§ 6. Идея метода Ритца

Метод Ритца служит для приближенного решения вариационной задачи.

Для простоты рассмотрим этот метод для функционала вида

$$F[u] = (Lu, u) - 2(f, u), \tag{1}$$

определенного на некотором линейном множестве $K = \{u\}$, где L — положительный линейный оператор и f — заданная непрерывная функция. Предполагается, что функции класса K удовлетворяют линейным краевым условиям

$$R[u] = \varphi(P), \tag{2}$$

где R — известный линейный функционал и φ — заданная постоянная величина или функция.

Построим последовательность достаточно гладких линейно независимых функций $u_0(P)$, $u_1(P)$, $\ldots$, $u_n(P)$, где $u_0(P)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям

$$R[u_0] = \varphi(P), \tag{3}$$

а $u_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — однородным краевым условиям

$$R[u_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Составим линейную комбинацию

$$u(P; c_1, c_2, \ldots, c_n) = u_0(P) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(P). \tag{5}$$

Так как $R[u] = R[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot 0 = \varphi(P)$, то $u \in K$ при любых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Приближенное решение вариационной задачи (1) — (2) будем искать в виде (5). Для этого подставим $u(P; c_1, c_2, \ldots, c_n)$ в функционал (1). Тогда получим

$$F[u] = \Phi(c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{6}$$

где Φ — известная функция, зависящая от n переменных $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n$. Подберем коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ таким образом, чтобы $F[u]$ было минимальным. Это дает систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0,$$

из которой определяются постоянные c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в формуле (5).

Таким образом, вариационная задача (1) — (2) приближенно сводится к задаче об отыскании экстремума функции $\Phi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$

многих переменных. Точность решения, вообще говоря, возрастает при увеличении числа переменных функции Ф.

В следующих параграфах мы рассмотрим применение метода Ритца к конкретным краевым задачам.

§ 7. Метод Ритца для простейшей краевой задачи

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x) \tag{1}$$

с простейшими краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{2}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $f(x) \in C[a, b]$, причем $p(x) > 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Согласно результатам § 4 (замечание 2°) краевая задача (1) — (2) при известных условиях эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]\,dx \tag{3}$$

на множестве функций $y \in C^{(2)}[a, b]$, удовлетворяющих краевым условиям (2).

Для решения вариационной задачи (3) — (2) применим метод Ритца. Выберем систему линейно независимых функций (координатные функции) $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$, $u_n(x)$ таких, что $u_0(a) = A$, $u_0(b) = B$, а остальные функции $u_i(x)$ $(i > 0)$ удовлетворяют однородным краевым условиям, т. е. $u_i(a) = u_i(b) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Решение вариационной задачи будем искать в виде линейной комбинации

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \tag{4}$$

где c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые постоянные. Очевидно, функция, определенная равенством (4), удовлетворяет заданным краевым условиям, т. е. $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Коэффициенты c_1, c_2, $\ldots$, c_n подберем так, чтобы функция $y(x)$ давала экстремум функционалу (3). Подставляя выражение (4) в формулу (3), получаем

$$F[y] = \int_a^b \left\{p(x)\left[u_0'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i'(x)\right]^2 - q(x)\left[u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)\right]^2 + \right.$$
$$\left. + 2f(x)\left[u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x)\right]\right\} dx \equiv \psi(c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

где $\psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — квадратичная функция переменных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Как известно, для того чтобы дифференцируемая функция $\psi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ при некоторых значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имела экстремум, необходимо соблюдение для этих значений следующих условий:

$$\frac{\partial\psi}{\partial c_1}=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial c_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial c_n}=0. \tag{5}$$

Система (5) является линейной относительно искомых коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$, причем число уравнений равно числу неизвестных. Составив систему (5) и решив ее, если это возможно, найдем коэффициенты c_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, после чего решение вариационной задачи, а следовательно, и решение исходной краевой задачи дается формулой (4). В этом и состоит формальный аспект метода Ритца для краевой задачи (1)—(2). Оценка погрешности этого метода представляет собой относительно трудную задачу [3], и разбирать ее здесь не будем. Заметим только, что точность решения в большой степени зависит от удачного подбора координатных функций, и, вообще говоря, возрастает с увеличением их числа.

Пример 1. Найти решение уравнения [1]

$$y''+(1+x^2)\,y+1=0,$$

удовлетворяющее краевым условиям $y(-1)=y(1)=0$.

Решение. За систему координатных функций $\{u_i(x)\}$ принимаем полиномы, расположенные по степеням x^2, удовлетворяющие однородным краевым условиям:

$$u_0(x)=0, \quad u_1(x)=1-x^2, \quad u_2(x)=1-x^4, \quad \ldots, \quad u_n(x)=1-x^{2n}.$$

Для простоты выкладок возьмем лишь три координатные функции, т. е. будем искать функцию $y=y(x)$ в виде суммы

$$y=c_1(1-x^2)+c_2(1-x^4). \tag{6}$$

Данное уравнение, где $p(x)=1$, $q(x)=1+x^2$, $f(x)=-1$, очевидно, является самосопряженным. Составляем для него соответствующий функционал

$$F[y]=\int_{-1}^{1}[y'^2-(1+x^2)\,y^2-2y]\,dx.$$

Заменяя y его выражением (6), получаем

$$F[y]=\int_{-1}^{1}\{(2c_1x+4c_2x^3)^2-(1+x^2)\,[c_1(1-x^2)+ \\ +c_2(1-x^4)]^2-2\,[c_1(1-x^2)+c_2(1-x^4)]\}\,dx.$$

Частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial c_1}$, $\dfrac{\partial F}{\partial c_2}$ можно найти дифференцированием интеграла $F[y]$ по параметрам c_1 и c_2:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}=\int_{-1}^{1}\{4x(2c_1x+4c_2x^3)-$$
$$-(1+x^2)\cdot 2(1-x^2)[c_1(1-x^2)+c_2(1-x^4)]-2(1-x^2)\}\,dx=$$
$$=8\left(\frac{38}{105}c_1+\frac{4}{9}c_2-\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_2}=\int_{-1}^{1}\{8x^3(2c_1x+4c_2x^3)-$$
$$-2(1+x^2)(1-x^4)[c_1(1-x^2)+c_2(1-x^4)]-2(1-x^4)\}\,dx=$$
$$=8\left(\frac{4}{9}c_1+\frac{2488}{3645}c_2-\frac{2}{5}\right).$$

Приравнивая эти производные нулю, получаем систему уравнений

$$\frac{38}{105}c_1+\frac{4}{9}c_2=\frac{1}{3},\qquad \frac{4}{9}c_1+\frac{2488}{3645}c_2=\frac{2}{5},$$

откуда находим, что $c_1=0{,}988$, $c_2=-0{,}054$. Подставляя найденные значения c_1 и c_2 в формулу (6), получаем приближенное выражение для искомого решения:

$$y=0{,}934-0{,}988x^2+0{,}054x^4. \qquad (7)$$

§ 8. Приложение метода Ритца к решению краевой задачи Штурма — Лиувилля

Рассмотрим однородное самосопряженное дифференциальное уравнение

$$[p(x)\,y']'+[q(x)+\lambda\rho(x)]\,y=0 \qquad (1)$$

с однородными краевыми условиями

$$\alpha_0y(a)+\alpha_1y'(a)=0,\quad \beta_0y(b)+\beta_1y'(b)=0, \qquad (2)$$

где $p(x)>0$, $|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0$, $|\beta_0|+|\beta_1|\neq 0$, $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ — непрерывные функции и λ — параметр.

Очевидно, функция $y\equiv 0$ есть решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2). Однако обычно представляют интерес нетривиальные решения краевой задачи (1) — (2). Отыскание нетривиальных решений дифференциального уравнения (1), удовлетворяющих однородным краевым условиям (2), называется *задачей Штурма — Лиувилля*. С этой задачей часто приходится иметь дело в уравнениях математической физики. Те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные значения задачи (1) — (2), называются *собственными значениями* или *собственными числами* задачи Штурма — Лиувилля, а соответствующие им нетривиальные решения — *собственными функциями* или *собственными ре-*