Отсюда для определения коэффициентов C_1 и C_2 получаем систему

$$\left.\begin{aligned} 4{,}8696C_1 + 3{,}2425C_2 &= 4{,}3828, \\ 3{,}2425C_1 + 25{,}3659C_2 &= 1{,}8188. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Решив систему (10), будем иметь $C_1 = 0{,}9317$; $C_2 = -0{,}0474$, и, следовательно,

$$y = 0{,}9317\,(1 - x^2) - 0{,}0474\,(x^2 - x^4).$$

§ 8. Метод Галеркина

Метод Галеркина основан на одной теореме из теории общих рядов Фурье.

Теорема. *Пусть $\{u_n(x)\}$ — полная система функций с ненулевой нормой, ортогональных на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на отрезке $[a, b]$ ко всем функциям $u_n(x)$, т. е.*

$$\int_a^b f(x)\, u_n(x)\, dx = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (1)$$

то $f(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Доказательство. Рассмотрим ряд Фурье функции $f(x)$ относительно заданной системы ортогональных функций

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(x). \qquad (2)$$

Как известно [5], коэффициенты Фурье c_n определяются по формуле

$$c_n = \frac{1}{\|u_n\|^2} \int_a^b f(x)\, u_n(x)\, dx, \quad \text{где} \quad \|u_n\|^2 = \int_a^b u_n^2(x)\, dx > 0.$$

В силу условия (1) имеем

$$c_n = 0 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (3)$$

Для полной системы $\{u_n(x)\}$ по отношению к любой непрерывной функции $f(x)$ выполнено равенство полноты [4]

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2 c_n^2. \qquad (4)$$

Отсюда, учитывая равенство (3), имеем

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = 0,$$

и, следовательно, $f(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Замечание. Из формулы (4) вытекает, что если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна к конечной системе функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_N(x)$ (т. е. $c_0=c_1=c_2=\ldots=c_N=0$), то

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\sum_{n=N+1}^{\infty}\|u_n\|^2 c_n^2<\varepsilon$$

при N достаточно большом. В этом случае функция $f(x)$ *в среднем* на отрезке $[a, b]$ будет сколь угодно мала. При дополнительных ограничениях отсюда следует, что $|f(x)|$ также мал на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$.

Перейдем теперь к изложению метода Галеркина. Пусть имеем линейную краевую задачу (см. § 2)

$$L[y]=f(x), \tag{5}$$

где $L[y]=y''+p(x)\,y'+q(x)\,y$, при наличии линейных краевых условий

$$\Gamma_a[y]\equiv\alpha_0 y(a)+\alpha_1 y'(a)=A;\quad \Gamma_b[y]\equiv\beta_0 y(b)+\beta_1 y'(b)=B \tag{6}$$
$$(|\alpha_0|+|\alpha_1|\neq 0,\quad |\beta_0|+|\beta_1|\neq 0).$$

Выберем конечную систему базисных функций $\{u_i(x)\}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, составляющих часть некоторой полной системы, причем позаботимся, чтобы функция $u_0(x)$ удовлетворяла неоднородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_0]=A,\quad \Gamma_b[u_0]=B,$$

а функции $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяли бы однородным краевым условиям

$$\Gamma_a[u_i]=\Gamma_b[u_i]=0\qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Решение краевой задачи (5)—(6) будем, как обычно, искать в виде

$$y=u_0(x)+\sum_{i=1}^{n}C_i u_i(x). \tag{7}$$

При нашем подборе базисных функций $u_i(x)$ функция y, определяемая формулой (7), очевидно, удовлетворяет краевым условиям (6) при любом выборе коэффициентов C_i. Выражение (7) подставим в дифференциальное уравнение (5), что дает *невязку*

$$R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)=L[u_0]+\sum_{i=1}^{n}C_i L[u_i]-f(x).$$

Для точного решения y нашей краевой задачи функция $R\equiv 0$; поэтому для получения приближенного решения, близкого к точному, нам выгодно подобрать коэффициенты C_i так, чтобы функция R была в каком-то смысле мала.

Согласно методу Галеркина требуем, чтобы невязка R была ортогональна к базисным функциям $u_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, что при достаточно большом числе этих функций, в силу приведенного выше замечания, обеспечивает малость невязки в среднем.

Насколько это приближенное решение близко к точному, в общем случае вопрос остается открытым. Таким образом, для определения коэффициентов C_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ приходим к системе линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\int\limits_a^b u_1(x)\,R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,dx=0,\\ \int\limits_a^b u_2(x)\,R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,dx=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int\limits_a^b u_n(x)\,R(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,dx=0\end{array}\right\}$$

или, более подробно,

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \int\limits_a^b u_i(x)\,L[u_i]\,dx=\int\limits_a^b u_i(x)\,\{f(x)-L[u_0]\}\,dx$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Достаточные условия сходимости метода Галеркина приведены в книге Михлина [4].

Пример 1. Методом Галеркина найти приближенное решение уравнения [2]

$$y''+xy'+y=2x, \tag{8}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$y(0)=1, \quad y(1)=0. \tag{9}$$

Решение. В качестве системы базисных функций $u_i(x)$ $(i=0, 1, 2, 3)$ выбираем следующие функции:

$$u_0(x)=1-x, \quad u_1(x)=x(1-x),$$
$$u_2(x)=x^2(1-x), \quad u_3(x)=x^3(1-x).$$

Приближенное решение задачи ищем в виде полинома

$$y=(1-x)+C_1x(1-x)+C_2x^2(1-x)+C_3x^3(1-x).$$

Подставляя y в левую часть заданного дифференциального уравнения (8), получаем невязку

$$R(x, C_1, C_2, C_3)=(1-4x)+C_1(-2+2x-3x^2)+$$
$$+C_2(2-6x+3x^2-4x^3)+C_3(6x-12x^2+4x^3-5x^4). \tag{10}$$

Условия ортогональности функции R к функциям $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ приводят к системе

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 (x-x^2)\,R(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3)\,dx=0,\\
&\int_0^1 (x^2-x^3)\,R(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3)\,dx=0,\\
&\int_0^1 (x^3-x^4)\,R(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3)\,dx=0.
\end{aligned}\right\}$$

Подставляя вместо $R(x)$ его значение (10), после соответствующего интегрирования получаем систему

$$\left.\begin{aligned}
133C_1+\ 63C_2+\ 36C_3&=-\ 70,\\
140C_1+108C_2+\ 79C_3&=-\ 98,\\
264C_1+252C_2+211C_3&=-210.
\end{aligned}\right\}$$

Отсюда находим $C_1=-0{,}2090$; $C_2=-0{,}7894$; $C_3=0{,}2090$, и, следовательно,

$$y=(1-x)(1-0{,}2090x-0{,}7894x^2+0{,}2090x^3).$$

§ 9. Понятие о приближенных методах решения общей краевой задачи

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение n-го порядка

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{1}$$

с заданными, вообще говоря, нелинейными краевыми условиями

$$V_\nu(y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(\sigma_1)};\ \ldots;\ y_k,\ y_k',\ \ldots,\ y_k^{(\sigma_k)})=A_\nu \tag{2}$$
$$(\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $y_i^{(s)}=y^{(s)}(x_i)$ $(s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma_i)$ и система точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ задана (см. § 1).

Для приближенного решения краевой задачи (1) — (2) выбирают функцию

$$Y=Y(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p), \tag{3}$$

содержащую независимые параметры $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p$ и такую, что при любом выборе этих параметров функция Y удовлетворяет краевым условиям (2). Подставляя выражение Y в левую часть данного дифференциального уравнения (1), получаем *невязку*

$$R(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p)\equiv F(x,\ Y,\ Y',\ \ldots,\ Y^{(n)}). \tag{4}$$

Наша цель состоит в том, чтобы сделать функцию R наименее уклоняющейся от нуля в каком-то смысле для интересующей нас области.