, принадлежащих одному контуру, равна нулю. Следовательно, сумма всех векторов равна нулю.

125. Построим ориентированный граф G, вершины которого задают n придворных, а дуга (u,v) существует тогда и только тогда, когда придворный, соответствующий вершине u, следит за придворным, соответствующим вершине v. По условию задачи полустепень исхода каждой вершины орграфа равна полустепени ее захода и равна 1. Это означает, что орграф G является контуром.

Предположим, что орграф имеет четное число вершин. В этом случае получается, что придворный $n/2$ следит за тем, кто следит за первым придворным, что невозможно (см. рис. 0.116, где n=10).

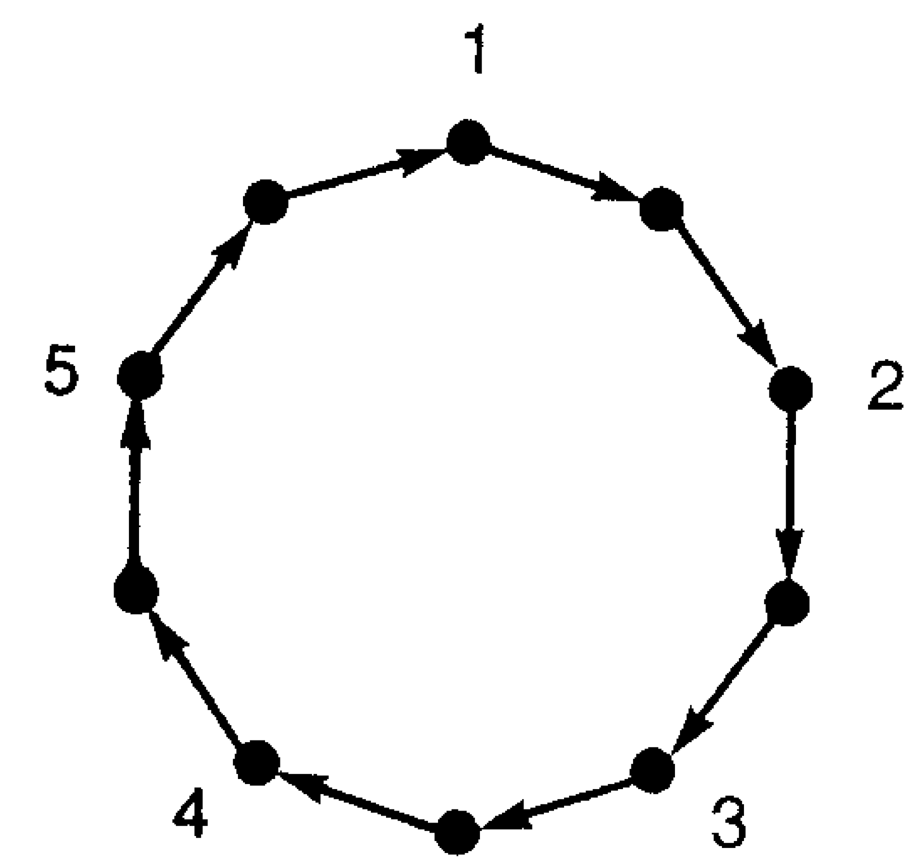

Рис. 0.116

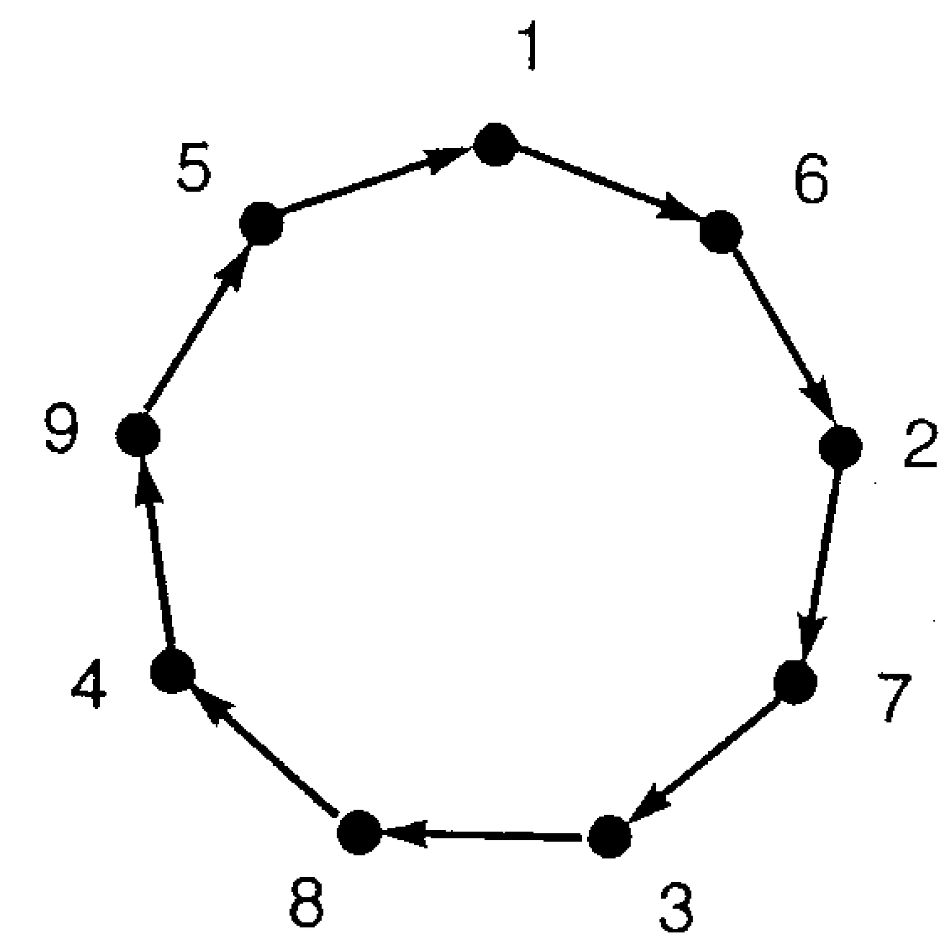

Рис. 0.117

Поэтому в орграфе G нечетное число вершин (см. рис. 0.117, где $n = 9$), а у короля Людовика нечетное число придворных.

126. Рассмотрим орграф G, который задает схему движения по дорогам парка. Соединим вершину b, которая соответствует воротам B, с вершиной а, которая соответствует воротам A, дугой (b,a). В полученном связном орграфе для любой вершины ее полустепени исхода и захода равны, и поэтому в нем существует эйлеров цикл.

Удалив, из цикла добавленную ранее дугу (b,a), получим цепь, которая определит нужный маршрут путешествия по парку.

127. Пусть граф G задает перекрестки и улицы города. Если граф G эйлеров, то найдем эйлеров цикл и ориентируем все ребра графа в направлении этого цикла.

Если граф G не эйлеров, то превратим его в эйлеров мультиграф G_1 добавлением ребер, соединяющих пары вершин нечетных степеней (см. задачу 66). Найдем эйлеров цикл в G_1 и ориентируем его ребра в направлении цикла. Для каждой вершины v орграфа G_1 будет выполняться равенство $d^+(v) = d^-(v)$. Удалим из G_1 добавленные дуги. Так как для каждой вершины будет удалено не более одной дуги, входящей или выходящей, то для любой вершины v графа G будет выполняться соотношение $|d^+(v) - d^-(v)| \le 1$.

Построенная ориентация ребер определит движение по улицам города.

128. Рассмотрим граф G, задающий улицы и перекрестки города. Для решения задачи необходимо построить такую ориентацию ребер графа G, чтобы получившийся орграф был сильным.

В графе G нет мостов, так как в противном случае ориентация моста привела бы к отсутствию маршрутов между некоторыми вершинами получившегося орграфа. (Введение одностороннего движения на дороге, соответствующей мосту, привело бы к разделению города на две такие части, что из одной из них проехать во вторую стало бы невозможно).

Построим в графе G произвольный цикл C и ориентируем ребра цикла по направлению цикла. Полученный граф G имеет ориентированные ребра (дуги) и неориентированные ребра. Такой граф называется **смешанным**.

Если цикл содержит все вершины графа, то, ориентировав произвольным образом остальные ребра графа, получим нужную ориентацию.

Пусть цикл содержит не все вершины графа G. Рассмотрим такое неориентированное ребро (u,v), что u принадлежит, а v не принадлежит циклу. Удалим из графа G ребро (u,v). Поскольку в исходном графе не было мостов, то граф, получившийся после удаления ребра связный, и в нем есть цепь L, соединяющая вершину v с некоторой вершиной w цикла. Ориентируем ребро (u,v) и цепь L по направлению от u к w (см. рис. 0.118).

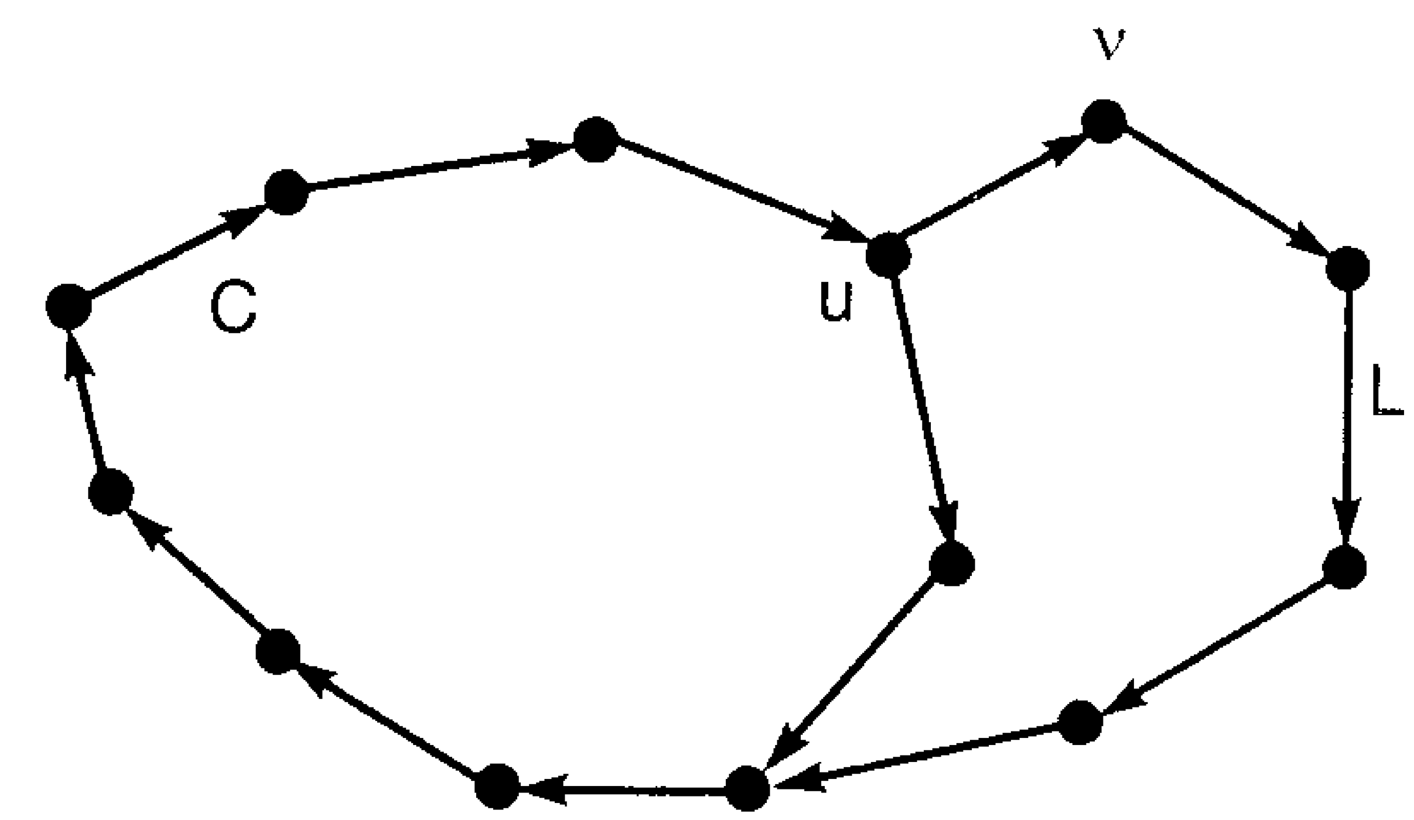

Рис. 0.118

Аналогичную ориентацию ребер будем проводить до тех пор, пока в каждую вершину графа не будет входить (а значит и выходить) хотя бы одна дуга.

Оставшиеся ребра ориентируем произвольным образом. Полученная ориентация ребер определит направление движения по улицам города.

129. Очевидно, что орграф G, представляющий сетевой график, не имеет контуров, так как в противном случая какая-то работа предшествовала бы сама себе. В орграфе G обязательно есть такая вершина u_1, в которую не входит ни одна дуга. Если такой вершины нет, то в орграфе возможно построение контура подобно построению контура при доказательстве теоремы в задаче 124. Присвоим вершине u_1 номер 1. Вычеркнем эту вершину вместе с выходящими из нее дугами из орграфа. В получившемся орграфе по той же причине, что и раньше, существует вершина u_2, в которую не входит ни одна дуга. Присвоим вершине u_2 номер 2 и вычеркнем ее вместе с выходящими из нее дугами. Этот процесс можно продолжить до присвоения номеров всем вершинам орграфа.

130. Ориентированный граф называется **турниром**, если каждая пара его вершин соединена ровно одной дугой. Этот класс графов получил свое название в связи со спортивными турнирами без ничьих, проводимыми по круговой системе. Результаты встреч можно описать орграфом, вершины которого соответствуют участникам соревнований, а дуга (u,v) есть в орграфе, если участник, соответствующий вершине u, выиграл у участника, соответствующего вершине v.

Рассмотрим турнир Т, описывающий волейбольный турнир. Пусть вершина a соответствует победителю турнира, а вершина b — команде B, выигравшей у победителя. Полустепень исхода вершины a не меньше, чем полустепень исхода вершины b, так как в противном случае победителем оказалась бы команда В. В орграфе есть дуга, выходящая из b и заходящая в a.

Рассмотрим вершины $c_1, c_2, \ldots, c_p$, в которые заходят дуги, выходящие из вершины a. Если в каждую из этих вершин заходит дуга, вышедшая из b, то полустепень исхода вершины b будет больше, чем полустепень исхода вершины a, что невозможно. Поэтому существует некоторая вершина c_i, выходящая из которой дуга заходит в вершину b. Команда, соответствующая вершине c_i, и будет нужной командой C.

131. Задача решается точно так же, как предыдущая. В качестве команд A и B возьмите две команды, одержавшие одинаковое число побед.

132. Для решения задачи сначала докажем, что в любом турнире существует цепь, содержащая каждую вершину турнира ровно один раз.

Цепь, содержащая каждую свою вершину ровно один раз, называется **путем**.

Очевидно, что для любых трех вершин турнира T можно найти путь, содержащий эти вершины. Покажем, что любой построенный в турнире путь, содержащий менее n вершин, можно увеличить на одну вершину. Пусть $L = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k)$ — путь, содержащий k вершин. Предположим, что существует вершина u, не принадлежащая L. Так как орграф T является турниром, то вершины v_1 и u соединены дугой. Если это дуга (u, v_1), то в T существует путь $L_1 = (u, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, содержащий $(k+1)$ вершину.

Теперь предположим, что это дуга (v_1, u). Рассмотрим вершины v_2 и u. Если эти вершины соединяет дуга (u, v_2), то в Т существует путь $L = (v_1, u, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_k)$, содержащий $(k+1)$ вершину. Если эти вершины соединяет дуга (v_2, u), то рассмотрим вершины u и v_3 (см. рис. 0.119). Об этой паре вершин можно сказать то же самое, что о предыдущей.

Можно сделать вывод: если v_i первая такая вершина в списке $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k)$, что существует дуга (u, v_i), то турнир Т содержит путь $L_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, u, v_i, \ldots, v_k)$; если для любой вершины v_i пути L существует дуга (v_i, u), то турнир Т содержит путь $L_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_k, u)$. В каждом из этих путей на одну вершину больше, чем в пути L.

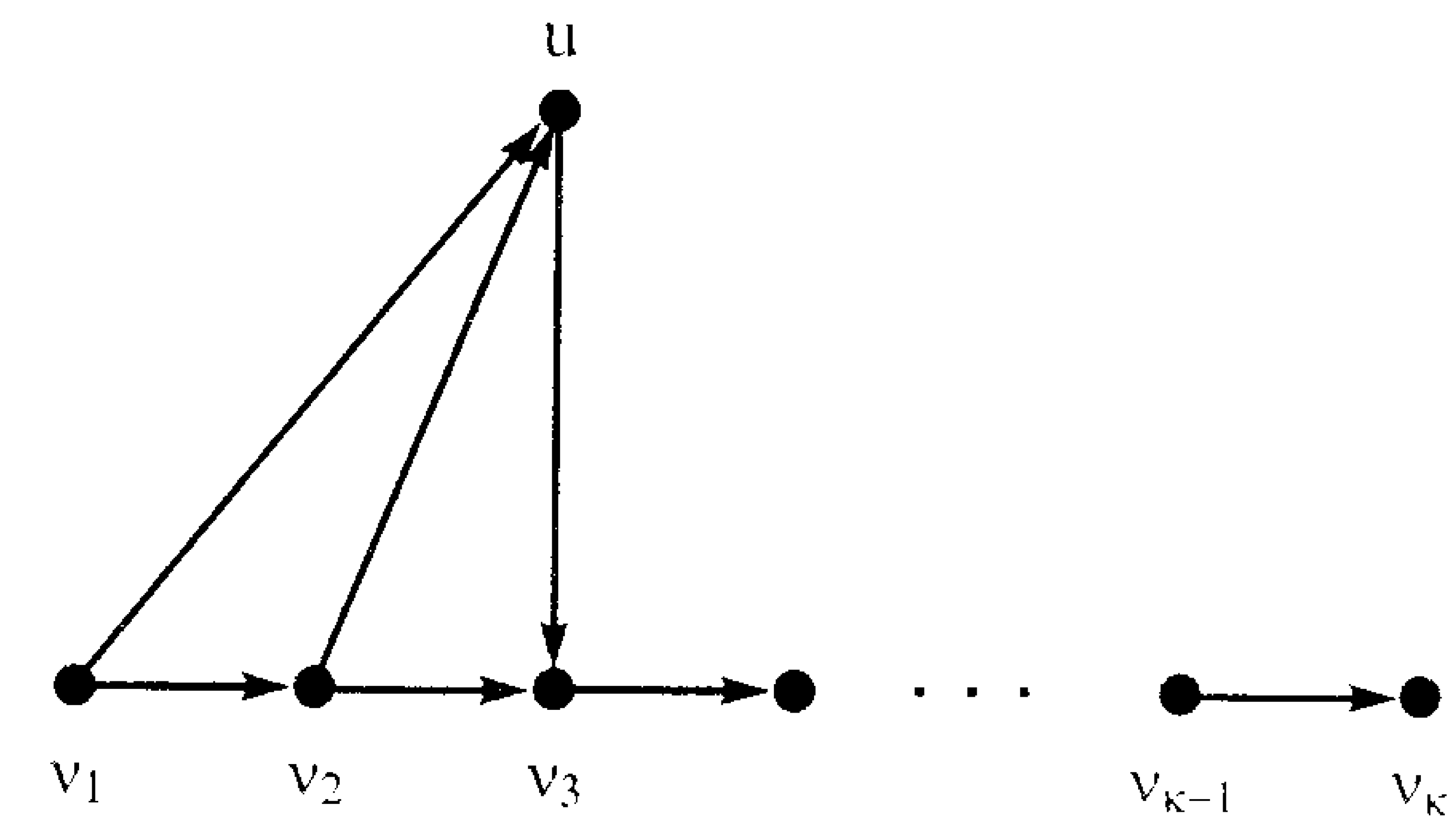

Рис. 0.119

Процесс увеличения пути можно продолжить до получения в турнире T пути $L' = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$, содержащего каждую вершину турнира. Если в турнире есть дуга (v'_n, v'_1), то нужный порядок команд задается порядком вершин пути L. Если в турнире есть дуга (v'_1, v'_n), то изменим результат встреч между командами, соответствующими этим вершинам. Теперь порядок вершин пути L' и задаст нужный порядок команд.

133. Опишем волейбольный турнир орграфом T, как в предыдущих задачах. Поскольку каждая команда выиграла хотя бы одну встречу, то из любой вершины орграфа выходит хотя бы одна дуга. Необходимо доказать, что в T существует контур, содержащий ровно 3 вершины.

Покажем, что в T существует какой-нибудь контур. Возьмем произвольную вершину v_1 и выйдем из нее по любой дуге (v_1, v_2). Затем выйдем из вершины v_2 по дуге (v_2, v_3) и т.д. Поскольку число вершин орграфа конечно, то, в конце концов, мы попадем в некоторую вершину w, в которой были раньше. Часть пройденного нами маршрута от w до w образует контур (см. рис. 0.120).

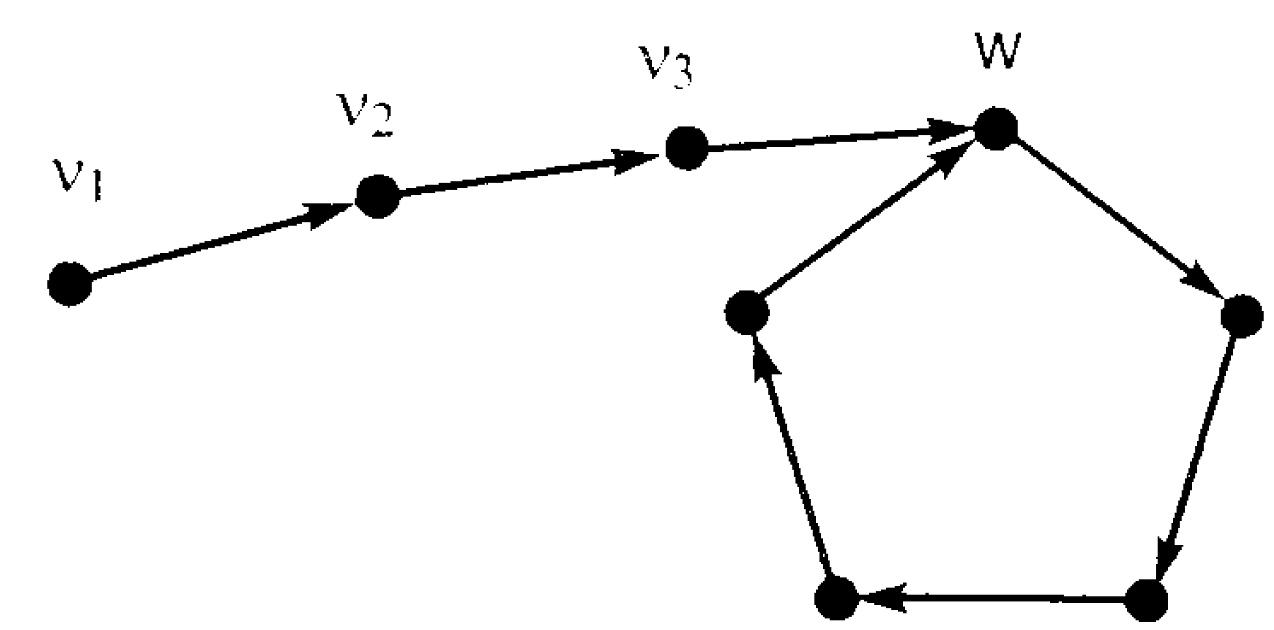

Рис. 0.120

Рассмотрим построенный контур $C = (u_1, u_2, u_3, ..., u_k, u_1)$. Если он состоит из трех дуг, то вершины контура определяют нужные команды.

Пусть контур состоит более, чем из трех дуг. Если в турнире есть дуга (u_3,u_1), то вершины u_1, u_2 и u_3 образуют нужный контур. Если в турнире есть дуга (u_1,u_3), то в нем есть контур $C_1 = (u_1,u_3, ..., u_k, u_1)$ (см. рис. 0.121), содержащий меньше дуг, чем контур C.

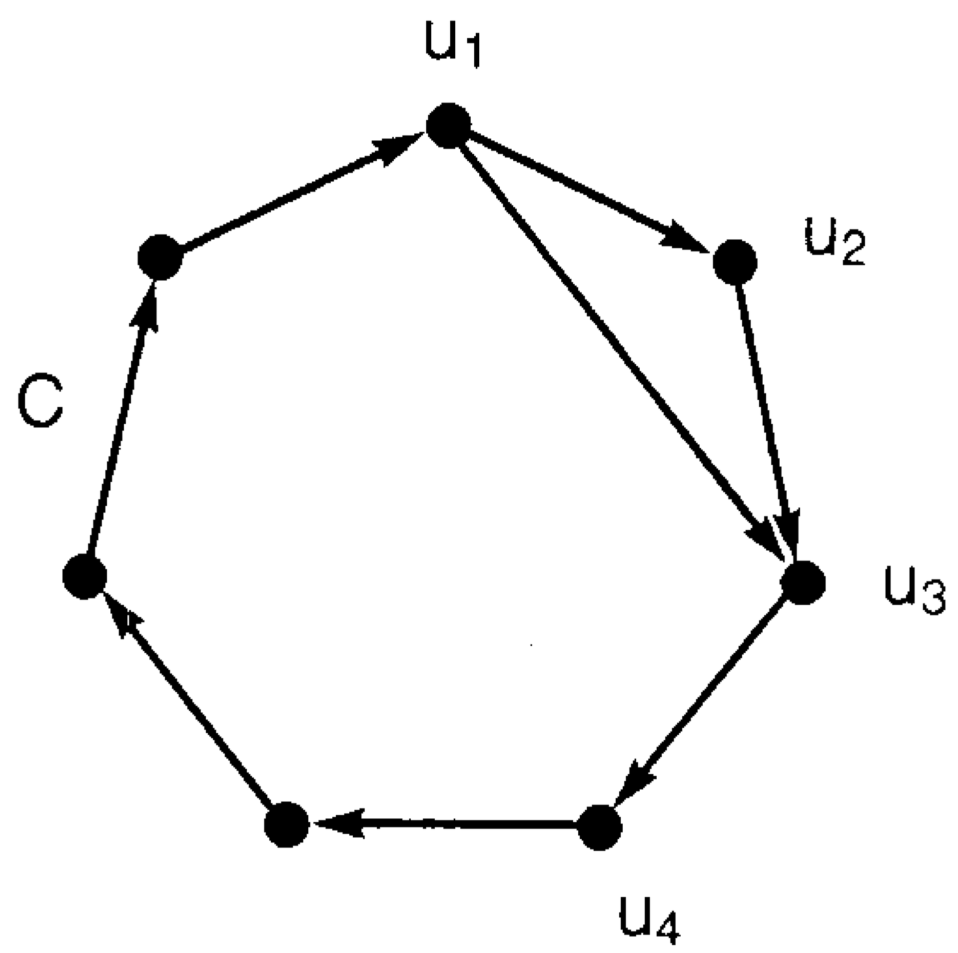

Рис. 0.121

Подобным образом можно из контура C_1 получить контур C_2, в котором будет меньше дуг, чем в C_1, и, в конце концов, контур, содержащий ровно 3 дуги. Вершины этого контура определят нужные команды.

134. Опишем волейбольные соревнования турниром Т, в котором вершины разбиты на k групп. Тогда орграф Т будет содержать $n = \frac{(k+1)k}{2}$ вершин и $m = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(k+1)k(n-1)}{4}$ дуг. Число дуг, выходящих из вершин одной группы, равно $x = \left(\frac{(k+1)k(n-1)}{4}\right):k = \frac{(k+1)(n-1)}{4}$. Но первая группа состоит из одной вершины, и из этой вершины не может выходить более (n-1) дуги. Поэтому $\frac{(k+1)(n-1)}{4} \le n-1$, отсюда $k \le 3$.

Если $k = 2$, то $n = 3$ и $x = 1{,}5$, т.е. на одну группу приходится полторы дуги, что невозможно.

Если $k = 3$, то $n = 6$ и $x = 5$. Например, для соревнований, итоги которых отображены в таблице, первая группа — команда 1, вторая — команды 3 и 4, третья — команды 2,5,6.

	1	2	3	4	5	6
1	■	1	1	1	1	1
2	0	■	1	1	1	1
3	0	0	■	1	1	1
4	0	0	0	■	1	1
5	0	0	0	0	■	1
6	0	0	0	0	0	■

135. Построим граф G, в котором вершины соответствуют людоедам, а дуга (u,v) существует тогда и только тогда, когда людоед, соответствующий вершине u, хочет съесть людоеда, соответствующего, вершине v.

Удалим из орграфа G минимальное число ребер, так чтобы в оставшемся графе G_1 не было контуров. Для любой вершины v определим метку $t(v)$ как число вершин в наибольшем пути с началом в вершине v в орграфе G_1 (см. рис. 0.122). Из условий задачи следует, что максимальное значение $t(v)$ равно 6.

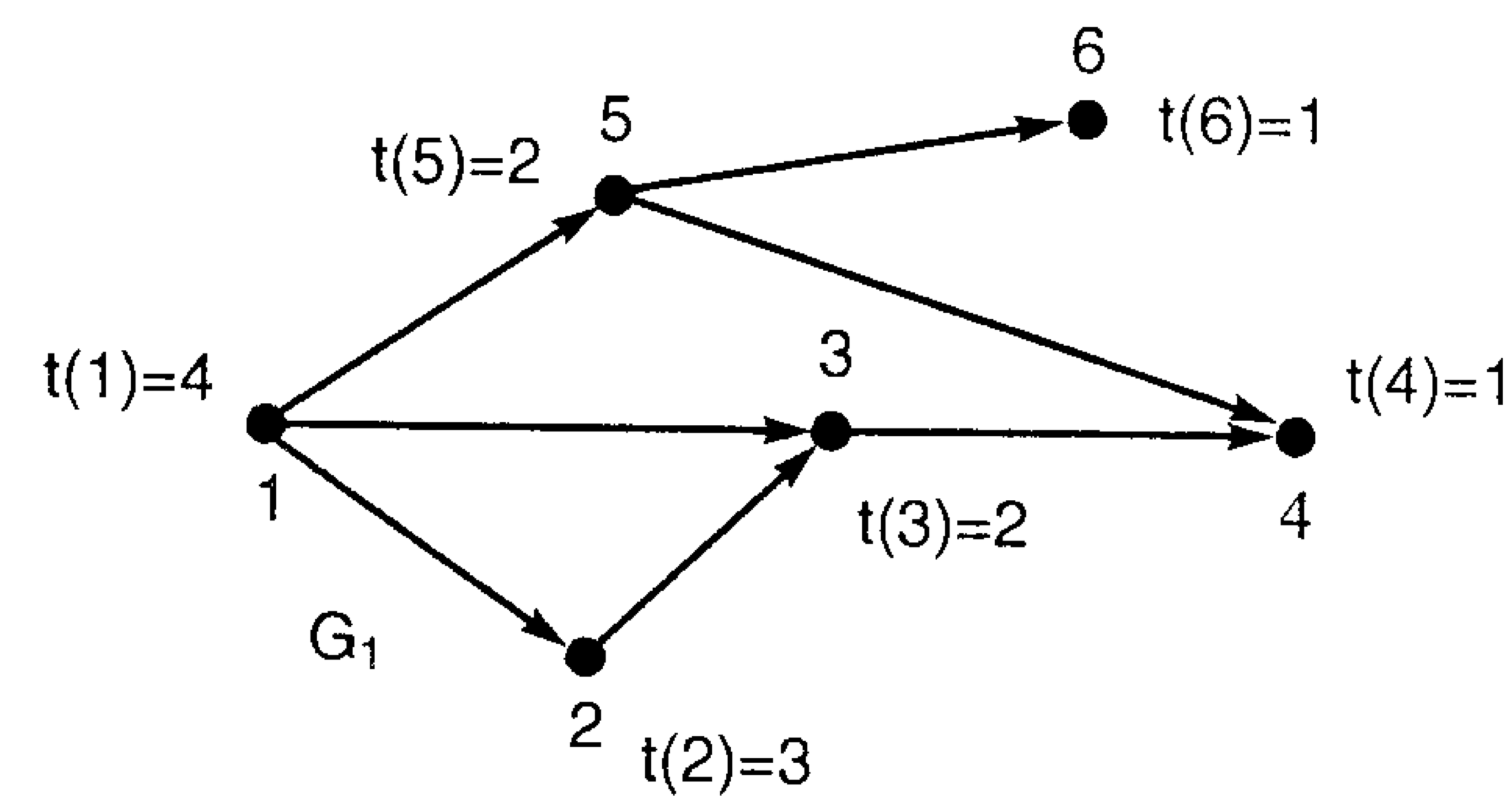

Рис. 0.122

Посадим людоеда, соответствующего вершине v, в комнате с номером $t(v)$. Докажем, что в каждой из комнат никто никого не хочет съесть. Это значит, докажем, что среди вершин с одинаковым номером в орграфе G нет вершин, соединенных дугой.

Действительно, если дуга (u,v) принадлежит G_1, то $t(u)>t(v)$. Если (u,v) — удаленная дуга, то из минимальности числа удаленных дуг следует, что добавив к G_1 эту дугу, получим орграф G_2 с контуром (см. рис. 0.123). Поэтому $t(v) > t(u)$.

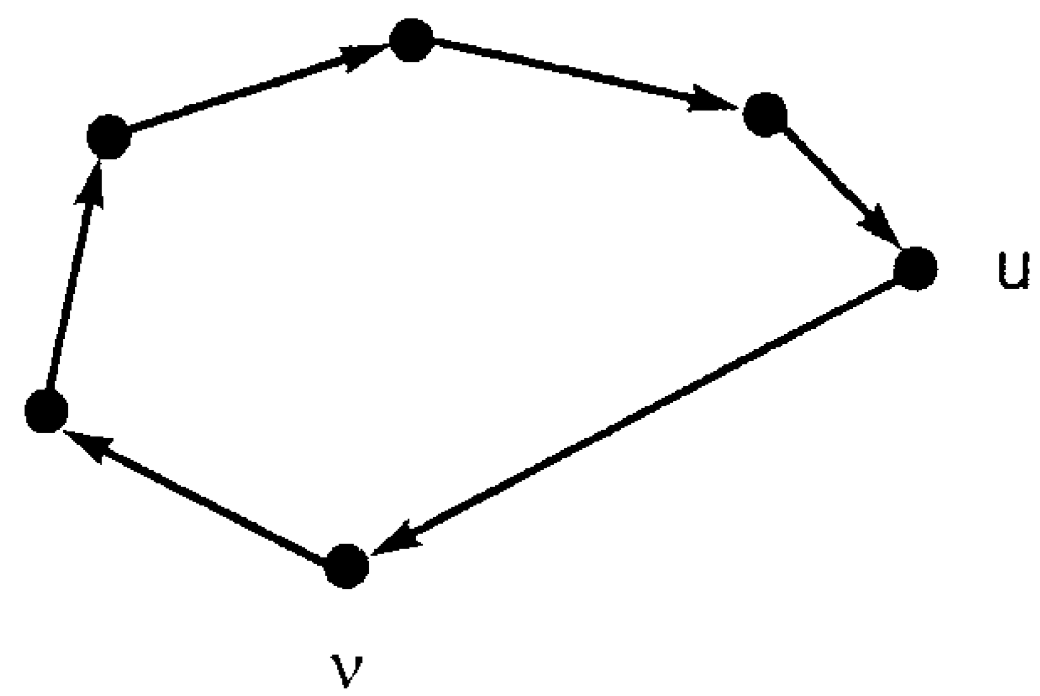

Рис. 0.123

Следовательно, в каждой из шести комнат никто никого не хочет есть.

136. Решение задачи сводится к ответу на вопрос: существует ли турнир с семью вершинами, у которого указанные числа будут полустепенями исхода вершин.

В случае а) задача решается просто. Турнир с семью вершинами получается из полного графа K_7, ориентацией каждого ребра. Поэтому сумма полустепеней его вершин равна числу ребер графа K_7, т.е. $(7\times6):2 = 21$. Сумма же чисел побед равна 22. Поэтому такого турнира быть не может.

В случае б) сумма чисел побед равна 21, и решение задачи более сложное.

Поставим в соответствие любому волейбольному турниру с n участниками двудольный граф G, в котором доля А = {1', 2', ..., n'}, доля В = {1", 2", ... , n"}. Ребро в графе G соединяет вершины i' и j'', тогда и только тогда, когда команда i выиграла у команды j (пример графа G для четырех команд см. на рис. 0.124).

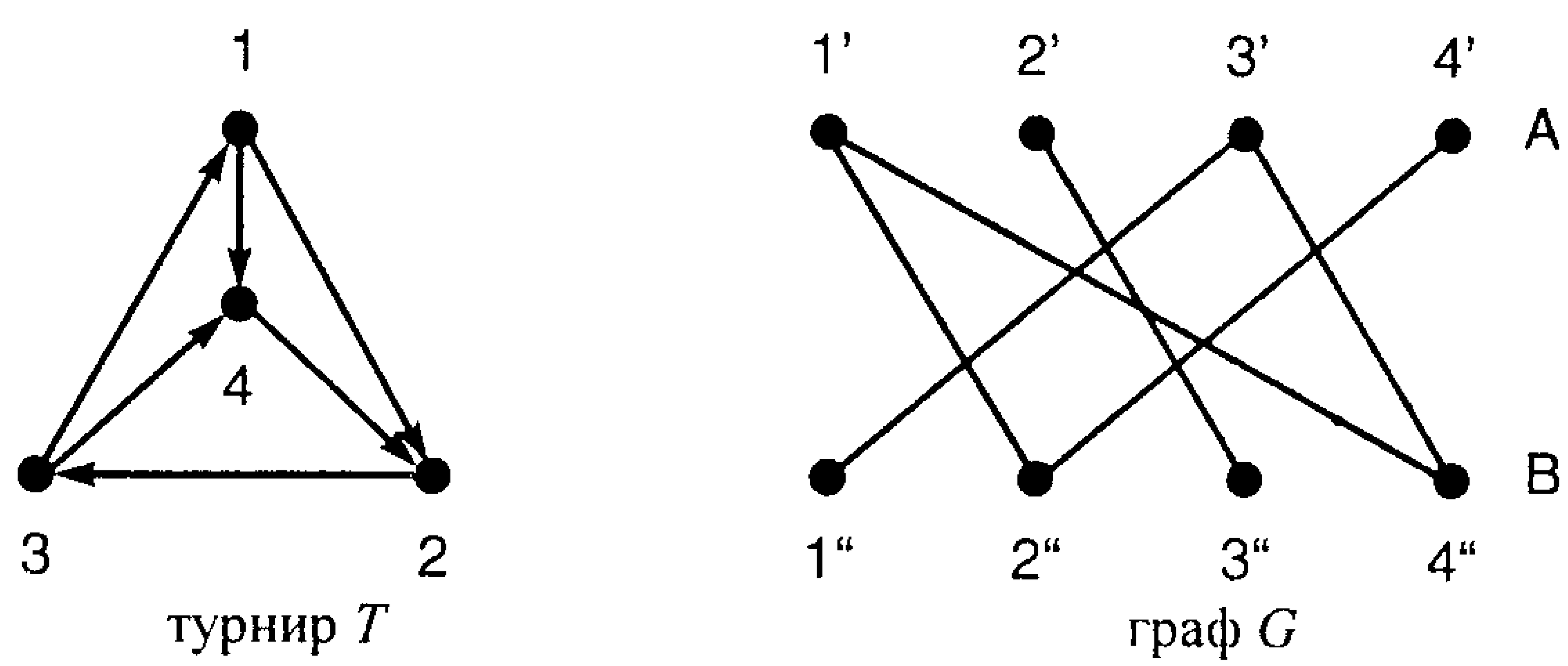

Рис. 0.124

Степень вершины i' графа G равна числу побед команды i, а степень вершины j'' равна числу поражений команды j. Если волейбольный турнир с указанным числом побед существует, то существует двудольный граф G, у которого степени вершин доли A будут 5, 5, 5, 4, 1, 1, 0, а доли В — 1, 1, 1, 2, 5, 5, 6 (числа поражений команд).

От графа G перейдем к графу G_1, соединив каждую пару вершин доли A ребром (см. рис. 0.125).

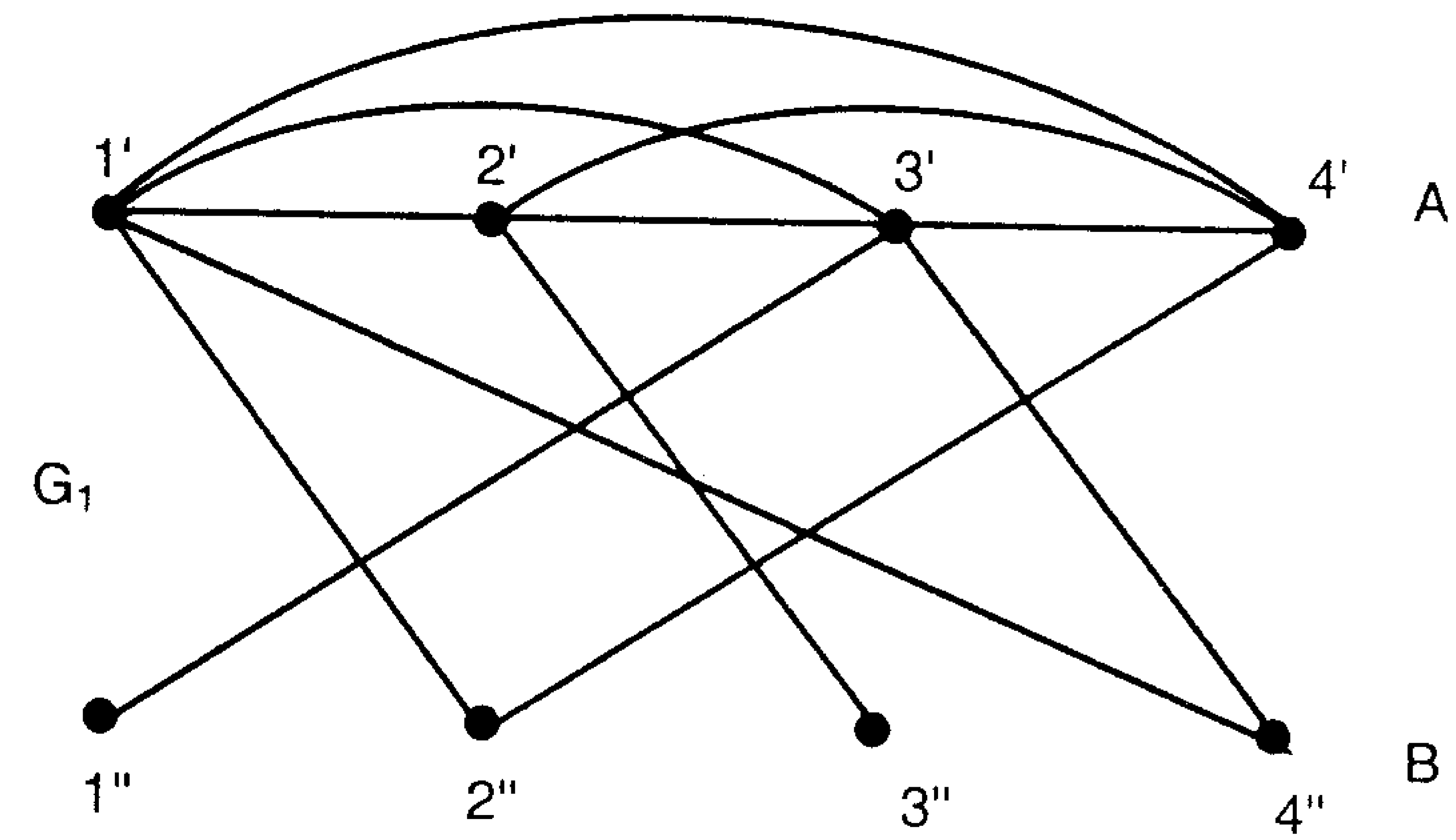

Рис. 0.125

Если волейбольный турнир с указанным числом побед существует, то существует граф G_1, степени вершин которого будут: 11, 11, 11, 10, 7, 7, 6, 1, 1, 1, 2, 5, 5, 6.

Воспользуемся предложенным в задаче 118 способом проверки графичности последовательности

$D = (11, 11, 11, 10, 7, 7, 6, 6, 5, 5, 2, 1, 1, 1)$.

Рассмотрим цепочку последовательностей:

$$D' = (10, 10, 9, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 1, 0, 1, 1),$$
$$D'_1 = (10, 10, 9, 6, 6, 5, 5, 4, 4, 1, 1, 1, 0),$$
$$D'_1 = (9, 8, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 0, 0, 1, 0),$$
$$D_2 = (9, 8, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 1, 0, 0, 0),$$
$$D'_2 = (7, 4, 4\ 3, 3, 2, 2, 0, -1, 0, 0).$$

Так как в последовательности D'_2 появилось отрицательное число, то последовательность D не является графической. Поэтому не существует нужный граф G_1, и, следовательно, волейбольный турнир с указанным числом побед.

Литература

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение. М., "Просвещение". 1979.
2. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М., "Наука". 1990.
3. Уилсон Р. Введение в теорию графов. М., "Мир". 1977.
4. Мельников О.И. Незнайка в стране графов. Минск, "Оракул". 1998.

Использованные задачи

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М. 1975 — 28

Барабанов Е.А., Берник В.И., Воронович И.И. Задачи областных и республиканских олимпиад Беларуси 1992 года. Минск.1992 — 60

Березина Л.Ю. Графы и их применение. М. 1979 — 34

Богачев Л.В. Логические задачи. М. 1985 — 5, 22, 42,131

Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. М., 1988 — 6, 9, 10, 41, 50

Васильев Н.Б., Савин А.П. Избранные задачи московских математических олимпиад — 40

Вишеньський В.А., Карташев М,В., Михайловський В.І., Ядренко М.И. Кіївскі математичны олімпиади. Кіев. 1993 — 19,49,65

Вторая соросовская олимпиада школьников Беларуси. — 47

Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады. М., 1986 — 8, 51, 59, 70, 98, 101, 116, 128

С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. Математический кружок. Санкт-Петербург. 1992 — 35, 37, 38

Зарубежные математические олимпиады. М., 1987 — 7, 16, 32, 57, 71

Всероссийские олимпиады школьников. Москва. "Просвещение." 1992 — 38, 55

Задачи Белорусской математической олимпиады школьников. Минск. 1995 — 13, 15, 26

Заключительный конкурс журнала "Квант". Кострома. 1995 — 121,134

Международные математические олимпиады. М. 1976 — 92

Сборник задач московских математических олимпиад. М. 1965 — 36,112

Задача Зверовича И.Э. — 48

Предметный указатель

п

р

с

т

ф

ц

ч