собственному значению $\lambda_1$, не обращаются в нуль на интервале $a < x < b$, то этот метод дает как раз первое собственное значение, если только $y_0 \neq 0$ на интервале $a < x < b$. Как это следует из осцилляционных теорем (п. 9 2 (а$_1$)), этим свойством обладают, например, задачи второго порядка типа Штурма.

Пример.

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Положим $y_0 = 1$; тогда в качестве приближенных значений для $\lambda_1 = \pi^2$ получаем числа $\sigma_1(1/2) = 8$; $\sigma_2(1/2) = 9{,}6$; $\sigma_3(1/2) = 9{,}84$.

**(б)** Если положить

$$a_k = \int_a^b g y_\nu y_{k-\nu}\, dx \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$

то $a_k$ не зависит от $\nu$ и $0 < a_k^2 \leqslant a_{k-1} a_{k+1}$ при $k \geqslant 1$; таким образом, числа

$$\rho_k = a_{k-1}/a_k \qquad (k \geqslant 1)$$

при возрастании $k$ монотонно убывают; их пределом является собственное значение $\lambda_r$. Наименьшее значение получается при тех же предположениях, что и в (а).

В приведенном выше примере $\rho_1 = 12$; $\rho_2 = 10$; $\rho_3 = 9{,}88$.

Так как

$$\rho_{2k} = \int_a^b y_k L(y_k)\, dx \Bigg/ \int_a^b g y_k^2\, dx$$

и при $g > 0$

$$\rho_{2k-1} = \int_a^b \frac{1}{g} [L(y_k)]^2\, dx \Bigg/ \int_a^b y_k L(y_k)\, dx,$$

то из п. 2.14 (в) следует, что каждое $\rho_k \geqslant \lambda_1$.

**(в)** Если первое собственное значение и соответствующая ему собственная функция $\psi_1(x)$ найдены, то для получения дальнейших собственных функций можно применить тот же метод, беря за $y_0(x)$ некоторую функцию, ортогональную $\psi_1(x)$.

Метод последовательных приближений часто уже после небольшого числа шагов приводит к цели.

**3.5. Приближенное решение краевых задач и задач о собственных значениях методом конечных разностей.** Основная мысль этого метода состоит в следующем: пусть дана краевая задача

$$L(y) = f(x); \quad U_\mu(y) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1,\ \ldots,\ n), \tag{4}$$

пусть при этом остаются в силе обозначения и условия, указанные в п. 1.1. Для того чтобы получить приближенное решение этой задачи, которую мы предполагаем разрешимой, разделим отрезок $[a, b]$ на равные части длины $h=(b-a)/m$ и для каждой точки деления $x_\nu = a+\nu h$ напишем уравнение, которое получается из дифференциального уравнения (4), если в нем производные заменить их приближенными выражениями с помощью соответствующим образом выбранных разностных отношений. Такую же замену выполним и для производных, входящих в краевые условия. Тогда для нахождения приближенной величины $Y_\nu$ значения $y_\nu = y(a+\nu h)$ искомого решения $y(x)$ мы получим систему (алгебраических) линейных уравнений, и тем самым исходную задачу сведем к задаче «конечной».

Если дана задача о собственных значениях

$$L(y)+\lambda g(x)\,y=0;\quad U_\mu(y)=0\qquad(\mu=1,\ \ldots,\ n),$$

то коэффициенты получающейся однородной системы линейных уравнений зависят еще от $\lambda$. Значение $\lambda$ следует выбрать так, чтобы система имела нетривиальное решение. Таким образом, для нахождения приближенной величины первого собственного значения мы получаем алгебраическое уравнение.

Превращение дифференциальной задачи в конечную может быть сделано с помощью следующей таблицы:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)]+\dfrac{1}{6}h^2R_3,\\[2mm] \dfrac{1}{12h}[-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)+\\ \qquad\qquad +\dfrac{1}{18}h^4R_5,\\[2mm] \dfrac{1}{60h}[f(x+3h)-9f(x+2h)+45f(x+h)-45f(x-h)+\\ \qquad\qquad +9f(x-2h)-f(x-3h)]+\dfrac{47}{2100}h^6R_7;\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)]+\dfrac{1}{12}h^2R_4,\\[2mm] \dfrac{1}{12h^2}[-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-\\ \qquad\qquad -f(x-2h)]+\dfrac{1}{54}h^4R_6,\\[2mm] \dfrac{1}{180h^2}[2f(x+3h)-27f(x+2h)+270f(x+h)-490f(x)+\\ \qquad\qquad +270f(x-h)-27f(x-2h)+2f(x-3h)]+\dfrac{47}{8400}h^6R_8;\end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^3}[f(x+2h)-3f(x+h)+3f(x)-f(x-h)]+\dfrac{5}{6}hR_4,\\ \dfrac{1}{2h^3}[f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)]+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\dfrac{17}{60}h^2R_5,\\ \dfrac{1}{8h^3}[-f(x+3h)+8f(x+2h)-13f(x+h)+13f(x-h)-\\ \qquad\qquad -8f(x-2h)+f(x-3h)]+\dfrac{403}{2520}h^4R_7;\end{cases}$$

$$f^{(4)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^4}[f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+\\ \qquad\qquad\qquad\qquad +f(x-2h)]+\dfrac{17}{90}h^2R_6,\\ \dfrac{1}{6h^4}[-f(x+3h)+12f(x+2h)-39f(x+h)+56f(x)-\\ \qquad -39f(x-h)+12f(x-2h)-f(x-3h)]+\dfrac{403}{5040}h^4R_8.\end{cases}$$

Применение выражений более высоких порядков дает при той же длине шага увеличение точности.

Здесь $R_\rho$ означает некоторое число, меньшее, чем максимум $|f^{(\rho)}(x)|$ на некотором интервале, содержащем все абсциссы, встречающиеся в приведенных выше выражениях.

Если пользоваться конечными разностями более высоких порядков также и для краевых условий, то при этом могут получиться члены, содержащие значения $Y$, соответствующие точкам, лежащим вне интервала $(a, b)$. Этого можно избежать, если на концах данного интервала пользоваться приближениями более низких порядков.

Пример. Если для краевой задачи

$$y''+\lambda xy=0;\quad y(0)=y(1)=0$$

положить $m=4$, т. е. $h={}^1/_4$, то по формулам первого приближения получаем систему уравнений

$$Y_2-2Y_1+Y_0+\frac{1}{4}\lambda h^2Y_1=0,$$

$$Y_3-2Y_2+Y_1+\frac{2}{4}\lambda h^2Y_2=0,$$

$$Y_4-2Y_3+Y_2+\frac{3}{4}\lambda h^2Y_3=0.$$

В силу краевых условий эта система сводится к

$$(\lambda h^2-8)Y_1+4Y_2=0,\quad Y_1+(2\lambda h^2-8)Y_2+Y_3=0,\quad Y_2+(3\lambda h^2-8)Y_3=0.$$

Наименьшее значение параметра $\lambda$, для которого детерминант этой системы обращается в нуль и, следовательно, при котором эта система имеет нетривиальное решение, равно 17,87. Эта приближенная величина отличается от точной величины 18,956 наименьшего собственного значения на 6%.

Формулы второго приближения приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
-Y_3+16Y_2-30Y_1+16Y_0-Y_{-1}+3\lambda h^2Y_1&=0,\\
-Y_4+16Y_3-30Y_2+16Y_1-Y_0\quad+6\lambda h^2Y_2&=0,\\
-Y_5+16Y_4-30Y_3+16Y_2-Y_1\quad+9\lambda h^2Y_3&=0;
\end{aligned}$$

$Y_0$ и $Y_4$ выпадают в силу краевых условий; $Y_{-1}$ и $Y_5$ можно исключить, если заменить также и в граничных точках дифференциальное уравнение конечным уравнением и при этом пользоваться формулами первого приближения; получаем

$$\begin{aligned}
&Y_1-2Y_0+Y_{-1}+0\cdot\lambda h^2Y_0=0, \quad \text{т. е.} \quad Y_{-1}=-Y_1,\\
&Y_5-2Y_4+Y_3\quad+1\cdot\lambda h^2Y_4=0, \quad \text{т. е.} \quad Y_5=-Y_3.
\end{aligned}$$

При этом для наименьшего собственного значения получаем приближенную величину 18,86.

С теоретической точки зрения интересно то, что этот метод даже и при более грубом способе расчетов дает приближенные решения, которые при $h\to 0$ стремятся к точному решению. Именно, согласно順 Планшерелю, имеет место следующее: пусть в краевой задаче

$$[f(x)y']'+[g(x)+\lambda]y=h(x); \quad y(0)=y(1)=0 \tag{5}$$

функция $f>0$ и дважды непрерывно дифференцируема, а $g$ и $h$ непрерывны на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$. Если производные $y'(x_\nu)$, $y''(x_\nu)$, $f'(x_\nu)$ заменить через

$$\frac{\Delta y(x_{\nu-1})}{h}, \quad \frac{\Delta^2 y(x_{\nu-1})}{h^2}, \quad \frac{\Delta f(x_\nu)}{h} \quad \left(h=\frac{1}{n}\right),$$

то соответствующая система алгебраических уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
n^2f_\nu(Y_{\nu+1}-2Y_\nu+Y_{\nu-1})+n^2(f_{\nu+1}-f_\nu)(Y_\nu-Y_{\nu-1})&+\\
+(g_\nu+\lambda)Y_\nu=h_\nu \quad (\nu=1,\ \ldots,\ n-1)&,
\end{aligned}$$

кроме того, краевые условия дают $Y_0=Y_n=0$. Если $\lambda$ не есть собственное значение соответствующей однородной краевой задачи, т. е. если (5) имеет единственное решение $y(x)$, тогда $Y_\nu\to y(x)$, где $x=\lim\limits_{n\to\infty}(\nu/n)$.

Если $h\equiv 0$, $\lambda_p$ есть $p$-е собственное значение задачи и если $\lambda_p^{(n)}$ — упорядоченные по возрастанию нули детерминанта написанной выше линейной системы, то $\lambda_p^{(n)}\to\lambda_p$ при $n\to\infty$.

**3.6. Метод возмущений** [1]. Основная идея состоит в том, чтобы с помощью решения более простой задачи о собственных значениях найти (хотя бы приближенно) решение другой, «возмущен-

---

[1]) См. также п. 9.10 (б).