§ 3. Основные теоремы вариационного метода решения краевых задач

Пусть в области G с границей Γ дано линейное дифференциальное уравнение с непрерывными коэффициентами (обыкновенное или с частными производными) и требуется найти решение y этого уравнения, удовлетворяющее на границе Γ заданным линейным однородным (краевым) условиям. Левую часть этого уравнения можно рассматривать как линейный оператор L, определенный на множестве K функций, обладающих непрерывными производными нужного порядка в $G+\Gamma$ и удовлетворяющих данным краевым условиям на Γ. Таким образом, наша краевая задача сводится к решению операторного уравнения

$$Ly=f(P), \tag{1}$$

где P обозначает совокупность независимых переменных, $f(P)$ — известная функция (которую мы будем считать непрерывной) и $y \in K$, причем функция y на границе Γ удовлетворяет краевым условиям

$$R[y]=0, \tag{2}$$

где R — известный линейный функционал или оператор более низкого порядка.

Заметим, что неоднородная краевая задача

$$Ly=f(P) \tag{3}$$

и

$$R[y]=\varphi(P) \quad \text{при} \quad P \in \Gamma, \tag{4}$$

где $\varphi(P)$ — известная функция, сводится к однородной, если положить $y=z+y_1$, где z — новая неизвестная функция и y_1 — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая краевому условию (4): $R[y_1]=\varphi(P)$.

Действительно, из формул (3) и (4) получаем $Lz=f(P)-Ly_1$ и $R[z]=0$. Функцию y_1 обычно нетрудно найти подбором.

Идея вариационного метода применительно к нашему случаю состоит в том, что краевая задача (1) — (2) заменяется равносильной задачей об отыскании функции, дающей экстремум (обычно минимум) некоторому функционалу. Вариационный метод решения краевых задач получил широкое распространение после того, как немецкий математик Ритц в 1908 г. предложил удобный прием для построения приближенного решения вариационной задачи. Метод Ритца будет изложен в § 7.

Приведем две важные для дальнейшего теоремы.

Теорема 1. *Пусть L — симметричный линейный оператор, определенный и положительный в классе K. Тогда операторное уравнение (1) при наличии краевого условия (2) в классе K не может иметь* *двух решений, т. е. если существует решение краевой задачи* (1)—(2), *то оно единственно.*

Доказательство. Предположим, что краевая задача (1)—(2) имеет два решения y_1 и y_2, т. е.

$$Ly_1=f(P), \quad R[y_1]=0 \tag{5}$$

и

$$Ly_2=f(P), \quad R[y_2]=0. \tag{6}$$

Вычитая из уравнений (5) соответствующие уравнения (6), в силу линейности оператора L и функционала R получим

$$L(y_1-y_2)=0, \quad R[y_1-y_2]=0, \tag{7}$$

т. е. $(y_1-y_2)\in K$.

Умножая первое из полученных равенств скалярно на разность y_1-y_2, будем иметь

$$(L(y_1-y_2), (y_1-y_2))=0. \tag{8}$$

Так как по условию оператор L положительный в классе K и функция $(y_1-y_2)\in K$, то из формулы (8) следует $y_1-y_2\equiv 0$, т. е. $y_1\equiv y_2$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть L — симметричный оператор, определенный и положительный в классе K, а $F[y]$ — функционал вида*

$$F[y]=(Ly, y)-2(f, y)\equiv\int\limits_{\omega}(Ly-2f)\,y\,d\omega, \tag{9}$$

где $f=f(P)$ — правая часть уравнения (1).

Если краевая задача (1)—(2) *с однородными граничными условиями имеет решение $\bar{y}$, то это решение дает минимум функционалу $F[y]$.*

Обратно, если в классе K существует функция $\bar{y}$, дающая минимум функционалу (9), *то эта функция является решением уравнения* (1).

Доказательство. 1° Пусть $\bar{y}$ есть решение краевой задачи (1)—(2), т. е. $L\bar{y}=f(P)$ и $R[\bar{y}]=0$. Заменяя $f(P)$ через $L\bar{y}$ в формуле (9), получим

$$F[y]=(Ly, y)-2(L\bar{y}, y). \tag{10}$$

Пользуясь симметричностью оператора L, будем иметь

$$(L\bar{y}, y)=(\bar{y}, Ly)=(Ly, \bar{y}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F[y]&=(Ly, y)-(Ly, \bar{y})-(L\bar{y}, y)=\\ &=(Ly, y-\bar{y})-[(L\bar{y}, y)-(L\bar{y}, \bar{y})]-(L\bar{y}, \bar{y})=\\ &=(Ly, y-\bar{y})-(L\bar{y}, y-\bar{y})-(L\bar{y}, \bar{y})=\\ &=(L(y-\bar{y}), (y-\bar{y}))-(L\bar{y}, \bar{y}). \end{aligned} \tag{11}$$

В правой части формулы (11) только первое слагаемое является переменным. Очевидно, $(y-\bar{y}) \in K$, поэтому в силу положительности оператора L имеем

$$(L(y-\bar{y}),\ (y-\bar{y})) \geqslant 0.$$

Следовательно, функционал $F[y]$ достигает своего наименьшего значения для тех и только тех допустимых функций y, для которых имеет место равенство

$$(L(y-\bar{y}),\ (y-\bar{y})) = 0.$$

Отсюда на основании определения положительного оператора получаем $y-\bar{y}\equiv 0$, т. е. $y\equiv\bar{y}$.

Заметим, что из формулы (11) следует, что наименьшее значение функционала $F[y]$ равно $F_{\min}(y)=F[\bar{y}]=-(L\bar{y},\ \bar{y})$.

2° Пусть существует функция $\bar{y}$ из класса K, дающая минимум функционалу (9). Это значит, что для любой функции $y_1 \in K$ и достаточно близкой к $\bar{y}$ справедливо неравенство

$$F[y_1]-F[\bar{y}]\geqslant 0.$$

Положим $\eta=(y_1-\bar{y}) \in K$ и рассмотрим семейство функций

$$y=\bar{y}+\alpha\eta, \tag{12}$$

где α — числовой параметр. Очевидно, при любом α функции y являются допустимыми и при достаточно малом $|\alpha|$ выполнено неравенство

$$\Delta F=F[y]-F[\bar{y}]\geqslant 0.$$

На основании формулы (9), выполняя тождественные преобразования, имеем

$$\begin{aligned}\Delta F=(Ly,\ y)-2(f,\ y)-(L\bar{y},\ \bar{y})+2(f,\ \bar{y}) &= \\ =(Ly,\ y)-2(L\bar{y},\ y)&+ \\ +2(L\bar{y}-f,\ y)-2(L\bar{y}-f,\ \bar{y})+(L\bar{y},\ \bar{y}) &= \\ =(Ly,\ y)-2(L\bar{y},\ y)+2(L\bar{y}-f,\ y-\bar{y})+(L\bar{y},\ \bar{y}) &\geqslant 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда, используя преобразование (11) и формулу (12), находим

$$\begin{aligned}\Delta F=(L(y-\bar{y}),\ (y-\bar{y}))-(L\bar{y},\ \bar{y})+2(L\bar{y}-f,\ y-\bar{y})+(L\bar{y},\ \bar{y}) &= \\ =\alpha^2(L\eta,\ \eta)+2\alpha(L\bar{y}-f,\ \eta)\geqslant 0.&\end{aligned} \tag{14}$$

Левая часть неравенства (14) представляет собой квадратный трехчлен относительно параметра α, причем этот трехчлен не может менять знака. Следовательно, соответствующее квадратное уравнение заведомо не имеет действительных различных корней и, значит, обладает неположительным дискриминантом, т. е.

$$(L\bar{y}-f,\ \eta)^2-(L\eta,\ \eta)\cdot 0\leqslant 0;$$

отсюда $(L\bar{y}-f,\ \eta)=0$. Таким образом,

$$\int_{\omega}(L\bar{y}-f)\,\eta\,d\omega=0 \tag{15}$$

для любой функции $\eta\in K$. В силу произвольности функции η отсюда следует (см. [3]), что $L\bar{y}-f\equiv 0$, т. е. $L\bar{y}=f$. Таким образом, $\bar{y}$ есть решение нашей краевой задачи.

§ 4. Сведе́ние линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка к вариационной задаче

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=\Phi(x) \tag{1}$$

с линейными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 y'(a)+\alpha y(a)&=A,\\ \beta_1 y'(b)+\beta y(b)&=B,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$ и $\Phi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$ и

$$|\alpha_1|+|\alpha|\neq 0,\quad |\beta_1|+|\beta|\neq 0.$$

Приведем уравнение (1) к специальному, так называемому *самосопряженному виду*. Для этого умножим все его члены на положительный множитель

$$p(x)=e^{\int\limits_a^x P(x)\,dx},$$

после чего получим

$$p(x)\,y''(x)+p(x)\,P(x)\,y'+p(x)\,Q(x)\,y=p(x)\,\Phi(x). \tag{3}$$

Так как

$$p'(x)=e^{\int\limits_a^x P(x)\,dx}\,P(x)=p(x)\,P(x),$$

то уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,y']+q(x)\,y=f(x), \tag{4}$$

где $p(x)>0$, $q(x)=p(x)\,Q(x)$, $f(x)=p(x)\,\Phi(x)$.

Дифференциальное уравнение второго порядка вида (4) называется *самосопряженным*. Вводя линейный оператор

$$Ly=-\frac{d}{dx}[p(x)\,y']-q(x)\,y, \tag{5}$$

получим

$$Ly = -f(x), \tag{6}$$

где $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Предположим сначала, что краевые условия (2) являются однородными, т. е.

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0, \quad \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = 0, \tag{7}$$

где $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$ и $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$, причем без нарушения общности рассуждений можно предполагать, что $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\beta_1 \geqslant 0$.

Покажем, что в этом случае оператор L является **самосопряженным** (симметричным) в классе функций $K = \{y\}$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе со своими первыми и вторыми производными ($y \in C^{(2)}[a, b]$) и удовлетворяющих на концах отрезка $[a, b]$ однородным краевым условиям (7).

Пусть $u \in K$ и $v \in K$. На основании формулы (5) имеем

$$(Lu, v) - (Lv, u) =$$

$$= \int_a^b \left\{ -v \left[\frac{d}{dx}(p(x)u') + q(x)u \right] + u \left[\frac{d}{dx}(p(x)v') + q(x)v \right] \right\} dx =$$

$$= \int_a^b [p(x)(uv'' - vu'') + p'(x)(uv' - vu')]\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dx}[p(x)(uv' - vu')]\, dx =$$

$$= p(x)(uv' - vu')\Big|_a^b = p(b)w(b) - p(a)w(a), \tag{8}$$

где

$$w(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ удовлетворяют однородным краевым условиям

$$\alpha_1 u'(a) + \alpha u(a) = 0, \quad \alpha_1 v'(a) + \alpha v(a) = 0,$$

где $\alpha_1 \neq 0$ или $\alpha \neq 0$. Следовательно,

$$u'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha_1} u(a), \quad v'(a) = -\frac{\alpha}{\alpha_1} v(a)$$

или

$$u(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha} u'(a), \quad v(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v'(a).$$

Поэтому $w(a) = 0$. Аналогично доказывается, что $w(b) = 0$.

Следовательно, из формулы (8) вытекает $(Lu, v)-(Lv, u)=0$, и, значит, $(Lu, v)=(Lv, u)$, т. е. оператор L симметричен.

Выясним, при каких условиях оператор L является положительным. Для функции $y \in K$ имеем

$$(Ly, y)=-\int_a^b \left\{\frac{d}{dx}[p(x)y']+q(x)y\right\} y\,dx. \qquad (10)$$

Интегрируя по частям первый член формулы (10), получим

$$(Ly, y)=-p(x)yy'\Big|_a^b+\int_a^b [p(x)y'^2-q(x)y^2]\,dx. \qquad (11)$$

Так как $p(x)>0$, то из формулы (11) вытекает, что оператор L положителен, если

$$q(x)\leqslant 0 \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b, \qquad (12)$$

$$y(a)y'(a)\geqslant 0, \quad y(b)y'(b)\leqslant 0. \qquad (13)$$

Так как $\alpha_1 \geqslant 0$ и $\beta_1 \geqslant 0$, то в силу краевых условий (7) неравенства (13) эквивалентны неравенствам

$$\alpha\leqslant 0, \quad \beta\geqslant 0. \qquad (14)$$

Таким образом, краевая задача (6)—(7) при наличии неравенств (12) и (14), согласно теореме 2 из § 3, равносильна задаче о минимуме функционала

$$F[y]=(Ly, y)+2(f, y) \qquad (15)$$

в классе функций K. Используя формулу (11), имеем

$$F[y]=p(a)y(a)y'(a)-p(b)y(b)y'(b)+$$
$$+\int_a^b [p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx. \qquad (16)$$

В частности, если $\alpha_1>0$ и $\beta_1>0$, то получим

$$F[y]=-\frac{\alpha}{\alpha_1}p(a)y^2(a)+\frac{\beta}{\beta_1}p(b)y^2(b)+$$
$$+\int_a^b [p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx. \qquad (17)$$

Аналогичные выражения получаем для других случаев.

Рассмотрим теперь краевую задачу (6) с неоднородными краевыми условиями (2) в предположении, что выполнены неравенства (12) и (14). Оператор L в классе функций K_1, удовлетворяющих условиям (2), вообще говоря, не является симметричным и положительным, поэтому нельзя непосредственно использовать теорему 2 предыдущего параграфа.

Пусть $z=z(x)\in C^{(2)}[a, b]$ и удовлетворяет условиям (2), т. е.

$$\alpha_1 z'(a)+\alpha z(a)=A, \quad \beta_1 z'(b)+\beta z(b)=B. \tag{18}$$

Обозначая через y решение краевой задачи (6), (2), введем функцию $u=u(x)$, определяемую равенством

$$u=y-z. \tag{19}$$

Функция u удовлетворяет однородным краевым условиям

$$\alpha_1 u'(a)+\alpha u(a)=0, \quad \beta_1 u'(b)+\beta u(b)=0 \tag{20}$$

и является решением уравнения $Lu=Ly-Lz$, т. е.

$$Lu=-f(x)-Lz. \tag{21}$$

Таким образом, $u\in K$. Оператор Lu в классе функций K является симметричным и положительным, и, следовательно, решение u краевой задачи (20)—(21), в силу теоремы 2 из § 3, дает минимум функционалу

$$F[u]=(Lu,\ u)+2(f(x)+Lz,\ u).$$

Отсюда на основании формулы (15) имеем

$$F[u]=p(a)\,u(a)\,u'(a)-p(b)\,u(b)\,u'(b)+ \\ +\int_a^b [p(x)\,u'^2-q(x)\,u^2+2(f(x)+Lz)\,u]\,dx. \tag{22}$$

Из равенства (19) получаем, что решение y краевой задачи (6), (2) дает минимум функционалу

$$\begin{aligned} F_1[y]=p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)-z'(a)]- \\ -p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)-z'(b)]+ \\ +\int_a^b [p(x)(y'-z')^2-q(x)(y-z)^2+2(f(x)+Lz)(y-z)]\,dx= \\ =p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)-z'(a)]- \\ -p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)-z'(b)]+ \\ +\int_a^b [p(x)\,y'^2-q(x)\,y^2+2f(x)\,y]\,dx+ \\ +\int_a^b [p(x)\,z'^2-q(x)\,z^2-2f(x)\,z]\,dz+ \\ +2\int_a^b [-p(x)\,y'z'+q(x)\,yz+(y-z)\,Lz]\,dx. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя интегрирование по частям, будем иметь

$$\int_a^b (y-z)\,Lz\,dx = -\int_a^b (y-z)\left[\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z\right]dx =$$

$$= -(y-z)p(x)z'\Big|_a^b + \int_a^b [p(x)z'(y'-z') - q(x)z(y-z)]\,dx =$$

$$= p(a)[y(a)-z(a)]z'(a) - p(b)[y(b)-z(b)]z'(b) + \int_a^b [p(x)z'(y'-z') - q(x)z(y-z)]\,dx.$$

Внося это выражение в формулу (23), после несложных упрощений получим

$$F_1(y) = p(a)[y(a)-z(a)][y'(a)+z'(a)] - p(b)[y(b)-z(b)][y'(b)+z'(b)] + \int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]\,dx - \int_a^b [p(x)z'^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z]\,dx. \quad (24)$$

Пусть $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Из краевых условий (2) имеем

$$y'(a) = \frac{A - \alpha y(a)}{\alpha_1}, \quad z'(a) = \frac{A - \alpha z(a)}{\alpha_1}$$

и

$$y'(b) = \frac{B - \beta y(b)}{\beta_1}, \quad z'(b) = \frac{B - \beta z(b)}{\beta_1}.$$

Тогда

$$F_1[y] = \frac{p(a)}{\alpha_1}[2Ay(a) - \alpha y^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b) - \beta y^2(b)] + \int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]\,dx - \left\{\frac{p(a)}{\alpha_1}[2Az(a) - \alpha z^2(a)] - \frac{p(b)}{\beta_1}[2Bz(b) - \beta z^2(b)] + \int_a^b [p(x)z'^2 - q(x)z^2 + 2f(x)z]\,dx\right\}. \quad (25)$$

Так как стоящие в фигурной скобке члены формулы (25) фиксированы и не меняются при изменении функции y, то вместо функционала $F_1[y]$ можно рассмотреть функционал

$$\Phi[y]=\frac{p(a)}{\alpha_1}[2Ay(a)-\alpha y^2(a)]-\frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b)-\beta y^2(b)]+$$
$$+\int_a^b[p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx. \quad (26)$$

Таким образом, краевая задача (6), (2) с неоднородными краевыми условиями в предположении, что имеют место неравенства (12) и (14), эквивалентна вариационной задаче для функционала (26) в классе функций K_1, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Замечание. 1° Если $\alpha_1=0$ и $\beta_1\neq 0$, то $y(a)=z(a)=A/\alpha$. Из формулы (24) вытекает, что за $\Phi[y]$ можно принять функционал

$$\Phi[y]=-\frac{p(b)}{\beta_1}[2By(b)-\beta y^2(b)]+$$
$$+\int_a^b[p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx.$$

2° Аналогично доказывается, что если $\alpha_1=0$ и $\beta_1=0$, то

$$\Phi[y]=\int_a^b[p(x)y'^2-q(x)y^2+2f(x)y]\,dx.$$

§ 5. Краевые задачи для уравнений Пуассона и Лапласа

Пусть дано уравнение Пуассона

$$-\Delta u=f(x,\ y), \quad (1)$$

где

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad f(x,\ y)\in C(G).$$

Требуется найти решение уравнения (1), непрерывное в замкнутой области $\bar{G}=G+\Gamma$ и удовлетворяющее на границе Γ этой области краевому условию

$$u|_\Gamma=\varphi(P), \quad (2)$$

где $P=(x,\ y)$ и $\varphi(P)$ — заданная непрерывная функция. Предположим вначале, что $\varphi(P)\equiv 0$, т. е.

$$u|_\Gamma=0, \quad (3)$$

и будем решать однородную краевую задачу (1), (3). Покажем, что в классе функций $K=\{u(x)\}$, непрерывных в $\bar{G}$ вместе со своими первыми и вторыми производными и обращающихся на контуре Γ в нуль, оператор $Lu=-\Delta u$ симметричен и положителен.